arXiv:2601.01736v1 [math.DG] 5 Jan 2026

极小曲面的枚举极小极大定理

ADRIAN CHUN-PONG CHU, YANGYANG LI, ZHIHAN WANG

Abstract. 我们证明了一个枚举极小极大定理，它将正里奇曲率三维流形中亏格为 g 的极小曲面的数量，与亏格为 $\leq g$、可能带有有限个奇点的嵌入曲面集合的拓扑性质联系起来。这完成了我们利用拓扑方法枚举指定亏格极小曲面这一研究计划的核心部分[CL24; Chu25; CLW26]。

作为应用，我们证明每个具有正里奇曲率的三维球面都至少包含 4 个亏格 2 的嵌入极小曲面。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 5 3. 枚举极小极大定理 7 4. 四个亏格2极小曲面的存在性 10 5. 族的性质 Ψ 15 6. $\mathcal{X}$ 25的拓扑 7. 族的性质 Ξ 27附录 A. 度量扰动 36 附录 B. 关于帽积的一个引理 37 附录 C. 群作用下上同调类的庞加莱对偶 38 附录 D. 复多项式实部和虚部的微分 39 附录 E. 无扭结的亏格 1 曲面与霍普夫链环 40 参考文献 45

1. Introduction

微分几何中的计数问题由来已久。以下是一些著名的猜想。

- 每个黎曼二维球面至少有 3 条简单闭测地线（庞加莱，1905 年）。
- 每个黎曼三维球面至少有 4 个嵌入极小球面（丘成桐 [Yau82]）。
- 每个黎曼三维球面至少有 5 个嵌入极小环面（B. White [Whi89]）。

在这三个猜想中，只有第一个得到了完整解决：基于 Lyusternik-Schnirelmann [LS47], 的工作，M. Grayson 给出了证明 [Gra89] ，所用方法是曲线缩短流（另见 [Lus47; Kli77; Bal78; Jos89; Taˇı92]）。Wang–Zhou [WZ23]在颠簸度量和正里奇曲率这两种情形下解决了 Yau 猜想：他们利用 [WZ25], 和 Sarnataro–Stryker 的 [SS23a]中的正则性结果，为 Simon–Smith 极小极大理论建立了重数一定理（另见 [Smi82; Whi91; HK19]）。最近，前两位作者证明了 B. White 关于具有正里奇曲率的三维球面的猜想 [CL24]。关于在一般度量下构造具有受控拓扑类型的极小子流形的更多研究,

Date: 2026年1月6日。

另见 [Str84; GJ86; Gra89; Whi91; Zho16; HK19; BP23; HK23; Ko23a; Ko23b; BP24; LW24; LWY25]。

在一系列论文 [CL24; Chu25; CLW26][1], 中，作者提出了一套方案，依据亏格为 g、可能具有有限个奇点的嵌入曲面集合的拓扑结构，构造指定亏格的极小曲面。具体设定如下：设 M 为任意闭可定向三维流形， g 为非负整数。令 $\mathcal{S}(M)$ 表示 M 中所有可定向、分离、有限面积曲面组成的集合，这些曲面除可能存在的有限个点外均光滑嵌入（精确定义见 §2）。接着，我们考察 $\mathcal{S}_{\leq g}(M) \subset \mathcal{S}(M)$ 中亏格为 $\leq g$ 的元素所构成的子集。在 [CLW26], 中，我们证明，对于任意正里奇曲率的闭定向黎曼 3-流形 $(M, \mathbf{g})$，如果存在某个映射 $\Phi : X \to \mathcal{S}_{\leq g}(M)$，且它无法通过夹断过程变形为一个映入 $\mathcal{S}_{\leq g-1}(M)$ 的映射（见该文 §2），那么 $(M, \mathbf{g})$ 中至少含有一个亏格为 g 的极小曲面。

在本文中，我们推广上述结果。具体而言，通过进一步利用对偶对 $(\mathcal{S}_{\leq g}(M)\ \mathcal{S}_{\leq g-1}(M))$ 的相对拓扑结构，我们构造出亏格为 g 的多个极小曲面。这完成了我们发展拓扑工具、枚举指定亏格的极小曲面这一计划的核心部分。

下面，我们在 $\mathbb{Z}_2$-系数下考察同调群和上同调群。注意，条目 (1) 中的帽积 $\frown$ 确实是良定义的，正如我们在引理 3.1 中所证明的那样。读者可参考图 1 的示意图。

定理 1.1（枚举极小极大定理）。设（M、$\mathbf{g}$）是一个具有正里奇曲率的闭可定向黎曼3-流形，且 g 为一个正整数。设

$$\Phi : (X, Z) \to (\mathcal{S}_{\leq g}(M), \mathcal{S}_{\leq g-1}(M))$$

是一个 *Simon–Smith* 族，其中 X 是一个有限单纯复形， $Z \subset X$ 是一个子复形。假设存在某个同调类 $w \in H_k(X,\ Z)$ 以及 p 个上同调类 $\lambda_i \in H^{k_i}(X\backslash Z)$， i =1，...， p，满足以下性质。

(1) 令 $(Y, \partial Y) \subset (X, Z)$ 为任意相对 $(k - k_1 - \cdots - k_p)$-子复形，使得

$$[Y] = w \frown (\lambda_1 \smile \cdots \smile \lambda_p) \in H_{k-k_1-\cdots-k_p}(X, Z).$$

那么，子族 $\Phi|_Y$ 不能通过捏缩过程变形为映射到 $\mathcal{S}_{\leq g-1}(M)$。

(2) 对于任意嵌入的光滑亏格为 g 的曲面 $S \subset M$，存在某个 $r > 0$，使得：对于每个 $i = 1, \ldots, p$，如果 $C \subset X\backslash Z$ 是任意满足 $\lambda_i([C]) \neq 0$的 k_i-循环，那么在$\mathbf{F}$-距离下， $\Phi|_C$ 不能通过捏缩过程变形为一个与 S 相距 r的族。

那么，$(M,$<*style id='4' g*$)$ 包含至少 $p+1$ 个亏格为 g 且面积不超过 $\max_{x\in X}$面积$(\Phi(x))$的可定向嵌入极小曲面。

值得注意的是，很容易验证，上述假设 (1) 和 (2) 纯粹是拓扑性的：无需关于环境度量 $\mathbf{g}$ 的任何几何信息。请注意，$\mathbf{F}$-距离借自模 2 循环空间 $\mathcal{Z}_2(M; \mathbf{F}; \mathbb{Z}_2)$，它是平坦距离与变分流形距离之和。该定理的证明关键依赖于 [CLW26, 定理 1.4], ，该结果表明，在具有正里奇曲率的一般度量下，每个 Simon–Smith 族都可以通过捏缩过程变形为某个“拓扑最优族” [CLW26, 定理 1.4]。这一结果建立在极小极大理论的大量先前奠基性工作之上 [Smi82; CD03; DP10; Ket19; Zho20; MN21; SS23b; WZ23]。我们注意到，在 [LW24] 中，Xingzhe Li 和 Zhichao Wang 也利用了某些相对上同调群来构造极小环面。

[1]本文与 [CLW26] 共同取代了 [CLW25]。

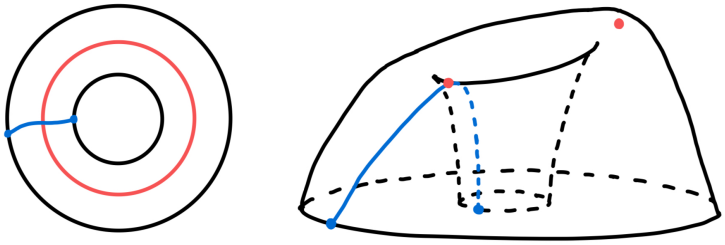


FIGURE 1. 左图是一个示例，其中 X 为环带， Z 为两个边界圆， Y 为蓝色路径， w 为基本类 $[X]$, $p = 1$，而 λ_1 为 $[Y]$的庞加莱对偶，即 $[Y] = [X] \frown \lambda_1$。注意， λ_1 与红色闭曲线的配对为 1。右图是一个示意图，其中图形曲面表示$\mathcal{S}_{\leq g}(M)$，两个边界圆为 $\mathcal{S}_{\leq g-1}(M)$。蓝色路径是族$\Phi|_Y$，两个红色临界点则是我们要寻找的极小曲面。

备注 1.2. 我们将定理 1.1 与先前的工作 [CL24], 作比较。在该工作中，我们构造了具有正里奇曲率的任意三维球面中的 5 个极小环面。当时，我们的论证关键依赖于不存在由纯粹亏格 0 元素组成的 5-扫掠 S^3 。然而，这种论证思路无法用于更高亏格的情形。

接下来，我们将上述枚举极小极大定理应用于具有正里奇曲率的三维球面情形，以构造多个亏格 2 的极小曲面。主要挑战在于找到一个合适的映射 Φ： $(X, Z) \to (\mathcal{S}_{\leq 2}(S^3)\ \mathcal{S}_{\leq 1}(S^3))$，以及满足定理 1.1 条件的同调类和上同调类。

定理 1.3。 每个具有正里奇曲率的黎曼三维球面都至少包含 4 个亏格为2的嵌入、可定向极小曲面。

我们来概述这一方向上已知的结果。记 $\mathfrak{n}_g(S^3)$为最优数目，使得每个具有正里奇曲率的黎曼三维球面都必须至少包含 $\mathfrak{n}_g(S^3)$个亏格为 g. 的可定向嵌入极小曲面。于是有：

$\mathfrak{n}_0(S^3)$	$\mathfrak{n}_1(S^3)$	$\mathfrak{n}_2(S^3)$	$\mathfrak{n}_g(S^3)$，当 $g \geq 3$时
4 [WZ23]	≥ 5 [CL24]	≥ 4 (定理 1.3)	≥ 1 [Chu25]

我们推测 $\mathfrak{n}_1(S^3) = 5$。对于任何特定的 $g \geq 2$，了解 $\mathfrak{n}_g(S^3)$ 的确切值将会非常有趣。我们认为，定理 1.1 足够一般，可作为探索高亏格情形的“黑箱”：它将求得 $\mathfrak{n}_g(S^3)$ 下界的问题归结为寻找映入 $\mathcal{S}_{\leq g}(S^3)$ 的合适映射。

我们用于证明定理 1.3 的族，受 Lawson 曲面 $\xi_{2,\ 1}$[Law70], 的对称性启发；这是标准三维球面 $\mathbb{S}^3$中唯一已知的亏格 2 嵌入极小曲面。为了推测 $g = 3$情形，我们回顾一下，在 $\mathbb{S}^3$中已知有两种亏格 3 极小曲面：劳森曲面 $\xi_{3,\ 1}$ 以及 Karcher-Pinkall-Sterling 亏格 3 曲面 [KPS88]。我们预计，为了得到 $\mathfrak{n}_3(S^3)$ 的良好下界，应用定理 1.1 时所采用的族应当包含类似于这两种极小曲面的曲面，也包含由它们产生的颈缩现象。

1.1. **证明概要**。

1.1.1. 定理 *1.1.* 我们首先回顾，当环境度量具有正里奇曲率且处于一般位置时， [CLW26，定理 1.4] 表明， $\mathcal{S}(M)$中的每个曲面族都可以变形为某个拓扑最优族。我们首先扰动环境度量，使得 [CLW26，定理 1.4] 适用，同时固定可定向亏格为 g 的极小曲面的数量。应用此

定理于给定的曲面族 Φ，我们得到一些亏格为 $\leq g$ 的极小曲面 Γ_i 和子复形$D_i \subset X$，它们满足以下性质。

假设得到了 m 可定向亏格 g。我们可以将子复形 D_i 分为两组：一组对应于可定向亏格为 g 的极小曲面，另一组则由其余子复形组成。将第一组记为 $D_1, ..., D_m$，并取第二组的并，得到某个子复形 D。因此，我们有

- m 亏格为 g、 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ 且面积为 $\leq \max_x \text{area}(\Phi(x))$,的可定向极小曲面
- 以及相应的子复形 $D_1, D_2, \dots, D_m \subset X$，它们与 D一起覆盖 X,

使得:

(1) $\Phi|_D$ 可以通过捏缩过程变形为映射到 $\mathcal{S}_{\leq g-1}(M)$ 的某个映射。(2) 对每个 $j = 1, \dots, m$， $\Phi|_{D_j}$ 可以通过捏缩过程变形为某个族$\Xi_j : D_j \to \mathcal{S}_g(M)$，使得 Ξ_j 中的每个成员都接近 Γ_j 且亏格为 g。

那么，要证明定理 1.1，只需证明 $m \geq p + 1$。反设 $m \leq p$。由 (2) 可知，对每个 $j = 1, ..., m$，都有 $\lambda_i|_{D_j} = 0$，否则定理 1.1 的第 (2) 项就会被推翻。因此，结合 $m \leq p$，我们知道

$$(\lambda_1 \smile ... \smile \lambda_p)|_{D_1 \cup ... \cup D_m} = 0.$$

然后，利用一些初等代数拓扑知识，可以推得 D 必须检测到该同调类

$$w \frown (\lambda_1 \smile \cdots \smile \lambda_p) \in H_{k-k_1-\cdots-k_p}(X, Z). \tag{1.1}$$

更确切地说，我们可以找到某个 $[Y] \in H_{k-k_1-...-k_p}(D, D \cap Z)$，它在包含映射 $(D, D \cap Z) \hookrightarrow (X, Z)$ 下被推前到同调类 (1.1)。根据上面的第 (1) 项， $\Phi|_D$，因此，尤其是 $\Phi|_Y$，可以通过捏缩过程变形为一个映射到 $\mathcal{S}_{\leq g-1}(M)$ 中的映射。这与定理 1.1 (1) 矛盾。

1.1.2. 定理 *1.3*。 为了利用定理 1.1 构造 4 个亏格 2 的极小曲面，我们需要一个映射到 $\mathcal{S}_{\leq 2}(S^3)$ 的合适映射。我们首先在单位三维球面 $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ 中定义如下一个 7参数族。我们在 S^3 （大圆 $\{x_3 = x_4 = 0\}$的补集）上引入坐标系 (x_1, x_2, α)，其定义关系为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \cos \alpha, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \sin \alpha\right),$$

其中 (x_1, x_2) 位于 $\mathbb{R}^2$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$中的开单位圆盘内。注意，$(0,0,\alpha)$ 参数化了大圆 $C = \{x_1 = x_2 = 0\}$。现在，我们定义一个族 $\Psi : \mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D} \to \mathcal{S}_{\leq 2}(S^3)$，将每一对 $a = [a_0 : a_1 : \cdots : a_5] \in \mathbb{RP}^5$ 和 $(r, \theta) \in \mathbb{D}$ 映射到零点集

$$\{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5 \left[x_1x_2 + \epsilon(r \cos(\theta + 2\alpha) + (1 - r) \cos 3\alpha)\right] = 0\} \subset S^3,$$

其中 $\epsilon > 0$ 是一个较小的数（在我们实际的论证中，它应当是一个较小的函数）。从几何上看，这个族应被视为对 $\mathbb{RP}^5$-族 Φ_5 的去奇异化，其定义如下:

$$\Phi_5(a) := \{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_1x_2 = 0\} \subset S^3,$$

使得所有成员至多只有有限多个奇点。值得注意的是，曲面 $\Psi([0 : ... : 0 : 1], 0)$ 与亏格 2 的 Lawson 极小曲面 $\xi_{2,\ 1}$具有相同的对称群；该对称群是由 24 个元素组成的二面体群 D_{24}。

接下来，我们通过旋转 Ψ 的所有成员，定义一个 13参数族 $\bar{\Xi} : \mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D} \times SO(4) \to \mathcal{S}_{\leq 2}(S^3)$：我们设 $\bar{\Xi}(a, z, R) := R \cdot \Psi(a, z)$，其中 $R \cdot \Psi(a, z)$ 表示 $\Psi(a, z)$ 在旋转 $R \in SO(4) \subset S^3$ 下的像。该族具有很强的对称性，因此允许我们取商。具体而言，我们将在 $\mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D} \times SO(4)$ 上定义某个 D_{24}-作用，使得对于所有 $g \in D_{24}$ 和 (a, z, R)， $\bar{\Xi}((a, z, R) \cdot g) = \bar{\Xi}(a, z, R)$。因此，令 $\mathcal{X} := (\mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D} \times SO(4))/D_{24}$, $\bar{\Xi}$，便诱导出一个族 $\Xi : \mathcal{X} \to \mathcal{S}_{\leq 2}(S^3)$。注意，根据 Ψ 的定义， $\Xi|_{\partial \mathcal{X}}$ 映射到 $\mathcal{S}_{\leq 1}(S^3)$ 中。

为了应用定理 1.1，我们来理解 $\mathcal{X}$ 的拓扑。可以验证，从 $\mathcal{X}$ 到 $B := SO(4)/D_{24}$ 的自然投影映射 π 是一个纤维丛。通过某个标准的拓扑论证，$B \cong S^3/Q_{48} \times S^3$，其中 Q_{48} 是一个阶为 48 的二面体群。然后，我们在 $\mathcal{X}$ 中引入两个上同调类：

- 已知存在某个元素 $\hat{}\alpha \in H^1(S^3/Q_{48})$，使得 $\hat{}\alpha^3 \neq 0$。令 $\alpha \in H^1(\mathcal{X})$ 为 $\hat{}\alpha$ 在 $\Pi_1 \circ \pi$ 下的拉回：$\mathcal{X} \to S^3/Q_{48}$ 其中 $\Pi_1 : B \to S^3/Q_{48}$ 是投影到第一因子的投影。

- 固定某个 $p \in S^3$，并令 $B_0 := S^3/Q_{48} \times \{p\} \subset S^3/Q_{48} \times S^3 \cong B$。令 $\beta \in H^3(\mathcal{X})$ 为 $\pi^*(\beta_B)$ 的拉回，其中 $\beta_B \in H^3(B)$ 是 $[B_0] \in H_3(B)$ 的庞加莱对偶。

那么，很容易看出，相对同调类 $[\mathcal{X}] \frown (\alpha^3 \smile \beta) \in H_7(\mathcal{X}, \partial\mathcal{X})$ 由 $\pi : \mathcal{X} \to B.$ 的纤维诱导。

最后，令 $\mathcal{X}_0 := \pi^{-1}(B_0) \subset \mathcal{X}$。注意 $\partial\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_0 \cap \partial\mathcal{X}$。我们将定理 1.1 应用于子族

$$\Xi|_{\mathcal{X}_0} : (\mathcal{X}_0, \partial\mathcal{X}_0) \to (\mathcal{S}_{\leq 2}(S^3), \mathcal{S}_{\leq 1}(S^3)),$$

其中 $p = 3$，且三个上同调类全都为 $\alpha|_{\mathcal{X}_0} \in H^1(\mathcal{X}_0)$。要完成证明，只需验证定理 1.1 中的条件 (1) 和 (2)。

对于 (1)，令 $[Y] = [\mathcal{X}_0] \frown (\alpha_0)^3 \in H_7(\mathcal{X}_0, \partial\mathcal{X}_0)$ 和 Φ' 由 $\Xi|_Y$ 经过通过夹断过程的变形得到。我们需要证明，Φ' 仍必须包含某个亏格为 2 的元素。注意，限制到任意一个 $\mathbb{RP}^5$-因子上时，Ξ 给出一个 Almgren-Pitts 五重扫掠，因此无法通过夹断过程将其变形为 $\mathcal{S}_0(S^3)$（见 [CL24, §3.5]）。由此，结合一些代数拓扑知识，可以证明存在某个相对二维循环 $(D, \partial D) \subset (Y, Y \cap \partial\mathcal{X}_0)$，使得 D 与 $\mathcal{X}$ 中的 $\mathbb{D}$ 因子同调，且中的每个元素的亏格为1或2。最后，我们分析边界族 $\Phi'|_{\partial D}$，并证明它在 S^3中所有亏格为 1 的曲面组成的集合 $\mathcal{S}_1(S^3)$ 中，在某种意义下是同调非平凡的，因此无法将其填充。因此，$\Phi'|_D$ 必须包含某个亏格为 2 的元素，正如所需。（这一步需要用到 Hatcher 对 Smale 猜想的解决，以及对 S^3中所有霍普夫链环空间的某些描述。）

对于第 (2) 项，我们将证明，任何这样的 1-循环 C 都必定对应于 Almgren-Pitts 意义下的一个 1-扫掠 Ξ，因此，只要 $\Xi|_C$ 足够小，就无法将其变形为任何 r-球。

1.2. **结构安排**。 在 §2 中，我们回顾此前工作中的一些预备结果 [CL24；CLW26]。我们需要的一项关键结果是 [CLW26，定理 1.4]。基于此，我们在 §3 中证明枚举极小极大定理，即定理 1.1。在 §4 中，我们应用该定理，在具有正里奇曲率的三维球面中构造 4 个亏格 2 极小曲面，从而证明定理 1.3。接下来的三个部分则证明 §4 中用到的一些结果。具体而言，在 §4 中，我们通过应用枚举极小极大定理，利用某个 13 参数族 $\Xi : \mathcal{X} \to \mathcal{S}_{\leq 2}(S^3)$，得到这 4 个亏格 2 极小曲面。我们将在 §5 和 §7 中详细研究该族的构造及其性质。在 §6 中，我们考察 Ξ参数空间的拓扑。

致谢。 我们感谢 Chi Cheuk Tsang 和 Boyu Zhang 就拓扑问题进行的多次讨论，也感谢 Giada Franz 就极小极大理论所作的讨论。我们还要感谢 Ryan Budney、Andr´e Neves、Daniel Stern、Shmuel Weinberger 和 Xin Zhou 对本文的关注。第一作者于 2024 年秋季在 SLMath 期间获得美国国家科学基金会 DMS-1928930 项目资助。第一作者和第二作者还获得了部分 AMS-Simons 旅行资助。

2. Preliminaries

2.1. **记号**。 本文中，所有单纯复形均假定为有限的。此外，纯单纯 k-复形是指这样的单纯复形：X 其中每个维数小于 k 的单纯形都是某个维数恰为 k的单纯形的面。

设 (M,g) 为一个闭定向黎曼 3-流形。下面我们简要回顾 [CLW26, §2] 中的术语。

定义 2.1 (带穿孔曲面)。 设 M 为一个闭可定向三维流形。若闭子集$S \subset M$ 满足以下条件，则称其为 M 中的带穿孔曲面：

(1) 二维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^2(S)$有限。(2) 存在一个（可能为空的）有限集 $P \subset S$，使得 $S \setminus P$ 是光滑、可定向的嵌入曲面。(3)（分离性）令 S_{iso} 为 S的孤立点集。则 $S\backslash S_{\mathrm{iso}}$ 的补集是 M 中的两个开区域的不交并，且每个区域的拓扑边界均为 $S\backslash S_{\mathrm{iso}}$ 。

任何这样的集合 P 都称为 S的带孔集。我们用 $\mathcal{S}(M)$表示 M中所有带穿孔曲面的集合。

回顾一下， $\mathcal{S}(M)$可视为循环空间 $\mathcal{Z}_2(M; \mathbf{F}; \mathbb{Z}_2)$的子集。特别地，我们可以在 $\mathcal{S}_g(M)$上定义$\mathbf{F}$-距离，它是平坦距离与变分流形距离之和。此外，我们可以按照 [CLW26，定义2.5]中的方式，为带穿孔曲面定义亏格。我们用 $\mathcal{S}_g(M)$表示 $\subset \mathcal{S}(M)$（分别用 $\mathcal{S}_{\leq g}(M)$表示）亏格为 g（分别为 $\leq g$）的元素子集。

定义 2.2 （Simon–Smith 族）。 设 X 为立方或单纯复形。若映射 $\Phi : X \to \mathcal{S}(M)$ 满足以下条件，则称其为以 X 为参数空间的*Simon–Smith* 族 。

(1) 映射 $x \mapsto \mathcal{H}^2(\Phi(x))$ 连续。(2)（闭性）族 Φ 在以下意义下是“闭的”：$\{(x, p) \in X \times M : p \in \Phi(x)\}$ 是 $X \times M$ 的闭子集。(3)（奇点以外的 C^∞-连续性）对每个 $x \in X$，我们可以选取有限集 $P_\Phi(x) \subset \Phi(x)$，使得：

- $\Phi(x)\backslash P_\Phi(x)$ 是光滑的嵌入可定向曲面，即对于$\Phi(x)$，$P_\Phi(x)$ 是一个带孔集。
- 对于任意 $x_0 \in X$ 以及任意开集 $U \subset\subset M\backslash P_\Phi(x_0)$，只要 $x \to x_0$，$\Phi(x) \to \Phi(x_0)$ 就是光滑的。
- $N(P_\Phi) := \text{上标 } |P_\Phi(x)| < \infty_{x\in X}$

由 [CL24，第 2] 节可知，每个 Simon–Smith 族都是$\mathbf{F}$-连续的。

夹断过程的概念也很重要。粗略地说，它指的是 $\{\Gamma(t)\}_{t\in[a,b]}$ 中由同痕、颈部夹断以及将某些连通分支收缩为点的任意组合所给出的元素族。严格定义见 [CLW26，第 2] 节。现在，设 Φ, $\Phi' : X \to \mathcal{S}(M)$ 是 Simon–Smith 族。假设我们有一个 Simon–Smith 族$H : [0, 1] \times X \to \mathcal{S}(M)$，满足：

- $H(0, \cdot) = \Phi$ 以及 $H(1, \cdot) = \Phi'$。
- 对于每个 $x \in X$，$t \mapsto H(t, x)$ 都是一个夹断过程。

称 H 为从 Φ 到 Φ'的通过夹断过程的变形。

2.2. **预备结果**。 首先，为方便读者起见，我们回顾 [CLW26] 中的定理 1.4。

定理 2.3 （拓扑最优族的存在性）。 设 （M、$\mathbf{g}$） 是一个具有正里奇曲率的闭可定向黎曼 3-流形，且 Φ： $X \to \mathcal{S}$（M） 是一个亏格为 $\leq g$ *with* $g \geq 1$ 的 *Simon–Smith* 族，其极小极大宽度为 $L := \mathbf{L}$（Λ（Φ）） > 0。假设条件 *A*（当$\mathbf{g}$ 是具有正里奇曲率的一般度量时，该条件自动成立）。那么对于任意 $r > 0$，存在：

- 一个通过夹断过程的变形，H： $[0, 1] \times X \to \mathcal{S}_{\leq g}$（$M$），
- 彼此不同、可定向、重数一、嵌入的极小曲面 Γ_1、Γ_2、.....、Γ_l，亏格为 $\leq g$，面积为 $\leq L$，
- 覆盖 X的 X 的子复形 D_0、D_1、.....、D_l（经过细分），

满足：

(1) H（0，·） $= \Phi$。

(2) 族 $\Phi' := H(1, \cdot)$ 满足：对于每个 $i = 1$、...、l， $\Phi'|_{D_i}$ 的亏格为 $\leq \mathfrak{g}(\Gamma_i)$，而$\Phi'|_{D_0}$ 的亏格为 0。*(3)* 对于每个 $i = 1$、...、l，存在某个光滑函数 $f_i\colon D_i \to [0,1]$，使得对于每个$x \in D_i$,

$$H(f_i(x), x) \in \mathcal{S}_{\mathfrak{g}(\Gamma_i)}(M) \cap \mathbf{B}_r^{\mathbf{F}}(\Gamma_i).$$

下面给出条件 A 的定义。设 $\mathcal{O}_{g,\leq L}(M,\mathbf{g})$（分别）表示 $(M,\mathbf{g})$ 中所有亏格为 g、面积为 $\leq L$ 的可定向（分别为不可定向）嵌入极小曲面的集合。类似地，我们定义集合 $\mathcal{O}_{\leq g,\leq L}(M,\mathbf{g})$ 和 $\mathcal{N}_{\leq g,\leq L}(M,\mathbf{g})$，其中所涉及的极小曲面的亏格为 $\leq g$。

条件 A. 给定一个闭黎曼三维流形 $(M,\mathbf{g})$、一个正整数 g 和一个实数 $L > 0$，若满足以下条件，则称条件 *A* 成立：

- 集合 $\mathcal{O}_{\leq g,\leq L}(M,\mathbf{g})$ 是有限的。
- 集合 $\mathcal{O}_{\leq g-1,\leq L}(M,\mathbf{g})$ 中的每个元素都是非退化的。
- 对于每个 $\Gamma \in \mathcal{O}_{g,\leq L}(M,\mathbf{g})$，集合中的数

$$\{\mathrm{area}(\Gamma') : \Gamma' \in \mathcal{O}_{\leq g-1,\leq L}(M,\mathbf{g}) \cup \mathcal{N}_{\leq g+1,\leq L}(M,\mathbf{g})\} \cup \{\mathrm{area}(\Gamma)\}$$

在 $\mathbb{Z}$ 上线性无关。

我们指出，对于一般的里奇正曲率度量 $\mathbf{g}$，条件 A 必须对所有 g 和 L 成立。为保证某个度量满足前一条定理中的非退化假设和线性无关假设，下面的扰动定理将发挥重要作用。

命题 2.4. 给定 $g_0 \in \mathbb{N}$ 和 $L \in \mathbb{R}^+$，假设 $(M,\mathbf{g})$ 是一个具有 3 维的黎曼流形，且 $\#\mathcal{O}_{g_0,\leq L}(M,\mathbf{g}) < \infty$，并且它不含退化稳定嵌入极小曲面。那么对于任意 $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ 和 $g_1 > g_0$，存在 $\mathbf{g}' \leq \mathbf{g}$ 满足：

(1) $\#\mathcal{O}_{g_0,\leq L}(M,\mathbf{g}') = \#\mathcal{O}_{g_0,\leq L}(M,\mathbf{g})$。(2) $\#\mathcal{O}_{\leq g_1,\leq L}(M,\mathbf{g}') < \infty, \#\mathcal{N}_{\leq g_1,\leq L}(M,\mathbf{g}') < \infty$，且集合

$$\mathcal{K}_{\mathbf{g}'} := \big(\mathcal{O}_{\leq g_1,\leq L}(M,\mathbf{g}') \cup \mathcal{N}_{\leq g_1,\leq L}(M,\mathbf{g}')\big) \setminus \mathcal{O}_{g_0,\leq L}(M,\mathbf{g}') \tag{2.1}$$

由强非退化极小曲面组成。

(3) 对于任意 $\Sigma \in \mathcal{O}_{g_0,\leq L}(M,\mathbf{g}')$,

$$\big\{\mathrm{area}_{\mathbf{g}'}(\Sigma') : \Sigma' \in \mathcal{K}_{\mathbf{g}'}\big\} \cup \{\mathrm{area}_{\mathbf{g}'}(\Sigma)\}$$

构成一个 $\mathbb{Z}$-线性无关集。

该命题将 [CL24，命题 6.1] 推广到了任意亏格，我们将在附录 A 中证明它。这里，如果一个极小曲面的双覆盖是非退化的，就称该曲面为强非退化；而$\mathbf{g}' \leq \mathbf{g}$表示$\mathbf{g} - \mathbf{g}'$逐点非负定。请注意，本文并不需要"强"非退化这一结论（只需非退化即可），但我们仍将其记录下来，以备将来使用。

