arXiv:2601.01738v1 [math.RT] 5 Jan 2026

酉群上的傅里叶–雅可比周期的全局 Gan–Gross–Prasad 猜想 III：主要定理的证明

Paul Boisseau、Weixiao Lu 和 Hang Xue

Abstract. 这是我们证明酉群上傅里叶–雅可比周期的 Gan–Gross–Prasad 猜想及其 Ichino–Ikeda 型细化的一组三篇论文中的第三篇，也是最后一篇。我们采用的策略基于对 Liu 提出的相对迹公式的比较。在本文中，我们计算这些公式的谱展开，并通过归约到余秩零情形来完成猜想的证明。

Contents

1. 引言 1 2. 函数空间与自守表示预备知识 9

第 1 部分： 谱展开的比较 16

3. 群、自守表示的正则性条件与基变换 17 4. 刘氏迹公式在一般线性群上的谱展开 22 5. 刘氏迹公式在酉群上的谱展开 31 6. 正则尖点数据的相对特征标的整体比较 38 7. Gan–Gross–Prasad 猜想的证明：Eisenstein 情形 44

第二部分：正余秩傅里叶–雅可比周期 48

8. 群与表示 48 9. 局部傅里叶–雅可比周期 52 10. 整体傅里叶–雅可比周期 58 11. 主要定理的证明 61

参考文献 63

1. Introduction

20世纪90年代，Gross 和 Prasad [GP92, GP94] 提出了关于正交群限制问题的一些猜想。后来，Gan、Gross 和 Prasad 在其著作 [GGP12]中将这些猜想推广到了所有经典群。Ichino 和 Ikeda [II10] 对 Gross 和 Prasad 的猜想给出了一个精化：

Date: 2026年1月6日。

这一精化后来又被推广到其他情形 [Har14，Liu16，Xue16，Xue17]。它们通常被称为 Gan–Gross–Prasad（GGP）猜想，并引起了大量研究。这些猜想描述了经典群上某些自守形式的周期积分与某些 L-函数的中心值之间的关系。

GGP 猜想中有两类周期积分：贝塞尔周期和傅里叶–雅可比周期。傅里叶–雅可比周期通常涉及 θ 函数，而贝塞尔周期则不涉及。具体到酉群的情形，贝塞尔周期定义在酉群 U(n) ×U(m) 上，其中 $n-m$ 为奇数；而傅里叶–雅可比情形则是 $n-m$ 为偶数。酉群上的贝塞尔周期及其精化，经过许多人的研究，如今已完全解决，参见 [JR11、Yun11、Zha14a、Zha14b、Xue19、BP21a、BP21b、BPLZZ21、BPCZ22、BPC25]，以上仅列举部分文献。证明采用 Jacquet 和 Rallis 的方法，通过比较相对迹公式来完成。

受 Jacquet 和 Rallis 工作的启发，Liu [Liu14]提出了一种通过相对迹公式研究猜想中傅里叶–雅可比情形的方法。沿着这一思路，第三位作者在 [Xue14、Xue16] 中，在各种局部条件下证明了酉群 U(n) × U(n) 上 GGP 猜想的若干情形。

这三篇论文（[BLXa], [BLXb] 以及本文）的目标，是全面研究这些相对迹公式之间的比较，并得到酉群上任意傅里叶–雅可比周期的 GGP 猜想和 Ichino–Ikeda 猜想。本文是这一系列的最后一篇，旨在比较 Liu 的相对迹公式的两种谱展开，并证明这些猜想。现在我们精确陈述主要结果。

1.1. **傅里叶–雅可比周期的 GGP 猜想**。 我们首先回顾 [GGP12] 中傅里叶–雅可比周期的构造。它们是沿傅里叶–雅可比子群对自守形式积分，并以 Heisenberg–Weil 表示构造的 θ 级数作为权函数。

1.1.1. 傅里叶–雅可比群、*Heisenberg–Weil* 表示。 设 E/F 是数域的二次扩张，并记 $\mathbb{A}$ （分别为 $\mathbb{A}_E$）为 F （分别为 E）的阿代尔环。若 $\mathbb{G}$ 是定义在 F 上的代数群，则记 $[\mathbb{G}]$ 为自守商 $\mathbb{G}(F)\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A})$。

固定两个整数 n 和 m，满足 $n = m + 2r$，其中 r 是非负整数。设 $W \subset V$ 是两个非退化斜厄米空间，其维数分别为 m 和 n。我们假设 $W^\perp$ 是分裂的，即 $W^\perp = X \oplus X^*$，其中 X 是维数为 r 的完全各向同性子空间。令 U(V) 和 U(W) 为 F 代数群，分别由 V 和 W 上的 E-线性酉变换构成。令 $\{0\} \subset X_1 \subset \ldots \subset X_r = X$ 为 X 的一个完备旗，并令 U_r 为 U(V) 中稳定旗 $\{0\} \subset X_1 \subset \ldots \subset X \subset X \oplus W \subset V$ 的抛物子群的幂零根。注意，稳定 W 的 Levi 子群同构于 $(\mathrm{Res}^{E/F}\mathrm{GL}_1)^r \times \mathrm{U}(W)$。我们定义

$$\mathcal{U}_W := \mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(W), \quad \mathcal{H}_W := \mathrm{U}(W) \ltimes U_r,$$

其中，后者通过自然嵌入与到 U(W) 的投影的乘积嵌入前者。群 $\mathcal{H}_W$ 是傅里叶–雅可比群。

令 $q(\cdot,\cdot)_W$ 为 W 上的斜厄米形式，并令 $\mathbb{W}$ 为底层 F-向量空间为 W、辛形式为 $\mathrm{Tr}^{E/F}\circ q(\cdot,\cdot)_W$ 的 F-辛空间。我们取一个极化 $\mathbb{W}=Y\oplus Y^\vee$，使得 $Y^\vee$ 是维数为 m 的 F-向量空间。我们有与 $\mathbb{W}$ 相关联的海森堡群 $S(W)$，其点为 $\mathbb{W}\times F$，群运算见下文 (3.1) 式。若以 U_{r-1} 表示 $\mathrm{U}(V)$ 中稳定旗 $\{0\}\subset X_1\subset\ldots\subset X_{r-1}\subset X\oplus W\subset V$ 的抛物子群的幂零根，则有另一种表示 $\mathcal{H}_W=\mathrm{U}(W)\ltimes S(W)\ltimes U_{r-1}$。