3. Enumerative min-max theorem

本节中，我们证明定理 1.1。除非另有说明，本节始终使用 $\mathbb{Z}_2$-系数。

3.1. 准备工作。

我们首先陈述一个引理，解释为什么定理 1.1 中的帽积是良定义的。

引理 3.1. 给定一个单纯复形 X、一个子复形 $Z \subset X$ 和整数 $k \geq l \geq 0$，存在一个定义良好的帽积

$$H_k(X,Z) \times H^l(X \backslash Z) \to H_{k-l}(X,Z).$$

证明. 根据单纯子复形的定义，我们可以取 Z 的某个开邻域 $U(Z)$，使得对 (X,Z) 与 $(X,U(Z))$ 同伦等价。因此 $H_k(X,Z) = H_k(X,U(Z))$,根据切除定理，它等于 $H_k(X\backslash U(Z)\ \partial U(Z))$。因此，由于存在一个定义良好的帽积

$$H_k(X\backslash U(Z),\partial U(Z)) \times H^l(X\backslash U(Z)) \to H_{k-l}(X\backslash U(Z),\partial U(Z))$$

(例如参见 Hatcher [Hat02，第 240] 页），此外还有一个定义良好的帽积 t

$$H_k(X,Z) \times H^l(X\backslash U(Z)) \to H_{k-l}(X,Z).$$

但由于 $X\backslash U(Z)$ 与 $X\backslash Z$ 同伦等价，引理得证。 □

现在，设 $(M,\mathbf{g})$ 是定理 1.1 中给出的具有正里奇曲率的闭可定向三维流形，我们开始证明 $(M,\mathbf{g})$ 至少有 $p+1$ 个亏格为 g 且面积为 $\leq L_0 := \max_{x\in X} \mathrm{area}_{\mathbf{g}}\,\Phi(x)$ 的可定向极小曲面。不失一般性，我们可以假设 $(M,\mathbf{g})$ 中此类极小曲面只有有限个，即 $\#\mathcal{O}_{g,\leq L_0}(M,\mathbf{g}) < \infty$。

3.2. **度量的扰动**。由于 $(M,\mathbf{g})$ 具有正里奇曲率，其中不含退化稳定极小曲面。因此，我们将命题 2.4 应用于 $(M,\mathbf{g})$，取 $g_0 := g, g_1 := g+1, \epsilon := 1$，以及$L := L_0$，并得到满足其中所述性质的度量 $\mathbf{g}' \leq \mathbf{g}$。特别地，

$$L_0' := \sup_x \mathrm{area}_{\mathbf{g}'}\,\Phi(x) \leq \sup_x \mathrm{area}_{\mathbf{g}}\,\Phi(x) \leq L_0$$

如**亏格**$' \leq$ **亏格**，且 $\#\mathcal{O}_{g,\ L_0}(M,$ **亏格**$') = \#\mathcal{O}_{g,\ L_0}(M,$ **亏格**$)$。因此，要证明定理 2.3，只需证明 $\#\mathcal{O}_{g,\ \leq L_0'}(M,$ **亏格**$') \geq p+1$。

3.3. **应用最优族**。将定理 2.3 应用于 $(M,$ **亏格**$')$、g、Φ 和某个待指定的 $r>0$，我们得到最优族 Φ'、子复形 D_0，D_1，……，D_l，以及如上所述的极小曲面Γ_1，……，Γ_l。反设亏格为 g 且面积为 $\leq L_0$ 的极小曲面只有 $\leq p$ 个。我们重新标记 Γ_1，……，Γ_l，使得 Γ_1、……、Γ_m 的亏格为 g，而 Γ_{m+1}、……、Γ_l 的亏格为 $< g$，其中 $m \leq p$ 根据假设成立。当然，我们也应相应地重新标记子复形D_1，……，D_l。

回忆一下，我们给定了某个同调类 $w \in H_k(X,\ Z)$ 以及 p 个上同调类 $\lambda_i \in H^{k_i}(X\backslash Z)$ $i=1,$ ……，p，使得定理 1.1 中的陈述 (1) 和 (2) 成立：注意，这两个陈述与环境度量无关。

命题 3.2。对于每个 $i=1,$ ……，p 以及 $j=1,$ ……，m，我们有 $\lambda_i|_{D_j\backslash Z} = 0$. 因此，

$$(\lambda_1 \smile \cdots \smile \lambda_p)|_{(D_1\cup\cdots\cup D_m)\backslash Z} = 0.$$

证明。反设 $\lambda_i|_{D_j\backslash Z} \neq 0$ 对某些 $i=1,$ ……，p 和 $j=1,$ ……，m 不成立。那么存在某个 k_i-循环 $C \subset D_i\backslash Z$，使得 $\lambda_i([C]) \neq 0$。回忆定理 2.3 的条目 (3)：$\Phi|_{D_i}$ 可通过夹断过程变形为映入 $\mathcal{S}_g(M) \cap \mathbf{B}_r^{\mathbf{F}}(\Gamma_j)$ 的某个映射，因此 $\Phi|_C$ 也可以如此变形。因此，若我们取足够小的 r（取值依赖于 Γ_1，……，Γ_m），那么这就与定理 1.1 假设中的条目 (2) 矛盾，证毕。命题 3.2 的第二个陈述随后由初等代数拓扑得出。□

现在我们可以轻松完成定理 1.1 的证明。记 $D := D_0 \cup D_{m+1} \cup D_{m+2} \cup \cdots \cup D_l$。要导出矛盾，只需证明:

命题 3.3。考虑包含映射 $i : (D, D\cap Z) \to (X, Z)$，以及诱导映射

$$i_* : H_{k-k_1-\cdots-k_p}(D, D\cap Z) \to H_{k-k_1-\cdots-k_p}(X,Z).$$

存在某个相对子复形 $(Y, \partial Y) \subset (D, D\cap Z)$ 使得

$$i_*([Y]) = w \frown (\lambda_1 \smile \cdots \smile \lambda_p) \in H_{k-k_1-\cdots-k_p}(X,Z).$$

事实上，假设我们知道这个命题成立。因此，根据定理 1.1 的条件 1， $\Phi|_Y$ 无法通过捏缩过程变形为映射到 $\mathcal{S}_{\leq g-1}(M)$。然而，由于$Y \subset D$，根据 D_i 的定义性质（即定理 2.3 (2)），我们知道 $\Phi'|_Y$的每个成员的亏格至多为 $\max\{\mathfrak{g}(\Gamma_{m+1}) \dots, \mathfrak{g}(\Gamma_l)\}$。并且由于 $\Gamma_{m+1}, \dots, \Gamma_l$的亏格都为 $< g$，我们知道 $\Phi'|_Y$ 映射到 $\mathcal{S}_{\leq g-1}(M)$。由此产生矛盾。

因此，只需证明上述命题。

3.4. 命题 3.3 的证明。 在下面的引理中，我们固定一个任意的交换环，作为同调和上同调的系数。关于杯积的以下相对版本，读者可参阅 [Hat02，第240]页。

引理 3.4。 设 X' 是一个（不一定有限的）单纯复形， A、$B \subset X'$ 是开子集。设 $p \geq q \geq 0$ 是自然数，且 $p > 0$。设 C 是 X' 中若干个 p-子复形的并，且满足 $\partial C \subset A \cup B$ （因此 $[C] \in H_p(X', A \cup B)$），并且 $\omega \in H^q(X', A)$。假设：

- C 是两个开子集 W_1、$W_2 \subset C$ 的并。
- $W_2 \cap A = \emptyset$.
- 在包含映射$(W_1, W_1 \cap A) \hookrightarrow (X', A)$ 下， ω 的拉回为零点。

那么存在某个 $\theta \in H_{p-q}(W_2, W_2 \cap B)$，使得在包含映射$(W_2, W_2 \cap B) \hookrightarrow (X', B)$ 下， θ 的推前等于 $[C] \frown \omega \in H_{p-q}(X', B)$。

我们将引理 3.4 的证明推迟到附录 B：它只用到标准的代数拓扑。本文只会用到 $A = \emptyset$ 这一情形，但为了将来可能的用途，我们选择陈述这个一般版本。

此外，很容易验证，如果 $A, B \subset X'$ 和 $W_1, W_2, \subset C$ 改为子复形，上述引理仍然成立。因此，我们将此引理应用于如下情形。

- 取 Z 的一个开邻域 $U(Z) \subset X = \mathrm{dmn}(\Phi)$，使得包含映射 $(X, Z) \hookrightarrow (X, U(Z))$ 是这些对之间的同伦等价，并且 $X' := X \backslash U(Z)$ 与 $X \backslash Z$ 同伦等价。我们将利用这些同伦等价来识别同调群或上同调群。

- 令 $A := \emptyset$，并令 $B := X' \cap \overline{U(Z)}$。注意，根据切除定理，我们可以识别 (X', B) 和 (X, Z) 的同调群。不失一般性，我们可以假设 B 是一个子复形。
- 令 $r := k = \deg(w)$，且 $s := k_1 + \dots + k_p = \deg(\lambda_1 \smile \dots \smile \lambda_p)$。
- 令 $C \subset X'$ 为某个 k-子复形，其中 $\partial C \subset B$ 表示 w，并将其视为 $H_k(X', B)$ 的一个元素。

- 令 $W_1 := ((D_1 \cup \dots \cup D_m) \backslash U(Z)) \cap C$以及 $W_2 := (D \cup U(Z)) \cap \overline{C}$。注意， W_1和 W_2覆盖C，且可假设它们是子复形。
- 令 $\omega := \lambda_1 \smile \dots \smile \lambda_p$，将其视为 $H_{k_1+\dots+k_p}(X')$ 的一个元素。注意，由于 $\lambda_1 \smile \dots \smile \lambda_p$ 在 $(D_1 \cup \dots \cup D_m) \backslash Z \hookrightarrow X \backslash Z$ 下的拉回根据命题 3.2 为零，因此我们可以通过选取 $U(Z)$ 为 Z.的一个足够薄的邻域，确保 ω 在 $W_1 \hookrightarrow X'$ 下的拉回为零

那么，根据上述引理，存在某个 $\theta \in H_{k-k_1-\dots-k_p}(W_2, W_2 \cap B)$，使得 θ 在包含映射 $(W_2, W_2 \cap B) \hookrightarrow (X', B)$ 下的推前等于

$$[C] \frown (\lambda_1 \smile \dots \smile \lambda_p) \in H_{k-k_1-\dots-k_p}(X', B).$$

那么很容易看出，存在某个 $\theta_1 \in H_{k-k_1-\dots-k_p}(D, \ D \cap Z)$，使得 θ_1 在包含映射 $(D, \ D \cap Z) \hookrightarrow (X, Z)$ 下的推前等于

$$w \frown (\lambda_1 \smile \dots \smile \lambda_p) \in H_{k-k_1-\dots-k_p}(X, Z).$$

令 Y 为一个代表元 作为 θ_1 的代表，我们完成了命题 3.3 的证明，也完成了定理 1.1 的证明。

4. Existence of four genus 2 minimal surfaces

在本节中，我们按以下步骤证明定理 1.3：

（1）构造一个 7参数族 Ψ： $\mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D} \to \mathcal{S}_{\leq 2}(S^3)$。（ ）

2 Rot通过 $SO(4)$ 得到 Ψ，然后 Ψ 的对称性使我们能够定义一个族 y

$$\Xi : (\mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D} \times SO(4))/D_{24} \to \mathcal{S}_{\leq 2}(S^3).$$

（3）验证定理 1.1 对 Ξ 的适用性，并构造四个亏格 2 极小曲面。

令 $S^3 := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1\}$，令 C 表示大圆 $\{x \in S^3 \mid x_3 = x_4 = 0\}$。对于每个 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \in S^3 \backslash C$，我们可以写成

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\ \cos\alpha, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\ \sin\alpha)\,, \tag{4.1}$$

其中 $(x_1,\ x_2)$ 位于开单位圆盘 $\mathbf{int(D)}$ 中，且 $\alpha \in \mathbf{S}^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$。这给出了 S^3 的一个参数化 $(x_1,\ x_2,\ \alpha)$，由 $\mathbf{D} \times \mathbf{S}^1$, 映射得到，尽管该参数化在轨迹 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 上不是单射，在该处不同的 α 被映射到同一点。

4.1. 一个 7 参数族 Ψ。 令 $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ 为以原点为中心的闭单位 2-圆盘。我们定义一个 7 参数 Simon–Smith 族 $\Psi : \mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D} \to \mathcal{S}_{\leq 2}(S^3)$ 如下。

对于每个 $a = [a_0 : a_1 : \cdots : a_5] \in \mathbb{RP}^5$ 以及 $(r,\ \theta) \in \mathbb{D}$（在极坐标中），$\Psi$ 将 $(a,\ \ (r,\ \theta))$ 映射到 S^3 中的零点集

$$\begin{aligned}\Big\{(x_1, x_2, \alpha) \in S^3 \mid & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 \\ & + a_5 \left[x_1 x_2 + \rho(a, x)\left(r\cos(\theta + 2\alpha) + (1 - r)\cos 3\alpha\right)\right] = 0\Big\}\,.\end{aligned} \tag{4.2}$$

这里，$\rho : \mathbb{RP}^5 \times S^3 \to [0, 1]$ 是如下确定的截断函数。我们固定一个非递增截断函数 $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$, 使得 $\zeta|_{\mathbb{R}_{\leq 1/2}} = 1, \zeta|_{\mathbb{R}_{\geq 1}} = 0$，然后定义 ρ 如下：

(I) 对于每个 $[a_0 :\ a_1 :\ \ldots\ldots :\ a_4 :\ 1] \in \mathbb{RP}^5$ 且满足 $a_1^2 + a_2^2 < 1$，令

$$\rho(a, x) := \zeta\left(64 \cdot \frac{(x_1 + a_2)^2 + (x_2 + a_1)^2}{\left(1 - a_1^2 - a_2^2\right)^2}\right)\ \zeta\left(\frac{a_3^2 + a_4^2 + (a_0 - a_1 a_2)^2}{\delta\left(a_1^2 + a_2^2\right)}\right)\delta\left(a_1^2 + a_2^2\right) \tag{4.3}$$

其中 $\delta \in C^\infty([0, \infty))$ 在 $[1, +\infty)$ 上为 0，在 $[0, 1)$ 上为正但非常小。等价地，对于每个满足 $a_5 \neq 0$ 和 $a_1^2 + a_2^2 < a_5^2$的 $a \in \mathbb{RP}^5$，

(4.4)

$$\rho(a, x) := \zeta\left(64 a_5^2 \cdot \frac{(a_5 x_1 + a_2)^2 + (a_5 x_2 + a_1)^2}{\left(a_5^2 - a_1^2 - a_2^2\right)^2}\right)\zeta\left(\frac{(a_3^2 + a_4^2)a_5^2 + (a_0 a_5 - a_1 a_2)^2}{a_5^4\ \delta\left((a_1^2 + a_2^2)/a_5^2\right)}\right)\delta\left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_5^2}\right)$$

(II) 否则，令 $\rho(a, x) = 0$。

注 4.1. 如 §1.1.2 中所述，应将族 Ψ 视为由以下对象给出的$\mathbb{RP}^5$-族 Φ_5 的去奇异化

$$\Phi_5(a) := \{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_1 x_2 = 0\} \subset S^3,$$

使得只剩下有限多个奇异点。具体而言，对于集合中的任意 $a \in \mathbb{RP}^5$

$$A_{\text{sing}} := \{[a_1 a_2 : a_1 : a_2 : 0 : 0 : 1] \in \mathbb{RP}^5 : a_1^2 + a_2^2 < 1\},$$

$\Phi_5(a) = \{(x_1 + a_2)(x_2 + a_1) = 0\}$ 包含奇异圆 $C(a_1, a_2) := \{x_1 = -a_2, x_2 = -a_1\}$。上述 ρ 的特点是：

- 当 $a \in \mathbb{RP}^5$ 接近 $A_{\text{奇异集}}$ 时，函数 $\rho(a, \cdot) : S^3 \to \mathbb{R}$ 是一个支撑在圆 $C(a_1, a_2)$ 附近的隆起函数。

- 当 a 远离 A奇异集 时，函数 $\rho(a,\cdot)\equiv 0$。

定理 4.2。 适当选取函数 δ,ζ 后，(4.2) 给出一个 *Simon–Smith* 族

$$\Psi:\mathbb{RP}^5\times\mathbb{D}\to\mathcal{S}_{\le 2}(S^3)$$

具有以下性质。

(1) 对每个 $(a,z)\in\mathbb{RP}^5\times\mathbb{D}$，如果 $\rho(a,\cdot):S^3\to\mathbb{R}$ 是常数零函数，那么 $\Psi(a,z)$的亏格为0。

(2) $\Psi|_{\mathbb{RP}^5\times\partial\mathbb{D}}$ 的亏格为 ≤ 1。

我们将在 §5 中证明此定理。

4.2. 亏格 2 劳森曲面的对称群。 虽然劳森曲面 $\xi_{2,1}$ 实际上并未出现在族 Ψ中，但我们指出，元素 $\Psi([0:\dots:0:1],0)$ 实际上与 $\xi_{2,1}$ 具有相同的对称性，理解其对称性将会很有帮助。

根据 Kapouleas–Wiygul [KW22, 引理 3.10、引理 3.11] (另见 Lawson [Law70])，与大圆 C 的 4 段划分及其补正交大圆 $C^\perp=\{x_1=x_2=0\}\cap S^3$ 的 6 段划分相关联的亏格 2 劳森曲面 $\xi_{2,1}$ 具有一个阶为 24 的保定向对称群 G。根据 [KW22, 引理 3.11 (ii)], $G=\mathcal{G}^{\mathbf{C}}=D_{24}\subset SO(4)$，该群由 2 个群元素 g_1 和 g_2 生成，并满足以下关系

$$(g_1)^{12}=(g_2)^2=(g_2g_1)^2=\mathrm{id}\,. \tag{4.5}$$

因此，亏格 2 劳森曲面的空间为

$$\{R(\xi_{2,1}):R\in SO(4)\}\cong SO(4)/\langle g_1,g_2\rangle\,.$$

G 是二面体群这一事实并未在 [KW22]中明确说明。为求完整且方便起见，我们因此在下文将 G 改写为一种等价形式。

为达到我们的目的，在构造劳森曲面$\xi_{2,1}$时，我们将在 $C^\perp$ （分别在 C）上使用端点包含（0，0，$\cos(\pi/6)$，$\sin(\pi/6)$）（分别为（0，1，0，0））的划分。

由于 $\mathbb{R}^4$可通过（x_1，x_2，x_3，x_4）$\mapsto x_1+ix_2+jx_3+kx_3$与四元数空间 $\mathbb{H}$等同，今后我们将用四元数坐标表示群 G。令 $\mathbb{S}^3\subset\mathbb{H}$ 表示单位四元数群，其中每个元素（q_1，q_2）$\in\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$均在 $S^3\subset\mathbb{R}^4$ 上等距作用，作用方式为

$$(q_1,q_2):\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4,\quad p\mapsto q_1pq_2^{-1}\,.^{2} \tag{4.6}$$

诱导的群同态 $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\to SO(4)$ 是一个双覆盖。令 $\hat{}G$ 表示由 $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ 生成的子群

$$\hat{g}_1:=\left(e^{i5\pi/12},e^{-i\pi/12}\right),\quad \hat{g}_2:=(j,-j)\,.$$

$\hat{}$可以验证，G 是阶为 48 的二面体群 Q_{48}。注意，上述双覆盖映射的核为 $\{\pm(1,1)\}\subset G$。

在由 (4.6) 诱导的群同态下，$\hat{}g_1$ 和 $\hat{}g_2$ 被映射为 $SO(4)$ 中的某些元素 g_1和 g_2，我们令 $G<SO(4)$ 表示由 g_1 和 g_2生成的子群。根据上一段，该子群的阶必为 24。于是，g_1 对应于 $\mathbb{R}^4$ 中的一个旋转：在 x_1x_2- 平面内旋转 $\pi/2$，并在 x_3x_4- 平面内旋转 $\pi/3$，如

$$\begin{aligned}
&g_1(x_1+ix_2+jx_3+kx_4)\\
&\quad=e^{i5\pi/12}\big((x_1+ix_2)+(x_3+ix_4)j\big)e^{i\pi/12}\\
&\quad=e^{i\pi/2}(x_1+ix_2)+e^{i\pi/3}(x_3+ix_4)j\,,\\
&\quad=(-x_2+ix_1)+\left(\left(x_3\cos\frac{\pi}{3}-x_4\sin\frac{\pi}{3}\right)+\left(x_3\sin\frac{\pi}{3}+x_4\cos\frac{\pi}{3}\right)i\right)j\,;
\end{aligned} \tag{4.7}$$

[2]表达式 $q_1pq_2^{-1}$ （与 $q_1^{-1}pq_2$ 相对）与 $\mathbb{R}$ 上的左 $SO(4)$-作用相容 [4].

g_2 对应于关于二维平面 $\{x_1 = x_3 = 0\}$ 的反射，如

$$\begin{aligned} g_2(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4) &= j\big((x_1 + ix_2) + (x_3 + ix_4)j\big)(-j)^{-1} \\ &= (-x_1 + ix_2) + (-x_3 + ix_4)j\,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

特别地，在 $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ 上并取 $(x_1,\ x_2,\ \alpha)$ 坐标时，上述作用为：

$$g_1(x_1, x_2, \alpha) = (-x_2, x_1, \alpha + \pi/3), \quad g_2(x_1, x_2, \alpha) = (-x_1, x_2, \pi - \alpha)\,, \tag{4.9}$$

它们保持 S^3 的定向。

利用 (4.9)，我们可以验证 g_1 和 g_2 满足关系 (4.5)，因此 G 是阶为 24 的二面体群D_{24}。由于 g_1 和 g_2 保持 $\xi_{2,\ 1}$，且 $\xi_{2,\ 1}$ 的保定向对称群的阶为 24 [KW22，引理 3.11 (ii)]，G 确实就是该群。

4.3. **一个 13 参数 Simon–Smith 族 Ξ。** 首先，我们定义一个 13 参数 Simon–Smith 族 $\bar{\Xi}$： $\mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D} \times SO(4) \to \mathcal{S}_{\leq 2}(S^3)$，其定义为

$$\bar{\Xi}(a, z, R) := R \cdot \Psi(a, z), \tag{4.10}$$

其中，Ψ 是上一小节中定义的 7参数族，而 $R \cdot \Psi(a,\ z)$ 表示 $\Psi(a,\ z) \subset S^3$ 在从左侧作用的旋转 $R \in SO(4)$ 下的像。

然后，我们定义一个作用在 $\mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D}$ 上的 左 G-作用 σ [3]：

$$\sigma(g_1^{-1}):\ \ ([a_0 : \cdots : a_5], z) \mapsto ([a_0 : a_2 : -a_1 : a_3\cos\frac{\pi}{3} + a_4\sin\frac{\pi}{3}, -a_3\sin\frac{\pi}{3} + a_4\cos\frac{\pi}{3}, -a_5], e^{-i\pi/3}z), \tag{4.11}$$

$\sigma(g_2^{-1})$: $([a_0 :\ \cdots :\ a_5],\ z) \mapsto ([a_0 :\ -a_1 :\ a_2 :\ -a_3 :\ a_4 :\ -a_5],\ -\bar{z})$。

由于 $G < SO(4)$，这在 $\mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D} \times SO(4)$ 上诱导出一个 右 G-作用，定义如下：

$$(a, z, R) \cdot g = (\sigma(g^{-1})(a, z), R \cdot g)\,. \tag{4.12}$$

注 4.3. 右商空间 $\mathcal{X} := (\mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D} \times SO(4))/G$ 与 伴随于 $SO(4) \to SO(4)/G$ 的全空间$SO(4) \times_\sigma \mathcal{Y}$ 相同，其纤维为 $\mathcal{Y}$；见记号 7.3。

注意，直接计算可得，ρ 具有如下对称性：

$$\begin{aligned} &\rho([a_0 : a_1 : \cdots : a_5], g_1 x) \\ &\quad = \rho([a_0 : a_2 : -a_1 : a_3\cos\frac{\pi}{3} + a_4\sin\frac{\pi}{3}, -a_3\sin\frac{\pi}{3} + a_4\cos\frac{\pi}{3} : -a_5], x)\,, \end{aligned} \tag{4.13}$$

and

$$\rho([a_0 : a_1 : \cdots : a_5], g_2 x) = \rho([a_0 : -a_1 : a_2 : -a_3 : a_4 : -a_5], x)\,. \tag{4.14}$$

命题 4.4. 对于每个 $g \in G$ 以及每个 $(a, z, R) \in \mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D} \times SO(4)$，

$$\bar{\Xi}((a, z, R) \cdot g) = \bar{\Xi}(a, z, R)\,.$$

换言之，族 Ξ 也具有某种 G-对称性。这可直接由定义得出，证明留待 §5.4 再给出。需要注意的是，G 从右侧作用于 $SO(4)$，而 $SO(4)$ 从左侧作用于 $\mathbb{R}^4$；这一点对证明很重要。

因此，令

$$\mathcal{X} := (\mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D} \times SO(4))/G\,,$$

Ξ 诱导出一个定义良好的 13 参数 Simon–Smith 族

$$\Xi : \mathcal{X} \to \mathcal{S}_{\leq 2}, (a, z, R) \cdot G \mapsto \bar{\Xi}(a, z, R)\,.$$

[3]为方便后续计算，我们展示 $\sigma(g_i^{-1})$ 的形式，而不是 $\sigma(g_i)$.

4.4. 的拓扑 $\mathcal{X}$。令 $B := SO(4)/G$，它是一个闭光滑流形。根据定义，投影到第三个因子上的自然投影 $\mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D} \times SO(4) \to SO(4)$ 是 G-等变的，因此它自然地下降为纤维丛

$$\mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D} \hookrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{\pi} B \quad \text{and} \quad \mathbb{RP}^5 \times \partial\mathbb{D} \hookrightarrow \partial\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} B.$$

根据 § 4.2，我们也可以写成 $B = (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)/\hat{}G$。令 $\hat{}\,\Pi_1 : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ 为到第一因子的投影映射。因此，$\hat{}\,\Pi_1(\hat{}g_1) = e^{i5\pi/12}$ 且 $\hat{}\,\Pi_1(\hat{}g_2) = j$，所以 $\hat{}\,\Pi_1(\hat{}G)$ 也同构于 Q_{48}。

引理 4.5. 投影映射 Π_1 诱导出一个良定义映射

$$\Pi_1 : B \to \mathbb{S}^3/\hat{\Pi}_1(\hat{G}), \quad (q_1, q_2) \cdot \hat{G} \mapsto q_1 \cdot \hat{\Pi}_1(\hat{G}).$$

此外，这给出了一个平凡 $\mathbb{S}^3$-丛 $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow B \xrightarrow{\Pi_1} \mathbb{S}^3/\hat{}\Pi_1(\hat{}G)$。

我们将这个拓扑证明推迟到 §6.1。

根据前一个引理，$B \cong \mathbb{S}^3/Q_{48} \times \mathbb{S}^3$。现在注意，$\mathcal{X}$ 的万有覆盖 $\widetilde{\mathcal{X}}$ 是 $S^5 \times \mathbb{D} \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$。

~ ^令 $G := \mathbb{Z}_2 \oplus G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus Q_{48}$，它由以下元素生成

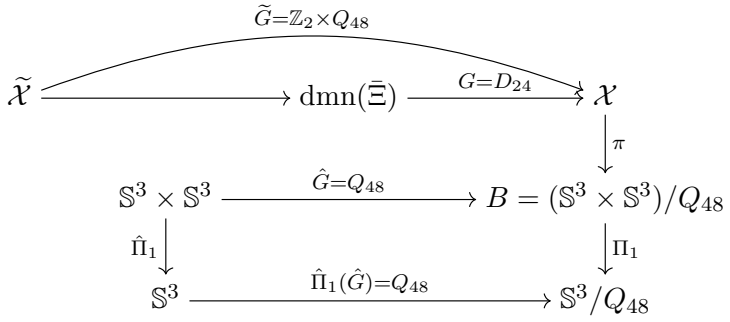
$$\widetilde{g}_0 := (1, 0), \quad \widetilde{g}_1 := (0, \hat{g}_1), \quad \widetilde{g}_2 := (0, \hat{g}_2).$$

我们定义如下的右 $\widetilde{G}$-作用在 $\widetilde{\mathcal{X}}$ 上：对于每个 $(a, z, \mathbf{q}) \in S^5 \times \mathbb{D} \times (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)$，

$$\begin{aligned}
(a, z, \mathbf{q}) \cdot \widetilde{g}_0 &:= ((-a_0, -a_1, -a_2, -a_3, -a_4, -a_5), z, \mathbf{q}), \\
(a, z, \mathbf{q}) \cdot \widetilde{g}_1 &:= ((a_0, a_2, -a_1,\, a_3 \cos\frac{\pi}{3} + a_4 \sin\frac{\pi}{3},\, -a_3 \sin\frac{\pi}{3} + a_4 \cos\frac{\pi}{3}, -a_5), e^{-i\frac{\pi}{3}} z, \mathbf{q}\hat{g}_1), \\
(a, z, \mathbf{q}) \cdot \widetilde{g}_2 &:= ((a_0, -a_1, a_2, -a_3, a_4, -a_5), -\bar{z}, \mathbf{q}\hat{g}_2),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

其中，对于任意 $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$，乘积 $(q_1, q_2)\hat{}\,g_i$ 表示逐分量的四元数乘法。容易验证，这个 G-作用在 $\mathcal{X}$ 上下降为$\mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D} \times SO(4)$上的 G-作用。因此，$\widetilde{G}$ 在 $\widetilde{X}$ 上自由作用，且 $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}}/\widetilde{G}$。这意味着 $\pi_1(\mathcal{X}) = \widetilde{G} = \mathbb{Z}_2 \oplus Q_{48}$ 且 $H_1(\mathcal{X}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$。

综上所述，我们得到：



~现在我们固定一个基点 $\widetilde{x}_0 \in \mathcal{X}$：

$$\widetilde{x}_0 := ((0,0,0,0,0,1), 0, (1,0,0,0), (1,0,0,0)). \tag{4.16}$$

于是，生成元 $\widetilde{g}_0$、$\widetilde{g}_1$ 和 $\widetilde{g}_2$ 可以视为 $\pi_1(\mathcal{X})$ 中的元素，因此它们分别在 $H_1(\mathcal{X}; \mathbb{Z}_2)$ 中诱导出三个元素 c_0、c_1 和 c_2。从现在起，除非另有说明，我们始终使用 $\mathbb{Z}_2$-系数。我们定义三个上同调类 λ、$\alpha \in H^1(\mathcal{X})$ 和 $\beta \in H^3(\mathcal{X})$：

- 设 $\lambda := c_0^* + c_1^* + c_2^* \in H^1(\mathcal{X})$，其中 $\{c_0^*, c_1^*, c_2^*\} \subset H^1(\mathcal{X}) \cong \mathrm{Hom}(H_1(\mathcal{X}; \mathbb{Z}_2)$ 是 $\{c_0, c_1, c_2\} \subset H_1(\mathcal{X})$ 的对偶基。
- 设 $\alpha := c_1^* + c_2^* \in H^1(\mathcal{X})$。
- 固定某个 $p \in \mathbb{S}^3$，并令 $B_0 := \mathbb{S}^3/Q_{48} \times \{p\} \subset \mathbb{S}^3/Q_{48} \times \mathbb{S}^3 \cong B$。令 β 为 β_B 的拉回π^*，其中 $\beta_B \in H^3(B)$ 是 $[B_0] \in H_3(B)$ 的庞加莱˙对偶。

记二维圆盘

$$\widetilde{D}_0 := (0,0,0,0,0,1) \times \mathbb{D} \times (1,0,0,0) \times (1,0,0,0) \subset \widetilde{\mathcal{X}}, \tag{4.17}$$

$\widetilde{\ }$，并令 $D_0 \subset \mathcal{X}$ 为其在商映射 $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$下的像。下面是 $\mathcal{X}$.的一个重要拓扑特征

定理 4.6。在 $H_2(\mathcal{X},\ \partial\mathcal{X})$中，$[\mathcal{X}] \frown (\lambda^5 \smile \alpha^3 \smile \beta) = [D_0]$.