令 ψ 为 $F\backslash\mathbb{A}_F$ 的一个非零自守特征，令 μ 为 $E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$ 的一个自守特征，其在 $\mathbb{A}_F^\times$ 上的限制为 $\eta_{E/F}$，即由整体类域论与 E/F 相关联的二次特征。它们分别分解为 $\psi=\otimes_v\psi_v$ 和 $\mu=\otimes_v\mu_v$。对于 F 的每个赋值 v，根据 Stone–Von Neumann定理，存在 $S(W)(F_v)$ 的唯一不可约光滑无限维表示，其中心特征为 ψ_v^{-1}，记为 $\rho_v^\vee$。它实现在局部 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(Y^\vee(F_v))$ 上。此外，μ_v^{-1} 诱导了 S^1- 重叠覆盖 $\mathrm{Mp}(\mathbb{W})_v\to\mathrm{Sp}(\mathbb{W})(F_v)$ 在 $\mathrm{U}(W)(F_v)$ 上的一个分裂，从而得到与 (ψ_v^{-1},μ_v^{-1}) 相关联的 $\mathrm{U}(W)(F_v)$ 的魏尔表示 $\omega_v^\vee$。关于这些陈述的证明，参见 [MVW87]。最后，我们取在 (8.3) 中定义的 F-态射 $\lambda\colon U_{r-1}\to\mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_a$。它在 $\mathrm{U}(W)\ltimes S(W)$ 的作用下保持不变。考虑 $\psi_U:=\psi\circ\mathrm{Tr}_{E/F}\circ\lambda$，这是 U_{r-1} 的一个自守特征。现在可以按如下规则定义 $\mathcal{H}_W(F_v)$ 的局部 Heisenberg–Weil 表示 $\nu_v^\vee$

$$\nu_v^\vee(ghu)=\omega_v^\vee(g)\rho_v^\vee(h)\overline{\psi}_{U,v}(u),\quad g\in\mathrm{U}(W)(F_v),\quad h\in S(W)(F_v),\quad u\in U_{r-1}(F_v).$$

它实现于 $\mathcal{S}(Y^\vee(F_v))$ 上。正如 [GGP12 第 22]，节所回顾的，全局海森堡–韦伊表示 $\nu^\vee:=\otimes_v'\nu_v^\vee$实现于 $\mathcal{S}(Y^\vee(\mathbb{A}_F))$ 上，是 $\mathcal{H}_W(\mathbb{A}_F)$ 的一个自守表示，由 θ 级数给出

$$\theta_{\mathcal{H}_W}^\vee(h,\phi)=\sum_{y\in Y^\vee(F)}(\nu^\vee(h)\phi)(y),\quad h\in\mathcal{H}_W(\mathbb{A}_F),\quad \phi\in\nu^\vee.$$

1.1.2. 全局傅里叶–雅可比周期。 我们赋予 $\mathcal{H}_W(\mathbb{A})$ 来自 §2.2.4 的玉河测度。设 σ是 $\mathcal{U}_W(\mathbb{A})$ 的一个尖点自守表示。其 傅里叶–雅可比周期 是绝对收敛积分

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}(\varphi,\phi):=\int_{[\mathcal{H}_W]}\varphi(h)\theta_{\mathcal{H}_W}^\vee(h,\phi)\mathrm{d}h,\quad \varphi\in\sigma,\quad \phi\in\nu^\vee. \tag{1.1}$$

1.1.3. 基变换。 对于任意 $k\geq 1$，记 G_k 为标量限制 $\mathrm{Res}^{E/F}\mathrm{GL}_k$。我们称 σ 存在 弱基变换，若存在一个离散自守表示 $\mathrm{BC}(\sigma)G_n\times G_m$，使得在几乎所有分裂处 v，$\mathrm{BC}(\sigma)_v$是 σ_v 的分裂基变换。根据 [Ram18]，这样的表示是唯一的。

此外，还有一种强基变换的概念。根据局部朗兰兹函子性，对所有赋值 v，表示 σ_v 都有一个基变换 $\mathrm{BC}(\sigma_v)$，它是$G_n(F_v)\times G_m(F_v$上的光滑不可约表示。若假设所有 $\mathrm{BC}(\sigma_v)$ 都处于一般位置，那么根据 [Mok15] 和 [KMSW]，$\mathrm{BC}(\sigma)$ 总是存在，且是强基变换，即对所有 v，它满足 $\mathrm{BC}(\sigma)_v=\mathrm{BC}(\sigma_v)$。

记 $\mathrm{BC}(\sigma) = \mathrm{BC}(\sigma)_n \boxtimes \mathrm{BC}(\sigma)_m$。在一般情形下，$k \in \{n, m\}$ [Mok15] 和 [KMSW]还告诉我们，$\mathrm{BC}(\sigma)_k$ 可以写成抛物诱导 $\pi_{k,1} \times \ldots \times \pi_{k,r_k}$，其中 $\pi_{k,i}$ 是某些 G_l 上的尖点自对偶自守表示，彼此不同构，并且 Asai L-函数 $L(s, \pi_{k,i}, \mathrm{As}^{(-1)^{k+1}})$ 在 $s = 1$ 处有极点。$\pi_{k,i}$ 在置换意义下唯一，我们记 $S_\sigma = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r_n} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r_m}$。

反过来，任何可以写成满足上述要求的诱导表示的 Π $G_n \times G_m$ 自守表示，都称为离散 *Hermitian Arthur* 参数。

1.1.4. *GGP* 猜想。本文的第一个主要结果是针对具有一般基变换的尖点自守表示的 Gan–Gross–Prasad 猜想，其表述见 [GGP12]。我们给出的表述独立于 [Mok15] 和 [KMSW]，因为它仅依赖于弱基变换的概念。

定理 1.1. 设 Π 是 $G_n \times G_m$ 的一个离散 *Hermitian Arthur* 参数。则以下断言等价：

(1) 完整的 *Rankin–Selberg* L 函数满足 $L(\frac{1}{2}, \Pi \otimes \mu) \neq 0$；(2) 存在两个维数分别为 m 和 n 的非退化斜 *Hermitian* 空间 $W \subset V$，以及一个 $\mathcal{G}_W$ 的尖点自守表示 σ，使得 $W^\perp$ 是分裂的，σ 的弱基变换为 Π，且 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}$ 在 $\sigma \otimes \nu^\vee$ 上不恒为零。

注记 1.2。根据 [GI16] 和 [Xue24], 的局部 Gan–Gross–Prasad 猜想，$W \subset V$以及定理中由 (2) 给出的表示 σ 若存在，则均唯一。

1.2. **局部傅里叶–雅可比周期**。本文的第二个主要结果是局部性的。我们沿用 §1.1中的记号，并在下文取 v 为 F 的一个赋值（允许它在E中分裂）。设 σ_v 是 $\mathcal{U}_W(F_v)$ 的一个光滑不可约表示。我们可以考虑局部傅里叶–雅可比泛函空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_W(F_v)}(\sigma_v \otimes \nu_v^\vee, \mathbb{C})$。根据 [GGP12] 和 [LS13],，其维数至多为 1。

若现在假设 σ_v 是温和的，我们便可通过积分在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_W(F_v)}(\sigma_v \otimes \nu_v^\vee, \mathbb{C})$ 中构造一个元素。设 $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ 是 σ_v上的一个不变内积，并记 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2, v}$ 为沿 $Y^\vee(F_v)$ 积分得到的 $\nu_v^\vee$ 上的不变内积。于是我们定义局部傅里叶–雅可比周期

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W, v}(\varphi_v, \phi_v) := \int_{\mathcal{H}_W(F_v)}^{\mathrm{reg}} \langle \sigma_v(h_v)\varphi_v, \varphi_v \rangle_v \langle \nu_v^\vee(h_v)\phi_v, \phi_v \rangle_{L^2, v} \mathrm{d}h_v, \quad \varphi_v \in \sigma_v, \quad \phi_v \in \nu_v^\vee.$$

当 $r \geq 1$ 时，该积分并非绝对收敛，需要进行适当的正则化（见§9.1.3）。我们证明了傅里叶–雅可比泛函满足温和交织。此前，$r = 0$ 情形下的这一结果已由 [Xue16]证明。

定理 1.3。假设 σ_v 是温和的。那么，空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_W(F_v)}(\sigma_v \otimes \nu_v^\vee, \mathbb{C})$ 非零，当且仅当半双线性型 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W, v}$ 在 $\sigma_v \otimes \nu_v^\vee$上非零。

1.3. **整体 Ichino–Ikeda 猜想。** 我们回到整体情形，并令 σ 为 $\mathcal{U}_W$的一个尖点自守表示。以下我们假设 σ_v 在所有赋值 v 处都是温和的，从而 BC(σ)存在且处于一般位置。请注意，在 Ramanujan 猜想成立的前提下，BC(σ)处于一般位置应等价于 σ_v的温和性。我们的最后一个主要结果是将 $|\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}|^2$ 分解为 L-函数与局部周期 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W,v}$的乘积。

我们在自守商 $[\mathcal{U}_W]$ 和 $[\mathcal{H}_W]$ 上赋予不变的玉河测度。在 σ上，我们有 Petersson 内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$；并在 $\nu^\vee$ 上定义内积 $\langle\cdot,\ \cdot,\ \rangle_{L^2}$，即相对于玉河测度沿 $Y^\vee(\mathbb{A}_F)$积分。取一个分解 $\langle\cdot,\cdot\rangle=\prod_v\langle\cdot,\ \cdot\rangle_v$，并且有 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{L^2}=\prod_v\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{L^2,\ v}$。我们还取玉河测度在 $\mathcal{H}_W(\mathbb{A})$上的分解 $\mathrm{d}h=\prod_v\mathrm{d}h_v$。

我们考虑完备化 L-函数的乘积

$$\mathcal{L}(s,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}L(i+s-\frac{1}{2},\eta_{E/F}^i)\frac{L(s,\mathrm{BC}(\sigma)\otimes\overline{\mu})}{L(s+\frac{1}{2},\mathrm{BC}(\sigma),\mathrm{As}^{n,m})},$$

其中 $\mathrm{As}^{n,\ m}=\mathrm{As}^{(-1)^n}\boxtimes\mathrm{As}^{(-1)^m}$。函数 $\mathcal{L}(s,\ \sigma)$ 在 $1/2$ 处正则（见注释 7.2，其中给出了更一般的表述）。对于每个赋值 v，记 $\mathcal{L}(s,\ \sigma_v)$ 为相应的局部因子。我们定义 归一化局部傅里叶–雅可比周期

$$\mathcal{P}^\sharp_{\mathcal{H}_W,v}(\varphi_v,\phi_v):=\mathcal{L}(\frac{1}{2},\sigma_v)^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W,v}(\varphi_v,\phi_v).$$

由 [Boi25] 的非分歧 Ichino–Ikeda 猜想可知，若 $\varphi=\otimes_v\varphi_v$ 和 $\phi=\otimes_v\phi_v$是可分解向量，则 $\mathcal{P}^\sharp_{\mathcal{H}_W,\ v}(\varphi_v,\ \phi_v)=1$ 对几乎所有的 v都成立。我们的第二个主要结果是以下分解表达式。它是 Fourier–Jacobi 版本，对应于 Ichino 和 Ikeda 在 [II10] 中关于正交群上贝塞尔周期的猜想，以及 Harris 在 [Har14] 中关于酉群上贝塞尔周期的猜想。

定理 1.4。 设 σ 如上。对于任意可分解向量 $\varphi=\otimes_v\varphi_v\in\sigma$ 和 $\phi=\otimes_v\phi_v\in\nu^\vee$，我们有

$$|\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}(\varphi,\phi)|^2=|S_\sigma|^{-1}\mathcal{L}(\frac{1}{2},\sigma)\prod_v\mathcal{P}^\sharp_{\mathcal{H}_W,v}(\varphi_v,\phi_v).$$

1.4. **一般 Eisenstein 级数的 Gan–Gross–Prasad 猜想。** 在我们的方法中，我们首先证明定理 1.1 和 1.4 在零余秩情形（即 $V=W$）对一类一般 Eisenstein 级数的推广。通过展开，这便推出一般情形下的结果。现在我们解释这一策略的主要步骤。

1.4.1. 归约到零余秩情形。 论证的第一部分是将问题归约到零余秩情形，此时 $r=0$，因此 $V=W$、$\mathcal{U}_W=\mathrm{U}(V)\times\mathrm{U}(V)$、$\mathcal{H}_W=\mathrm{U}(V)$ 对角嵌入，而 $\nu^\vee$只是 U(V) 的魏尔表示。在这一情形下，我们将用 U_V表示 U(V) $\times$U(V)，并用 U'_V 表示 U(V)。

若 σ 是 $\mathcal{U}_W$ 的一个表示（在整体或局部情形下均可），我们可以考虑 U(V) 中稳定旗 $X\subset X\oplus W\subset V$的抛物子群 $P(X)$。稳定 W_5的 Levi 子群

是 $G_r \times \mathrm{U}(W)$。对于 G_r的任意表示 τ，我们可以考虑抛物诱导 $\Sigma := I^{\mathrm{U}_V}_{\mathrm{U}(V)\times P(X)}\sigma \boxtimes \tau$。我们在第 9 节和第 10 节证明，$\sigma$上的整体周期 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}$以及局部周期 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W,v}$，分别可以展开为 Σ 上的 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}$ 以及 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V,v}$。对于第一种情形，这依赖于 [Boi25]中进行的非分歧计算。在局部情形下，若假设 σ 和τ 是温和的，那么 Σ也将是温和的，由此可将定理 1.3 化归到 $r = 0$ 情形；该情形已在[Xue16]中得到证明。在整体情形下，Σ 将不再是尖点表示。这促使我们考虑某些艾森斯坦级数的 Gan–Gross–Prasad 猜想和 Ichino–Ikeda 猜想。