这里，$\smile$是 $H^*(\mathcal{X})$中的杯积，而 $\frown$是$(\mathcal{X},\ \partial\mathcal{X})$的相对帽积。证明推迟至§6.2。

现在，我们记录一下族 Ξ.的一些关键特征

定理 4.7。通过在定义(4.4) 中适当地选择截断函数 ρ的函数 δ、ζ，*Simon–Smith* 族 $\Xi:\ \mathcal{X} \to \mathcal{S}_{\leq 2}(S^3)$ 满足以下条件。

(1) 对任意 $x \in \left(\{\rho = 0\} \times \mathbb{D} \times SO(4)\right)/G \subset \mathcal{X}$，$\Xi(x)$ 的亏格为*0*。*(2)* 对任意 $x \in \partial\mathcal{X}$，$\Xi(x)$ 的亏格为 ≤ 1。*(3)* 对任意 *1-* 循环 $C \subset \mathcal{X}$，若 $\alpha([C]) \neq 0$ 且 $\Xi|_C$ 映射到 $\mathcal{S}_2(S^3)$，则 $\Xi|_C$ 是 *Almgren-Pitts* 意义下的 *1*-扫掠。*(4)* 对任意 *5*-循环 $C \subset \mathcal{X}$，若 $\lambda^5([C]) \neq 0$，则 $\Xi|_C$ 是 *5*-扫掠。*(5)* 对任意在 $\partial\mathcal{X}$ 中与 ∂D_0 同调的闭 *1*-子复形 C，若 $\Xi|_C$ 映射到 $\mathcal{S}_1(S^3)$，则 $\Xi|_C$ 在以下意义下是“在 $\mathcal{S}_1(S^3)$ 中同调非平凡的”：不存在 *Simon–Smith* 族 $\Phi: W \to \mathcal{S}_1(S^3)$，其中 W 是纯单纯 *2*-复形，且满足 *(i)* $\partial W = C$ 和 *(ii)* $\Phi|_{\partial W} = \Psi|_C$。

我们将证明推迟到 §7。在证明中将验证，条目 (1) 中由$\rho = 0$ 定义的集合确实是 G-等变的，因此我们可以对 G 取商。

4.5. **通过定理 1.1 证明定理 1.3**。设 (S^3,g) 为定理 1.3 中给出的具有正里奇曲率的三维球面。设 $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ 为 $B_0 := \mathbb{S}^3/Q_{48} \times \{p\} \subset B$ 在丛投影 $\pi: \mathcal{X} \to B$ 下的原像，且 $\alpha_0 \in H^1(\mathcal{X}_0)$ 为 $\alpha|_{\mathcal{X}_0}$的限制。显然，$\partial\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_0 \cap \partial\mathcal{X}$。

将定理 1.1 应用于由 $\Xi_0 := \Xi|_{\mathcal{X}_0}: (\mathcal{X}_0, \partial\mathcal{X}_0) \to \mathcal{S}_{\leq 2}(S^3)$ 构成的 10 维族，并取 $p = 3$ 和 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha_0$，即可立即推出定理 1.3。因此，现在只需验证定理 1.1 中的两个假设。

我们首先验证定理 1.1 的假设 (2)。设 $S \subset M$ 为任意光滑嵌入的亏格 g曲面。任取满足 $\alpha_0([C]) \neq 0$的 1-循环 $C \subset \mathcal{X}_0$。我们令 $r > 0$ 足够小，使得任何与 S 的$\mathbf{F}$-距离小于 r的 $S' \in \mathcal{S}(M)$，其亏格都至少为 g：见 [CLW26，引理 2.6]。因此，为验证定理 1.1 (2)，不妨假设 $\Xi|_C$映射到 $\mathcal{S}_2(S^3)$中。于是，根据定理 4.7 (3)，$\Xi|_C$ 必为一个 1-扫掠。特别地，它无法通过捏缩过程变形为与 S距离小于 r 的对象，这正是所需结论。

为验证定理 1.1 (1)，令 $(Y,\ \partial Y) \subset (\mathcal{X}_0,\ \partial\mathcal{X}_0)$ 为任意相对 7-子复形，使得

$$[Y] = [\mathcal{X}] \frown (\alpha_0)^3 \in H_7(\mathcal{X}_0, \partial\mathcal{X}_0). \tag{4.18}$$

由 (4.18) 和定理 4.6，我们得到

$$[Y] \frown \lambda^5 = [\mathcal{X}] \frown \lambda^5 \frown \alpha^3 \frown \beta = [D_0] \in H_2(\mathcal{X}, \partial\mathcal{X})\,.$$

反设存在一种通过夹断过程的变形，

$$H: [0,1] \times Y \to \mathcal{S}_{\leq 2}(S^3)\,, \tag{4.19}$$

其中 $H(0,\ \cdot) = \Xi|_Y$，且 $\Xi' := H(1,\ \cdot)$ 映入 $\mathcal{S}_{\leq 1}(S^3)$。对于 $k = 0,\ 1$，令 $Z_k := \{x \in Y: \mathfrak{g}(\Xi'(y)) = k\}$。我们可以通过寻找一个相对 2-子复形 $(D,\ \partial D) \subset (Z_1,\ Z_1 \cap \partial\mathcal{X})$，使得 $[\partial D] = [\partial D_0] \in H_1(\partial\mathcal{X})$，从而导出矛盾。事实上，有了这样的 D，我们可以将

$H|_{[0,1]\times\partial D}$ 和 $\Xi'|_D$ 沿着 $\Xi'|_{\partial D}$ 拼接起来，得到一个族 Φ。在这一构造中， Φ 定义域的边界是 $\{0\}\times\partial D$，在该边界上 Φ 与 $\Xi|_{\partial D}$一致，这与定理 4.7 (5) 矛盾。

利用 [CLW26，命题 2.23], ，我们取一个比 Z_0 稍大的子复形 $Z_0\subset Y$，使得$\Xi|_{\widetilde{Z}_0}$ 也可以通过捏缩过程变形成映射到 $\mathcal{S}_0(S^3)$ 中。现在回想一下，不存在一个 $\mathcal{S}_0(S^3)$ 中的 Simon–Smith 族，能在 Almgren-Pitts 意义下构成 5-扫掠：这一点已在 [CL24, §3.5] 中证明。因此， $\Xi|_{\widetilde{Z}_0}$ 不可能是 5- 扫掠，故由定理 4.7 （ 4 ）， $\lambda^5|_{\widetilde{Z}_0}=0$。现在，我们将引理 3.4 应用于

- 设 $X:=\mathcal{X}$, $A:=\emptyset$。将 $\partial\mathcal{X}$ 稍微加厚以使其成为开集，并令 B 为该对象。
- $p:=7$, $q:=5$, $C:=Y$. $\omega:=\lambda^5$,~
- $W_1:=$ 整数(Z_0), $W_2:=Z_1$。

注意，引理 3.4 的假设均已满足，因此我们立即得到某个相对 2-子复形（$D,\partial D$） $\subset$（$Z_1, Z_1\cap\partial\mathcal{X}$），当将其视为 H_2（$\mathcal{X},\partial\mathcal{X}$）中的对象时， $[D]=[D_0]$。特别地， $[\partial D]=[\partial D_0]$ 属于 H_1（$\partial\mathcal{X}$），正如所需。至此，定理 1.3 的证明完成。

5. Properties of the family Ψ

本节中，我们在定义（4.2）和（4.4）中的族 Ψ 时，指定截断函数 ρ,ζ,δ ，并证明定理 4.2。本节安排如下。我们首先在 §5.1 中研究如下形式的零点集

$$\{x\in S^3 : a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_1x_2=0\}.$$

这对应于一个 $\mathbb{RP}^5$ 族的循环，它们（若非空）要么是亏格为0的带穿孔曲面，要么是两个横截相交的圆球面的并集。§5.2 包含了一些讨论$\mathbf{S}^1$, 上函数零点的抽象引理，这些引理有助于通过引理 5.7 理解形式为 (4.2) 的一类特殊函数的零集的亏格及其他几何行为。利用这些引理，我们在 §5.3 中明确了截断函数 ρ,ζ,δ 的选取，并在引理 5.9 中讨论族 Ψ 的基本性质。定理 4.2 将在 §5.3 末尾基于引理 5.9 得到证明。最后，我们在 §5.4 中证明命题 4.4。

回顾一下我们在 S^3 上使用的坐标系。首先，我们将 S^3 视为距原点单位距离的点 $x\in\mathbb{R}^4$ 的集合。令 $C\subset S^3$ 为大圆 $\{x\in S^3 : x_3=x_4=0\}$。我们用参数表示S^3

$$\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1\to S^3,\quad (x,\alpha)\mapsto(x_1,x_2,\varsigma(x)\cos\alpha,\varsigma(x)\sin\alpha), \tag{5.1}$$

其中 $\varsigma(x):=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$, $\mathbf{D}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭单位圆盘，而 $\mathbf{S}^1:=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$。为便于本节后文引用，我们还令 $\mathbf{D}_\kappa(b)$ 表示以 b 为中心、半径为 κ 的闭圆盘。回顾一下，(4.1) 是从 $\mathrm{int}(\mathbf{D})\times\mathbf{S}^1$ 到 $S^3\setminus C$ 的一个微分同胚，并且限制在 $\partial\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1$, 上时，它是一个光滑的 $\mathbf{S}^1$ 纤维丛，将 $\{z\}\times\mathbf{S}^1$ 映射到 C 上的一个点。还请注意，此处我们使用符号 $\mathbf{D}$，以便将其与 $\mathrm{dmn}(\Psi)=\mathbb{RP}^5\times\mathbb{D}$ 中的圆盘 $\mathbb{D}$ 区分开来。

5.1. 规范的 $\mathbb{RP}^5$ 族。 我们首先考虑 $\mathbb{RP}^5$ 族：对于每个 $a=[a_0:a_1:a_2:a_3:a_4:a_5]$，定义

$$\widetilde{\Phi}_5(a):=\{x\in\mathbb{R}^4 : a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_1x_2=0\}\subset\mathbb{R}^4; \tag{5.2}$$

$$\Phi_5(a):=S^3\cap\widetilde{\Phi}_5(a)\subset S^3. \tag{5.3}$$

注意， $\Phi_5(a)$要么是两个正交超平面的并（此时 $a=[a_1a_2:a_1:a_2:0:0:1]$），要么是空集（此时 $a=[1:0:0:0:0:0]$），要么是$\mathbb{R}^4$中的光滑超曲面。此外， $\widetilde{\Phi}_5(a)$在 a 的正则部分中光滑变化。若 x 是 $\widetilde{\Phi}_5(a)$的正则点，且切空间 T_xS^3 与 $T_x\widetilde{\Phi}_5(a)$的切空间张成$\mathbb{R}^4$，则称 $\widetilde{\Phi}_5(a)$在 $x\in S^3\cap\widetilde{\Phi}_5(a)$处与 S^3横截。

容易验证， Φ_5 在Almgren-Pitts框架中给出一个5-扫掠，但它不是Simon–Smith 族。不过，当 $\Phi_5(a)$不包含奇异曲线时，我们仍然有亏格界：

引理 5.1. 设

$$A_{\text{sing}} := \{[a_1a_2 : a_1 : a_2 : 0 : 0 : 1] \in \mathbb{RP}^5 : a_1^2 + a_2^2 < 1\},$$

那么，

(i) 对每个 $a \in A_{\text{sing}}$, $\Phi_5(a)$ ，它都是两个圆形（但不一定是赤道）球面的并集，且这两个球面沿圆 $\{x \in S^3 : x_1 = -a_2, x_2 = -a_1\}$ 横截相交；(ii) 对于 $a \in \mathbb{RP}^5 \setminus A_{\text{sing}}$, $\widetilde{\Phi}_5(a)$ 的一个稠密子集，它与 S^3 横截，因此 $\Phi_5(a)$ 是光滑的；(iii) 对每个 $a \in \mathbb{RP}^5 \setminus A_{\text{sing}}$, $\widetilde{\Phi}_5(a)$ ，它与 S^3 除至多 9 个点外处处横截；并且 $\mathfrak{g}(\Phi_5(a)) = 0$。

~~证明。~~ (i) 可由以下观察得出：当 $a \in A_{\text{sing}}$, $\Phi_5(a) = \{(x_1 + a_2)(x_2 + a_1) = 0\}$ 是两个正交超平面 $\{x_1 = -a_2\}$ 和 $\{x_2 = -a_1\}$ 的并集时，它们的交与 S^3 横截相交，交线正是 (i) 中所述的圆。

为证明 (ii) 和 (iii)，任取一个 $a \in \mathbb{RP}^5 \setminus A_{\text{sing}}$。若 $a_5 = 0$，则 $\widetilde{\Phi}_5(a)$ 要么为空，要么是 $\mathbb{R}^4$ 中的一个仿射超平面，因此对于这样的 a，(iii) 成立；若非如此，则记 $a = [a_0 : \cdots : a_4 : 1]$。若 $a_0 = a_1a_2$ and $a_3 = a_4 = 0$，则由 $a \notin A_{\text{sing}}$ 可得 $a_1^2 + a_2^2 \geq 1$，因此 $\Phi_5(a)$ 是至多两个 2-球面的并（可能退化为点），它们彼此不相交或相切，这也满足 (iii) 中的断言。对于剩余情形，

$$\widetilde{\Phi}_5(a) = \{x \in \mathbb{R}^4 : (x_1 + a_2)(x_2 + a_1) + (a_3x_3 + a_4x_4) + a_0 - a_1a_2 = 0\}.$$

其中 $(a_3, a_4, a_0 - a_1a_2) \neq (0, 0, 0)$。因此，存在 $\mathcal{R} \in SO(4)$、 $b \in \mathbb{R}^4$ 和 $\lambda > 0$，使得

$$\eta(\widetilde{\Phi}_5(a)) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1x_2 = 1\}, & \text{if } (a_3, a_4) = (0, 0), \\ \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1x_2 = x_3\}, & \text{if } (a_3, a_4) \neq (0, 0); \end{cases}$$

其中 $\eta(x) = \eta_{\mathcal{R}, b, \lambda}(x) := \lambda \cdot \mathcal{R}x + b$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的一个微分同胚。还需注意， $\eta(S^3) = \partial B^4_\lambda(b)$，因此 $\eta(\Phi_5(a)) = P \times \mathbb{R} \cap \partial B^4_\lambda(b)$，其中 P 是下文引理 5.2 中描述的光滑曲面。

记 $b = (\check{b}, b_4) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$， $\varrho_{\check{b}}(\check{x}) := |\check{x} - \check{b}|^2$ 是定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的函数。注意，当且仅当 $x_4 = b_4$ 且 $\check{b} - \check{x} \perp T_{\check{x}}P$ 时， $P \times \mathbb{R}$ 在 $x = (\check{x}, x_4)$ 处与 $\partial B^4_\lambda(b)$ 非横截地相交，即 $\varrho_{\check{b}}(\check{x}) = \lambda^2$，且 $\check{x}$ 是 $\varrho_{\check{b}}|_P$ 的临界点。还需注意，如果 λ^2 是 $\varrho_{\check{b}}|_P$ 的正则值，那么光滑曲面 $(P \times \mathbb{R}) \cap \partial B^4_\lambda(b)$ 与下面的曲面同胚。~~考虑带边界的光滑曲面 $P \cap B^3_\lambda(\check{b})$，取其两个副本，并沿它们的边界将其粘合在一起：将所得的（无边界）曲面称为 $()$ 的双倍曲面。~~

因此，由于 $\varrho_{\check{b}}|_P$ 的正则值稠密，(ii) 可由萨德定理推出；(iii) 可由下文的引理 5.2推出。当 $\widetilde{\Phi}_5(a)$ 与 S^3 的交是横截的时，亏格控制显然成立，因为有限个圆盘的双倍曲面是有限个球面；当交不横截时，根据 (ii) 保证的正则 $\Phi_5(a_j)$ 的逼近，以及亏格在远离有限个点的 C^∞_{loc} 收敛下的下半连续性，可得亏格控制。□

引理 5.2. 设 P 是 $\mathbb{R}^3$中以下两种光滑曲面之一

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1x_2 = 1\}, \qquad \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1x_2 = x_3\}.$$

那么，对每个 $b \in \mathbb{R}^3$，令 $\varrho_b(x) := |x - b|^2$，我们有，

（a）$\varrho_b|_P$ 至多有9 个临界点；（b）若 r^2 是 $\varrho_b|_P$ 的正则值，则 B^3_r（b）$\cap P$微分同胚于有限个（可能为空）互不相交的圆盘。

证明。我们只关注 $P=\{x\in\mathbb{R}^3 : x_1x_2=x_3\}$ 的情形；另一曲面也可以用类似（实际上更简单）的方法处理。

对于每个 $x\in P$, x 是 $\varrho_b|_P$的临界点，当且仅当 $2(x_1-b_1,x_2-b_2,x_3-b_3)=\nabla\varrho_b(x)\perp T_xP$，这等价于

$$\begin{cases} x_1-b_1=-x_2(x_3-b_3)\,,\\ x_2-b_2=-x_1(x_3-b_3)\,. \end{cases} \tag{5.4}$$

当 $(x_3-b_3)^2\neq 1$ 时，(5.4) 有解

$$x_1=\frac{b_1-b_2(x_3-b_3)}{1-(x_3-b_3)^2}\,,\qquad\qquad x_2=\frac{b_2-b_1(x_3-b_3)}{1-(x_3-b_3)^2}$$

代回 $x_1x_2=x_3$ 关于 P 的定义方程，得到一个关于x_3的五阶多项式方程，因此 (x_1,x_2,x_3) 至多有 5 个解。

当 $x_3-b_3=\pm1$ 时，根据 (5.4)， $x_1\pm x_2=b_1=\pm b_2$. 结合 $x_1x_2=x_3=b_3\pm1$ ，可知 (x_1,x_2,x_3) 至多有 4 个解。综上， $x\in P$和$\nabla\varrho_b\perp T_xP$至多有 $5+4=9$ 个解 x ，这证明了 (a)。

为证明 (b)，我们可以先对 $\varrho_b|_P$ 作光滑扰动，得到莫尔斯函数 $\bar\varrho\in C^\infty(P)$，使得 $\operatorname{spt}(\bar\varrho-\varrho_b|_P)$ 紧致，且 $\bar\varrho^{-1}(\mathbb{R}_{\leq r^2})$ 与 $\varrho_b^{-1}(\mathbb{R}_{\leq r^2})\cap P=B^3_r(b)\cap P$ 微分同胚。此外，由于 P 的第二基本形式 A_P 处处不定，

$$\nabla^2(\varrho_b|_P)=\nabla^2\varrho_b+(\nabla^\perp\varrho_b)\cdot A_P=2\,\mathrm{id}_{T_*P}+(\nabla^\perp\varrho_b)\cdot A_P$$

在 P 上处处至少有一个严格正的特征值。因此，我们还可以要求光滑扰动 $\bar\varrho$ 不存在局部极大值，即 $\bar\varrho$ 的每个临界点的莫尔斯指标均为 0 或 1。因此，第一贝蒂数函数 $\lambda\mapsto\dim H_1(\bar\varrho^{-1}(\mathbb{R}_{\leq\lambda}))$ 关于 $\bar\varrho$ 的正则值 λ 单调不减。当 $\lambda\gg1$ 时， $\bar\varrho^{-1}(\mathbb{R}_{\leq\lambda})=\varrho_b^{-1}(\mathbb{R}_{\leq\lambda})\cap P=B^3_{\sqrt{\lambda}}(b)\cap P$ 是一个圆盘，因此我们得出

$$\dim H_1(\overline{B^3_r(b)}\cap P)=\dim H_1(\bar\varrho^{-1}(\mathbb{R}_{\leq r^2}))=0\,.$$

此外，由于 P是 x_1x_2-平面上的一个图形，因此与 $\mathbb{R}^2$微分同胚；作为第一贝蒂数为 0 的紧子域，$B^3_r(b)\cap P$与有限个圆盘的不交并微分同胚。□

5.2. **一些抽象引理**。本小节列出一些有用的抽象引理，以供后续应用。初次阅读时，读者可以跳过本小节中的证明。

对于 $f\in C^\infty(\mathbf{S}^1;\mathbb{R})$，令 $\alpha\in f^{-1}(0)$。定义 f在 α处的阶为

$$\operatorname{ord}_f(\alpha):=\sup\{l\in\mathbb{Z}_{\geq1}: f(\alpha)=f^{(1)}(\alpha)=\cdots=f^{(l-1)}(\alpha)=0\}\,.$$

此外，对于 $E\subset\mathbf{S}^1$, , 令

$$\operatorname{ord}(f;E):=\sum_{\alpha\in f^{-1}(0)\cap E}\operatorname{ord}_f(\alpha)\,;$$

并且如果 $E=\mathbf{S}^1$，我们可以省略 E 。

引理 5.3。对于 $N\in\mathbb{N}^+$, $f\in C^\infty(\mathbf{S}^1)$ 以及 $\alpha\in f^{-1}(0)$，若 $\operatorname{ord}f(\alpha)\leq N$，假设序列$f_j\in C^\infty(\mathbf{S}^1)$ C^N收敛于 f，当 $j\to\infty$时，且 $U_1\supset U_2\supset\ldots$ 是包含 α并随着 $j\to\infty$趋于 α而收缩的闭区间。那么对所有 $j\gg1$, $\operatorname{ord}(f_j;\ U_j)\leq\operatorname{ord}f(\alpha)$。

证明。 注意，根据介值定理，任何以 f 的两个零点为端点的闭区间 $U\subset\mathbf{S}^1$ ，其内部都包含 f' 的一个零点。因此，归纳可得，

$$\operatorname{ord}(f;U)\leq\operatorname{ord}(f^{(1)};U)+1\leq\cdots\leq\operatorname{ord}(f^{(N)};U)+N\,.$$

现在反设 $\mathrm{ord}(f_j;\, U_j) > \mathrm{ord}_f(\alpha) =:$ 对于无穷多个 j，N' 都成立。那么，取一个子列后，对每个 j 和每个 $k \le N'$，

$$\mathrm{ord}(f_j^{(k)}, U_j) \ge \mathrm{ord}(f_j, U_j) - k > 0\,,$$

也就是说，存在 $\alpha_{j,k} \in U_j$ 使得 $f_j^{(k)}(\alpha_{j,k}) = 0$。对于 $j \to \infty$，我们得到 $\alpha_{j,k} \to \alpha$ 且对所有 $0 \le k \le N'$，$f^{(k)}(\alpha) = 0$。这迫使 $\mathrm{ord}_f(\alpha) \ge N' + 1$，由此得到矛盾。□

对于每个满足 $0 < \mathrm{ord}(f) < +\infty$ 的 $f \in C^\infty(\mathbf{S}^1;\, \mathbb{R})$，我们定义：

$$\mathcal{Z}(f) := \sum_{\alpha \in f^{-1}(0)} \mathrm{ord}_f(\alpha) \cdot \alpha\,; \tag{5.5}$$

$$\mathcal{Z}^-(f) := \sum_{\alpha \in \mu(\{f<0\})} \alpha + \sum_{\alpha \in f^{-1}(0)} \frac{1}{2}\big(\mathrm{ord}_f(\alpha) - \mathfrak{n}_f(\alpha)\big) \cdot \alpha\,. \tag{5.6}$$

这里，给定 $\mathbf{S}^1$ 上区间的不交并 J，$\mu(J)$ 表示由 J 的每个连通分支的中点组成的集合；而 $\mathfrak{n}_f(\alpha) \in \{0, 1, 2\}$ 表示其闭包包含 α 的 $\{f < 0\}$ 的连通分支数。注意，由于 $\alpha, \mu(I) \in \mathbf{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$，且 $\mathrm{ord}_f(\alpha) - \mathfrak{n}_f(\alpha)$ 总是偶数，因此 $\mathcal{Z}(f)$ $\mathcal{Z}^-(f)$ 也取值于 $\mathbf{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$。当 $\mathrm{ord}(f) = 0$ 时，按约定设 $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}^-(f) := 0 \bmod 2\pi$。

引理 *5.4.* 对每个满足 $\mathrm{ord}(f) < +\infty$ 的 $f \in C^\infty(S^1;\, \mathbb{R})$，我们有 $\mathcal{Z}(f) = 2\mathcal{Z}^-(f)$，且其属于 S^1。此外，若 $f_j \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ 满足 $f_j \to f_\infty$ *in* C^n *and* $\mathrm{ord}(f_j) = \mathrm{ord}(f_\infty) = n < +\infty$ *for all* $j \ge 1$，则 $\mathcal{Z}^-(f_j) \to \mathcal{Z}^-(f_\infty)$。

证明。第一个断言直接由定义得出；并且对于端点为 α^-, α^+ 的开区间 $I \subset \mathbf{S}^1$，有 $2\mu(I) = \alpha^- + \alpha^+$ 属于 $\mathbf{S}^1$。

为证明第二个断言，注意到我们可以将每个 $\alpha \in f^{-1}(0)$（其中 $\mathrm{ord}_f(\alpha) - \mathfrak{n}_f(\alpha) > 0$）视为 $(\mathrm{ord}_f(\alpha) - \mathfrak{n}_f(\alpha))/2$ 个位于 $\{f \le 0\}$ 中的退化区间，因此 (5.6) 是 $\{f \le 0\}$ 中所有（可能退化的）$n/2$ 区间的中点之和。由引理 5.3，若总阶在取极限 $f_j \to f_\infty$ 时保持不变，则 f_∞ 的零点必为 f_j 的零点的极限。特别地，$\{f_j \le 0\}$ 中相应的（可能退化的）区间在收敛过程中连续变化。由此可得 $\mathcal{Z}^-(f_j) \to \mathcal{Z}^-(f_\infty)$。□

对于每个整数 $k > 0$，次数为 k 的三角多项式 是定义在 $\mathbf{S}^1$ 上的函数，其形式为

$$T(\alpha) := b_0 + b_1 \cos(\alpha + \theta_1) + \cdots + b_k \cos(k\alpha + \theta_k)\,, \tag{5.7}$$

其中 $b_j \in \mathbb{R}$、$b_k \ne 0$ 和 $\theta_j \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$。（我们约定零函数的次数为 -1。）我们令

$$\|T\| := \Big(b_0^2 + b_1^2 + \cdots + b_k^2\Big)^{1/2}\,,$$

并令 $\mathcal{T}_k$ 为所有次数为 $\le k$ 的三角多项式构成的空间，它是一个维数为 $2k+1$ 的向量空间。

引理 5.5. 对于每个非零的 $T \in \mathcal{T}_k$，$\mathrm{ord}(T) \le 2k$。此外，若 T 具有 (5.7) 的形式，且 $\mathrm{ord}(T) = 2k$，则 $b_k \ne 0$、$\mathcal{Z}(T) = -2\theta_k$，并且

$$\mathcal{Z}^-(T) = \begin{cases} -\theta_k + k\pi, & \text{if } b_k > 0\,; \\ -\theta_k + (k+1)\pi, & \text{if } b_k < 0\,. \end{cases}$$

证明。通过归纳法，不妨设 T 具有 (5.7) 的形式，其中 $b_k \ne 0$。通过将 (b_k, θ_k) 替换为 $(-b_k, \theta_k - \pi)$，并将 T 乘以一个正的常数（这不会改变 $\mathcal{Z}^-(T)$），我们甚至可以假设 $b_k = 1$。

注意到，当且仅当 $z := e^{i\alpha}$ 是下列多项式的一个根，且其重数为 $\operatorname{ord}_T(\alpha)$ 时， $\alpha \in T^{-1}(0)$。

$$q_T(z) := z^k \left(b_0 + \frac{b_1}{2}(e^{i\theta_1} z + e^{-i\theta_1} z^{-1}) + \cdots + \frac{1}{2}(e^{i\theta_k} z^k + e^{-i\theta_k} z^{-k}) \right).$$

因此，$\operatorname{ord}(T)$ 不超过 q_T 根的总数（按重数计），根据代数基本定理，该总数为 $2k$。

此外，若 $\operatorname{ord}(T) = 2k$，则 q_T 的所有根都位于单位圆上，而 $e^{i\mathcal{Z}(T)}$ 是 q_T 所有根的乘积，它等于 $q_T(0)$ 除以 q_T 的首项系数。因此，$e^{i\mathcal{Z}(T)} = e^{-2i\theta_k}$，进而 $\mathcal{Z}(T) = -2\theta_k$，由引理 5.4 可得 $\mathcal{Z}^-(T) \in \{-\theta_k, -\theta_k + \pi\}$。

要精确确定 $\mathcal{Z}^-(T)$，注意任何形如以下形式的三角多项式

$$T(\alpha) = b_0 + b_1 \cos(\alpha + \theta_1) + \cdots + b_{k-1} \cos((k-1)\alpha + \theta_{k-1}) + \cos(k\alpha + \theta_k) \tag{5.8}$$

阶为 $2k$ 的三角多项式由其零点和 θ_k 唯一确定。更准确地说，若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2k} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 是上述 T 的零点（按阶计），且满足 $\sum \alpha_j = -2\theta_k$，则

$$q_T(z) = \frac{e^{i\theta_k}}{2}(z - e^{i\alpha_1})(z - e^{i\alpha_2}) \cdots (z - e^{i\alpha_{2k}})$$

因此

$$T(\alpha) = e^{-ik\alpha} q_T(e^{i\alpha}) = \frac{1}{2} e^{i(-k\alpha + \theta_k)} (e^{i\alpha} - e^{i\alpha_1})(e^{i\alpha} - e^{i\alpha_2}) \cdots (e^{i\alpha} - e^{i\alpha_{2k}}).$$

此外，任意上述的 α_j 和 θ_k 都给出一个形式为 (5.8)、阶为 $2k$ 的三角多项式。因此，形式为 (5.8)、阶为 $2k$ 的三角多项式空间 $\mathcal{T}_k^{top}$ 是道路连通的（显然包含 $\cos(k\alpha + \theta_k)$）。此外，由引理 5.4， $T \mapsto \mathcal{Z}^-(T)$ 在 $\mathcal{T}_k^{top}$ 上连续，因此结合 $\mathcal{Z}^-(T) \in \{-\theta_k, -\theta_k + \pi\}$ 这一事实，我们得到

$$\mathcal{Z}^-(T) = \mathcal{Z}^-(\cos(k\alpha + \theta_k)) = -\theta_k + k\pi.$$

□

推论 5.6。对于每个整数 $k > 0$ 和 $\varepsilon_1 > 0$，存在 $\delta_1(k, \varepsilon_1) > 0$，满足以下性质。对于任意形式为 (5.7) 的 $T \in \mathcal{T}_k$，以及任意 $f \in C^\infty(\mathbf{S}^1)$，使得

$$\|f - T\|_{C^{2k}} \le \delta_1 \|T\|,$$

我们有 $\operatorname{ord}(f) \le 2k$；并且若实际上 $\operatorname{ord}(f) = 2k$ 且 $b_k > 0$，则 $\operatorname{dist}_{\mathbf{S}^1}(\mathcal{Z}^-(f) - \theta_k + k\pi) \le \varepsilon_1$。

证明。我们可以通过反证法，并应用引理 5.4 和 5.5。 □

引理 5.7。对于每个 $b = (b_1, b_2) \in \mathbf{D}$ 以及满足 $|b| + 2\kappa < 1$ 的 $\kappa > 0$，存在 $\delta_2(\kappa) \in (0, \kappa/4)$，使其具有以下性质。

假设 $F \in C^\infty(\mathbf{D} \times \mathbf{S}^1; \mathbb{R})$ 和 $\mathbf{x} \in C^\infty(\mathbf{S}^1; \mathbf{D}^{\kappa/4}(b))$ 满足以下条件：