1.4.2. 正则参数。现在我们来描述我们感兴趣的艾森斯坦级数类别。设Q 是 U_V 的一个标准抛物子群（相对于上三角矩阵），其标准 Levi 子群为 $M_Q := (G_{n_1} \times \ldots \times G_{n_k} \times \mathrm{U}(V_0)) \times (G_{n'_1} \times \ldots \times G_{n'_{k'}} \times \mathrm{U}(V'_0))$，其中 V_0和 V'_0是包含于 V中的斜厄米空间。设 σ 是 M_Q 的一个尖点表示，我们相应地将其分解为 $\sigma = (\tau_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \tau_k \boxtimes \sigma_0) \boxtimes (\tau'_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \tau'_{k'} \boxtimes \sigma'_0)$。令 $\Sigma = I^{\mathrm{U}_V}_Q \sigma$。那么，如果满足以下条件，我们称 Σ是 $(\mathrm{U}_V, \mathrm{U}'_V, \mu)$-正则且具有一般基变换：

- 基变换 BC(σ_0) 和 BC(σ'_0) 均处于一般位置；
- 表示 τ_1、……、τ_k、τ_1^*、……、τ_k^*两两不同，其中我们将 τ^*记作 τ的共轭对偶；
- 表示 τ'_1、……、$\tau'_{k'}$、$\tau'_{1}{}^*$、……、$\tau'_{k'}{}^*$两两不同；
- 对于所有的 $1 \le i \le k$ 和 $1 \le j \le k'$，$\mu\tau_i$ 都不同构于 τ'_j的对偶表示。

在 Σ<style id='4}>§1.4.1 中考虑的诱导表示 $(\mathrm{U}_V, \mathrm{U}'_V, \mu)$-正则；对于适当选择的 τ，只要 BC(σ) 处于一般位置，它就具有一般基变换。

1.4.3. 艾森斯坦级数的傅里叶–雅可比周期。设 $\Sigma = I^{\mathrm{U}_V}_Q \sigma$为 $(\mathrm{U}_V, \mathrm{U}'_V, \mu)$-正则。对于$\varphi \in \Sigma$ 和 $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_Q$，我们有艾森斯坦级数 $E(\varphi, \lambda)$。当 $\phi \in \nu^\vee$时，(1.1) 中定义的傅里叶–雅可比周期 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}$并不绝对收敛。在 [BLXa], 中，我们定义了一个截断算子 Λ^T_u。这是对 [IY19], 工作的改编，而由于 θ 级数 $\theta_{\mathrm{U}'_V}$，我们的情形略为复杂。我们在命题 5.2 中证明，由于 Σ是 $(\mathrm{U}_V, \mathrm{U}'_V, \mu)$-正则，截断后的周期

$$T \mapsto \int_{[\mathrm{U}'_V]} \Lambda^T_u \left(E(\varphi, \lambda)\theta^\vee_{\mathrm{U}'_V}(\phi) \right)(h)\mathrm{d}h$$

是一个等于数值 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}(E(\varphi, \lambda)\ \phi)$ 的常数。这就是正则化傅里叶–雅可比周期。

1.4.4. 关于艾森斯坦级数的猜想。我们关于艾森斯坦级数的傅里叶–雅可比周期的主要结果如下。

定理 1.5。假设 Σ 是具有一般基变换的$(\mathrm{U}_V, \mathrm{U}'_V, \mu)$-正则的，并令 $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_Q$。那么，*Gan–Gross–Prasad* 猜想和 *Ichino–Ikeda* 猜想对周期 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}(E(\varphi, \lambda)\ \phi)$ 成立。

具体表述见定理 7.1 和 7.3 。事实上，我们证明的版本不依赖 BC(σ) 的存在，且独立于 [Mok15] 和 [KMSW]。如上所述，该结果通过展开推出定理1.1 和 1.4 。

1.5. **刘氏迹公式的谱展开**。 为证明定理1.5，我们对 Liu 的相对迹公式的谱侧进行比较。这项分析占据了本文的前半部分，并依赖于 [BLXa]和 [BLXb]。

1.5.1. 两个相对迹公式。我们首先考虑酉相对迹公式，它与双陪集 $\mathrm{U}_V' / \mathrm{U}_V \backslash \mathrm{U}_V'$相关。更确切地说，对于 U_V 上核为 K_{f_V} 的施瓦茨函数 f_V，以及 $\phi_1, \phi_2 \in \nu^\vee$，我们暂且定义

$$J_V(f_V \otimes \phi_1 \otimes \phi_2) = \int_{[\mathrm{U}_V']}^{\mathrm{reg}} \int_{[\mathrm{U}_V']} K_{f_V}(h_1, h_2)\theta^\vee(h_1, \phi_1)\theta^\vee(h_2, \phi_2)\mathrm{d}h_1\mathrm{d}h_2.$$

一般而言，这个积分并非绝对收敛，需要进行正则化。

第二个相对迹公式定义在一般线性群上。令 $G = G_n \times G_n$, $H = G_n$ （嵌入到 G 中的对角线）并令 $G' = \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$ （视为 G 的子群）。对于 Φ 一个定义在 n 个变量上的施瓦茨函数，我们有来自 $\mathbb{A}_E$ 的爱泼斯坦艾森斯坦级数 $\Theta(\Phi)$。对于 [JS81] 上的一个 f 施瓦茨函数，我们定义 G

$$I(f \otimes \Phi) = \int_{[H]}^{\mathrm{reg}} \int_{[G']} K_f(h, g')\Theta(h, g')\overline{\mu}(\det h)\,|\det h|^{1/2}\,\eta(g')\mathrm{d}g'\mathrm{d}h,$$

其中 η 是某个特征（精确定义见 §5.3 ）。同样，一般而言此式并不收敛。

1.5.2. 来自 [BLXa] 的主要成果。 在 [BLXa]，中，我们运用受 J_V 启发的截断方法，对 I 和 [Zyd20] 进行正则化。此外，我们以轨道积分的形式计算了这些相对迹公式的几何展开。这些展开也需要正则化。最后，我们证明 J_V 和 I 均具有以尖点数据表示的粗谱展开。

1.5.3. 来自 [BLXb]的主要内容。在 [BLXb], 中，我们定义了元组（f_V、ϕ_1、ϕ_2）和（f、Φ）之间的匹配概念，将其视为轨道积分之间的一种对应。我们还给出了基本引理的一个版本，并证明可转移测试函数空间是稠密的。这提供了比较 J_V 和 I的几何展开所需的全部工具。

我们还研究了刘氏迹公式的一个局部类比，与 [BP21a] 在贝塞尔情形中的工作相对应。我们证明，局部匹配等价于局部相对特征相等。在酉侧，这些相对特征对应于局部傅里叶–雅可比周期 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}_V', v}$。这一匹配的谱刻画将在 Ichino–Ikeda 猜想的证明中使用。

1.5.4. 本文：谱侧的比较。本文计算了 J_V 和 I的谱展开。更确切地说，在酉侧，我们导出了具有一般基变换的（U_V，U_V'，μ）-正则自守表示的谱贡献。这些贡献具有相对特征的形式，其中涉及正则化周期 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}_V'}(E(\varphi,\ \lambda)\ \phi)$。

在一般线性群方面，我们计算了这些表示的基变换所产生的贡献。在本文中，它们被称为（G，H，μ）-正则厄米特 Arthur 参数。

精确定义§3.4.2 将在下文给出。此时的展开分别用 Rankin–Selberg 周期和 Flicker–Rallis 周期表示，记作 $\mathcal{P}_H$ 和 $\mathcal{P}_{G'}$。前者通过 L-函数计算 Rankin–Selberg [JPSS83], 的中心值，后者则通过 [Fli88]检测 BC 的像。然而，在这两种情形下，这些周期也都需要经过正则化，以便能够对艾森斯坦级数进行积分。对于 $\mathcal{P}_{G'}$，这项工作已在 [BPC25], 中完成；对于 $\mathcal{P}_H$，我们则采用 Tate 的论文精神下的解析延拓过程。

计算出 J_V 和 I 的谱展开后，我们通过适当测试函数的几何展开相等性将二者联系起来。为了分离表示，我们关键性地使用了 [BPLZZ21] 关于乘子的结果。这一步需要采用 [BLXb], 给出的匹配的谱刻画，因为它使我们能够确保匹配测试函数的谱投影仍然匹配。

比较结果在正文中表述为定理 6.5，其内容是：与 BC(Σ) 相关的相对特征可以与下列相对特征之和进行比较：当 Σ'遍历 Σ' 的全局 Arthur 包时， Σ。这立即推出定理1.5。

1.6. **论文结构**。 在第 2 节中，我们确定与自守形式有关的一些记号，并特别强调函数空间。我们还证明了一个关于相对特征收敛性的技术性结果（命题 2.3）。论文其余部分分为两部分。

在第 1部分中，我们只处理零余秩情形，并证明定理 1.5。我们在第 4 节和5 节计算 Liu 的相对迹公式的谱展开，先是在一般线性侧，随后是在酉侧。接着，我们在第 6 节利用 [BLXa] 和 [BLXb]中对几何侧的比较来对它们进行比较。最终结果是定理6.5。最后，我们在第1.5 节证明定理 7

在第 2部分中，我们证明正余秩情形下的结果。在第9节，我们研究局部傅里叶–雅可比周期，并证明它们满足某些展开关系。我们还获得定理 1.3的非消失性结果。在第 10节，我们转到整体情形，并为 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}$ 写出一个展开等式。最后，在第 11 节，我们将定理 1.1 和 1.4 归约到我们已在定理1.5中证明的零余秩情形。

1.7. **致谢**。 我们感谢 Rapha¨el Beuzart-Plessis 和 Wei Zhang 的多次宝贵讨论。PB 部分经费来自欧盟 ERC 巩固者资助 RELANTRA（项目编号 101044930）。不过，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会的立场。欧盟和资助机构均不对此承担责任。WL 在 2023 年春季驻留于加利福尼亚州伯克利的数学科学研究所期间，部分获得了美国国家科学基金会第 1440140 号资助。HX 部分获得 NSF DMS 项目资助 #2154352。

2. Preliminaries on spaces of functions and automorphic representations

本节汇总约化群及其自守形式的一些通用记号，并特别着重介绍自守商上的函数空间。

2.1. 约化群。 设 F 是一个特征零域。所有代数群都定义在 F上。

2.1.1. 一般记号。 设 G是一个代数群。设 Z_G 是 G的中心。设 N_G 是 G 的幂零根， $X^*(G)$是 G 的 F-代数特征群。令 $\mathfrak{a}_G^* = X^*(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 和 $\mathfrak{a}_G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(G), \mathbb{R})$。

假设 G 是连通约化的。设 P_0 是 G的一个极小抛物子群。设 M_0是 P_0的一个Levi 因子。若 G 的一个抛物子群包含 P_0 （分别地，包含 M_0），则称其为标准（分别地，半标准）抛物子群。若 P 是 G的一个半标准抛物子群，则记其包含 M_0的唯一Levi 因子为 M_P。我们有分解 $P = M_P N_P$。

令 A_G 为 G 的极大中心 F-分裂环面。若 P 是G 的标准抛物子群，令 $A_P = A_{M_P}$。用 A_0 表示 A_{P_0}。限制映射 $X^*(P) \to X^*(M_P) \to X^*(A_P)$ 诱导出同构 $\mathfrak{a}_P^* \simeq \mathfrak{a}_{M_P}^* \simeq \mathfrak{a}_{A_P}^*$。若 $P = P_0$，我们将 $\mathfrak{a}_{P_0}$ 和 $\mathfrak{a}_{P_0}^*$ 分别记作 $\mathfrak{a}_0$ 和 $\mathfrak{a}_0^*$。对于 $P \subset Q$，限制映射 $X^*(Q) \to X^*(P)$ 和 $X^*(A_P) \to X^*(A_Q)$ 分别诱导出子空间 $\mathfrak{a}_P^Q$ 和 $\mathfrak{a}^{Q,P^*}$。我们还将 $\mathfrak{a}^{M_Q,P^*}$。

令 $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^Q = \mathfrak{a}_P^Q \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 和 $\mathfrak{a}^{Q,P^*,\mathbb{C}} = \mathfrak{a}^{Q,P^*} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$。我们有分解 $\mathfrak{a}_P^Q = \mathfrak{a}_P^Q \oplus i\mathfrak{a}_P^Q$， $\mathfrak{a}^{Q,P^*,\mathbb{C}} = \mathfrak{a}^{Q,P^*} \oplus i\mathfrak{a}^{Q,P^*}$，其中 $i^2 = -1$。我们用 $\Re$ 和 $\Im$ 表示这些分解所对应的实部和虚部，并用 λ 表示任意 $\lambda \in \mathfrak{a}^{Q,\mathcal{P}\mathbb{C}}$， 的复共轭。

令 W 为 (G, A_0) 的魏尔群，按照定义，它是正规化子$N_{G(F)}(A_0(F))$ 对中心化子 $Z_{G(F)}(A_0(F))$ 取商所得。它作用于 $\mathfrak{a}_0$ 和 $\mathfrak{a}_0^*$。若 $w \in W$，我们仍将w 记作 $G(F)$ 中的一个代表元。