(a) $\Sigma := F^{-1}(0)$ 与 $\Phi_5(a)$ 一致（见第 *5.1* 节），在 $(\mathbf{D} \setminus \mathbf{D}_\kappa(b)) \times \mathbf{S}^1$ 中对某个 $a = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : 1] \in \mathbb{RP}^5$ 成立

$$|a_0 - a_1 a_2| + |a_1 + b_2| + |a_2 + b_1| + |a_3| + |a_4| < \delta_2;$$

(b) $f(\alpha) := F(\mathbf{x}(\alpha), \alpha)$ 具有 $\operatorname{ord}(f) < +\infty$；

(c) 当且仅当在 $\mathbf{D}_\kappa(b) \times \mathbf{S}^1$，$\nabla_x F(x, \alpha) = 0$ 时，$x = \mathbf{x}(\alpha)$；并且

$$\left| \nabla_x^2 F - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right| < \delta_2.$$

Then

(1) 在参数化(5.1)下，Σ 是 S^3 中的光滑曲面，其孤立奇点位于$\{(\mathbf{x}(\alpha), \alpha) : \alpha \in f^{-1}(0), \operatorname{ord} f(\alpha) \ge 2\}$。

(2) 对每个 $\alpha \in \mathbf{S}^1$,

$$F(\cdot,\alpha)\begin{cases} >0 & on\ \{\mathbf{x}(\alpha)+(t,t)\in\mathbf{D}:0\neq t\in\mathbb{R}\}, \quad if\ f(\alpha)\geq 0;\\ <0 & on\ \{\mathbf{x}(\alpha)+(t,-t)\in\mathbf{D}:0\neq t\in\mathbb{R}\}, \quad if\ f(\alpha)\leq 0; \end{cases}$$

(3) Σ 的亏格满足

$$\mathfrak{g}(\Sigma)\leq \max\left\{0,\ \frac{1}{2}\#\{\alpha\in f^{-1}(0):\mathrm{ord}_f(\alpha)\ is\ odd\}-1\right\}.$$

且当 f 的每个零点的阶均小于1时，等号成立。

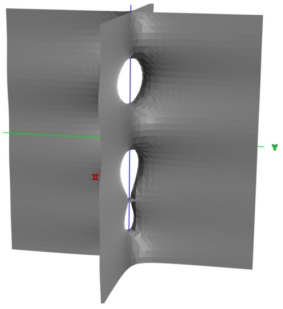


FIGURE 2. 曲面 Σ的一个例子：图中展示了圆 $\{x_1=-b_2,x_2=-b_1\}\subset S^3$附近的一部分曲面 Σ，圆由图中的 z轴表示，并由 α参数化。满足 $F(\mathbf{x}(\alpha)\ \alpha)=0$ 的那些 α 对应于曲面上水平切平面所在的点。

证明。为证明（1），由（a）并假设 $\delta_2\ll 1$，$\Sigma=\Phi_5(a)$ 在$\mathbf{D}_\kappa(b)\times\mathbf{S}^1$之外是光滑的。因此，只需证明对于每个 $(x,\alpha)\in\Sigma\cap\mathbf{D}_\kappa(b)\times\mathbf{S}^1$,

$$\nabla F(x,\alpha)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\mathbf{x}(\alpha)\ \text{ and }\ \mathrm{ord}_f(\alpha)\geq 2. \tag{5.9}$$

为此，注意到根据 (c)，$\nabla_x F(x,\alpha)=0$ 当且仅当 $x=\mathbf{x}(\alpha)$；而根据 f 的定义，

$$f'(\alpha)=\nabla_x F(\mathbf{x}(\alpha),\alpha)\cdot\mathbf{x}'(\alpha)+\partial_\alpha F(\mathbf{x}(\alpha),\alpha)=\partial_\alpha F(\mathbf{x}(\alpha),\alpha).$$

结合以上结果即可证明 (5.9)。

为证明 (2)，对于满足 $\mathbf{x}(\alpha)+v\in\mathbf{D}_\kappa(b)$ 的 $0\neq v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$，令 $h(t):=F(\mathbf{x}(\alpha)+tv,\alpha)$。注意到根据 (b) 和 (c),

$$h(0)=f(\alpha),\quad h'(0)=0,\quad |h''(t)-2v_1v_2|\leq\delta_2|v|^2.$$

因此，若 $v=(t,\pm t)$，则 $\pm h''(t)>0$。将此与以下事实结合

$$F(\mathbf{x}(\alpha)+v)=f(\alpha)+\int_0^1(1-t)h''(t)\,dt$$

即可证明 $\mathbf{D}_\kappa(b)$ 中的 (2)。此外，根据 (a)（假设 $\delta_2\ll 1$）以及紧致性论证，在 $(\mathbf{D}\setminus\mathbf{D}_\kappa(b))\times\mathbf{S}^1$ 中，我们知道 $\Sigma=\Phi_5(a)$ 与 $\{(\mathbf{x}(\alpha)+(t,\pm t)\ \alpha)\in\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1:0\neq t\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbf{S}^1\}$，因此，$F(\cdot,\alpha)$ 在相应线段上的符号在 $\mathbf{D}_\kappa(b)$ 外不会改变。

为证明 (3)，我们首先进一步假设 f 的每个零点的阶都是 1（因此根据 (1)，Σ 处处光滑）。考虑 $\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1$ 上的 Killing 向量场 ∂_α（在参数化 (5.1) 下，它也是圆形 S^3 上的 Killing 向量场）。对于 $(x_\circ,\alpha_\circ)\in\mathbf{D}_\kappa(b)\times\mathbf{S}^1\cap\Sigma$，$\partial_\alpha$ 在 $T\Sigma$ 上的正交投影 ∂_α^Σ 在 $(x_\circ,\alpha_\circ)$ 处为零，当且仅当 $\nabla F(x_\circ,\alpha_\circ)$ 与 ∂_α 平行；这等价于 $\nabla_x F(x_\circ,\alpha_\circ)=0$，而根据 (c)，这又等价于 $x_\circ=\mathbf{x}(\alpha_\circ)$（以及 $\alpha_\circ\in f^{-1}(0)$）。

此外，在这样的 $(x_\circ,\alpha_\circ)$ 附近，将 α 视为 $\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1$，上的单值函数，我们有 $\partial_\alpha^\Sigma=\nabla(\alpha|_\Sigma)$。若取 $\partial_\alpha|_{(x_\circ,\alpha_\circ)}=c_\circ\nabla F(x_\circ,\alpha_\circ)$，其中 $c_\circ\in\mathbb{R}$ 是非零常数，则在 $(x_\circ,\alpha_\circ)$ 处，

$$\begin{aligned}\nabla^2(\alpha|_\Sigma)=\nabla^2\alpha|_{T\Sigma\otimes T\Sigma}+\vec{A}_\Sigma\cdot\partial_\alpha&=c_\circ\vec{A}_\Sigma\cdot\nabla F(x_\circ,\alpha_\circ)\\&=c_\circ(\nabla^2(F|_\Sigma)-\nabla^2F(x_\circ,\alpha_\circ)|_{T\Sigma\otimes T\Sigma})\\&=-c_\circ\nabla_x^2F(x_\circ,\alpha_\circ)\end{aligned}$$

若 δ_2 取值足够小，则根据 (c)，它是不定且非退化的。因此，向量场 ∂_α^Σ 在其零点 $(x_\circ,\ \alpha_\circ)$ 处的庞加莱-霍普夫指标为 -1。

另一方面，令 $\hat{}a:=[a_1a_2:\ a_1:\ a_2:0:0:1]\in A_{\mathrm{sing}}$。根据 (a)，取更小的 δ_2 后，Σ 同痕于某个光滑曲面 Σ'，它在 $\mathbf{D}_\kappa(b)\times\mathbf{S}^1$，内与 Σ 一致，在 $\mathbf{D}_{2\kappa}(b)\times\mathbf{S}^1$，外与 $(\hat{}a)$ 一致，并且 $\partial_\alpha^{\Sigma'}$ 在 $(\mathbf{D}_{2\kappa}(b)\setminus\mathbf{D}^{\kappa/2}(b))\times\mathbf{S}^1$ 上不为零。特别地，$\partial_\alpha^{\Sigma'}$ 的每个零点要么是

- $\{(\mathbf{x}(\alpha_\circ)\ \alpha_\circ):\alpha_\circ\in f^{-1}(0)\}$ 中的一个，其庞加莱-霍普夫指标均为 -1；要么是
- $\partial^{\Phi_5}{}_{(\hat{a})\alpha}$ 的一个零点，其指标之和等于 $2\chi(S^2)=4$，根据庞加莱-霍普夫定理。

因此，将庞加莱-´e-Hopf 定理应用于 $\partial_\alpha^{\Sigma'}$，我们得到

$$\chi(\Sigma)=\chi(\Sigma')=4+(-1)\cdot\#f^{-1}(0)\,.$$

然后，由于 Σ' 至多有两个连通分支，并且当 $f^{-1}(0)\neq\emptyset$时是连通的，(3)便由此得出。

最后，当 f 有高阶零点时，令 Z_{ev} 和 Z_{od} 分别为 f 中偶阶和奇阶零点的集合。我们可以构造另一个光滑函数 $h\in C^\infty(\mathbf{S}^1)$，使得

- $h^{-1}(0)=Z_{od}$，且 h 的每个零点都是一阶零点；
- $fh\geq0$ 在$\mathbf{S}^1$上的每一点。

然后，取 $\xi\in C_c^\infty(\mathbf{D}_\kappa(b),[0,1])$ 作为一个截断函数，使得 $\xi|_{\mathbf{D}_{\kappa/2}(b)}=1$，我们可以考虑

$$F_\epsilon(x,\alpha):=F(x,\alpha)+\epsilon\xi(x)h(\alpha)\,.$$

容易验证，当 $0<\epsilon\ll1$ 时，F_ϵ 也满足条件 (a)-(c)，其中 f 替换为 $f_\epsilon:=f+\epsilon h$。根据上述构造，f_ϵ 只有一阶零点，且 $f_\epsilon^{-1}(0)=Z_{od}$。因此，由于 $F_\epsilon^{-1}(0)$ 在正则部分局部光滑收敛到 Σ，我们有

$$\mathfrak{g}(\Sigma)\leq\liminf_{\epsilon\searrow0}\mathfrak{g}(F_\epsilon^{-1}(0))=\max\left\{0,\ \frac{1}{2}\#Z_{od}-1\right\}.$$

□

5.3. 的构造。回忆一下，$\mathbb{D}$ 表示 $\mathsf{dmn}(\Psi)=\mathbb{RP}^5\times\mathbb{D}$ 的第二因子中的闭二维单位圆盘。我们经常使用极坐标 $z=re^{i\theta}$ 表示 $\mathbb{D}$，并通过 (4.1) 对 S^3 进行参数化。在此参数化下，族 $\Psi:\mathbb{RP}^5\times\mathbb{D}\to\mathcal{S}(S^3)$ 具有如下形式

$$\Psi(a,z):=\begin{cases}\Phi_5(a)\,, & \text{if } a_5=0\,;\\ \{(x,\alpha)\in\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1:F_{a,z}(x,\alpha)=0\}\,, & \text{if } a_5\neq0\end{cases}\tag{5.10}$$

其中，对于 $(a,z)\in(\mathbb{RP}^5\times\mathbb{D})\cap\{a_5\neq0\}$（回顾 $\varsigma(x):=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$），

$$\begin{aligned}F_{a,z}(x,\alpha):=a_5^{-1}\Big(&a_0+a_1x_1+a_2x_2+\varsigma(x)(a_3\cos\alpha+a_4\sin\alpha)\\&+a_5\Big[x_1x_2+\rho(a,x)\big(r\cos(\theta+2\alpha)+(1-r)\cos(3\alpha)\big)\Big]\Big)\,.\end{aligned}\tag{5.11}$$

回顾一下，截断函数 $\rho:\mathbb{RP}^5\times S^3\to[0,1]$ 按照 (4.4) 中的方式选取：

(I) 当 $a=[a_0:a_1:a_2:a_3:a_4:a_5]\in\mathbb{RP}^5$ 且 $a_1^2+a_2^2<a_5^2$ 时，令

$$\rho(a,x):=\zeta\left(64a_5^2\cdot\frac{(a_5x_1+a_2)^2+(a_5x_2+a_1)^2}{\left(a_5^2-a_1^2-a_2^2\right)^2}\right)\zeta\left(\frac{(a_3^2+a_4^2)a_5^2+(a_0a_5-a_1a_2)^2}{a_5^4\,\delta\left((a_1^2+a_2^2)/a_5^2\right)}\right)\delta\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{a_5^2}\right)$$

其中 $\zeta\in C^\infty(\mathbb{R})$ 是一个固定的非递增截断函数，满足 $\zeta|_{\mathbb{R}_{\le 1/2}}=1$, $\zeta|_{\mathbb{R}_{\ge 1}}=0$;$\delta\in C^\infty(\mathbb{R};[0,1])$ 在 $(-1,1)$ 外为 0，在 $(-1,1)$ 内为正且非常小，具体将在下文的引理 5.9 中给出。

(II) 当 $a\in\mathbb{RP}^5$ 不具有上述形式时，我们令 $\rho(a,x)=0$。

注 5.8. 以下事实可直接由定义验证：

(i) ρ 是定义在 $\mathbb{RP}^5\times S^3$ 上的良定义连续函数，并且关于 x 变量是 C^∞。(ii) 对于不在 A_{sing} 的某个小邻域内的 $a\in\mathbb{RP}^5$， $\rho(a,\cdot)\equiv 0$，因此，根据引理 5.1，在参数化 (4.1) 下，$\Psi(a,z)=\Phi_5(a)$ 是一个至多有 9 个奇点且亏格为 0 的曲面。(iii) 当 $\rho(a,x)\neq 0$ 且 $a_5=1$ 时，

$$(x_1+a_2)^2+(x_2+a_1)^2\le\frac{1}{64}(1-a_1^2-a_2^2)^2<\frac{1}{16}\left(1-\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)^2,$$

因此 $|x|\le(1+3\sqrt{a_1^2+a_2^2})/4<1$。由此可知，在 $\partial\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1$ 的一个小邻域内（其在参数化 (4.1) 下的像是 S^3 中 C 的一个邻域）， $\Psi(a,z)$ 与 $\Phi_5(a)$ 一致。我们将证明， $\Psi(a,z)$ 除了至多 3 个点之外，在 $\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1$, 的内部处处光滑，从而推出 $\Psi(a,z)$ 在整个 S^3 上的正则性。

(iv) 当 $a\in A_{\text{sing}}$ 时，对于靠近 $\Phi_5(a)$ 的奇异圆的 (x,α)， $\rho(a,x)=\delta(a_1^2+a_2^2)$ 是一个非零常数。从直观上说，这意味着 $\Psi(a,z)$ 是通过在 α 变量中使用某些三角多项式对 $\Phi_5(a)$ 进行去奇异化；这些多项式的零点数为 $\Psi(a,z)$ 的亏格提供了上界，如引理 5.7 所述。

引理 *5.9.* 存在某个函数 $\delta\in C^\infty(\mathbb{R})$，它在 $(-1,1)$ 之外为零，并且在 $(-1,1)$ 内为正且足够小，使得 $\Psi(a,z)$ 和 $F_{a,z}$（定义于本小节开头）满足以下 [4]。对于每个 $a=[a_0:a_1:\cdots:a_4:1]\in\mathbb{RP}^5$，若 $\rho(a,\cdot)$ 不恒为零，令 ~~$\kappa(a):=$~~ $(1-\sqrt{a_1^2+a_2^2})/4$，则有：

(a) 存在唯一的 $\mathbf{x}_a\in C^\infty(\mathbf{S}^1;\mathbf{D}^{\kappa(a)/4}(-a_2,-a_1))$ 使得对于 $(x,\alpha)\in\mathbf{D}^{\kappa(a)}(-a_2,-a_1)\times\mathbf{S}^1$,

$$\nabla_x F_{a,z}(x,\alpha)=0\,,\quad\Leftrightarrow\quad x=\mathbf{x}_a(\alpha)\,.$$

并且对于某个常数 $C=C(a_1^2+a_2^2)>0$，有：

$$|\mathbf{x}_a(\alpha)-(-a_2,-a_1)|\le C\cdot(|a_3|+|a_4|)$$

(b) 设 $f_{a,z}\in C^\infty(\mathbf{S}^1)$ 由 $f_{a,z}(\alpha):=F_{a,z}(\mathbf{x}_a(\alpha)\ \alpha)$给出。那么

$$\#f_{a,z}^{-1}(0)\le\begin{cases}4\,, & \text{if } |z|=1\,;\\ 6\,, & \text{if } |z|<1\,.\end{cases}$$

此外，若在 $z=e^{i\theta}$ （因而在 $|z|=1$）时等号成立，则 $f_{a,\ z}$ 的每个零点的阶1，并且

$$\operatorname{dist}_{\mathbf{S}^1}(\mathcal{Z}^-(f_{a,z}),-\theta)\le 1000^{-1}\,.$$

令 [4] a_5 为 1，因此对于这样的 a，定义域 $\{\pm F_{a,z}>0\}$ 是良定义的。

(c) 对于每个 $z \in \mathbb{D}$， Ψ（a， z） 在 S^3 中除至多3 个点外是光滑曲面，其亏格估计为

$$\mathfrak{g}(\Psi(a,z)) \leq \begin{cases} 1\,, & if\ |z|=1\,; \\ 2\,, & if\ |z|<1\,. \end{cases}$$

当 $|z|=1$ 当且仅当 $\#f_a^{-1},_z(0) = 4$ 时，等号成立。

引理 *5.9* 的证明。为证明 (a)，下文中的 $\Lambda_i > 1$ 均为绝对常数，并会随行改变，而 $C(a_1^2+a_2^2) > 0$ 也会随行改变。回顾一下，

$$\begin{aligned} F_{a,z}(x,\alpha) = (x_1+a_2)(x_2+a_1) + (a_0-a_1a_2) + \varsigma(x)(a_3\cos\alpha + a_4\sin\alpha) \\ + \rho(a,x)(r\cos(\theta+2\alpha) + (1-r)\cos(3\alpha)) \end{aligned}$$

其中 $\rho(a,\cdot)$ 对于 $x \in \mathbf{D}^{\kappa(a)/4}(-a_2,-a_1)$ 是常数， $\rho(a,\cdot)$ 对于 $x \notin \mathbf{D}^{\kappa(a)}(-a_2,-a_1)$，一般而言，

$$|\nabla_x \rho| \leq \Lambda_1 (1-a_1^2-a_2^2)^{-2} \cdot \delta(a_1^2+a_2^2)\,.$$

此外，由于 $\rho(a,\ \cdot) \neq 0$，我们有

$$a_3^2 + a_4^2 + (a_0 - a_1a_2)^2 \leq \delta(a_1^2+a_2^2)\,. \tag{5.12}$$

并且在 $\mathbf{D}^{\kappa(a)}(-a_2,-a_1)$,

$$|\varsigma| + |\nabla\varsigma| + |\nabla^2\varsigma| \leq \Lambda_2\ \kappa(a)^{-4}\,.$$

因此，在 $\mathbf{D}^{\kappa(a)}(-a_2,-a_1)\ \setminus \mathbf{D}^{\kappa(a)/4}(-a_2,-a_1)$ 中，

$$\begin{aligned} \nabla_x F_{a,z}(x,\alpha) &= (x_2+a_1, x_1+a_2) + O\left(|a_3|+|a_4| + \delta(a_1^2+a_2^2)\right)\kappa(a)^{-4} \\ &= (x_2+a_1, x_1+a_2) + O\left(\delta(a_1^2+a_2^2)^{1/2}\right)\kappa(a)^{-4} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

只要 $\delta(a_1^2+a_2^2) \leq \Lambda_3^{-1}\kappa(a)^{10}$ 即可。而在 $\mathbf{D}^{\kappa(a)/4}(-a_2,-a_1)$ 中，

$$\begin{aligned} \nabla_x F_{a,z}(x,\alpha) &= (x_2+a_1,\ x_1+a_2) + (a_3\cos\alpha + a_4\sin\alpha)\nabla\varsigma(x)\,; \\ \nabla_x F_{a,z}(-a_2,-a_1,\alpha) &= O(|a_3|+|a_4|)\kappa(a)^{-4} = O(\delta(a_1^2+a_2^2)^{1/2})\kappa(a)^{-4}\,; \end{aligned}$$

$$\nabla_x^2 F_{a,z}(x,\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + O(|a_3|+|a_4|)\kappa(a)^{-4}\,. \tag{5.13}$$

因此，考虑

$$\varpi : (y_1,y_2) \mapsto -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \nabla_x F_{a,z}(-a_2+y_1, -a_1+y_2, \alpha) + (y_1,y_2)$$

取 $\delta(a_1^2+a_2^2) \leq \Lambda_4^{-1}\kappa(a)^{10},$ ，可知 ϖ 的利普希茨常数很小，且它是从 $\mathbf{D}^{\kappa(a)/4}$ 到其自身的压缩映射。根据巴拿赫不动点定理，它有唯一的不动点（对应于 $\nabla_x F_{a,z}$ 的零点），其长度不超过

$$|\varpi(0,0)| + \|\nabla\varpi\|_{C^0(\mathbf{D}_{\kappa(a)/4})} \leq C(a_1^2+a_2^2)(|a_3|+|a_4|)\,.$$

这就完成了这是 (a) 的证明。此外，由于 $\nabla_x F_{a,z}(\mathbf{x}_a(\alpha)\ \alpha) = 0$，根据链式法则，我们有 e,

$$\|\mathbf{x}_a - (-a_2,-a_1)\|_{C^6(\mathbf{S}^1)} \leq C(a_1^2+a_2^2)(|a_3|+|a_4|)\,. \tag{5.14}$$

为证明 (b)，注意到

$$\begin{aligned} T_{a,z}(\alpha) &:= F_{a,z}(-a_2,-a_1,\alpha) \\ &= (a_0 - a_1a_2) + \varsigma(-a_2,-a_1)(a_3\cos\alpha + a_4\sin\alpha) \\ &\quad + \rho(a,(-a_2,-a_1))(r\cos(\theta+2\alpha) + (1-r)\cos(3\alpha)) \end{aligned}$$

对于每个 (a,z)，都是次数为 ≤ 3 的三角多项式；当 $z\in\partial\mathbb{D}$ 时，其次数为 2。又由于 $\rho(a,\cdot)$ 是 $\mathbf{D}^{\kappa(a)/4}$ 中的常数，

$$\begin{aligned} f_{a,z}(\alpha) - T_{a,z}(\alpha) &= (\mathbf{x}_a(\alpha)_1 + a_2)(\mathbf{x}_a(\alpha)_2 + a_1) \\ &\quad + (\varsigma(\mathbf{x}_a(\alpha)) - \varsigma(-a_2,-a_1))(a_3\cos\alpha + a_4\sin\alpha)\,. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \|f_{a,z} - T_{a,z}\|_{C^6(\mathbf{S}^1)} &\le C(a_1^2+a_2^2)\Big(\|\mathbf{x}_a - (-a_2,-a_1)\|^2_{C^6(\mathbf{S}^1)} \\ &\qquad + (|a_3|+|a_4|)\|\mathbf{x}_a - (-a_2,-a_1)\|_{C^6(\mathbf{S}^1)}\Big) \\ &\le C(a_1^2+a_2^2)(|a_3|+|a_4|)^2 \\ &\le \bar{C}(a_1^2+a_2^2)(|a_3|+|a_4|)\|T_{a,z}\|\,. \end{aligned}$$

因此，取 $\delta(a_1^2+a_2^2) \ll 1$，使得 $\bar{C}(a_1^2+a_2^2)(|a_3|+|a_4|) \le \delta_1(3,1000^{-1})$，由推论 5.6 可知，(b) 直接由推论 5.6 得出。

为证明 (c)，由 (5.12) 和 (5.13)，我们可以进一步假设 $\delta(a_1^2+a_2^2)$ 足够小，使得引理 5.7 的假设 (a)–(c) 对 $F_{a,z}$, $(-a_2,-a_1)$ $\kappa(a)$, $\mathbf{x}_a$ 成立，其中以它们替代其中的 F, b, κ, $\mathbf{x}$。因此，结合上文证明的 (b) 以及引理 5.7 的 (1) 和 (3)，即可立即得出 (c)。□

定理 *4.2* 的证明。上述构造 Ψ 已在由引理 5.9 固定的选择 δ 下完成。根据引理 5.9 的 (c) 和注 5.8 的 (ii)，可得 Ψ 取值于亏格为 ≤ 2 的带穿孔曲面集合中，以及定理 4.2 的 (1)、(2)。□

5.4. **的对称性 Ψ和**。本节证明命题 4.4。回顾一下，在 (5.10) 中，$\Psi(a,\ z)$ 在 $a_5 = 0$ 时利用 (5.3) 中的 $\Phi_5(a)$ 定义，而在 $a_5 \ne 0$ 时利用 (5.11) 中的 $F_{a,\ z}$ 定义：

$$\begin{aligned} F_{a,re^{i\theta}}(x,\alpha) &:= a_5^{-1}\Big(a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 \\ &\qquad + a_5\left[x_1x_2 + \rho(a,x)\left(r\cos(\theta+2\alpha) + (1-r)\cos 3\alpha\right)\right]\Big). \end{aligned} \tag{5.15}$$

因此，命题 4.4 是以下引理的直接推论。

引理 5.10。关于 回顾，左-G 作用 σ 在 $\mathbb{RP}^5\times\mathbb{D}$ 上由(4.11)定义。对于 $i\in\{1,2\}$，我们有 e

$$F_{\sigma(g_i^{-1})(a,z)}(p) = -F_{a,z}(g_i\cdot p), \qquad \forall\,(a,z)\in\{a_5\ne 0\}\times\mathbb{D},\ \ \forall p\in S^3\,,$$

其中，S^3 上的 G-作用由(4.9)给出。特别地，7 参数族 Ψ： $\mathcal{Y}\to\mathcal{S}_{\le 2}(S^3)$是 G-等变的，其中 $\mathcal{S}_{\le 2}(S^3)$ 上的 G-作用由(4.9)诱导。

证明。 对于 g_1，我们有

$$\begin{aligned}
F_{a,z}(g_1\cdot p) &= a_5^{-1}(a_0+a_1(-x_2)+a_2x_1+\begin{pmatrix}a_3 & a_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix}\\
&\quad + a_5\left[(-x_2)x_1+\rho(a,g_1\cdot x)\left(r\cos(\theta+2(\alpha+\pi/3))+(1-r)\cos 3(\alpha+\pi/3)\right)\right])\\
&= a_5^{-1}(a_0+a_2x_1+(-a_1)x_2+\left(a_3\cos\frac{\pi}{3}+a_4\sin\frac{\pi}{3}\right)x_3+\left(-a_3\sin\frac{\pi}{3}+a_4\cos\frac{\pi}{3}\right)x_4\\
&\quad + (-a_5)\left[x_1x_2+\rho(g_1^{-1}\cdot a,x)\left(r\cos((\theta-\pi/3)+2\alpha)+(1-r)\cos 3\alpha\right)\right])\\
&= -F_{\sigma(g_1^{-1})(a,z)}(p)\,,
\end{aligned}$$

其中，第一个等式使用了 (4.7) 和 (4.9)，第二个等式使用了 (4.13)，第三个等式使用了 (4.11)。注意，记号 $g_i^{-1}\cdot a$ 的使用存在明显的滥用：它指的是由 (4.13) 和 (4.14) 在 $\mathbb{RP}^5$ 上诱导的 G-作用。同样地，根据 (4.8)、(4.9)、(4.14) 和 (4.11)，

$$\begin{aligned}
F_{a,z}(g_2\cdot p) &= a_5^{-1}(a_0+a_1(-x_1)+a_2x_2+a_3(-x_3)+a_4x_4\\
&\quad + a_5\left[(-x_1)x_2+\rho(a,g_2\cdot x)\left(r\cos(\theta+2(\pi-\alpha))+(1-r)\cos 3(\pi-\alpha)\right)\right])\\
&= a_5^{-1}(a_0+(-a_1)x_1+a_2x_2+(-a_3)x_3+a_4x_4\\
&\quad + (-a_5)\left[x_1x_2+\rho(g_2^{-1}\cdot a,x)\left(r\cos((\pi-\theta)+2\alpha)+(1-r)\cos 3\alpha\right)\right])\\
&= -F_{\sigma(g_2^{-1})(a,z)}(p)\,.
\end{aligned}$$

□

6. Topology of $\mathcal{X}$

在本节中，我们证明引理 4.5 和定理 4.6。

6.1. **引理 4.5 的证明**。首先，映射

$$\Pi_1 : B=(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3)/\hat{G}\to\mathbb{S}^3/\hat{\Pi}_1(\hat{G}),\quad (q_1,q_2)\cdot\hat{G}\mapsto q_1\cdot\hat{\Pi}_1(\hat{G})\,,$$

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 显然定义良好，其中 $(q_1,q_2)\cdot G$ 和 $q_1\cdot\Pi_1(G)$ 表示左陪集。通过纤维上的右作用，这给出了一个主$\mathbb{S}^3$-丛

$$\begin{aligned}
\tau : ((\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3)/\hat{G})\times\mathbb{S}^3 &\to (\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3)/\hat{G},\\
((q_1,q_2)\cdot\hat{G},\ q') &\mapsto (q_1,q'^{-1}q_2)\cdot\hat{G}
\end{aligned}$$

由于该丛的底空间维数为 3，根据障碍理论，它存在一个光滑整体截面 $\mathfrak{s}\colon \mathbb{S}^3/\hat{}\Pi_1(\hat{}\,G)\to(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3)/\hat{}\,G$，即 $\pi\circ\mathfrak{s}=\mathrm{id}^{\mathbb{S}^3/\hat{}\Pi_1(\hat{}\,G)}$。或者，我们将 $(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3)/\hat{}\,G$ 扩张为一个秩为 4 的实向量丛$\mathbf{V}$，其定义在 $\mathbb{S}^3/\hat{}\Pi_1(\hat{}\,G)$ 上，其中 $(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3)/\hat{}\,G\subset\mathbf{V}$ 是单位球面丛。通过对零截面进行扰动，存在一个$\mathbf{V}$ 的截面 $\widetilde{\mathfrak{s}}$，它与$\mathbf{V}$中的零截面$\widetilde{\mathfrak{s}}_0$ 横截，因此按维数计数可知二者不相交；换言之，$\widetilde{\mathfrak{s}}$ 处处非零。于是，$\mathfrak{s}:=\widetilde{\mathfrak{s}}/|\widetilde{\mathfrak{s}}|$ 是 $(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3)/\hat{}\,G$的整体截面。

平凡性　　这个 $\mathbb{S}^3$ 丛由这个整体截面 $\mathfrak{s}$ 得出，它诱导出一个微分同胚

$$\mathbb{S}^3\times(\mathbb{S}^3/\hat{\Pi}_1(\hat{G}))\to(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3)/\hat{G},\quad (q',q\cdot\hat{\Pi}_1(\hat{G}))\mapsto\tau(\mathfrak{s}(q\cdot\hat{\Pi}_1(\hat{G})),q')\,.$$

6.2. **定理 4.6 的证明**。回忆一下 $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}}/\widetilde{G}$，其中 $\widetilde{\mathcal{X}} := S^5 \times \mathbb{D} \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$，由 $(a,\ z,\ z_1+z_2j,\ w_1+w_2j)$ 参数化，且 $G = \mathbb{Z}_2 \times Q_{48}$ 的生成元为 $\widetilde{g}_0$，$\widetilde{g}_1$，和 $\widetilde{g}_2$，它们按照 (4.15) 作用于 $\mathcal{X}$。这里，我们将 $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ 视为单位四元数组成的群，并将任意一点 $(w_1,\ w_2) \in \mathbb{C}^2$ 记作四元数 $w_1 + w_2 j$。