令 P 为 G 的一个标准抛物子群，并用 Δ_0^P 表示 A_0 在 $M_P \cap P_0$ 中的根集。若 Q 是 G 的另一个抛物子群，我们用 $W(P, Q)$ 表示满足 $w \in \Delta_0^P = \Delta_0^Q$ 的 $w \in W$ 的集合。特别地，若 $w \in W(P, Q)$，则有 $wM_Pw^{-1} = M_Q$。

2.2. 自守商与哈尔测度。现在我们假设 F 是一个数域。令 G 为定义在 F 上的连通约化群。

2.2.1. 自守商。令 $\mathbb{A}$ 为 F的阿代尔环，令 $\mathbb{A}_f$ 为其有限阿代尔环。设$F_\infty = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$。令 V_F 为 F 的赋值集合，令$V_{F,\infty} \subset V_F$为阿基米德地方的子集。对于 $v \in V_F$，令 F_v 为 F 在 v处的完备化。若 v 是非阿基米德的，令 $\mathcal{O}_v$ 为其整数环。令 $|\cdot|$ 为绝对值 $\mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}_+^\times$，其定义为对每个 F_v 取标准化绝对值 $|\cdot|_v$ 的乘积。若 S 是 F的有限个赋值的集合，设 $F_{\mathsf{S}} = \prod_{v \in \mathsf{S}} F_v$。若 S 仅包含非阿基米德赋值，记作 $\mathcal{O}_F^{\mathsf{S}} = \prod_{v \notin \mathsf{S}} \mathcal{O}_v$。

令 $P = M_P N_P$ 为 G的半标准抛物子群。设

$$[G]_P = M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}).$$

令 $A_{P,\mathbb{Q}}$ 为魏尔限制 $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} A_P$ 的极大 $\mathbb{Q}$-分裂子环面，并令 A_P^∞ 为 $A_{P,\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ 的单位连通分支。设

$$[G]_{P,0} = A_P^\infty M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}).$$

若 $P = G$，我们简单地分别用 $[G]$ 和 $[G]_0$ 表示 $[G]_G$ 和 $[G]_{G,0}$。

2.2.2. 极大紧子群。令 $K = \prod_{v\in V_F} K_v \subset G(\mathbb{A})$ 为一个相对于 M_0 处于良好位置的“良好”极大紧子群。我们记作 $K = K_\infty K^\infty$，其中 $K_\infty = \prod_{v\in V_{F,\infty}} K_v$ 和 $K^\infty = \prod_{v\in V_F\setminus V_{F,\infty}} K_v$。

2.2.3. *Harish-Chandra* 映射。令 P 为 G 的半标准抛物子群。存在一个典范态射 $H_P\colon P(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$，使得对于任意 $g \in P(\mathbb{A})$ 和 $\chi \in X^*(P)$，$\langle \chi, H_P(g)\rangle = \log |\chi(g)|$。我们将其扩展为 Harish-Chandra 映射 $H_P\colon G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$，它满足：对于任意 $g \in G(\mathbb{A})$，只要 $g \in pK$ 且 $p \in P(\mathbb{A})$，就有 $H_P(g) = H_P(p)$。

2.2.4. 玉河测度。设 ψ 是 $\mathbb{A}$ 的非平凡自守特征。对于 F 的每个赋值 v，令 $d_{\psi_v}x_v$ 为 F_v 上相对于 $\mathbb{A}$ 的加法特征 ψ 的局部分量 ψ_v 自对偶的唯一哈尔测度。

左不变有理体积形式 ω 在 G 上的选取与测度 $d_{\psi_v}x_v$ 一起，确定了每个 $G(F_v)$ 上的左不变哈尔测度 $d_{\psi_v}g_v$（[魏82]）。根据 [格罗97], , 存在一个 Artin–Tate L-函数 $L_G(s) = \prod_v L_{G,v}(s)$。更一般地，对于有限个处组成的集合 S，我们可以考虑 $L_G^{\mathsf{S}}(s) = \prod_{v\notin \mathsf{S}} L_{G,v}(s)$。定义 Δ_G^* 和 $\Delta^{\mathsf{S}}{}_{,G}{}^*$ 分别为 $L_G(s)$ 和 $L_G^{\mathsf{S}}(s)$ 在 $s = 0$ 处 Laurent 展开的首项系数。对于每个赋值 v，令 $\Delta_{G,v} := L_{G,v}(0)$。我们在 $G(\mathbb{A})$ 上赋予玉河测度 dg，定义为 $\mathrm{d}g = \mathrm{d}_\psi g_{\mathsf{S}} \times \mathrm{d}_\psi g^{\mathsf{S}}$，其中 $\mathrm{d}_\psi g_{\mathsf{S}} = \prod_{v\in \mathsf{S}} \mathrm{d}_{\psi_v} g_v$ 且 $\mathrm{d}_\psi g^{\mathsf{S}} = (\Delta^{\mathsf{S}}{}_{,\mathbb{G}}{}^*)^{-1} \prod_{v\notin \mathsf{S}} \Delta_{G,v} \mathrm{d}_{\psi_v} g_v$。注意，对于 G 在 $\mathcal{O}_F^{\mathsf{S}}$ 上的任意模型，几乎对所有 v

$$\mathrm{vol}(G(\mathcal{O}_v), \mathrm{d}_{\psi_v} g_v) = \Delta_{G,v}^{-1}. \tag{2.1}$$

尽管 $\mathrm{d}_{\psi_v} g_v$ 取决于各种选择，但玉河测度 $\mathrm{d}g$ 并不依赖这些选择。只要 G 是 F 上的线性代数群（不一定是约化群），这一构造就成立。

2.2.5. 子群上的测度。设 P 是 G的一个标准抛物子群。我们在 $\mathfrak{a}_P$ 上赋予哈尔测度，使格 $\mathrm{Hom}(X^*(P)\ \mathbb{Z})$ 的余体积为 1。我们赋予 $i\mathfrak{a}_P^*$对偶哈尔测度。若 $P \subset Q$，则在 $\mathfrak{a}_P^Q = \mathfrak{a}_P/\mathfrak{a}_Q$ 上赋予商测度。我们在 A_P^∞上赋予与如下同构相容的哈尔测度：该同构由 Harish-Chandra态射诱导（见 $A_P^\infty \simeq \mathfrak{a}_P$ BPCZ22，第 2.2 节。5]）。

我们将 $[G]_P$ 定义为 $G(\mathbb{A})$ 上的测度除以 $M_P(F)$ 上的计数测度与 $N_P(\mathbb{A})$ 上的测度之积所得的商测度，并将 $[G]_{P,\ 0}$ 定义为 A_P^∞ 的"半不变"商测度（适用于满足在 A_P^∞ 左平移下按 δ_P 变换的 $[G]_P$ 上的函数）。

2.3. **函数空间**。我们继续假设 F 是一个数域，且 G是 F上的连通约化群。

2.3.1. 函数的比较。设 X 是一个集合，设 f 和 g 是定义在 X上的两个正函数。若存在 $C>0$使得对所有 $x\in X$都有 $f(x)\leq Cg(x)$，则记 $f(x)\ll g(x)\quad x\in X$。若要强调常数依赖于某些额外数据 y，我们将记作 $\ll_y$。

2.3.2. 拓扑向量空间。本文中考虑的所有拓扑 $\mathbb{C}$-向量空间都是局部凸的。我们用记号 $\widehat{\otimes}$ 表示两个此类空间之间的完备张量积。

2.3.3. 光滑函数。设 $\mathfrak{g}_\infty$ 为 $G(F_\infty)$的李代数，设 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$为其复化的包络代数，并设 $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$为 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$的中心。

我们将正规开紧子群称为层 J，其中包含于 K^∞。若 V是 $G(\mathbb{A})$ 的一个表示，我们用 V^J 表示其中被 J固定的向量子空间。

设 V为一个 Fr´echet 空间。若函数 $\varphi\colon G(\mathbb{A})\to V$在某个层 J 下右不变，且对每个 $g_f\in G(\mathbb{A}_f)$，函数 $g_\infty\in G(F_\infty)\mapsto\varphi(g_fg_\infty)$ 按通常意义是光滑的（即属于 $C^\infty(G(F_\infty))$），则称其为光滑函数。对于这类光滑函数，我们用 R（分别用 L）表示 $G(\mathbb{A})$ 和 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$ 通过右平移（分别通过左平移）给出的作用。

2.3.4. 高度函数、函数的增长。我们取一个高度函数 $\|\cdot\|$定义在 $G(\mathbb{A})$ 上，如 [BPCZ22第 2.4 节所述。1]。若 P是 G的一个标准抛物子群，则对任意 $g\in G(\mathbb{A})$，我们定义

$$\|g\|_P=\inf_{\delta\in M_P(F)N_P(\mathbb{A})}\|\delta g\|.$$

如果 $x=(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_n)\in\mathbb{A}^n$，我们也有高度函数 $\|x\|_{\mathbb{A}^n}:=\prod_v\max(1,\ |x_1|_v,\ \ldots\ldots,\ |x_n|_v)$.

对于所有 $N\in\mathbb{R}$, $X\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$ 以及任意光滑函数 $\varphi:\ [G]_P\to\mathbb{C}$ 我们定义

$$\|\varphi\|_{N,X}=\sup_{x\in[G]_P}\|x\|_P^N\left|(\mathrm{R}(X)\varphi)(x)\right|.$$

如果 $X=1$，我们就简写为 $\|\varphi\|_N$。

2.3.5. 施瓦茨函数。令 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$为 $G(\mathbb{A})$上在[BPCZ22, 第 2.5 节2]中定义的施瓦茨函数空间。它是一个拓扑向量空间，也是关于卷积乘积 $*$的代数。对于每个层 J，我们用 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$表示其由 J-双不变函数构成的子代数。对于任意 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，我们令 $f^\vee(g)=f(g^{-1})$。

对于每个赋值 v（或更一般地，对于每个有限子集 $\mathrm{S}\subset V_F$），我们有局部施瓦茨函数空间 $\mathcal{S}(G(F_v)$（或 $\mathcal{S}(G(F_\mathrm{S}))$），其定义见 [BP21a 第 2 节。4]

2.3.6. *Petersson* 内积。 在本节余下部分中，固定一个标准抛物子群 P 属于 G 。我们有希尔伯特空间 $L^2([G]_P)$，它由 $[G]_P$上的平方可积函数构成。更一般地，对于 $N \in \mathbb{R}$，我们用 $L^2_N([G]_P)$ 表示 $[G]_P$上关于测度 $\|g\|_P^N \mathrm{d}g$平方可积的函数空间。我们用 $L^2_N([G]_P)^\infty$ 表示其光滑向量空间。该空间赋予 [BPCZ22第 2.5 节中所述的拓扑。3]

我们还将考虑 $L^2([G]_{P,\,0})$，即定义在 $[G]_P$ 上的函数空间；这些函数在 A_P^∞的左平移下按 $\delta_P^{1/2}$ 变换，且其 Petersson 范数

$$\|\varphi\|^2_{P,\mathrm{Pet}} = \langle \varphi, \varphi \rangle_{P,\mathrm{Pet}} := \int_{[G]_{P,0}} |\varphi(g)|^2 \,\mathrm{d}g,$$

有限。这是一个希尔伯特空间。

2.3.7. 一致中等增长函数。对于每个 $N \in \mathbb{R}$，令 $\mathcal{T}_N([G]_P)$ 为满足以下条件的光滑函数 φ：$[G]_P \to \mathbb{C}$ 的空间：对于每个 $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$，都有 $\|\varphi\|_{-N,\,X} < \infty$。对于每个层 J，我们赋予 $\mathcal{T}_N([G]_P)^J$由半范数族 $(\|\cdot\|_{-N,\,X})_X$诱导的 Fréchet 空间拓扑。令

$$\mathcal{T}([G]_P) = \bigcup_{N>0} \mathcal{T}_N([G]_P).$$

这是定义在 $[G]_P$上的一致中等增长函数空间。它带有自然的局部 Fréchet 空间拓扑。

我们有一个常数项映射 $\varphi \in \mathcal{T}([G]) \mapsto \varphi_P \in \mathcal{T}([G]_P)$，定义如下

$$\varphi_P(g) = \int_{[N_P]} \varphi(ng)\mathrm{d}n, \quad \varphi \in \mathcal{T}([G]), \quad g \in [G]_P. \tag{2.2}$$

2.3.8. $[G]_P$的 *Schwartz* 空间。令 $\mathcal{S}([G]_P)$ 为光滑函数 φ：$[G]_P \to \mathbb{C}$ 构成的空间，使得对每个 $N \geq 0$ 和 $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$，都有 $\|\varphi\|_{N,X} < \infty$。对每个层 J，我们赋予 $\mathcal{S}([G]_P)^J$由半范数族 $(\|\cdot\|_{N,X})_{N,X}$ 所诱导的 Fr´echet 拓扑，并赋予 $\mathcal{S}([G]_P)$ 局部凸归纳极限拓扑。这就是 $[G]_P$ 的 *Schwartz* 空间。

2.3.9. *Harish-Chandra Schwartz*空间。令 $\mathcal{C}([G]_P)$ 为 $[G]_P$中定义的 [BPCZ22 第 2.5 节中的 Harish-Chandra Schwartz空间。8]。其精确定义与我们无关，但我们将用到以下性质。

引理 2.1 ([Lap13，方程 (9)])。 线性形式

$$\varphi \in \mathcal{C}([G \times G]_{P\times P}) \mapsto \int_{[G]_P} \varphi(g)\mathrm{d}g$$