我们将应用附录 C 中的 $\mathcal{X}$，G 以替代其中的 X，H 来构造第一上同调类的庞加莱对偶。

我们首先构造 $\widetilde{G}$-等变函数于 $\widetilde{\mathcal{X}}$，重点考察其第一个 $\mathbb{S}^3$ 因子。

引理 6.1。令 $\epsilon := 2026^{-1}$。定义 v_1、v_2、$v_3 \in C^\infty(\widetilde{\mathcal{X}},\ \mathbb{R})$（它们仅依赖于$(z_1,\ z_2)$），使得

$$v_1 := \mathrm{Re}(z_1^{12} - z_2^{12}), \quad v_2 := \mathrm{Im}(z_1^{12} - z_2^{12}), \quad v_3 := \mathrm{Re}\left(e^{i\epsilon\pi}(z_1 z_2^{13} + z_1^{13} z_2)\right).$$

那么它们满足以下条件：

（i）对于每个 $\ell \in \{1,2,3\}$,

$$-v_\ell(p\widetilde{g}_0) = v_\ell(p\widetilde{g}_1) = v_\ell(p\widetilde{g}_2) = -v_\ell(p), \qquad \forall\, p \in \widetilde{\mathcal{X}}.$$

(ii) $\{v_1 = v_2 = v_3 = 0\} = S^5 \times \mathbb{D} \times Z_{\alpha^3} \times \mathbb{S}^3$，其中 $Z_{\alpha^3} \subset \mathbb{S}^3$ 由 48×7 个点组成；

（iii）在每个 $p \in \{v_1 = v_2 = v_3 = 0\}$处，$\{\nabla v_1\ (p)\ \ \nabla v_2\ (p)\ \ \nabla v_3\ (p)\}$ 在 $T_p\widetilde{\mathcal{X}}^3$中线性无关。

证明。注意，由 (4.15) 以及第4.2节中 $\hat{}g_1, \hat{}g_2$ 的定义可知，

$$(z_1 + z_2 j, w_1 + w_2 j)\hat{g}_1 = (z_1 e^{i5\pi/12} + (z_2 e^{-i5\pi/12})j, w_1 e^{-i\pi/12} + (w_2 e^{i\pi/12})j);$$
$$(z_1 + z_2 j, w_1 + w_2 j)\hat{g}_2 = (-z_2 + z_1 j, w_2 - w_1 j).$$

(i) 可由直接计算得出。对于其余部分，只需仅考虑 (z_1, z_2) 变量。为证明 (ii)，首先注意到 $v_1(z_1, z_2) = v_2(z_1, z_2) = 0$ 等价于 $z_2^{12} = z_1^{12}$，而由于$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$，这就是说，$z_1 = 2^{-1/2}e^{i\theta}$ 和 $z_2 = 2^{-1/2}e^{i(\theta + l\pi/6)}$，其中某个 $l \in \{0, 1, \dots 11\}$。对于每个这样的 l，将其代入 $v_3 = 0$，得到

$$0 = 2\mathrm{Re}(e^{i\epsilon\pi} z_1^{13} z_2) = 2^{-6}\,\mathrm{Re}(e^{i(14\theta + \epsilon\pi + l\pi/6)});$$

对每个 l，该式在 θ 模2π 下有 28 个解。因此，$\{v_1 = v_2 = v_3\}$ 由 $\mathbb{S}^3$中的 $12\times 28 = 48\times 7$ 个点组成。我们将它们记为

(6.1)

$$Z_{\alpha^3} = \left\{ 2^{-1/2}(e^{i\theta}, e^{i(\theta + l\pi/6)}) : 14\theta + (\epsilon + \frac{l}{6})\pi = (\frac{1}{2} + m)\pi,\ l \in \{0, \dots, 11\},\ m \in \{0, \dots, 27\} \right\}.$$

为证明 (iii)，首先注意到每个 v_ℓ 都自然延拓为$\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$上的齐次多项式 V_ℓ。因此，在每个 $p \in \{v_1 = v_2 = v_3 = 0\}$ 处，$p \cdot \nabla_{\mathbb{R}^4} V_\ell(p) = 0$，从而 $\nabla_{\mathbb{R}^4} V_\ell(p) = \nabla v_\ell(p)$。根据引理 D.1，只需验证在 p 处，$\partial_z(z_1^{12} - z_2^{12})$ 和 $\partial_z(z_1 z_2^{13} + z_1^{13} z_2)$ 在 $\mathbb{C}^2$ 中是 $\mathbb{C}$-线性无关的。直接计算即可证明这一点。□

另一类 $\widetilde{G}$-等变函数来自 $S^5 \times \mathbb{S}^3$ 方向。

引理 6.2. 定义 $f_0, \dots, f_4 \in C^\infty(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ 如下

$$f_0 = a_0, \quad f_1 + if_2 = (\bar{z}_1^6 + z_2^6)(a_1 + ia_2), \quad f_3 + if_4 = (\bar{z}_1^4 + z_2^4)(a_3 + ia_4).$$

它们满足以下性质：

(i) 对于每个 $p \in \mathcal{X}$、$0 \le \ell \le 4$ 和 $0 \le m \le 2$、$f_\ell(p\widetilde{g}_m) = \phi_\ell(\widetilde{g}_m) f_\ell(p)$，对于由以下列表确定的某个 $\phi_\ell(\widetilde{g}_m) \in \{\pm 1\}$,

	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
$\widetilde{g}_0$	-1	-1	-1	-1	-1
$\widetilde{g}_1$	1	-1	-1	1	1
$\widetilde{g}_2$	1	-1	1	-1	1

(ii) 对于引理 *6.1* 中的每个 $(z_1、\ z_2) \in Z_{\alpha^3}$，

$$\{a \in S^5 : f_\ell(a, z, z_1 + z_2 j, w_1 + w_2 j) = 0,\ \forall\, 0 \le \ell \le 4\} = \{(0,0,0,0,0,\pm 1)\}$$

并且在该集合中的每一点，$\{\nabla_{S^5} f_\ell\}_{0\le\ell\le 4}$ 线性无关。

证明。 与引理 6.1 类似，(i) 可通过直接验证得到。为证明 (ii)，注意到对于固定的 (z_1, z_2)，f_ℓ 是 $\mathbb{R}^6$ 上与a_5变量无关的线性函数在 S^5 上的限制。因此，只需证明

$$(\bar{z}_1^6 + z_2^6) \neq 0, \qquad (\bar{z}_1^4 + z_2^4) \neq 0$$

对于每个 $(z_1, z_2) \in Z_{\alpha^3}$ 来自引理 6.1。这也可通过对 (6.1 进行直接计算得到). □

~定理 *4.6* 的证明。 我们将推论 C.2 应用于 $v_1, v_2, v_3, f_0, \dots, f_4 \in C^\infty(\mathcal{X})$。注意，引理 6.1 (iii) 和引理 6.2 (ii) 共同蕴含推论 C.2 中的线性无关假设。此外，由引理 6.1 (i) 和引理 6.2 (i) 可知，与 v_1, v_2, v_3对应的上同调类均为 $c_1^* + c_2^* = \alpha$，而与 f_ℓ 对应的上同调类具有形式 $c_0^* + d_\ell^*$，其中某个$d_\ell^* \in$张成$\{c_1^*, c_2^*\}$。因此，推论 C.2 得出 $(\smile_{\ell=0}^4 (c_0^* + d_\ell^*)) \smile \alpha^3 \in H^8(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ 的庞加莱对偶为

$$Z := \{v_1 = v_2 = v_3 = f_0 = \cdots = f_4 = 0\}/\widetilde{G} = (\{(0, \dots, 0, \pm 1)\} \times \mathbb{D} \times Z_{\alpha^3} \times \mathbb{S}^3)/\widetilde{G} \subset \mathcal{X}\,.$$

另请回忆，$\pi\colon \mathcal{X} \to B := (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)/\hat{}G$, $(a, z, z_1 + z_2 j, w_1 + w_2 j) \cdot \widetilde{G} \mapsto (z_1 + z_2 j, w_1 + w_2 j) \cdot \hat{}_G$是一个纤维丛；而根据引理 4.5，$\Pi_1\colon B \to \mathbb{S}^3/\hat{}\Pi_1(\hat{}G)$, $(q_1, q_2) \cdot \hat{}^G \mapsto q_1 \cdot \hat{}\Pi(\hat{}G)$ 是一个平凡$\mathbb{S}^3$-丛，并且 $\beta = \pi^*\beta_B$ 其中 $\beta_B \in H^3(B, \mathbb{Z}_2)$ 是纤维丛 Π_1 的一个截面 B_0 的庞加莱对偶。令 $\hat{}\ B_0$ 为 B_0 在 $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \to B$下的逆像。因此，$(\smile_{\ell=0}^4 (c_0^* + d_\ell^*)) \smile \alpha^3 \smile \beta \in H^{11}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ 的庞加莱对偶是

$$Z \cap \pi^{-1}(B_0) = \left(\{(0, \dots, 0, \pm 1)\} \times \mathbb{D} \times (Z_{\alpha^3} \times \mathbb{S}^3 \cap \hat{B}_0)\right)/\widetilde{G}\,,$$

~它由位于 π 的纤维中的 $= 7$ 个 $\mathbb{D}$ 的副本组成，即 $(2 \times 48 \times 7)/(\#G)\colon \mathcal{X} \to B$，每个副本都与上文定理 4.6 前定义的 D_0 同调。因此，我们有

$$[\mathcal{X}] \frown \left((\smile_{\ell=0}^4 (c_0^* + d_\ell^*)) \smile \alpha^3 \smile \beta\right) = 7[D_0] = [D_0]\,, \quad \text{in } H_2(\mathcal{X}, \partial\mathcal{X}; \mathbb{Z}_2)\,.$$

最后，我们断言 $(\smile_{\ell=0}^4 (c_0^* + d_\ell^*)) \smile \alpha^3 \smile \beta = \lambda^5 \smile \alpha^3 \smile \beta$ 属于 $H^{11}(\mathcal{X},\ \mathbb{Z}_2)$，这就完成了定理 4.6 的证明。为此，注意到根据定义 $\lambda = c_0^* + c_1^* + c_2^*$，并且存在 $c_{1,\ B}^*,\ c_{2,\ B}^* \in H^1(B,\ \mathbb{Z}_2)$，使得 $\pi^* c_{l,\ B}^* = c_l^*$, $l = 1,\ 2$。因此，$\alpha^3 \smile \beta = \pi^*(\alpha_B^3 \smile \beta_B)$，并且存在一些 $d_{\ell,\ B} \in H^1(B,\ \mathbb{Z}_2)$，使得

$$(\smile_{\ell=0}^4 (c_0^* + d_\ell^*)) \smile \alpha^3 \smile \beta = (\smile_{\ell=0}^4 (\lambda + \pi^* d_{\ell,B})) \smile \pi^*(\alpha_B^3 \smile \beta_B) = \lambda^5 \smile \pi^*(\alpha_B^3 \smile \beta_B)\,,$$

其中最后一个等式是由 $d_{\ell,\ B} \smile (\alpha_B^3 \smile \beta_B) = 0$ 对每个 ℓ 都成立得出的，因为 $\dim B = 6 < 7$。至此，断言的证明完成。□

7. Properties of the family Ξ

在本节中，我们证明定理 4.7。

首先，定理 4.7 的 (1) 和 (2) 由定义和定理 4.2 立即得出。

对于 (3)，由于 $\Xi|_C$ 映射到 $\mathcal{S}_2(S^3)$，由 (1) 可知，C 必定属于子集 $(\{\rho \neq 0\} \times \mathbb{D} \times SO(4))/D_{24}$。因此，$[C] \in H_1(\mathcal{X})$ 没有 c_0 分量（回顾第4.4节中的记号）。接着，由于 $\alpha := c_1^* + c_2^*$，我们有 $[C] = c_1$ 或 c_2.。现在，在 $SO(4)$ 中取一条嵌入路径 $\bar{\sigma}_1(t)$（分别地，$\bar{\sigma}_2(t)$），使其满足 $t \in [0, 1]$，并从 id 出发，终止于点 g_1（分别地，g_2）：关于 $g_i \in SO(4)$ 的定义，见第4.2节。于是，$t \mapsto ([0 : \cdots : 0 : 1], 0, \bar{\sigma}_i(t))$ 在 $\mathbb{RP}^5 \times \mathbb{D} \times SO(4)$ 中的路径下降为 $\mathcal{X}$ 中的一条环路，我们将其记为 σ_i。令 $x_0 \in \mathcal{X}$ 为 $\tilde{x}_0$（由 (4.16) 定义）在~映射 $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 下的像。注意，两条环路 σ_1、σ_2 都以 x_0 为基点，而 σ_i 诱导出同调类 $c_i \in H_1(\mathcal{X})$。

注意， $\Xi(x_0)$ 具有如下形式： $\{x_1x_2+\rho([0:.....:0:1],\ x)\cos 3\alpha=0\}$，利用引理 5.7 (3) 可以很容易证明其亏格为 2。接着，由于环路 $\Xi|_{\sigma_1}$ 和 $\Xi|_{\sigma_2}$ 中的所有元素都只是 $\Xi(x_0)$ 的旋转，因此它们的亏格均为 2。因此，回想一下， $\mathcal{Z}_2(S^3;\mathbb{Z}_2)$ 中一个环路是否为 Almgren-Pitts 1-扫掠，仅取决于其同调类，不妨假设 C 恰好是环路 σ_1 或 σ_2。因此，只需检验 $\Xi|_{\sigma_i}$ 是否为 $i=1,\ 2$ 的 1-扫掠。也就是说，若对每个 t，我们连续地为 $\Xi(\sigma_i(t))$ 选取内部区域和外部区域，那么 $\Xi(\sigma_i(0))$ 的内部区域应与 $\Xi(\sigma_i(1))$ 的外部 区域一致。为此，回想一下 (4.10)、(5.10) 和 (5.11)，

$$\Xi(\sigma_i(t))=\bar{\sigma}_i(t)\cdot\Psi([0:\cdots:1],0)=\partial\left(\bar{\sigma}_i(t)(\{F_{[0:\cdots:1],0}>0\})\right)=\partial\{F_{[0:\cdots:1],0}\circ\bar{\sigma}_i(t)>0\}.$$

因此， $t\mapsto\Omega_i(t)=\{F_{[0:\cdots:1],0}\circ\bar{\sigma}_i(t)>0\}$ 是一个由 $\Xi|_{\sigma_i}$围成的连续区域族。但根据引理 5.10 和 (4.11)，

$$F_{[0:\cdots:1],0}\circ\bar{\sigma}_i(1)=F_{[0:\cdots:1],0}\circ g_i=-F_{\sigma(g_i^{-1})([0:\cdots:1],0)}=-F_{[0:\cdots:1],0}\circ\bar{\sigma}_i(0).$$

因此 $\Omega_i(1)\overset{\text{整数集}}{=}(S^3\backslash\Omega_i(0))$。这表明 $\Xi|_{\sigma_i}$ 是一个 Almgren-Pitts 1-扫掠，对于 $i=1,2$.

对于 (4)，只需证明 $\lambda:=c_0^*+c_1^*+c_2^*$ 等于 $\Xi^*(\lambda)$，其中 λ 是循环空间上同调环的生成元，$H^*(\mathcal{Z}_2(S^3;\mathbb{Z}_2);\mathbb{Z}_2)$。因此，由于 c_0,c_1,c_2 生成 $H_1(\mathcal{X})$，只需证明对于每个 i，若 $C\subset\mathcal{X}$ 是表示 c_i的某个环路，则 $\Xi|_C$ 是一个 1-扫掠。对于 c_0，我们选取位于纤维 $\mathcal{X}|_{[\mathrm{id}]}\cong\mathbb{RP}^5\times\mathbb{D}$ 中且由下式给出的环路

$$C=\{[a_0:a_1:0:...:0]:a_0^2+a_1^2=1\}\times\{0\}.$$

那么 $\Xi|_C$ 就是族 $\{x\in S^3:a_0+a_1x_1=0\}$，显然是一个 1-扫掠。此外， c_1 和 c_2 的情形已在上面对条目 (3) 的证明中完成。至此，条目 (4) 的证明结束。

为证明定理 4.7 (5)，我们首先需要在 S^3 中引入霍普夫链环。令 $L:=\beta_+^H\sqcup\beta_-^H\subset S^3$ 为 S^3 中的标准霍普夫链环，它由两个大圆组成

$$\beta_+^H:=\{(x_1,x_2,0,0):x_1^2+x_2^2=1\},\qquad\beta_-^H:=\{(0,0,x_3,x_4):x_3^2+x_4^2=1\}.$$

记 $\mathcal{E}(L,S^3):=$微分同胚群(S^3)/微分同胚群(S^3,L)，其中 $\mathrm{Diff}(S^3,L)$ 表示所有满足 $\phi(L)=L$ 的微分同胚 $\phi\in\mathrm{Diff}(S^3)$ 构成的子群（关于 $\mathcal{E}(L,S^3)$ 的拓扑，参见附录 E.1）。为避免混淆，我们可以将 $\mathcal{E}(L,S^3)$ 的每个元素视为 S^3 中的一个链环，称为光滑霍普夫链环。我们有时也会考虑由分段光滑线段组成的霍普夫链环：所有分段光滑霍普夫链环构成的集合记为 $\check{\mathcal{E}}(L,S^3)$。

接下来，令 $\mathcal{U}\subset\mathcal{S}_1(S^3)$ 表示所有满足以下意义下的无扭结元素 $S\in\mathcal{S}_1(S^3)$ 构成的集合：设 $\Omega,\ \Omega'\subset S^3$ 是两个开区域，其拓扑边界为 S（使得 $\Omega\sqcup\Omega'=S^3\backslash S$）。那么存在光滑嵌入环 $\alpha\subset\Omega$ 和 $\beta\subset\Omega'$，它们构成一个霍普夫链环。在这种情况下，我们称 S 围成霍普夫链环 $\alpha\cup\beta$。以下事实将会有所帮助，其证明见附录 E.2。

命题 7.1。 设 $\Phi:\ [0,1]\to\mathcal{S}_1(S^3)$ 是一个 *Simon–Smith* 族，使得 $\Phi(0)\in\mathcal{U}$。那么，对于每个 $t\in[0,1]$，均有$\Phi(t)\in\mathcal{U}$。

定理 4.7 (5) 的关键 如下命题。设 $\partial_1\mathcal{X}:=\{y\in\partial\mathcal{X}:\ \mathfrak{g}(\Xi(y))=1\}$.

命题 7.2。 存在一个连续映射 $\Upsilon:\ \partial_1\mathcal{X}\to\mathcal{E}(L,S^3)$，具有以下性质。

(i) 对于每个 $y\in\partial_1\mathcal{X}$， $\Xi(y)\in\mathcal{U}$ 和 $\Upsilon(y)$ 都是由 $\Xi(y)$ 界定的霍普夫链环。*(ii)* $\Upsilon_*[\partial D_0]\neq0$ 在 $H_1(\mathcal{E}(L,S^3);\mathbb{Z}_2)$ 中（关于 D_0，回顾 *(4.17)*）。*(iii)* 若 $\vartheta\in H_1(\partial_1\mathcal{X},\mathbb{Z}_2)$ 满足 $\iota_*\vartheta=0$ 在 $H_1(\partial\mathcal{X},\mathbb{Z}_2)$ 中，其中 $\iota:\ \partial_1\mathcal{X}\hookrightarrow\partial\mathcal{X}$ 是自然包含，则 $\Upsilon_*\vartheta=0$ 在 $H_1(\mathcal{E}(L,S^3);\mathbb{Z}_2)$ 中。

假设这一命题成立，我们便可轻松完成定理 4.7 (5) 的证明：设 $C \subset \partial\mathcal{X}$ 是一个与 ∂D_0 在 $\partial\mathcal{X}$ 中同调的闭 1-子复形，并且（由于 C 在 Ξ 的作用下被映射到 $\mathcal{S}_1(S^3)$ 中）$C \subset \partial_1\mathcal{X}$。于是根据命题 7.2，我们有

$$\Upsilon_*[C] = \Upsilon_*[\partial D_0] \neq 0\,, \quad \text{in } H_1(\mathcal{E}(L, S^3), \mathbb{Z}_2)\,. \tag{7.1}$$

现在，我们反设存在某个纯单纯 2-复形 W，以及一个 Simon–Smith 族 $\Phi : W \to \mathcal{S}_1(S^3)$，使得 $\partial W = C$ 和 $\Phi|_{\partial W} = \Xi|_C$。根据命题 7.1，通过适当减去 W 中不与 C 相交的连通分支，我们不妨设 $\Phi(W)$ 仅由平凡打结元素组成，从而 $\Phi(W) \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{S}_1(S^3)$。事实上，随后可将 $\Upsilon|_{\partial W}$ 延拓为连续映射 $\bar{\Upsilon} : W \to \mathcal{E}(L,\ S^3)$：参见附录中的引理 E.4，其证明是利用 Simon–Smith 族的基本性质以及空间 $\mathcal{E}(L,\ S^3)$ 的拓扑性质得到的初等论证。因此，$\Upsilon_*[C] = \Upsilon_*[\partial W] = 0$ 属于 $H_1(\mathcal{E}(L,\ S^3);\ \mathbb{Z}_2)$，这与 (7.1) 矛盾。于是我们得到了定理 4.7 (5)。

本节余下部分将用于证明命题 7.2。映射 Υ 将首先沿着 $\partial_1\mathcal{Y} := (\mathbb{RP}^5 \times \partial\mathbb{D}) \cap \Psi^{-1}(\mathcal{S}_1(S^3))$ 构造，然后通过旋转将其扩展到 $\partial_1\mathcal{X}$（见引理 7.12 及其上文的讨论）。在深入细节之前，我们先在此勾勒主要思路。我们将定义一些空间 $\bar{\tau}$ 和 $\mathrm{UConf}_4(\tau)$，以及它们之间的一些映射：

$$\begin{array}{ccccc} \partial\mathcal{X} & & \xrightarrow{\quad\Theta_\tau\quad} & & \bar{\tau} \\ {\scriptstyle\iota}\uparrow & & & & \uparrow{\scriptstyle\mathcal{P}_\tau} \\ \partial_1\mathcal{X} & \xrightarrow{\mathcal{M}_\tau} & \widehat{\mathrm{UConf}}_4(\tau) & \xrightarrow{\Upsilon'_\tau} & \mathcal{E}(L, S^3) \end{array} \tag{7.2}$$

除 $\mathcal{E}(L, S^3)$ 外，所有这些空间都是 $B := SO(4)/D_{24}$ 上的纤维丛；所有映射都先沿各个纤维分别构造，再通过 $SO(4)$ 的旋转扩展到整个纤维丛。构造这些映射时将确保满足以下条件。

- $(\mathcal{P}_\tau)_* : H_1(\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\tau);\ \mathbb{Z}_2) \to H_1(\bar{\tau};\ \mathbb{Z}_2)$ 是单射（引理 7.6）。
- $\Theta_\tau \circ \iota \simeq \mathcal{P}_\tau \circ \mathcal{M}_\tau$ 作为映射 $\partial_1\mathcal{X} \to \bar{\tau}$（引理 7.10），其中 $\simeq$ 表示所涉及的两个映射同伦。
- $\Upsilon'_\tau \circ \mathcal{M}_\tau \simeq \Upsilon$ 作为映射 $\partial_1\mathcal{X} \to \mathcal{E}(L,\ S^3)$（引理 7.12）。

基于这些事实，命题 7.2 的 (iii) 随即通过对图表作形式上的追踪得出，具体证明将在 §7.5 中给出。

在本节中，我们令 $G \subset SO(4)$ 为由 $g_1,\ g_2$ 生成的 24 阶二面体子群，这些元素在第 4.2 节中定义（作用在 $\mathbb{R}^4$ 上的具体描述见 (4.7)、(4.8)）。

记号 7.3。若 $\eta : G \to \mathrm{Diff}(F)$ 是 G 在流形 F 上的一个左作用，我们记 $SO(4) \times_\eta F := (SO(4) \times F)/G$，其中 $SO(4) \times F$ 上的右 G-作用定义为，

$$(R, v) \cdot g := (Rg, \eta(g)^{-1}v), \quad \forall\, g \in G\,.$$

这给出了一个纤维丛，其底空间为 $B := SO(4)/G$，纤维为 F，全空间为 $SO(4) \times_\eta F$：这称为 $SO(4) \to B$ 的伴随丛，纤维为 F。我们将 $(R, v) \cdot G$ 用来表示 $SO(4) \times_\eta F$ 中由 $(R, v) \in SO(4) \times F$ 表示的元素。

7.1. 配置空间。我们首先介绍一些与 $\mathbf{S}^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 的配置空间相关的术语。定义 $\mathbf{S}^1$ 中 4 个点的无序配置空间为

$$\mathrm{UConf}_4(\mathbf{S}^1) := \{Z \subset \mathbf{S}^1 : \#Z = 4\}\,.$$

对我们而言，使用空间 $\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1)$ 更为方便；它是其双覆盖，由所有满足以下性质的三元组 $(Z; \mu^+, \mu^-)$ 构成：

- $Z \in \mathrm{UConf}_4(\mathbf{S}^1)$，且 μ^+ 和 $\mu^- \subset \mathbf{S}^1$ 都由 2 个点组成；

- $\mu^+ \cap \mu^- = \emptyset$，$\mu^+ \cup \mu^-$ 包含$\mathbf{S}^1 \setminus Z$的 4 个连通分支各自的中点；
- 对于 $i \in \{\pm\}$，μ^i 中的两个点位于$\mathbf{S}^1 \setminus Z$的两个不相邻连通分支上。

显然，根据定义，$(Z; \mu^+, \mu^-) \mapsto Z$ 给出了一个双覆盖 $\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1) \to \mathrm{UConf}_4(\mathbf{S}^1)$。我们借助此覆盖在 $\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1)$上赋予拓扑。

注 7.4。众所周知，$\mathrm{UConf}_n(\mathbf{S}^1)$ 同胚于一个以 S^1 [Mor67], 为底空间的开（$n-1$）-球丛，其中投影映射 $\mathrm{UConf}_n(\mathbf{S}^1) \to \mathbf{S}^1$ 由将 n个点相加给出（回忆$\mathbf{S}^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$）。

引理 7.5。对于任意 $(Z;\ \mu^+,\ \mu^-) \in \widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1)$，$\sum \mu^+ = \pi + \sum \mu^-$。

这里 $\sum A$ 表示 $A \subset \mathbf{S}^1$，中各元素之和，这是一个定义良好的元素，属于 $\mathbf{S}^1$.

证明。根据定义可知 $2\sum \mu^+ = 2\sum \mu^-$，因此 $\sum \mu^+ = \sum \mu^-$ 或 $\pi + \sum \mu^-$。接着，利用注 7.4 中说明的 $\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1)$ 的路径连通性以及连续性论证，只需对 $(Z;\ \mu^+, \mu^-)$, 的任意一种取法验证 $\sum \mu^+ = \pi + \sum \mu^-$ 即可，这是一项平凡的任务。□

我们考虑由以下元素生成的 $\mathbf{S}^1$ 上的左 G-作用 ϱ

$$\varrho(g_1) : \alpha \mapsto \alpha + \pi/3\,, \qquad \varrho(g_2) : \alpha \mapsto \pi - \alpha\,. \tag{7.3}$$

它在 $\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1)$ 上诱导出一个由以下元素生成的 G-作用

$$\hat{\varrho}(g_i) : (Z; \mu^+, \mu^-) \mapsto \big(\varrho(g_i)(Z); \varrho(g_i)(\mu^-), \varrho(g_i)(\mu^+)\big), \quad i \in \{1, 2\}\,. \tag{7.4}$$

容易验证，这是 $\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1)$ 上定义良好的 G-作用。我们还令 $\bar{\varrho}$ 表示由以下元素生成的 $\mathbf{S}^1$ 上的左 G-作用

$$\bar{\varrho}(g_1) : \alpha \mapsto \alpha - \pi/3\,, \qquad \bar{\varrho}(g_2) : \alpha \mapsto \pi - \alpha\,. \tag{7.5}$$

然后，定义 B 上的以下丛：

$$\tau := SO(4) \times_{\varrho} \mathbf{S}^1\,, \quad \bar{\tau} := SO(4) \times_{\bar{\varrho}} \mathbf{S}^1\,, \quad \widehat{\mathrm{UConf}}_4(\tau) := SO(4) \times_{\hat{\varrho}} \widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1)\,.$$

引理 7.6。映射

$$\mathcal{P}_\circ : \widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1) \to \mathbf{S}^1, \quad (Z; \mu^+, \mu^-) \mapsto \sum \mu^-\,, \tag{7.6}$$

是 G-等变的（注意该和在模 2π 的意义下是良定义的），其中 G 在左侧通过 $\hat{}\varrho$ 作用，在右侧通过 $\bar{\varrho}$ 作用。

因此它诱导出一个良定义映射

$$\mathcal{P}_\tau : \widehat{\mathrm{UConf}}_4(\tau) \to \bar{\tau}, \quad (R, (Z; \mu^+, \mu^-)) \cdot G \mapsto (R, \mathcal{P}_\circ(Z; \mu^+, \mu^-)) \cdot G\,. \tag{7.7}$$

此外，$(\mathcal{P}_\tau)_*$： $H_1(\mathrm{UConf}_4(\tau)\ \mathbb{Z}_2) \to H_1(\bar{\tau}, \mathbb{Z}_2)$ 是单射。

证明。 $\mathcal{P}_\circ$ 的 G-等变性可通过直接计算得到：注意

$$\mathcal{P}_\circ\hat{\varrho}(g_1)(Z; \mu^+, \mu^-) = \mathcal{P}_\circ(Z + \pi/3; \mu^- + \pi/3, \mu^+ + \pi/3) = 2\pi/3 + \sum \mu^+,$$
$$\bar{\varrho}(g_1)\mathcal{P}_\circ(Z; \mu^+, \mu^-) = \bar{\varrho}(g_1)(\sum \mu^-) = -\pi/3 + \sum \mu^-.$$

根据注 7.4，这两个表达式相同。对于 g_2，计算是类似的。因此，映射 $\mathcal{P}_\tau$ 是良定义的，接下来只需证明 $(\mathcal{P}_\tau)_*$ 的单射性。

在此处及下文中，我们使用 $\mathbb{Z}_2$ 系数。首先，考虑该图表。

$$\begin{array}{ccccc} H_1(\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1)) & \xhookrightarrow{\hat{i}_*} & H_1(\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\tau)) & \xrightarrow{\hat{\pi}_*} & H_1(B) \\ \downarrow{\scriptstyle (\mathcal{P}_\circ)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathcal{P}_\tau)_*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ H_1(\mathbf{S}^1) & \xhookrightarrow{i_*} & H_1(\bar{\tau}) & \xrightarrow{\pi_*} & H_1(B) \end{array} \tag{7.8}$$

注意，根据构造，我们看到 $\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\tau)$ 是一个以 B 为底空间的 $\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1)$-纤维丛，因此映射 $\hat{i}$ 仅表示到某个固定纤维中的包含映射，而 $\hat{\pi}$ 表示投影映射；对于 i 和 π 也同样如此。由 G- 等变性可知，$\mathcal{P}_\circ$ 很容易推出上图。此外，我们断言

(a) $\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1)$ is path-connected, and $(\mathcal{P}_\circ)_* : H_1(\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1)) \to H_1(\mathbf{S}^1)$ is bijective.
(b) $i_* : H_1(\mathbf{S}^1) \to H_1(\bar{\tau})$ is injective;

我们先假设这两个断言成立，并完成证明。由于 B 是路径连通的，下面的引理 7.7 表明水平序列是正合的。因此，如果 $a \in \ker(\mathcal{P}_\tau)_*$，那么根据 $\hat{\pi}_* a = 0$，存在 $v \in H_1(\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1))$ 使得 $\hat{i}_* v = a$。由于 $i_* \circ (\mathcal{P}_\circ)_* v = (\mathcal{P}_\tau)_* a = 0$，根据两个断言中的单射性结论，我们看到 $v = 0$，从而 $a = i_* v = 0$。引理的证明至此完成。

引理 7.7。设 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ 是一个纤维丛，其中 B 和 F 都是路径连通的。那么，包含映射和投影诱导出一个正合序列

$$H_1(F, \mathbb{Z}_2) \to H_1(E, \mathbb{Z}_2) \to H_1(B, \mathbb{Z}_2) \to 0\,.$$

证明。考虑该纤维化的、以 $\mathbb{Z}_2$为系数的 Serre 谱序列。由五项正合列 [DK01，推论 9.14]，，我们得到正合序列:

$$H_0(B; H_1(F)) \to H_1(E) \xrightarrow{\pi_*} H_1(B) \to 0\,.$$

此外，将任意 $b \in B$处的纤维记为 F_b，

$$H_0(B; H_1(F)) \cong H_1(F_b)_{\pi_1(B)} := H_1(F_b)/\langle g \cdot x - x | g \in \pi_1(B, b), x \in H_1(F_b)\rangle\,;$$

满射 $H_1(F_b) \to H_0(B; H_1(F))$ 与映射 $H_0(B; H_1(F)) \to H_1(E)$ 的复合，是由包含映射 $F_b \hookrightarrow E$ 诱导的同态。这就证明了该引理。□

现在来证明这两个断言。

(a) 的证明。由注 7.4 可直接得出路径连通性。令 $\gamma \subset \widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1)$ 表示由所有可能的三元组 $(Z; \mu^+, \mu^-)$ 构成的环路，其中 Z 由$\mathbf{S}^1$上的 4 个等距点组成。注意，根据注 7.4 中的讨论，很容易得出 $\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1)$ 可以变形收缩到 γ。另一方面，根据定义不难验证，$\mathcal{P}_\circ \circ \gamma$生成 $H_1(\mathbf{S}^1)$。因此，$(\mathcal{P}_\circ)_*$ 是双射，证毕。

□

证明 (b)。考虑由以下元素生成的 H 在 $\mathrm{Diff}((\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3) \times \mathbb{R})$ 中的子群

$$h_0 : (\mathbf{q}, \widetilde{\alpha}) \mapsto (\mathbf{q}, \widetilde{\alpha} + 2\pi)\,, \quad h_1 : (\mathbf{q}, \widetilde{\alpha}) \mapsto (\mathbf{q}\hat{g}_1^{-1}, \widetilde{\alpha} - \pi/3)\,, \quad h_2 : (\mathbf{q}, \widetilde{\alpha}) \mapsto (\mathbf{q}\hat{g}_2^{-1}, \pi - \widetilde{\alpha})\,.$$

（回顾第4.2节中 $\hat{g}_i$ 的定义。）这给出了 H 在 $(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3) \times \mathbb{R}$ 上的自然右作用，而且显然，

$$\bar{\tau} = SO(4) \times_{\bar{\varrho}} \mathbf{S}^1 := (SO(4) \times \mathbf{S}^1)/(R, v) \sim (Rg, \bar{\varrho}(g)^{-1} v) = (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R})/H\,.$$

我们将验证 H 在（$\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$）$\times \mathbb{R}$ 上自由作用，并验证由 h_0、h_1、h_2诱导的生成元所对应的阿贝尔化 $H_{ab} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$。完成这些后，我们知道 π_1（$\bar{\tau}$）$= H$，并且由于 h_0 显然

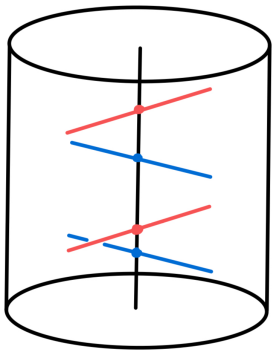


FIGURE 3. 经过适当的边界识别后，圆柱就是 S^3。于是红色部分构成一个环路，蓝色部分也构成一个环路。它们共同构成一个形如$\Upsilon'_\circ(Z;\mu^+,\ \mu^-)$。的链环

表示 τ 的纤维 $\mathbf{S}^1$ 中的一个环路，该环路生成 $\pi_1(\mathbf{S}^1)$，因此我们将得到 i_*的单射性：$H_1(\mathbf{S}^1,\ \mathbb{Z}_2)\ \to H_1(\bar{\tau},\ \mathbb{Z}_2)$。首先，根据定义，很容易验证

$$h_1^{24}h_0^4=\mathrm{id}\,,\quad h_1^{12}h_0^2=h_2^2\,,\quad h_1h_2=h_2h_1^{-1}\,,\quad h_0h_1=h_1h_0\,,\quad h_0h_2=h_2h_0^{-1}\,.$$

这些就是所有的关系，它们将 H 确定为由 h_0、h_1、h_2生成的自由群的商，因为任何其他关系都可以通过交换 h_0、h_1、h_2 并进行约消，化为某个 $h_0^ah_1^bh_2^c=1$，其中 $a\in\mathbb{Z}$、$0\le b\le 23$、$c\in\{0,1\}$。但根据 h_i 的定义可以直接验证，这会推出 $a=b=c=0$。现在由该关系显然可知，映射

$$H_{ab}\to\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\,,\quad [h_0]\mapsto(1,0,0),\ \ [h_1]\mapsto(0,1,0),\ \ [h_2]\mapsto(0,0,1)\,,$$

是一个良定义的同构。

此外，H 中的一般元素可写成 $h_0^ah_1^bh_2^c$，其中 $a\in\mathbb{Z}$、$0\le b\le 23$、$c\in\{0,1\}$。若它有不动点，则 $\hat{}g_1^b\hat{}g_2^c$ 在 $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$上有不动点，这迫使 $b=c=0$；进而 h_0^a 有不动点，从而得到 $a=0$。因此，H 在 $(\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3)\times\mathbb{R}$上自由作用。□

引理 7.6 的证明至此完成。 □

7.2. 经过中点的霍普夫链环 I：映射 Υ'_τ。我们将定义一个映射 $\check{}\,\Upsilon'_\tau$，从 $\widehat{\ \ \ }\mathrm{UConf}_4(\mathbf{S}^1)$ 到分段光滑霍普夫链环空间 $\check{}\mathcal{E}(L,S^3)$，然后将其光滑化，使其成为一个映射 Υ'_τ，映入 $\mathcal{E}(L,S^3)$。我们将继续使用由 (5.1) 给出的 S^3 参数化。注意，G 在 S^3 上的作用通过旋转霍普夫链环，在 $\mathcal{E}(L,S^3)$ 上诱导出一个 G 作用；并回忆一下，G 按照 (7.4) 作用于$\widehat{\ \ \ }\mathrm{UConf}_4(\mathbf{S}^1)$。

引理7.8。以下给出了一个良定义的 G-等变映射：

$$\begin{aligned}\check{\Upsilon}'_\circ:\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1)&\to\check{\mathcal{E}}(L,S^3)\,,\\ (Z;\mu^+,\mu^-)&\mapsto\{(t,t,\alpha):|t|\le1,\alpha\in\mu^+\}\cup\{(t,-t,\alpha):|t|\le1,\alpha\in\mu^-\}\end{aligned}\tag{7.9}$$

（见图3）。作为推论，它诱导出一个良定义映射

$$\check{\Upsilon}'_\tau:\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\tau)\to\check{\mathcal{E}}(L,S^3),\quad (R,(Z;\mu^+,\mu^-))\cdot G\mapsto R\big(\check{\Upsilon}'_\circ(Z;\mu^+,\mu^-)\big)\,.\tag{7.10}$$

证明。根据$\hat{}\varrho$ 的定义和（7.9），

$$\check{\Upsilon}'_\circ(\hat{\varrho}(g_1)(Z;\mu^+,\mu^-))=\{(t,t,\alpha):|t|\le1,\alpha\in\varrho(g_1)(\mu^-)\}\cup\{(t,-t,\alpha):|t|\le1,\alpha\in\varrho(g_1)(\mu^+)\},$$

而利用 (4.9)，我们有

$$g_1(\check{}\,\Upsilon'_\circ(Z;\ \mu^+,\mu^-))\ =\{(-t,t,\alpha+\pi/3):|t|\le1,\alpha\in\mu^+\}\cup\{(t,t,\alpha+\pi/3):|t|\le1,\alpha\in\varrho(g_1)(\mu^-)\},$$

很容易看出这两个表达式相同。对于 g_2的作用，验证过程类似。□

最后，我们以一种 G-等变的方式，将由 (7.9) 定义的所有霍普夫链环平滑化，从而得到一个映射Υ'_τ: $\widehat{\mathrm{UConf}_4}(\tau) \to \mathcal{E}(L,\ S^3)$。

7.3. 由零点确定的构形。回顾 §4.1 中指定的 7参数族 $\Psi:\ \mathbb{RP}^5\times\mathbb{D}\to\mathcal{S}_{\le 2}(S^3)$。记 $\mathcal{Y}:=\mathbb{RP}^5\times\mathbb{D}$。令 $\partial_1\mathcal{Y}\subset\partial\mathcal{Y}$ 为 y 的子集，满足$\mathfrak{g}(\Psi(y))=1$。回顾一下，在 (4.11) 中定义了 $\mathcal{Y}$ 上的一个左 G-作用，使得 Ψ G为等变的（见引理 5.10）。注意，集合 $\partial\mathcal{Y},\ \partial_1\mathcal{Y}$ 在此作用下均保持不变。

现在，回顾 §5.4，对于每个 $(a,\ z)=(a,\ re^{i\theta})\in\mathcal{Y}$ 属于 $\{a_5\neq 0\}\times\mathbb{D}\subset\mathbb{RP}^5\times\mathbb{D}$的情形，我们考虑了 S^3 上的实函数 $F_{a,\ z}$（以 $(x,\ \alpha)$ 为参数），其定义如下

$$\begin{aligned}F_{a,re^{i\theta}}(x,\alpha):=a_5^{-1}\Big(&a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4\\&+a_5\left[x_1x_2+\rho(a,x)\left(r\cos(\theta+2\alpha)+(1-r)\cos 3\alpha\right)\right]\Big),\end{aligned}\tag{7.11}$$

并且，在（4.2）下，$F_{a,z}$的零点集定义了 $\Psi(a,z)$。注意 $\partial_1\mathcal{Y}\subset\{a_5\neq 0\}\times\partial\mathbb{D}$。在引理 5.9 中，对于每个满足函数 $\rho(a,\cdot)$并非恒为零的$(a,z)\in\mathcal{Y}$，我们得到了映射$\mathbf{x}_a\in C^\infty(\mathbf{S}^1,\mathbf{D})$，它具有以下性质：

- $$\nabla_x F_{a,z}(x,\alpha)=0\quad\Leftrightarrow\quad x=\mathbf{x}_a(\alpha).\tag{7.12}$$
- 考虑映射

$$f:\mathcal{Y}\cap\{\rho(a,\cdot)\not\equiv 0\}\to C^\infty(\mathbf{S}^1),\quad (a,z)\mapsto\left(f_{a,z}(\alpha):=F_{a,z}(\mathbf{x}_a(\alpha),\alpha)\right).\tag{7.13}$$

于是，由引理 5.9 (c),

$$\partial_1\mathcal{Y}=\{(a,z)\in\partial\mathcal{Y}:\rho(a,\cdot)\not\equiv 0,\ \#f_{a,z}^{-1}(0)=4\}.$$

注意，$\partial_1\mathcal{Y}$ 是 $\partial\mathcal{Y}$的开子集。这使我们能够定义映射

$$\mathcal{M}_\circ:\partial_1\mathcal{Y}\to\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\mathbf{S}^1),\quad (a,z)\mapsto\left(f_{a,z}^{-1}(0);\mu(\{f_{a,z}>0\}),\mu(\{f_{a,z}<0\})\right),\tag{7.14}$$

其中，对于$\mathbf{S}^1$中开区间的不交并 J，$\mu(J)$表示 J的连通分支的中点集。

引理7.9。映射 $\mathcal{M}_\circ$ 是 G-等变的，其中 G 通过$\hat{}\varrho$ 作用于 $\widehat{\mathrm{UConf}_4}(\mathbf{S}^1)$，该作用如(7.4)所述；并通过(4.11)中定义的 σ 作用于 $\partial_1\mathcal{Y}$。作为推论，它诱导出一个从 $\partial_1\mathcal{X}:=SO(4)\times_\sigma\partial_1\mathcal{Y}$ 到$\mathrm{UConf}_4(\tau)$的良定义映射$\widehat{\ }$:

$$\mathcal{M}_\tau:\partial_1\mathcal{X}\to\widehat{\mathrm{UConf}}_4(\tau),\quad (R,(a,z))\cdot G\mapsto(R,\mathcal{M}_\circ(a,z))\cdot G.\tag{7.15}$$

证明。根据引理 5.10，对于所有 $(a,\ z)\in\partial_1\mathcal{Y}$，以及 $i=1,\ 2$，我们有 $F_{\sigma(g_i)(a,\ z)}(p)=-F_{a,\ z}(g_i^{-1}\cdot p)$，对每个 $p\in S^3$ 都成立。对该等式关于 $(x_1,\ x_2)$ 求导。接着，利用 $\mathbf{x}_a$ 的定义 (7.12) 以及 S^3 上的作用 (4.9)，我们可以验证

$$\mathbf{x}_{g_1a}(\alpha)=g_1\mathbf{x}_a(\alpha-\pi/3),\quad \mathbf{x}_{g_2a}(\alpha)=g_2\mathbf{x}_a(\pi-\alpha).\tag{7.16}$$

注意，此处我们滥用了记号：g_ia 表示式（4.11）中的 $\mathbb{RP}^5$ 分量，而 $g_i(x_1,\ x_2)$表示在（4.9）下 $g_i(x_1,\ x_2,\ \alpha)$中的前两个分量。因此，将其代入$f_{a,\ z}$的定义（7.13），我们得到

$$f_{\sigma(g_1)(a,z)}=-f_{a,z}(\alpha-\pi/3),\quad f_{\sigma(g_2)(a,z)}=-f_{a,z}(\pi-\alpha).\tag{7.17}$$

这意味着，零点集$f_{\sigma}^{-1}{}_{(g_i)(a,\ z)}(0)$是 $f^{-1}{}_{(a,\ z)}(0)$在 g_i 下经作用（7.3）所得的像，并且

$$\mathcal{M}_\circ(\sigma(g_i)(a,z)) = \Big(\varrho(g_i)(f_{a,z}^{-1}(0)); \varrho(g_i)(\mu(\{f_{a,z}<0\})), \varrho(g_i)(\mu(\{f_{a,z}>0\}))\Big)\,.$$

但根据 (7.4)，这恰好就是 $\hat{}\varrho(g_i)(f_a^{-1}{}_{,\ z}(0);\ \mu(\{f_{a,z}>0\})\ \mu(\{f_{a,z}<0\}))$。 □

关于 $f_{a,\ z}$ 的另一个重要事实是引理 5.9 (b) 的以下推论。

引理 7.10. 由 $\Theta_\circ(a, e^{i\theta}) \mapsto -\theta$ 给出的映射 $\Theta_\circ : \partial\mathcal{Y} \to \mathbf{S}^1$ 是 G-等变的，其中 G 作用在 $\partial\mathcal{Y}$ 上的方式为 σ，作用在 $\mathbf{S}^1$ 上的方式为 $\bar{\varrho}$。因此，它诱导出一个良定义映射

$$\Theta_\tau : \partial\mathcal{X} \to \bar{\tau}\,, \quad (R,(a,z))\cdot G \mapsto (R, \Theta_\circ(a,z))\cdot G\,. \tag{7.18}$$

此外，

$$\mathrm{dist}_{\mathbf{S}^1}(\mathcal{P}_\circ \circ \mathcal{M}_\circ(a,e^{i\theta}), -\theta) \le 1000^{-1}, \quad \forall\,(a,e^{i\theta}) \in \partial_1\mathcal{Y}\,. \tag{7.19}$$

因此，映射 $\Theta_\tau \circ \iota$ 和 $\mathcal{P}_\tau \circ \mathcal{M}_\tau : \partial_1\mathcal{X} \to \bar{\tau}$ 同伦。

证明。 对于 G-等变性，根据定义（并滥用记号，记 $g_i a$）

$$\Theta_\circ(g_1(a,(r,\theta))) = \Theta_\circ(g_1 a, (r, \theta+\pi/3)) = -(\theta+\pi/3) = \bar{\varrho}(g_1)(-\theta),$$

and

$$\Theta_\circ(g_2(a,(r,\theta))) = \Theta_\circ(g_2 a, (r, \pi-\theta)) = -(\pi-\theta) \sim \pi - (-\theta) = \bar{\varrho}(g_2)(-\theta),$$

如所需。

对于任意的 $(a,\ z) \in \partial_1\mathcal{Y}$（因此 $\Psi(a,\ z)$ 的亏格为 1），由引理 5.9 (c) 可得 $\#f_a^{-1}{}_{,\ z}(0) = 4$。因此，由引理 5.7 (3)，$f_{a,\ z}$ 的每个零点的阶均为 1。于是，在 $\mathcal{Z}^-$ 的定义 (5.6) 中，表达式 $\mathrm{ord}_{f_{a,\ z}}(\alpha) - \mathfrak{n}_{f_{a,\ z}}(\alpha)$ 必须为零。换言之，$\mathcal{Z}^-(f_{a,\ z}) = \sum_{\alpha\in\mu(\{f_{a,z}<0\})} \alpha$，根据定义 (7.6) 和 (7.14)，这等于 $\mathcal{P}_\circ \circ \mathcal{M}_\circ(a,\ z)$。结合引理 5.9 (b)，我们得到 (7.19)；由于这两个映射逐点接近，事实 $\Theta_\tau \circ \iota \simeq \mathcal{P}_\tau \circ \mathcal{M}_\tau$ 由此得证。□

7.4. **通过中点构造霍普夫链环 II：映射** Υ。 最后，我们定义一个映射 $\Upsilon :\ \partial_1\mathcal{X} \to \mathcal{E}(L,\ S^3)$。我们将首先构造一个映射$\check{}\Upsilon :\ \partial_1\mathcal{X} \to \check{}\mathcal{E}(L,\ S^3)$，然后将霍普夫链环光滑化以得到 Υ。根据引理 5.7 的 (2)，

$$\beta_{a,z}^+ := \Big\{\big(\mathbf{x}_a(\alpha) + (t,t),\ \alpha\big) : t\in\mathbb{R},\ \alpha \in \mu(\{f_{a,z}>0\})\Big\} \cap (\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1) \tag{7.20}$$

是包含于 $\{F_{a,z}>0\}$中的两条线段的并集。这里的图形与图3相似，只是现在$\beta_{a,\ z}^+$ 的四个端点可能彼此不同。然而，这四个端点自然地成两对，其中每一对由两个彼此接近的点组成。然后，对于每一对，我们在大圆 $C\subset S^3$ 上添加一条线段，将这两个点连接起来（该大圆是参数化 (5.1) 下$\partial\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1$ 的像），从而构成一个环路$\bar{\beta}_{a,\ z}^+ \subset \{F_{a,z}>0\}\subset S^3$。类似地，

$$\beta_{a,z}^- := \Big\{\big(\mathbf{x}_a(\alpha) + (t,-t),\alpha\big) : t\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mu(\{f_{a,z}<0\})\Big\}\cap(\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1)$$

也延伸为 $\bar{\beta}_{a,\ z}^-$ 中的一个环路 $\{F_{a,z}<0\}\subset S^3$。因此，$\Psi(a,\ z)$ 是无扭结的，并且围成霍普夫链环 $\bar{\beta}_{a,\ z}^+ \cup \bar{\beta}_{a,\ z}^-$（我们在命题 7.1 之前引入了这一概念）。

引理 7.11. 在上述记号下，由$(a,z)\mapsto \bar{\beta}_{a,z}^+\cup\bar{\beta}_{a,z}^-$给出的映射 $\check{}\Upsilon_\circ :\ \partial_1\mathcal{Y} \to \check{}\mathcal{E}(L,S^3)$ 是 G-等变的。因此，它诱导出一个良定义映射

$$\check{\Upsilon} : \partial_1\mathcal{X} \to \mathcal{E}(L,S^3)\,, (R,(a,z))\cdot G \mapsto R\big(\check{\Upsilon}_\circ(a,z)\big)\,. \tag{7.21}$$

证明. 对于 g_1 的作用，由 (7.16) 和 (7.17) 可得

$$\begin{aligned}\beta^+_{g_1(a,z)} &= \Big\{\big(\mathbf{x}_{g_1(a)}(\alpha)+(t,t),\ \alpha\big) : t\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mu(\{f_{g_1(a,z)}>0\})\Big\}\cap(\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1)\\ &= \Big\{\big(g_1\mathbf{x}_a(\alpha-\pi/3)+(t,t),\ \alpha\big) : t\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mu(\{\alpha : -f_{a,z}(\alpha-\pi/3)>0\})\Big\}\cap(\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1)\\ &= g_1\Big\{\big(\mathbf{x}_a(\alpha)+(t,-t),\ \alpha\big) : t\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mu(\{\alpha : f_{a,z}(\alpha)<0\})\Big\}\cap(\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1)\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\beta^-_{g_1(a,z)} &= \Big\{\big(\mathbf{x}_{g_1(a)}(\alpha)+(t,-t),\ \alpha\big) : t\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mu(\{f_{g_1(a,z)}<0\})\Big\}\cap(\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1)\\ &= g_1\Big\{\big(\mathbf{x}_a(\alpha)+(-t,-t),\ \alpha\big) : t\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mu(\{\alpha : f_{a,z}(\alpha)>0\})\Big\}\cap(\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1).\end{aligned}$$

因此，集合 $\beta^+_{g_1(a,z)}\cup\beta^-_{g_1(a,z)}$ 等于 $g_1(\beta^+_{a,z}\cup\beta^-_{a,z})$，从而 $\bar\beta^+_{g_1(a,z)}\cup\bar\beta^-_{g_1(a,z)}$ 等于$g_1(\bar\beta^+_{a,z}\cup\bar\beta^-_{a,z})$。由 g_2 作用的计算类似，因此得到 G-等变性。□

ˇ因此，我们以 G-等变的方式对 Υ给出的霍普夫链环进行光滑化，从而定义映射 $\Upsilon:\partial_1\mathcal{X}\to\mathcal{E}(L,S^3)$。

引理 7.12. 关于映射 Υ，我们可以保证：

(i) 对于每个 $q\in\partial_1\mathcal{X}$，$\Upsilon(q)$ 都是由 $\Xi(q)$界定的霍普夫链环；

(ii) $\Upsilon_*[\partial D_0]\neq 0$ 属于 $H_1(\mathcal{E}(L,S^3);\mathbb{Z}_2)$；(iii) $\Upsilon'_\tau\circ\mathcal{M}_\tau$ 和 Υ：$\partial_1\mathcal{X}\to\mathcal{E}(L,S^3)$ 是同伦的。

证明。至于第二段，(i) 项由以下事实得出：$\bar\beta^+_{a,z}\cup\bar\beta^-_{a,z}$ 是由无扭结的 $\Psi(a,z)$所围成的霍普夫链环。为证明 (ii)，只需证明环路 $\Upsilon_\circ|_{\partial D_0}:\partial D_0\to\mathcal{E}(L,S^3)$ 在 $\mathbb{Z}_2$ 系数下是同调平凡的。首先，我们将 $\Upsilon_\circ|_{\partial D_0}$ 中的两个环路标记为 β_+ 和 β_-，并为它们赋予相同的定向。现在，将 ∂D_0 视为端点识别后的 $[0,2\pi]$，通过 $\Upsilon_\circ|_{\partial D_0}$，我们可以得到一个由带标记且定向的霍普夫链环组成的 $[0,2\pi]$-族，$\beta_+(t)\cup\beta_-(t)$。由于 Boyd-Bregman [BB25] 对 $\mathcal{E}(L,S^3)$ 的拓扑结构有明确描述（见引理 E.1），要证明 $[\Upsilon_\circ|_{\partial D_0}]=0$ 属于 $H_1(\mathcal{E}(L,S^3);\mathbb{Z}_2)$，只需证明 $\beta_+(0)$ 和 $\beta_+(2\pi)$ 是同一个环路，但定向相反。

为了证明 $\beta_+(0)$ 和 $\beta_+(2\pi)$ 的定向相反，我们首先回顾一下，族 $\Psi|_{\partial D_0}$ 由以下零集给出

$$\{x_1x_2+\rho([0:\cdots:0:1],(1,\theta))\cos(\theta+2\alpha)=0\}\subset S^3,$$

其中 θ 参数化了 ∂D_0。现在，这只是 S^3 中光滑环面的一个等距族。我们固定每个环面内部区域的一种连续选取，使其包含圆 $\beta_+(t)$。容易验证，当 θ 从 0 变化到 2π 时，$\Psi([0:\dots:0:1],(1,0))$ 和$\Psi([0:\dots:0:1],(1,2\pi))$ 的内部区域（两者都是实心环面）并未互换，但起始实心环面与终止实心环面之间相应的等距映射，实际上在 π_1 上诱导出 $-$恒等映射。因此，考察实心环面的核心圈，我们看到 $\beta_+(0)$ 和 $\beta_+(2\pi)$ 必定具有不同的定向，证毕。

最后，对于第 (iii) 项，只需构造一个同伦 $H:[0,1]\times\partial_1\mathcal{Y}\to\check{}\mathcal{E}(L,S^3)$，使得$H(0,\cdot)=\check{}\Upsilon'_\circ\circ\mathcal{M}_\circ$，$H(1,\cdot)=\check{}\Upsilon_\circ$，且 H 是 G-等变的：之后，我们便可应用光滑化得出 $\Upsilon'_\tau\circ\mathcal{M}_\tau\simeq\Upsilon_\circ$。为此，对于每个 $s\in[0,1]$，我们定义

$$\begin{aligned}\beta^+_{a,z}(s) &:= \Big\{\big(s\mathbf{x}_a(\alpha)+(t,t),\ \alpha\big) : t\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mu(\{f_{a,z}>0\})\Big\}\cap(\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1)\\ \beta^-_{a,z}(s) &:= \Big\{\big(s\mathbf{x}_a(\alpha)+(t,-t),\alpha\big) : t\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mu(\{f_{a,z}<0\})\Big\}\cap(\mathbf{D}\times\mathbf{S}^1),\end{aligned}$$

接着，如同包含（7.20）的段落中那样，将 $\beta^+_{a,z}(s)\cap\beta^-_{a,z}(s)$ 闭合起来，形成一个霍普夫链环$\bar\beta^+_{a,z}(s)\cap\bar\beta^-_{a,z}(s)$。现在，将 $H(s,(a,z))$ 定义为这个霍普夫链环。根据定义，显然 $H(0,\cdot)=$

$\check{\Upsilon}'_\circ \circ \mathcal{M}_\circ$, $H(1,\cdot) = \check{\Upsilon}_\circ$，并且类似于上文，我们可以验证 H 确实是 G-等变的，正如所需。□

7.5. **命题 7.2 的证明**。条目 (i) 和 (ii) 已在引理 7.12 中陈述。至于 (iii)，设 $\vartheta \in H_1(\partial_1\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ 满足 $\iota_*\vartheta = 0$ 属于 $H_1(\partial\mathcal{X}; \mathbb{Z}_2)$。根据 $\Theta_\tau \circ \iota \simeq \mathcal{P}_\tau \circ \mathcal{M}_\tau$ 引理 7.10，我们知道 $(\mathcal{P}_\tau \circ \mathcal{M}_\tau)_*\vartheta = 0$。因此，由于 $(\mathcal{P}_\tau)_*$: $H_1(\mathrm{UConf}_4(\tau); \mathbb{Z}_2) \to H_1(\bar{\tau}; \mathbb{Z}_2)$ 根据引理 7.6 是单射的，我们实际上知道 $(\mathcal{M}_\tau)_*\vartheta = 0$ 属于 $H_1(\mathrm{UConf}_4(\tau); \mathbb{Z}_2)$。最后，由于 $\Upsilon'_\tau \circ \mathcal{M}_\tau \simeq \Upsilon$ 根据引理 7.12，我们知道 $\Upsilon_*\vartheta = 0$ 属于 $H_1(\mathcal{E}(L, S^3)\ \mathbb{Z}_2)$，如 desired。

Appendix A. Metric perturbation

在本节中，我们证明命题 2.4。设（M，$\mathbf{g}$）如命题 2.4 所述。固定一个整数 $g_1 > g_0$。对于 $'$ 上的每个度量 $\mathbf{g}'$，令 $\mathcal{N}_{\leq g_1,\ \leq L}(M,\ \mathbf{g}')$ 表示这样得到的浸入极小曲面集合：将 $\mathcal{N}_{\leq g_1,\ \leq L}(M,\ \mathbf{g}')$ 中的曲面取双覆盖。并将（2.1）扩展为

$$\widetilde{\mathcal{K}}_{\mathbf{g}'} := \left(\mathcal{O}_{\leq g_1, \leq L}(M, \mathbf{g}') \cup \mathcal{N}_{\leq g_1, \leq L}(M, \mathbf{g}') \cup \widetilde{\mathcal{N}}_{\leq g_1, \leq L}(M, \mathbf{g}')\right) \setminus \mathcal{O}_{g_0, \leq L}(M, \mathbf{g}')\,.$$

引理 A.1。存在 $\varepsilon > 0$ 以及某个形如 $U = \bigcup_{\Sigma \in \mathcal{O}_{g_0,\ \leq L}(M,\ \mathbf{g})} B_\delta^{\mathbf{g}}(\Sigma)$ 的开集 $U \subset S^3$，其中 $\delta > 0$ 满足：对于任意满足 $\|\mathbf{g}' - \mathbf{g}\|_{C^\infty} < \varepsilon$ 的度量 $\mathbf{g}'$，$\mathcal{K}_{\mathbf{g}'}$ 中（定义见（2.1））都不存在包含于 U 内的 $\mathbf{g}'$-极小曲面。

证明。反设不存在这样的 ϵ 和 U。于是，根据 [Whi87 定理 3]，存在 $\Sigma \in \mathcal{O}_{g_0,\ \leq L}(M,\ \mathbf{g})$、一个序列 $\mathbf{g}_j \to \mathbf{g}$ 属于 C^∞，以及一个序列 $\{\Sigma_j \in \mathcal{K}_{\mathbf{g}_j}\}$，使得在变分流形意义下，$|\Sigma_j| \to k|\Sigma|$。此外，存在一个有限集 Z，使得 Σ_j 在 $M \setminus Z$ 的任意紧子集中 $\widetilde{\Sigma}$ 以多重图形式收敛。进一步地，由于每个 $\Sigma_j \in \mathcal{N}_{\mathbf{g}_j}$，我们可以假设 $\Sigma_j \in \widetilde{\mathcal{K}_{\mathbf{g}_j}}$，

如果 $k = 1$，由 Allard 正则性 [All72]，$Z = \emptyset$，当 j 充分大时，Σ_j 与 Σ 具有相同的 $\widetilde{\ }$ 微分同胚类型，这与 $\mathcal{K}_{\mathbf{g}_i}$ 的定义矛盾。否则，$k \geq 2$，根据 [Sha17、命题 5 和命题 6]，Σ 是退化稳定的，这与关于 $(M, \mathbf{g})$ 的假设矛盾。□

$\widetilde{\ }$ 显然，将 $\mathcal{K}_{\mathbf{g}'}$ 替换为 $\mathcal{K}_{\mathbf{g}'}$ 后，该引理同样成立。

引理 A.2。固定引理 *A.1* 中的 ε 和 U。存在 $\varepsilon' \in (0,\ \varepsilon)$，使得对于任意度量 $\mathbf{g}'$，若 $\|\mathbf{g}' - \mathbf{g}\|_{C^\infty} < \varepsilon$，则当 $\mathbf{g}'|_U = \mathbf{g}|_U$ 时，有 $\mathcal{O}_{g_0,\ \leq L}(M,\ \mathbf{g}') = \mathcal{O}_{g_0,\ \leq L}(M,\ \mathbf{g})$。

证明。反设不存在这样的 ε'，则再次由 [Whi87，定理 3] 可知，存在 $\Sigma \in \mathcal{K}_{\mathbf{g}}$、一个序列 $\mathbf{g}_j \to \mathbf{g}$，其中 C^∞ 满足 $\mathbf{g}'|_U = \mathbf{g}|_U$，以及一个序列 $\{\Sigma_j \in \mathcal{O}_{g_0,\ \leq L}(M,\ \mathbf{g}_j)\}$，使得 $|\Sigma_j| \to k|\Sigma|$ 在变分流形意义下成立。

沿用前一个证明中的相同论证，若 $k = 1$，则对于充分大的 j，Σ_j 与 Σ 具有相同的微分同胚类型，矛盾；否则，$k \geq 2$ 且 Σ 是退化稳定的，同样矛盾。□

取自前两个引理的 ε、U 和 ε'。对于 $3 \leq q \leq \infty$，我们设

$$\Gamma^q := \{C^q\text{-metric } \mathbf{g}' \text{ on M}\},\quad \Gamma^q_{U^c} := \{\mathbf{g}' \in \Gamma^q : \mathbf{g}'|_U = \mathbf{g}|_U\}\,,$$
$$\mathcal{M}^q_{U^c, \widetilde{\mathcal{K}}} := \{(\mathbf{g}', \Sigma') : \mathbf{g}' \in \Gamma^q_{U^c},\ \Sigma' \in \widetilde{\mathcal{K}}_{\mathbf{g}'}\}\,.$$

$\mathcal{M}^q_{U^c,\ \tilde{\mathcal{K}}}$ 的拓扑由 C^q-拓扑和 $C^{2,\ \alpha}$-拓扑的乘积拓扑诱导，其中 $\alpha \in \in (0,\ 1)$。

沿用 [CL24 命题 6.1、引理 6 的 5] 逐字证明，我们可以得出，对于 $3 \leq q < \infty$，$\mathcal{M}^q_{U^c,\ \mathcal{K}}$ 是一个可分 C^{q-2} Banach 流形，且 Π：$\mathcal{M}^q_{U^c,\ \mathcal{K}} \to \Gamma^q_{U^c}$ 是一个 C^{q-2} 指标 0 的 Fredholm 映射。令 $\Gamma^q_{U^c,\ \text{bumpy}} \subset \Gamma^q_{U^c}$ 为 Π 的正则值子集。那么 $\mathbf{g}' \in \Gamma^q_{U^c,\ \text{bumpy}}$

当且仅当对每个 $(\mathbf{g}', \Sigma') \in \mathcal{M}^q_{U^c,\ \tilde{\mathcal{K}},\ \Sigma'}$ 均非退化。在这种情况下，每个 $\Sigma' \in \mathcal{K}_{\mathbf{g}'}$ 都强非退化。此外，$\Gamma^q_{U^c,\ \mathrm{bumpy}} \cap \Gamma^\infty$ 是 Γ^∞ 中的一个泛集。

固定 $\hat{\mathbf{g}} \in \Gamma^q_{U^c,\mathrm{bumpy}} \cap \Gamma^\infty$，使得 $\|\hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g}\|_{C^\infty} < \varepsilon'$ 且 $\hat{\mathbf{g}} \leq \mathbf{g}$。于是，根据前面的论证，结论（1）和（2）成立。此外，由于 $\#\mathcal{K}_{\hat{\mathbf{g}}} < \infty$，存在 $\hat{\mathbf{g}}$ 的一个邻域 $\mathcal{U} \subset\subset \Gamma^\infty$，使得（1）和（2）也成立。

最后，将 [CL24，引理 6.6] 应用于 $\mathcal{O}_{g_0,\leq L}(M, \hat{\mathbf{g}})$ 中极小曲面的面积，并按照 [CL24，命题 6.1]，的证明，我们可以找到靠近 $\hat{\mathbf{g}}$ 的 $\mathbf{g}'$，使得 $\mathbf{g}' \leq \hat{\mathbf{g}}$，并且所有陈述（1）、（2）和（3）均成立。

Appendix B. A lemma on cap product

在本节中，我们证明引理 3.4。我们考虑如下图表。

$$
\begin{array}{ccccc}
H_p(X, A\cup B) & \times & H^q(X,A) & \longrightarrow & H_{p-q}(X,B) \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
H_p(C, C\cap(A\cup B)) & \times & H^q(C, C\cap A) & \longrightarrow & H_{p-q}(C, C\cap B) \\
\| & & \uparrow & & \uparrow \\
H_p(C, C\cap(A\cup B)) & \times & H^q(C, W_1\cap(A\cup B)) & \longrightarrow & H_{p-q}(C, W_2\cap(A\cup B)) \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
H_p(C,C) & \times & H^q(C,W_1) & \longrightarrow & H_{p-q}(C,W_2)
\end{array}
\tag{B.1}
$$

这里，所有四条水平箭头都由帽积给出，而所有竖直箭头都由包含映射诱导：注意，包含映射

$$(C, C\cap A) \hookrightarrow (C, W_1 \cap (A\cup B))$$

（对应中间列中的中间箭头）以及

$$(C, W_2\cap(A\cup B)) \hookrightarrow (C, C\cap B)$$

（对应右侧列中的中间箭头）是良定义的，因为根据假设，$W_2 \cap A = \emptyset$。此外，该图满足相对帽积的自然性（见 [Hat02，第 241] 页）。

为了证明引理 3.4，我们需要沿着这串由包含映射诱导的箭头“向后拉回” $[C] \frown \omega$

$$H_{p-q}(W_2, W_2\cap B) \to H_{p-q}(C, W_2\cap(A\cup B)) \to H_{p-q}(C, C\cap B) \to H_{p-q}(X,B). \tag{B.2}$$

更确切地说，我们需要找到某个元素 $\theta \in H_{p-q}(W_2, W_2\cap B)$，使得它经这三个映射推前后得到 $[C] \frown \omega$。因此，这分为三个步骤。

步骤 1：注意到 $[C] \frown \omega$ 有 $[C] \frown \omega|_C \in H_{p-q}(C, C\cap B)$（在后一表达式中，我们将 $[C] \in H_p(C, C\cap(A\cup B))$ 视为原像），这里用到了 (B.1) 前两行的自然性。

步骤 2：然后，注意到 $C\cap A = W_1\cap A \subset W_1 \subset C$，我们考虑这个三元组对应的正合序列：

$$H^q(C, W_1) \to H^q(C, C\cap A) \to H^q(W_1, C\cap A). \tag{B.3}$$

根据假设，在包含映射 $(W_1, W_1\cap A) \hookrightarrow (X, A)$ 下，ω 的拉回 $\omega|_{W_1}$ 是零点，因此我们知道，$\omega|_C$ 在映射 $H^q(C, C\cap A) \to H^q(W_1, C\cap A)$ 下映射到零点（回想一下$C\cap A = W_1\cap A$）。因此，利用正合序列 (B.3)，我们知道，在映射 $H^q(C, W_1) \to H^q(C, C\cap A)$ 下，存在某个 μ 映射到 $\omega|_C$。于是，在映射 $H^q(C, W_1\cap(A\cup B)) \to H^q(C, C\cap A)$ 下，存在某个 μ' 映射到 $\omega|_C$（具体而言，我们将 μ' 定义为 μ 在 (B.1) 中间列底部箭头下的像）。因此，利用第二行和

(B.1) 的第三行以及自然性，我们知道 $[C] \frown \omega|_C$ 在映射下有原像 $[C] \frown \mu'$

$$H_{p-q}(C, W_2 \cap (A \cup B)) \to H_{p-q}(C, C \cap B).$$

步骤 3：最 后，根据包含映射 $W_2 \cap B \subset W_2 \subset C$，我们考虑正合序列

$$H_{p-q}(W_2, W_2 \cap B) \to H_{p-q}(C, W_2 \cap B) \to H_{p-q}(C, W_2).$$

注意，这里的中间项与 $W_2 \cap A = \emptyset$ 中的 $H_{p-q}(C, W_2 \cap (A \cup B))$ 相同。因此，为了得到所需的 $\theta \in H_{p-q}(W_2, W_2 \cap B)$，使其在 (B.2) 的第一个箭头下映射到 $[C] \frown \mu'$，只需证明 $[C] \frown \mu'$ 在映射

$$H_{p-q}(C, W_2 \cap B) \to H_{p-q}(C, W_2). \tag{B.4}$$

但现在注意，映射 (B.4) 正是 (B.1) 右列底部的映射。因此，我们可以根据以下事实推断，$[C] \frown \mu'$ 确实会被映射到 0：

- 根据定义，在映射 $H^q(C, W_1)$ 下，μ 被映射到 $\mu' \to H^q(C, W_1 \cap (A \cup B))$.
- $H_p(C, C) = 0$。
- （B.1）的最后两行满足杯积的自然性。

引理 3.4 的证明至此完成。

Appendix C. Poincaré dual of cohomology classes via group action

在本附录中，令 X 为一个紧致单连通流形（可能带边界），H 为一个从右侧自由作用于 X 上的有限群，且 $X := X/H$。根据赫urewicz定理，存在一个自然同构 $H_{ab} \otimes \mathbb{Z}_2 = \pi_1(X)_{ab} \otimes \mathbb{Z}_2 \to H_1(X, \mathbb{Z}_2)$，称为 Hurewicz 映射，其中 $H_{ab} = H/[H, H]$ 表示 H 的阿贝尔化。

我们回顾如下构造：通过 X 上的 H-等变函数，可以得到 $H^1(X, \mathbb{Z})$ 中任意上同调类的庞加莱对偶。

引理 C.1。给定任意群同态 $\phi : H \to O(1) = \{\pm 1\}$，可以在 X 上将 ϕ 与一个实线丛关联起来：

$$E_\phi := \widetilde{X} \times_\phi \mathbb{R} := (\widetilde{X} \times \mathbb{R}) / \Big((p, v) \sim (ph, \phi(h^{-1})v) \Big) .$$

光滑函数 $u \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ 当且仅当满足以下条件时，下降为 $E_\phi \to X$ 的一个截面

$$u(ph) = \phi(h^{-1})u(p), \qquad \forall\, p \in \widetilde{X},\ \forall\, h \in H\,. \tag{C.1}$$

此外，对于任意这样的 u，如果进一步地，在 $u^{-1}(0)$ 的每一点处 $du \neq 0$，并且在 $u^{-1}(0) \cap \partial\widetilde{X}$ 的每一点处 $d(u|_{\partial\widetilde{X}}) \neq 0$，那么 $Z_u := u^{-1}(0)/H$ 是 X 的一个横截于 ∂X 的光滑超曲面，其庞加莱对偶 $\Omega_u \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)$; $\cong \mathrm{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}_2); \mathbb{Z}_2)$ 由下式确定

$$(-1)^{\langle \Omega_u, [h] \rangle} = \phi(h), \quad \forall\, h \in H\,; \tag{C.2}$$

这里 $[h] \in H_1(X, \mathbb{Z}_2)$ 是 $h \in H = \pi_1(X)$ 在 *Hurewicz* 映射下的像 p.

证明。我们只需证明（C.2），这由向量丛和欧拉类的标准理论直接得到。为完整起见，我们在此给出一个简短的证明。

对于每个 $h \in H$，令 $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}_h : [0, 1] \to \widetilde{X}$ 为一条满足 $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\gamma}(0)h$ 的光滑路径。因此，$\widetilde{\gamma}$ 下降为 X 中的一个环路 γ，并且诱导出 $H_1(X, \mathbb{Z}_2)$ 中的同调 $[\gamma] = [h]$。经过小扰动后，我们还可以进一步假设 γ 与 Z_u 横截，且 $\gamma(0) = \gamma(1) \notin Z_u$。因此，$u \circ \widetilde{\gamma} \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ 满足：

- $(u \circ \widetilde{\gamma})'(t) \neq 0$ 对于每个 $t \in (u \circ \widetilde{\gamma})^{-1}(0)$;
- $u \circ \widetilde{\gamma}(1) = u(\widetilde{\gamma}(0)h) = \phi(h) \cdot u \circ \widetilde{\gamma}(0) \neq 0$，其中 $\phi(h) \in \{\pm 1\}$;
- 根据庞加莱对偶，$\langle \Omega_u, [h] \rangle = \#(Z_u \cap \gamma) = \#(u \circ \widetilde{\gamma})^{-1}(0)$ 模 2。

考虑 计算这些互不相交的区间 $\{u\circ\widetilde{\gamma}>0\}$ 的端点数量，我们可知

$$\phi(h)=(-1)^{\#(u\circ\widetilde{\gamma})^{-1}(0)}=(-1)^{\langle\Omega_u,[h]\rangle}.$$

□

推论 C.2. 对于 $\ell=1,\dots,m$，设 $\phi_\ell\colon H\to O(1)=\{\pm1\}$ 是一个群同态，$\Omega_\ell\in H^1(X,\mathbb{Z}_2)=H_1(X,\mathbb{Z}_2)^*$ 是由下式确定的上同调类

$$(-1)^{\langle\Omega_\ell,[h]\rangle}=\phi_\ell(h),\qquad\forall\,h\in H,$$

并设 $u_\ell\in C^\infty(X,\mathbb{R})$ 满足

$$u_\ell(ph)=\phi_\ell(h^{-1})u_\ell(p),\qquad\forall\,p\in\widetilde{X},\ \forall\,h\in H.$$

假设

- 对于每个 $p\in\{u_1=\cdots=u_m=0\}$，$\{du_\ell(p)\}_{\ell=1}^m$ 在 T_pX 中线性无关；
- $\{d(u_\ell|_{\partial\widetilde{X}})(p)\}_{\ell=1}^m$ 对每个 $p\in\{u_1=\cdots=u_m=0\}\cap\partial X$，在 $T_p\partial X$ 中线性无关。

那么，$Z:=\{u_1=\cdots=u_m=0\}/H\subset X$ 是一个余维为 m、与∂X横截的光滑子流形，并且 $[(Z,\partial Z)]\in H^{\dim\mathcal{X}-m}(X,\partial X;\mathbb{Z}_2)$ 是$\Omega_1\smile\cdots\smile\Omega_m$的庞加莱对偶。

证明。由于根据引理 C.1，每个 u_ℓ 都下降为一个线丛的截面，我们可以对它们作扰动，得到$\breve{u}_\ell$，它们仍然是 H-等变的，并且满足

- $\{\breve{u}_1=\cdots=\breve{u}_m=0\}=\{u_1=\cdots=u_m=0\}$；
- 对每个 ℓ，$d\breve{u}_\ell\neq0$ 沿着 $\{\breve{u}_\ell=0\}$，$d(\breve{u}_\ell|_{\partial\widetilde{X}})$ 沿着 $\{\breve{u}_\ell=0\}\cap\partial X$；
- $\{d\breve{u}_\ell(p)\}_{\ell=1}^m$ 在 T_pX 中线性无关，对每个 $p\in\{u_1=\cdots=u_m=0\}$ 都成立；
- $\{d(\breve{u}_\ell|_{\partial\widetilde{X}})(p)\}_{\ell=1}^m$ 在 $T_p\partial X$ 中线性无关，对每个 $p\in\{u_1=\cdots=u_m=0\}\cap\partial\widetilde{X}$ 都成立。

因此，我们可以应用引理 C.1，得到光滑超曲面 $Z_\ell:=\{\breve{u}_\ell=0\}/H\subset X$ 与 ∂X 横截，其庞加莱对偶为 Ω_ℓ。因此，$Z=Z_1\cap\cdots\cap Z_m$ 的庞加莱对偶为 $\Omega_1\smile\cdots\smile\Omega_m$。□

Appendix D. Differential of real and imaginary part of complex polynomials

在 §6.2 中，我们介绍了在 $\mathbb{S}^3\subset\mathbb{C}^2$ 复坐标下的一些函数。下面的引理有助于证明它们的微分是满射的。

引理 D.1. 对于 $n\geq1$，我们将 $\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^{2n}$ 参数化为 $(z_1,\dots,z_n)=(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)$。对于 $f\in C^1(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$，其微分是一个取值于 $\mathbb{C}^{2n}$ 的函数，

$$\nabla\mathrm{Re}(f)+\mathbf{i}\nabla\,\mathrm{Im}(f)=\big((\partial_{z_1}+\bar\partial_{z_1})f,\ \mathbf{i}(\partial_{z_1}-\bar\partial_{z_1})f,\ \dots,\ (\partial_{z_n}+\bar\partial_{z_n})f,\ \mathbf{i}(\partial_{z_n}-\bar\partial_{z_n})f\big).\tag{D.1}$$

特别地，若 $1\leq k\leq n$ 和 $f_1,\dots,f_k\in C^1(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$ 满足 $\bar\partial_z f_\ell=0$，其中 $\ell=1,\dots,k$，那么对于每个 $p\in\mathbb{C}^n$，下列条件等价：

- $\{\nabla\mathrm{Re}(f_\ell)|_p,\nabla\mathrm{Im}(f_\ell)|_p\}_{\ell=1}^k$ 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中关于 $\mathbb{R}$ 线性无关；
- $\{(\partial_z f_\ell)|_p\}_{\ell=1}^k$ 在 $\mathbb{C}$中线性无关，其中 $\partial_z f:=(\partial_{z_1}f、\dots\dots、\partial_{z_n}f)$。

Proof. (D.1)源于以下事实：$\partial_{x_\ell}=\partial_{z_\ell}+\partial_{\bar z_\ell}$、$\partial_{y_\ell}=\mathbf{i}(\partial_{z_\ell}-\partial_{\bar z_\ell})$。

当 $\partial_z f=0$时，对（D.1）取实部和虚部，可得

$$\nabla\mathrm{Re}(f)=\big(\mathrm{Re}(\partial_{z_1}f),\ -\mathrm{Im}(\partial_{z_1}f),\ \dots,\ \mathrm{Re}(\partial_{z_n}f),\ -\mathrm{Im}(\partial_{z_n}f)\big),$$
$$\nabla\,\mathrm{Im}(f)=\big(\mathrm{Im}(\partial_{z_1}f),\ \mathrm{Re}(\partial_{z_1}f),\ \dots,\ \mathrm{Im}(\partial_{z_n}f),\ \mathrm{Re}(\partial_{z_n}f)\big).$$

因此我们看到，$J\nabla\mathrm{Re}(f)=\nabla\mathrm{Im}(f)$，其中 $J\colon\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ 是由 $J(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n):=(-y_1,x_1,\dots,-y_n,x_n)$给出的标准几乎复结构。

当对所有 $\ell\in\{1,\dots,k\}$都有 $\partial_z f_\ell=1$时，两个项目符号所述条件的等价性便由（D.1）以及关于向量 $u_1,\dots u_k\in\mathbb{R}^{2n}$的以下标准事实得出：

- $\{u_\ell,Ju_\ell\}_{\ell=1}^k$ 在 $\mathbb{R}^{2n}$中是 $\mathbb{R}$线性无关的；

- $\{u_\ell + \mathbf{i}Ju_\ell\}_{\ell=1}^k$ 在 $\mathbb{C}^{2n}$中是 $\mathbb{C}$线性无关的。

□

Appendix E. Unknotted genus 1 surfaces and Hopf links

E.1. 霍普夫链环的一个延拓引理。 对于闭流形 M，记

$$\Gamma(M) := \{\text{unoriented embedded loops in } M\};$$
$$\widetilde{\Gamma}(M) := \{\text{oriented embedded loops in } M\}.$$

~并令 $\mathfrak{p}: \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ 为遗忘定向映射（它是一个双覆盖）。此外，令$L := \beta_+^H \sqcup \beta_-^H \subset S^3$ 为 S^3 中的标准霍普夫链环，它由两个大圆组成

$$\beta_+^H := \{(x,y,0,0) : x^2+y^2=1\}, \qquad \beta_-^H := \{(0,0,x,y) : x^2+y^2=1\}.$$

并令

$$\mathcal{E}(L,S^3) := \{\text{unparametrized Hopf links in } S^3\} = \mathrm{Diff}(S^3)/\mathrm{Diff}(S^3,L),$$
$$\mathcal{E}(\hat{L},S^3) := \{\text{unparametrized labeled Hopf links in } S^3\} = \mathrm{Diff}(S^3)/\mathrm{Diff}(S^3,\hat{L}),$$

其中，$\mathrm{Diff}(S^3,L)$ 表示由所有满足 $\phi(L) = L$ 的微分同胚 $\phi \in \mathrm{Diff}(S^3)$ 构成的子群，而 $\mathrm{Diff}(S^3,\hat{}L)$ 表示由所有满足 $\phi(\beta_\pm^H) = \beta_\pm^H$ 的 $\phi \in \mathrm{Diff}(S^3)$ 构成的子群，它是 $\mathrm{Diff}(S^3,L)$ 的一个子群。因此，$\mathcal{E}(\hat{}L,S^3)$ 中的每个元素都可表示为一个有序对 (β_+,β_-)，其并集在 S^3 中构成一个霍普夫链环。令 $\mathfrak{q}: \mathcal{E}(\hat{}L,S^3) \to \mathcal{E}(L,S^3)$ 为遗忘标签映射（它是一个双覆盖）；令 $\mathfrak{r}_\pm: \mathcal{E}(\hat{}L,S^3) \to \Gamma(S^3)$ 为由 $(\beta_+,\beta_-) \mapsto \beta_\pm$ 给出的映射。

$\mathcal{E}(L,\ S^3)$ 的拓扑已由 Boyd-Bregman 在 [BB25] 中研究。我们总结其一个关键推论：

引理 *E.1.* 基本群 $\pi_1(\mathcal{E}(L,S^3)) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$。此外，环路 $\gamma: S^1 \to \mathcal{E}(L,S^3)$ 在 $\pi_1(\mathcal{E}(L,S^3))$ 中平凡，当且仅当它提升为环路 $\hat{}\gamma: S^1 \to \mathcal{E}(\hat{}L,S^3)$，且 $\mathfrak{r}_+ \circ \hat{}\gamma$提升为环路$\widetilde{\gamma}: S^1 \to \widetilde{\Gamma}(S^3)$。

证明。若 $[\gamma] = 0$ 属于 $\pi_1(\mathcal{E}(L,\ S^3))$，令 $f: D^2 \to \mathcal{E}(L,\ S^3)$ 为 γ 的连续延拓。由 D^2 的可缩性可知，存在 f 的提升 $\hat{}f: D^2 \to \mathcal{E}(\hat{}L,\ S^3)$，以及 $\mathfrak{r}_+ \circ \hat{}f$ 的提升 $\widetilde{f}: D^2 \to \widetilde{\Gamma}(S^3)$。限制到 $\partial D^2 = \mathbf{S}^1$ 上，即得所需的提升 $\hat{}\gamma$ 和 $\widetilde{\gamma}$。

反过来，假设提升 $\hat{}\gamma$ 和 $\widetilde{\gamma}$ 存在。令 $\Gamma_\circ(S^3) \subset \Gamma(S^3)$ 为 S^3 中无向大圆 组成的子空间，并且

$$\mathcal{R}(L,S^3) := \{R(L) : R \in O(4)\} \subset \mathcal{E}(L,S^3),$$
$$\mathcal{R}(\hat{L},S^3) := \mathfrak{q}^{-1}(\mathcal{R}(L,S^3)) \subset \mathcal{E}(\hat{L},S^3).$$

根据 [BB25，定理 5.2]，$\mathcal{R}(L,\ S^3) \hookrightarrow \mathcal{E}(L,\ S^3)$ 是同伦等价；根据 [Hat83，附录（7）]，$\Gamma_\circ(S^3) \hookrightarrow \Gamma(S^3)$ 也是同伦等价。接着沿着图追踪可得

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma_\circ(S^3) & \xleftarrow[\mathfrak{r}_+]{} & \mathcal{R}(\hat{L},S^3) & \xrightarrow{\mathfrak{q}} & \mathcal{R}(L,S^3) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma(S^3) & \xleftarrow[\mathfrak{r}_+]{} & \mathcal{E}(\hat{L},S^3) & \xrightarrow{\mathfrak{q}} & \mathcal{E}(L,S^3)
\end{array}$$

存在 $\hat{}\gamma_\circ: \mathbf{S}^1 \to \mathcal{R}(\hat{}L,S^3)$，使得 $\mathfrak{q} \circ \hat{}\gamma_\circ$与 γ同伦，并且 $\mathfrak{r}_+ \circ \hat{}\gamma_\circ: \mathbf{S}^1 \to \Gamma_\circ(S^3)$ 可提升到 $\mathfrak{p}^{-1}(\Gamma_\circ(S^3)) \subset \widetilde{\Gamma}(S^3)$ 中。注意，$\mathfrak{p}^{-1}(\Gamma_\circ(S^3))$ 同构于 $\mathbb{R}^4$ 中定向二维平面的空间，而该空间与 $S^2 \times S^2$ 微分同胚，因此是单连通的。因此，$\mathfrak{r}_+ \circ \hat{}\gamma_\circ: \mathbf{S}^1 \to \Gamma_\circ(S^3)$ 在 $\Gamma_\circ(S^3)$ 中是同伦平凡的。注意到 $\mathfrak{r}^+|_{\mathcal{R}(\hat{L},S^3)}$是一个同构

在 $\mathcal{R}(\hat{}L, S^3)$ 与 $\Gamma_\circ(S^3)$ 之间，我们得出 $\hat{}\gamma_\circ$ 在 $\mathcal{R}(\hat{}L, S^3)$ 中是同伦平凡的，因此 $\gamma \simeq \mathfrak{q}\circ\hat{}\gamma_\circ$ 在 $\mathcal{E}(L, S^3)$ 中也是同伦平凡的。□

下文中，我们研究亏格 1 的无纽结穿孔曲面与霍普夫链环之间的关系。回顾一下，在 §7（命题 7.1 之前）中曾描述过由无结点元素 $S \in \mathcal{S}_1(S^3)$围成的霍普夫链环这一概念。以下引理表明，由任意给定的此类光滑 S 围成的霍普夫链环空间是路径连通的。

引理 E.2. 设 $T \in \mathcal{S}_1(S^3)$ 是一个亏格1 的光滑无纽结曲面，并且 $U_\pm$ 是由 T 围成的两个开区域（即 $S^3 \setminus T = U_+ \sqcup U_-$ 使得 $\partial U_\pm = T$）。假设对于 $i = 0,\ 1,$ $\beta_i^\pm \subset U_\pm$ $\beta_i^+ \cup \beta_i^-$ 是构成霍普夫链环的嵌入环路。那么存在嵌入环路的同痕 $t \mapsto \beta^\pm(t)$，定义在 $t \in [0,1]$ 上，使得

- $\beta^\pm(i) = \beta_i^\pm,\ i = 0, 1;$
- *for every* $t_\pm \in [0,1]$, $\beta^\pm(t_\pm) \subset U_\pm$ *and* $\beta^+(t_+) \cup \beta^-(t_-)$ *is also a Hopf link.*

证明。 根据 S^3 中的 Schoenflies 定理， $U_\pm$ 中每个边界为 2-球面的连通分支都必定可缩，因此不可能包含 $\beta_i^\pm$ 中的任何一个。此外，在区域 U 中对闭曲线作任意同痕，都可以变形为避开 U 中给定的任意三维球。因此，通过归纳地减去所有最内侧或最外侧的球面连通分支（这仍不会影响关于 $\beta_i^\pm$ 的假设），不失一般性地假设 T 微分同胚于一个光滑环面，且 $U_\pm$ 连通。

根据 van Kampen 定理，由自然包含映射诱导的同态 $\iota^\pm : \pi_1(T) \to \pi_1(U_\pm)$ 中至少有一个不是单射：不妨设 ι^+ 不是单射。于是根据 Dehn 引理，存在一条嵌入的非平凡圈 $\gamma \subset T$，它围成一个嵌入圆盘 $D \subset U_+$。当 $\epsilon \ll 1$时，将角磨光后， $U_+ \setminus B_\epsilon(D)$ 是一个边界微分同胚于 S^2 的光滑域，因此根据 S^3 中的 Schoenflies 定理， $\bar{U}_+ \setminus B_\epsilon(D)$（将角磨光后）微分同胚于 B^3。因此， U_+ 微分同胚于附加了一个1-柄的 B^3，即一个实心环面 $D^2 \times S^1$。总之， U_+ 微分同胚于某个结 $K \subset U_+ \subset S^3$ 的管状邻域。

断言。对于每个 $i = 0,\ 1$ 以及从圆盘 f 出发的任意映射 $D \to U_+ \setminus \overline{\beta_i^+}$，满足 $f(\partial D) \subset \partial U_+ = T$，都有 $f_*[\partial D] = 0$ 属于 $H_1(T)$。

断言的证明。 由于 U_+ 与 K 的管状邻域微分同胚， $H_1(U_+)$ 由 $[K]$ 生成。对某个整数 m_i，令 $[\beta_i^+] = m_i[K]$ 属于 $H_1(U_+)$。由 Mayer–Vietoris 序列

$$0 = H_2(S^3) \to H_1(T) \to H_1(U_-) \oplus H_1(U_+) \to H_1(S^3) = 0\,,$$

因此存在一个环路 $\lambda \subset T$，使得 $[\lambda] \in H_1(T)$ 被映射到 $(0,\ [K]) \in H_1(U_-) \oplus H_1(U_+)$。因此， $m_i\lambda$ 在 U_+ 中与 β_i^+ 同调，并且存在一个从某个曲面 Σ 出发的映射 $\Sigma \to U_-$，使得 $\partial\Sigma$ 被映射到 λ。因此，

$$\pm 1 = \text{链环}(\beta_i^-,\ \beta_i^+) \ =\ \beta_i^- \text{与}\ m_i\Sigma\,\text{.的代数交数}$$

因此 $m_i = \pm 1$。

现在，由于 $f(D) \cap \beta_i^+ = \emptyset$， $f(D)$ 与 K 的代数交数也为 0。由此，根据庞加莱对偶，$f_*[\partial D] = 0$ 必须属于 $H_1(T)$。□

现在有了这个断言，根据 Hurewicz 定理，自然包含 $T \hookrightarrow U_+ \setminus \beta_i^+$ 诱导单射映射 $\pi_1(T) \to \pi_1(U_+ \setminus \beta_i^+)$；因此，根据 van Kampen 定理，由包含映射诱导的同态

$$\pi_1(U_- \setminus \beta_i^-) \to \pi_1(S^3 \setminus (\beta_i^+ \cup \beta_i^-))$$

也是单射。由于 $\beta_i^+ \cup \beta_i^-$构成一个霍普夫链环，右端是一个阿贝尔群，因此左端也是阿贝尔群。又由于 U_+ 与 K的管状邻域微分同胚，我们知道

$$\pi_1(S^3 \setminus (K \cup \beta_i^-)) = \pi_1(U_- \setminus \beta_i^-)$$

也是一个阿贝尔群。根据 [XZ23，注 1.7]（另见 [Kaw96，第 6.3]节），$K \cup \beta_i^-$也是一个霍普夫链环，于是 K 是一个平凡结，这迫使 $U^- = S^3 \setminus U_+$ 也与某个（无扭结的）嵌入环的管状邻域微分同胚。因此，对于每个 i，存在 $\varepsilon > 0$ 和一个嵌入圆盘 $D_i \subset S^3$，其边界为 β_i^-，使得 $D_i \cap B_\varepsilon(K)$ 是一个 ε-圆盘 D_i'，其边界是 $B_\varepsilon(K)$ 的子午线。于是，我们可以在 D_0 中构造从 β_0^-到 $\partial D_0'$ 的同痕，在 $\partial B_\varepsilon(K)$ 中构造从 $\partial D_0'$ 到 $\partial D_1'$ 的同痕，并在 D_1 中构造从 $\partial D_1'$ 到 $\partial D_1 = \beta_1^-$的同痕。由于所有这些同痕都不与 $B_{\varepsilon/2}(K)$ 相交，因此可以将它们首尾相接，并变形为 U_- 中从 β_0^-到 β_1^-的同痕。总而言之，存在一个同痕 $[0,1] \ni t \mapsto \beta^-(t) \subset U_-$，使得对于每个 $i = 0, 1$，都有 $\beta^-(i) = \beta_i^-$。同样的过程还产生一个同痕 $[0,1] \mapsto \beta^+(t) \subset U_+$，使得对于每个 $i = 0, 1$，都有 $\beta^+(i) = \beta_i^+$。这些同痕满足所需性质。□

当 S 不光滑时，上述引理可能不成立。下述引理允许我们将带穿孔曲面扰动为一个光滑曲面，同时仍使其围成一个紧致的霍普夫链环族。

引理 *E.3.* 设 $T \in \mathcal{S}_1(S^3)$ 是一个无扭结的亏格 *1* 带穿孔曲面，$U_\pm$ 是由 T 围成的两个开区域（即 $S^3 \setminus T = U_+ \sqcup U_-$ 使得 $\partial U_\pm = T$）。设 K 是一个紧致度量空间，且 $\beta^\pm : K \to \Gamma(S^3)$ 是连续映射，使得对每个 $q \in K$，$\beta^\pm(q) \subset U_\pm$ 且 $\beta^+(q) \cup \beta^-(q)$ 构成一个霍普夫链环。那么存在一个光滑曲面 $\widetilde{T} \in \mathcal{S}_1(S^3)$，它围成两个开区域 $\widetilde{U}_\pm$，并且对每个 $q \in K$ 都有 $\beta^\pm(q) \subset \widetilde{U}_\pm$。

证明。由于 K 是紧的，且 T 的带孔集是有限的，以带孔集 P 为中心取足够小的球 B_ϵ，就不会与任何 $\beta^\pm(q)$相交。因此，去掉这些小球，并用球内的圆盘填补边界后，我们得到一个光滑的亏格 1 曲面 $\widetilde{T} \subset S^3$，它围成 $\widetilde{\ }$ 个开区域 $U_\pm$，这些区域在 $B_\epsilon(P)$ 之外与 $U_\pm$ 一致。因此，对每个 $q \in K$，

$$\beta^\pm(q) \subset U_\pm \setminus B_\epsilon(P) = \widetilde{U}_\pm \setminus B_\epsilon(P) \subset \widetilde{U}_\pm .$$

□

Th霍普夫链环的以下延拓引理在定理 4 的证明中至关重要。 7.

引理 E.4. 设 W 是一个纯单纯形 2-复形，$\Phi : W \to \mathcal{U} \subset \mathcal{S}_1(S^3)$ 是一个由无纽结的亏格 1带穿孔曲面组成的 *Simon–Smith* 族。设 $\Upsilon : \partial W \to \mathcal{E}(L, S^3)$ 是一个连续映射，使得对每个 $q \in \partial W$，$\Upsilon(q)$ 都是由 $\Phi(q)$ 围成的霍普夫链环。那么存在一个连续映射 $\bar{\Upsilon} : W \to \mathcal{E}(L, S^3)$，使得 $\bar{\Upsilon}|_{\partial W} = \Upsilon$。

证明。延拓将逐个胞腔构造。

断言。细分 W 后，存在一个映射，为 W 的每个二维胞腔 σ 关联一个霍普夫链环 $\mathfrak{H}(\sigma)$，使得：

(i) 对于同一二维胞腔 q 中的任意 $q \in \partial W$ 和 $q' \in W$，有 $\Upsilon(q)$ 被 $\Phi(q')$ 有界；(ii) 对于满足 $\sigma \cap \partial W \neq \emptyset$ 的任意二维胞腔 σ，存在 $q_\sigma \in \sigma \cap \partial W$，使得 $\mathfrak{H}(\sigma) = \Upsilon(q_\sigma)$。(iii) 对于任意二维胞腔 σ，以及 σ 或 σ 的某个相邻二维胞腔中的任意点 q'，有 $\mathfrak{H}(\sigma)$ 被 $\Phi(q')$ 有界。

断言的证明。根据 $\mathcal{U}$ 的定义，对于每个点 $q \in W$，存在一个霍普夫链环 $\breve{\Upsilon}(q) \subset S^3$，被 $\Phi(q)$ 有界（当然，$q \mapsto \breve{\Upsilon}(q)$ 不必是连续映射）；当 $q \in \partial W$ 时，我们可以˘直接选取 $\Upsilon(q) = \Upsilon(q)$。由 Φ 的闭性（定义 2.2），存在 $\delta_q > 0$，使得对于每个 $q' \in B_{\delta_q}(q) \subset W$，$\breve{\Upsilon}(q)$ 被 $\Phi(q')$ 有界。由于 $q \mapsto \breve{\Upsilon}(q)$ 在 ∂W 上连续，我们甚至可以要求 $\delta_{\partial W} := \inf_{q \in \partial W} \delta_q > 0$。

于是我们可以选取一个有限子集 $J \subset W$，使得 $\{B_{\delta_q/10}(q)\}_{q \in J}$ 构成 W的一个覆盖。因此，在必要时对 W进行细分后，

- W 的每个二维胞腔 σ 都包含在 $B_{\delta_{q(\sigma)}/4}(q(\sigma))$ 中，其中某个 $q(\sigma)$ 满足 $\in J$；
- 每个与 ∂W相交的二维胞腔 σ都包含于 $B_{\delta_{\partial W}/4}(\partial W)$中。

对于 W的每个二维胞腔 σ ，定义

$$\mathfrak{H}(\sigma) := \begin{cases} \Upsilon(q) & \text{if } \sigma \cap \partial W \neq \emptyset, \text{ where } q \text{ is some point in } \sigma \cap \partial W\,; \\ \breve{\Upsilon}(q(\sigma)) & \text{if } \sigma \cap \partial W = \emptyset\,. \end{cases}$$

根据定义，很容易验证断言中的 (i)–(iii) 成立。 □

现在我们可以构造延拓 Υ 了。

步骤 1（零维**胞腔**）。对于每个零维胞腔 $q \in W$，定义[5]

$$\bar{\Upsilon}(q) := \begin{cases} \Upsilon(q), & \text{if } q \in \partial W\,; \\ \mathfrak{H}(\sigma), & \text{if } q \notin \partial W, \text{ where } \sigma \text{ is a 2-cell that contains } q\,. \end{cases}$$

对于每个 $q \in W$，由于根据 (i) 和 (iii)

$$\mathcal{L}(q) := \{\bar{\Upsilon}(q') : q' \in \partial W \cap \sigma,\ 2\text{-cell } \sigma \ni q\} \cup \{\mathfrak{H}(\sigma') : \sigma' \text{ or its adjacent 2-cell contains } q\}$$

是由带穿孔曲面 $\Phi(q)$ 围成的霍普夫链环紧致族，根据引理 E.3，存在一个光滑的亏格 1 曲面 $\widetilde{\Phi}(q)$，它也围成 $\mathcal{L}(q)$ 中的每个霍普夫链环[6]。

步骤 2（1-维胞腔）。对于每个一维胞腔 $e \subset \partial W$，定义 $\Upsilon|_e = \Upsilon_+|_e$。

若 $e \not\subset \partial W$，令 q_1，$q_2 \in W$ 为 e 的端点（它们是 W 的零维胞腔），并令 $q \in W$ 为 e 的中点。由以 Φ（q）为边界的霍普夫链环空间的连通性（见引理 E.2），存在一个连续同痕 $\bar{\Upsilon}|_e : e \to \mathcal{E}$（$L$，$S^3$），它延拓了 $\bar{\Upsilon}|_{q_i}$，使得对每个 $q' \in e$，$\bar{\Upsilon}$（q'）都以$\sim\Phi$（q）为边界。

步骤 3（2-**维胞腔**）。对于 W 中固定的每个二维胞腔 σ，步骤 2 产生一个映射 $\bar{\Upsilon}|_{\partial\sigma} : \partial\sigma \to \mathcal{E}$（$L$，$S^3$），当 $\partial\sigma \cap \partial W \neq \emptyset$ 时，它在 ∂W 上与 Υ 一致。此外，若我们固定 $\mathfrak{H}$（σ）的一个提升（β_+（σ） β_-（σ））$\in \mathcal{E}$（$\hat{}L$，S^3），则由断言 1（iii），存在唯一的一对映射 $U_\pm : S^3\}$ 的开子集，使得对每个 $q' \in \sigma$，

$$S^3 \setminus \Phi(q') = U_+(q') \sqcup U_-(q'), \quad \partial U_\pm(q') = \Phi(q')\,; \quad \beta_\pm(\sigma) \subset U_\pm(q')\,.$$

对于每个零维胞腔 $q_0 \in \sigma$，这就唯一确定了 $\bar{\Upsilon}(q_0)$ 的一个提升 ($\bar{\Upsilon}_+(q_0)$ $\bar{\Upsilon}_-(q_0)$) $\in \mathcal{E}(\hat{}L, S^3)$，使得

$$\bar{\Upsilon}_\pm(q_0) \subset U_\pm(q')\,, \qquad \forall\, q' \in \sigma\,.$$

特别地，对于每个中点为 q_e 的一维胞腔 $e \subset \sigma$，存在两个区域 $U_\pm(q_e)$，其边界由 $\sim\Phi(q_e)$ 构成，使得

$$\beta_\pm(\sigma) \subset \widetilde{U}_\pm(q_e)\,, \quad \bar{\Upsilon}_\pm(q_0) \subset \widetilde{U}_\pm(q_e), \quad \forall\ 0\text{-cell } q_0 \in \sigma\,. \tag{E.1}$$

由于 $\Upsilon|_e$ 的边界由 $\Phi(q_e)$ 构成，我们可知

$$\bar{\Upsilon}_\pm(q_1) := \bar{\Upsilon}(q_1) \cap \widetilde{U}_\pm(q_e), \quad q_1 \in e$$

定义了 $\bar{\Upsilon}|_e$ 的一个连续提升 $(\bar{\Upsilon}_+, \bar{\Upsilon}_-) : e \to \mathcal{E}(\hat{}L, S^3)$，它在端点处与 (E.1) 一致。

将它们合在一起，我们得出存在一个提升 $(\Upsilon_+, \Upsilon_-) : \partial\sigma \to \mathcal{E}($ $\hat{}$ L，S^3) 的 $\Upsilon|_{\partial\sigma}$，根据 (E.1) 和引理 E.2，$\Upsilon_+(q_1) \cup \beta_-(\sigma)$ 对每个 $q_1 \in \partial\sigma$ 都构成一个霍普夫链环。由于链接数永不为零，这迫使 $\bar{\Upsilon}_+|_{\partial\sigma} : \partial\sigma \to \Gamma(S^3)$ 提升为映射 $\partial\sigma \to \widetilde{\Gamma}(S^3)$。于是，根据引理 E.1，$\bar{\Upsilon}|_{\partial\sigma}$ 在 $\pi_1(\mathcal{E}(L,\ S^3))$ 中是平凡的，因此存在连续映射 $\bar{\Upsilon} : \sigma \to \mathcal{E}(L,\ S^3)$，它扩张了 $\Upsilon|_{\partial\sigma}$。至此，$\Upsilon$ 的构造完成。□

[5]这种选择并不唯一，但任何这样的选择都适用于后续目的。[6]我们不要求 $\widetilde{\Phi}(q)$ 随 q 连续变化。

E.2. **中的无扭结元素** $\mathcal{S}_1(S^3)$。在本节中，我们证明命题 7.1。

首先回顾“缩颈手术”的概念。设 $S \in \mathcal{S}(M)$ 和 γ 是位于 S 光滑部分上的光滑嵌入环。假设 γ 围成一个光滑嵌入圆盘 D，其内部完全位于 $S^3\backslash S$ 中。我们可以沿着 γ，利用圆盘 D进行缩颈手术：也就是说，我们在 S 上沿 γ（其几何形状类似于 $\gamma \times [-\epsilon, \epsilon]$）移除一段短圆柱，粘回两个圆盘，每个圆盘在图形上都接近 D，最后在两条粘合曲线附近将其光滑化，从而得到 $\mathcal{S}(S^3)$ 中的一个元素。

引理 E.5。设 $S \in \mathcal{S}_1(S^3)$，并设 S' 是通过对 S 进行缩颈手术得到的，且 S' 的亏格仍为 1。那么，$S \in \mathcal{U}$ 当且仅当 $S' \in \mathcal{U}$。

证明。对于“如果”部分，根据定义，存在一些位于 $\alpha \subset \mathrm{in}(S')$ 中的环路和位于 $\beta \subset \mathrm{out}(S')$ 中的环路，它们构成一个霍普夫链环。当我们撤销缩颈手术时，可以先将这两个环路变形，使其避开手术区域；这样，在将 1-柄重新粘回以得到 S 后，我们仍然有 $\alpha \subset \mathrm{in}(S)$ 和 $\beta \subset \mathrm{out}(S)$。因此 $S \in \mathcal{U}$。

为了证明“仅当”部分，我们首先选取一些位于 $\alpha \subset \mathrm{in}(S)$ 中的环路和位于 $\beta \subset \mathrm{out}(S)$ 中的环路，使它们构成一个霍普夫链环。令 $\gamma \subset S$ 为实施手术所沿的光滑嵌入圆，并设 γ 围成一个圆盘 D，该圆盘位于 $S^3\backslash S$ 中。不妨为S选择一个向内方向，并假设 D 的内部位于 $\mathrm{in}(S)$ 中。令 S' 通过沿 γ、利用圆盘 D 对 S 实施缩颈手术得到。

步骤 1： 首先，根据定义，S至多有有限个奇点。我们取以这些奇点为中心、足够小的球 $B_1, \dots, B_n \subset S^3$，使得：

- 每个 B_i 都避开 α 和 β。
- $S\backslash \cup_{i=1}^n B_i$ 仍是一个带边界的亏格 1 曲面。
- 每个 ∂B_i 都与 S 在光滑部分横截相交。
- 每个 B_i 都避开 D 的某个邻域，使得手术过程不会影响每个 B_i。

对于每个球 B_i，交集 $S \cap \partial B_i$ 由有限个光滑环路 $\{\gamma_k\}_k$组成。接着，我们沿这些环路逐一进行缩颈手术：也就是说，每当这样的环路 γ_k 在 ∂B_i 上围成一个不包含其他环路 $\gamma_{k'}$的圆盘时，我们就利用它在 ∂B_i上围成的圆盘沿 γ_k 进行手术，然后对所有 γ_k以及所有球 B_i重复这一过程。接着，我们移除$\widetilde{\ }$位于 $\cup_i B_i$内的所有连通分支，并将最终得到的曲面记为 S。注意，$\widetilde{\ }$假设这些球 B_i 足够小，则 S 是一个光滑的亏格 1 曲面：这可由$\mathfrak{g}(S) = 1$ 以及 CLW26 中 [的亏格定义（定义 2.5]）得出。

步骤 2： 现在，根据我们对球 B_i 的选取方式，我们仍有 $\alpha \subset \mathrm{in}(\widetilde{S})$ 和 $\beta \subset \mathrm{out}(\widetilde{S})$。因此，由于 $\alpha \cup \beta$ 是一个霍普夫链环，S 是一个亏格一海加德曲面。然后，利用假设 $\mathfrak{g}(S') = 1$，我们知道，对由 S 沿 γ 使用圆盘 D 进行手术所得的曲面，其亏格为 1。因此，可以在保持边界 γ 固定的情况下，将圆盘 D 在S中的 $\mathrm{in}(\widetilde{\ }\widetilde{\ }\widetilde{\ })$“推移”（即通过光滑嵌入进行变形），使其变为圆盘 $D \subset S$。接着，我们可以利用这一推移过程的$\widetilde{\ }$逆过程对 α进行变形，从而得到S中的一个环路 $\widetilde{\alpha} \subset$，且该环路不与$D$相交。这样，当我们沿 γ 使用圆盘 D 对 S 进行手术时，环路 $\widetilde{\alpha}$ 和 β 将$\widetilde{\ }$保持不变。将此曲面记为 S'

步骤 3： 最后，在新曲面 S' 上，我们撤销 步骤 1 中所述的过程。也就是说，对于S'，我们放回被丢弃的连通分支，并通过重新粘回 1-柄，撤销所有的颈缩手术（在球 B_i 附近），从而得到带有奇点的曲面 S'：这 S' 正是引理 E.5 中我们所关注的曲面 S'。容易看出，$\alpha \subset$在（S'）中且$\beta \subset$ 在（S'）外，并且 $\alpha \cup \beta$ 是一个霍普夫链环，因此我们得到 $S' \in \mathcal{U}$，如所需。□

现在我们证明命题 7.1。反设存在某个 $\Phi(t) \notin \mathcal{U}$。令

$$T := \inf\{t \in [0,1] : \Phi(t) \notin \mathcal{U}\}.$$

首先，我们断言 $\Phi(T) \notin \mathcal{U}$。事实上，若 $\Phi(T) \in \mathcal{U}$，那么我们可以找到嵌入圈 $\alpha \subset \mathrm{in}(\Phi(T))$ 和 $\beta \subset \mathrm{out}(\Phi(T))$，使它们构成一个霍普夫链环：注意，我们可以为每个 $\Phi(t)$ 一致地选取一个向内方向。接着根据 Simon–Smith 族的定义，对于任意充分接近 T 的 t，都有 $\alpha \subset \mathrm{in}(\Phi(t))$ 和 $\beta \subset \mathrm{out}(\Phi(t))$，因此对于这样的 t，有 $\Phi(t) \in \mathcal{U}$。这与 T 的定义矛盾。

因此，$T > 0$，因为根据假设，$\Phi(0) \in \mathcal{U}$。取 $t_1, t_2, \ldots \uparrow T$. 根据 Simon–Smith 族的定义，我们可以选取有限多个小开球 $B_j \subset S^3$，使得 $\Phi(t_i) \to \Phi(T)$ 在 B 外光滑：$= \cup_j B_j$。不失一般性，我们还可以假设：

- 每个 B_j 的边界仅与光滑部分上的每个 $\Phi(t_i)$相交，且对每个 t_i而言，这样的交都是横截的。
- $\Phi(T)\backslash B$ 是一个带边界的亏格1曲面。

现在，为了导出矛盾，我们只需证明，对于任意充分大的 i，都可以选取一些嵌入环 $\alpha_{t_i} \subset \mathrm{in}(\Phi(t_i))\backslash B$ 和 $\beta_{t_i} \subset \mathrm{out}(\Phi(t_i))\backslash B$，使它们构成一个霍普夫链环。事实上，一旦做到这一点，对于某个充分大的 i，利用 $\Phi(t_i) \to \Phi(T)$ 在 $B = \cup_j B_j$ 外光滑这一事实，通过轻微变形，我们可以确保 $\alpha_{t_i} \subset \mathrm{in}(\Phi(T))\backslash B$ 和 $\beta_{t_i} \subset \mathrm{out}(\Phi(T))\backslash B$。这说明 $\Phi(T) \in \mathcal{U}$，与我们在上一段中得到的断言 $\Phi(T) \notin \mathcal{U}$ 矛盾。

现在，我们固定 t_i。我们将按如下方式修改曲面 $\Phi(t_i)$，使其避开 ∂B。对于每个球B_j，交集 $\Phi(t_i) \cap \partial B_j$ 由有限个光滑闭曲线 $\{\gamma_k\}_k$组成。然后，我们沿这些闭曲线逐一进行颈缩手术：也就是说，每当这样的闭曲线 γ_k 在 ∂B_j 上围成一个不包含其他闭曲线 $\gamma_{k'}$的圆盘时，我们就利用它在 ∂B_j上围成的圆盘，沿 γ_k进行手术，然后对所有 γ_k、所有球 B_j重复这一过程。我们将最终得到的曲面记为 $\Phi(t_i)'$。因此，$\Phi(t_i)'$ 避开了 ∂B，且在 B之外是光滑的。

由引理 E.5 和 $\Phi(t_i) \in \mathcal{U}$，我们知道 $\Phi(t_i)' \in \mathcal{U}$。因此，存在一些嵌入环$\alpha_{t_i} \subset$，分别位于$(\Phi(t_i)')$的内部和 $\beta_{t_i} \subset \mathrm{out}(\Phi(t_i)')$，它们构成一个霍普夫链环。现在，由于 $\Phi(T)\backslash B$ 的亏格为 1，且 $\Phi(t_i)$在 B之外光滑收敛于 $\to \Phi(T)$，我们知道当 i 足够大时，$\Phi(t_i)'\backslash B$是一个带边界的亏格 1 曲面，而 $\Phi(t_i)'$ 在 B 内的所有连通分支亏格均为 0。因此，我们还可以假设 $\alpha_{t_i} \subset \mathrm{in}(\Phi(t_i)')\backslash B$ 和 $\beta_{t_i} \subset \mathrm{out}(\Phi(t_i)')\backslash B$：在每个球 B_i 内，我们暂时忽略亏格为 0 的连通分支，然后要么推动 α_{t_i} 使其避开 B_i（在$\partial B_i \subset \mathrm{in}(\Phi(t_i)')$的情形下），要么推动 β_{t_i} 使其避开 B_i（在 $\partial B_i \subset \mathrm{out}(\Phi(t_i)')$的情形下）。因此，通过重新粘回 1-柄来撤销所有颈缩手术后，我们实际上有 $\alpha_{t_i} \subset \mathrm{in}(\Phi(t_i))\backslash B$ 和$\beta_{t_i} \subset \mathrm{out}(\Phi(t_i))\backslash B$。正如前文所解释的，这正是我们需要的矛盾。

至此，命题 7.1 的证明完成。

References

[All72] William K. Allard. “关于广义变分的第一变分”。载于：《数学年刊》95.3 (1972)，第 417–491 页。 ISSN：0003-486X。 DOI：10.2307/1970868.[Bal78] Werner Ballmann. “Lusternik–Schnirelmann 定理”。载于：对微¨分几何的贡献，第 *I* 册。第 102 卷。《波恩数学论文集》。波恩大学，波恩，1978 年，第 1–25 页。[BP23] Renato G Bettiol 和 Paolo Piccione. “椭球中的克利福德环面的分岔”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2309.13758* (2023)。[BP24] Renato G. Bettiol 和 Paolo Piccione. “旋转椭球中的非平面极小球面”。载于：比萨高等师范学院年刊——科学部(2024)。[BB25] Rachael Boyd 和 Corey Bregman. “霍普夫链环的嵌入空间”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2504.21806* (2025)。[Chu25] Adrian Chun-Pong Chu. “正里奇曲率三维球面中的任意亏格极小曲面”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2508.06019* (2025)。[CL24] Adrian Chun-Pong Chu 和 Yangyang Li. “正里奇曲率三维球面中 5 个极小环面的存在性”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2409.09315* (2024)。

[CLW25] Adrian Chun-Pong Chu、Yangyang Li 和 Zhihan Wang. “亏格 2 极小曲面在三维球面中的存在性。I”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2507.23239v1 (2025)。[CLW26] Adrian Chun-Pong Chu、Yangyang Li 和 Zhihan Wang. “极小极大理论与指定亏格的极小曲面”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2507.23239v2 (2026)。[CD03] Tobias Colding 和 Camillo De Lellis. “极小曲面的极小极大构造”。载于：《微分几何综述》8.1 (2003)，第 75–107 页。[DK01] James F. Davis 和 Paul Kirk.《代数拓扑讲义》。第 35 卷。《研究生数学丛书》。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001 年，第 xvi+367 页。 ISBN：0-8218-2160-1。 DOI：10.1090/gsm/035。[DP10] Camillo De Lellis 和 Filippo Pellandini. “极小极大构造产生的极小曲面的亏格界”。载于：《纯粹与应用数学杂志》2010.644 (2010)，第 47–99 页。[Gra89] Matthew A. Grayson. “嵌入曲线的缩短”。载于：《数学年刊》(2) 129.1 (1989)，第 71–111 页。 ISSN：0003-486X,1939-8980。 DOI：10.2307/1971486。[GJ86] M. Grüter 和 J. Jost. “凸体中的嵌入极小圆盘”。载于：Ann. Inst. H. Poincar ´é Anal. Non Lin ´éaire 3.5 (1986)，第 345–390 页。 ISSN：0294-1449。[HK19] Robert Haslhofer 和 Daniel Ketover. “三维球面中的极小二维球面”。载于：Duke Math. J. 168.10 (2019)，第 1929–1975 页。 ISSN：0012-7094,1547-7398。 DOI：10.1215/00127094- 2019-0009。[HK23] Robert Haslhofer 和 Daniel Ketover. 凸球中的自由边界极小圆盘。2023。arXiv：2307.01828 [math.DG]。[Hat83] Allen Hatcher. “Smale 猜想的证明”。载于：《数学年刊》(1983)，第 553–607 页。[Hat02] Allen Hatcher.《代数拓扑》。剑桥大学出版社，2002。[Jos89] J¨urgen Jost. “Lusternik–Schnirelman 定理的一个非参数证明”。载于：《巴塞尔数学档案》53.5 (1989)，第 497–509 页。 ISSN：0003-889X,1420-8938。 DOI：10. 1007/BF01324725。[KW22] Nikolaos Kapouleas 和 David Wiygul. “劳森曲面由其对称性和拓扑决定”。载于：《纯粹与应用数学杂志》786 (2022)，第 155–173 页。 ISSN：0075-4102,1435-5345。 DOI：10.1515/crelle-2021-0087。[KPS88] Hermann Karcher、Ulrich Pinkall 和 Ivan Sterling. “三维球面中的新极小曲面”。载于：Journal of Differential Geometry 28.2 (1988)，第 169–185 页。[Kaw96] Akio Kawauchi.《纽结理论综述》。施普林格科学与商业媒体，1996。[Ket19] Daniel Ketover. “极小极大极小曲面的亏格界”。载于：Journal of Differential Geometry 112.3 (2019)，第 555–590 页。[Kli77] Wilhelm Klingenberg.《闭测地线讲义》。第三版。波恩大学数学研究所，波恩，1977 年，共 210 页（页码不连续）。[Ko23a] Dongyeong Ko. 凸边界黎曼二维圆盘上两条自由边界嵌入测地线的存在性与莫尔斯指标。2023。arXiv：2309.09896 [math.DG]。[Ko23b] Dongyeong Ko. 二维球面上简单闭测地线的莫尔斯指标界与强莫尔斯不等式。2023。arXiv：2303.00644 [math.DG]。[Law70] H Blaine Lawson. “三维球面中的完备极小曲面”。载于：《数学年刊》(1970)，第 335–374 页。[LWY25] Xingzhe Li、Tongrui Wang 和 Xuan Yao. “透镜空间中的低亏格极小曲面”。载于：《纯粹与应用数学杂志》2025.828 (2025)，第 175–218 页。[LW24] Xingzhe Li 和 Zhichao Wang. “正里奇曲率三维球面中嵌入极小环面的存在性”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2409.10391 (2024)。[Lus47] L. Lusternik. “函数空间的拓扑与大范围变分法”。载于：《斯捷克洛夫数学研究所论文集》19 (1947年)，第 100 页。

[LS47] Lazar Aronovich Lyusternik 和 Lev Genrikhovich Shnirel'man. “变分问题中的拓扑方法及其在曲面微分几何中的应用”。载于：Uspekhi Matematicheskikh Nauk 2.1（1947年），第 166–217 页。[MN21] Fernando Cod´a Marques 和 Andr´e Neves. “重数一极小极大极小超曲面的莫尔斯指标”。载于：Advances in Mathematics 378（2021），第 107527 页。[Mor67] Hugh R Morton. “圆的对称积”。载于：Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 第 63 卷。第 2 期。剑桥大学出版社。1967年，第 349–352 页。[SS23a] Lorenzo Sarnataro 和 Douglas Stryker. 关于同痕上预设平均曲率泛函极小化子的最优正则性。2023年。arXiv：2304.02722 [math.DG]。[SS23b] Lorenzo Sarnataro 和 Douglas Stryker. “关于同痕上预设平均曲率泛函极小化子的最优正则性”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2304.02722（2023年）。[Sha17] Ben Sharp. “有界指数极小超曲面的紧性”。载于：Journal of Differential Geometry 106.2（2017），第 317–339 页。[Smi82] Francis Smith. “任意黎曼度量下的三维球面中嵌入极小二球面的存在性”。载于：博士论文（1982年）。[Str84] M. Struwe. “极小曲面的一个自由边界问题”。载于：Invent. Math. 75.3（1984），第 547–560 页。 ISSN: 0020-9910,1432-1297。 DOI: 10.1007/BF01388643。[Ta˘ı92] I. A. Ta˘ımanov. “同胚于二维球面的流形上三条互不相交闭测地线的存在性”。载于：Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 56.3（1992），第 605–635 页。 ISSN: 1607-0046,2587-5906。 DOI: 10 . 1070 / IM1993v040n03ABEH002177。[WZ23] Zhichao Wang 和 Xin Zhou. “带有颠簸度量的 S^3 中四个极小球面的存在性”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2305.08755（2023年）。[WZ25] Zhichao Wang 和 Xin Zhou. “多膜问题的改进 C 1, 1 正则性”。载于：Peking Mathematical Journal（2025年），第 1–57 页。[Whi87] Brian White. “三维流形中对参数椭圆泛函驻定的曲面的曲率估计与紧性定理”。载于：Invent. Math. 88.2（1987），第 243–256 页。 ISSN: 0020-9910,1432-1297。 DOI: 10.1007/BF01388908。[Whi89] Brian White. “每个具有正里奇曲率的三维球面都包含一个极小嵌入环面”。载于：Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 21.1（1989年），第 71–75 页。 ISSN: 0273- 0979,1088-9485。 DOI: 10.1090/S0273-0979-1989-15765-0。[Whi91] Brian White. “随黎曼度量变化的极小子流形空间”。载于：Indiana Univ. Math. J. 40.1（1991），第 161–200 页。 ISSN: 0022-2518,1943-5258。 DOI: 10.1512/iumj.1991.40.40008。[XZ23] Yi Xie 和 Boyu Zhang. “链环群的子午线无迹 SU (2) 表示”。载于：Advances in Mathematics 418（2023年），第 108947 页。[Yau82] 丘成桐. 微分几何研讨班。第 102 卷。普林斯顿大学出版社，1982年。[Zho16] Xin Zhou. “关于自由边界极小极大测地线”。载于：Int. Math. Res. Not. IMRN 5（2016），第 1447–1466 页。 ISSN: 1073-7928,1687-0247。 DOI: 10.1093/imrn/rnv184。[Zho20] Xin Zhou. “关于极小极大理论中的重数一猜想”。载于：Annals of Mathematics 192.3（2020），第 767–820 页。

Cornell University、 Ithaca、 NY 14853、 USA
Email address: cc2938@cornell.edu

University of Notre Dame、 Notre Dame、 IN 46556、 USA*Email address*: yangyangli@nd.edu

Cornell University, Ithaca, NY 14853, USA
Email address: zw782@cornell.edu