是良定义且连续的，其中 $[G]_P$以对角方式嵌入到 $[G \times G]_{P\times P}$中。

2.3.10. 函数空间之间的关系。 我们在一个引理中总结将要用到的函数空间 $\mathcal{T}([G]_P)$、 $\mathcal{S}([G]_P)$ 和 $\mathcal{C}([G]_P)$ 的主要性质。

引理 2.2。 以下性质成立。

(1) [BPCZ22，公式 (2.5.7.6)]，[BPCZ22，公式 (2.5.10.8)]。我们有

$$\mathcal{T}([G]_P) = \bigcup_{N>0} L^2_{-N}([G]_P)^\infty, \quad \mathcal{S}([G]_P) = \bigcap_{N>0} L^2_N([G]_P)^\infty. \tag{2.3}$$

(2) [*BPCZ22*，公式 *(2.5.5.4)*] 对于每个 $N > 0$，存在 $N' > 0$，使得有一个连续嵌入 $L^2_{-N'}([G])^\infty \subset \mathcal{T}_N([G])$。*(3)* [*BPCZ22*，第 *2.5* 节。10]，[*BPCZ22*，第 *2.5* 节。8]，[*BPCZ22*，第 *2.5* 节。空间$\mathcal{S}([G]_P)$ 在 $\mathcal{T}([G]_P)$、 $\mathcal{C}([G]_P)$ 和 $L^2_N([G]_P)^\infty$ 中对每个 $N \in \mathbb{R}$ 都是稠密的（但一般而言不在 $\mathcal{T}_N([G]_P)$ 中稠密）。*(4)* [*BPCZ22*，公式 *(2.4.5.25)*] 嵌入 $\mathcal{C}([G]_P) \subset \mathcal{T}([G]_P)$ 是连续的。

2.4. **自守表示**。我们保留 F 是一个数域且 G 是 F 上的连通约化群这一假设。取 P 为 G 的一个标准抛物子群

2.4.1. 自守形式。我们将自守形式空间 $\mathcal{A}_P(G)$ 定义为 $\mathcal{T}([G]_P)$ 中 $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$-有限函数所组成的子空间。令 $\mathcal{A}^0_P(G)$ 为 $\varphi \in \mathcal{A}_P(G)$ 中满足以下条件的子空间

$$\varphi(ag) = \delta_P(g)^{1/2}\varphi(g), \quad a \in A_P^\infty, \quad g \in [G]_P.$$

如果 $P = G$ 我们简单记为 $\mathcal{A}(G)$ 和 $\mathcal{A}^0(G)$。这些空间赋予 [BPCZ22第 2.7 节中的拓扑。1]。

令 $\mathcal{A}_{P,\,\mathrm{disc}}(G) \subset \mathcal{A}^0_P(G)$ 为 φ 的满足彼得森范数 $\|\varphi\|_{P,\,\mathrm{Pet}}$ 有限的子空间。空间 $\mathcal{A}^0_P(G)$ 和 $\mathcal{A}_{P,\,\mathrm{disc}}(G)$ 分别通过右卷积承受 $G(\mathbb{A})$ 和 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 的作用。

2.4.2. 自守表示。 我们将 $G(\mathbb{A})$的离散自守表示定义为 $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$的拓扑不可约子表示。令 $\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ 为这类表示的集合。对于 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(G)$，令 $\mathcal{A}_\pi(G)$为 $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$的 π-等型分量。注意， π在 A_G^∞上总是具有平凡中心特征。

对于 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$，令$\mathcal{A}_{P,\pi}(G)$为$\varphi \in \mathcal{A}_{P,\mathrm{disc}}(G)$的子空间，使得对所有 $g \in G(\mathbb{A})$，映射 $m \in [M_P] \mapsto \delta_P(m)^{-1/2}\varphi(mg)$都属于 $\mathcal{A}_\pi(M_P)$。对于任意$\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$，设 $\pi_\lambda = \pi \otimes \exp(\langle \lambda, H_P(\cdot)\rangle)$; 对于$\varphi \in \mathcal{A}_{P,\pi}(G)$，定义 $\varphi_\lambda(g) = \exp(\langle \lambda, H_P(g)\rangle)\varphi(g)$。映射 $\varphi \mapsto \varphi_\lambda$将$\mathcal{A}_{P,\pi}(G)$同构为 $\mathcal{A}_P(G)$的一个子空间，记为$\mathcal{A}_{P,\pi,\lambda}(G)$。我们将通过传递 $\mathcal{A}_P(G)$上的作用而在$\mathcal{A}_{P,\pi,\lambda}(G)$上得到的 $G(\mathbb{A})$和 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$的作用记为 $I_P(\lambda)$。

令 $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(G) \subset \mathcal{A}^0(G)$ 为 φ 的子空间，使得对于所有标准真抛物子群 P，均有 $\varphi_P = 0$。令 $\Pi_{\mathrm{cusp}}(G)$ 为 $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(G)$ 的拓扑不可约子表示的集合。它是 $\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ 的子集。

2.4.3. 艾森斯坦级数。令 $P \subset Q$ 为 G 的标准抛物子群。对于任意 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\ \mathrm{disc}}(G)$ 和 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\ \mathbb{C}}^*$，我们定义

$$E^Q(g,\varphi,\lambda) = \sum_{\gamma \in P(F)\backslash Q(F)} \varphi_\lambda(\gamma g), \quad g \in G(\mathbb{A}). \tag{2.4}$$

此和在 $\Re(\lambda)$ 位于某个适当的锥内时绝对收敛。它可亚纯延拓至$\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$，由 [Lap08]给出。如果 $Q = G$，则省略指数。

若 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\mathrm{cusp}}(G)$，则有艾森斯坦级数常数项的通常公式

$$E_Q(\varphi,\lambda) = \sum_{w \in W(P;Q)} E^Q(M(w,\lambda)\varphi, w\lambda), \tag{2.5}$$

其中 $W(P;Q)$ 是 [MW95第 II.1 节中定义的魏尔群子集。7], 而 $M(w,\lambda)$ 是 [MW95第 II.1 节中定义的交织算子。6]。

2.4.4. 标准正交基。设 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$ 满足 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^J \neq \{0\}$。令 $\widehat{K}_\infty$ 为$\widehat{\ }$不可约酉表示的同构类集合。对于任意 $\tau \in K_\infty$，令 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^\tau$为 τ-等型分量，它属于 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)$。对于任意层 J，令 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^{\tau,J} = \mathcal{A}_{P,\pi}(G)^\tau \cap \mathcal{A}_{P,\pi}(G)^J$。

令 $\mathcal{B}_{P,\pi}(\tau,J)$ 为 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^{\tau,J}$ 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{P,\mathrm{Pet}}$ 的标准正交基。于是，我们将 $\curlywedge\mathcal{B}_{P,\pi}(J)$ 定义为对 $\tau \in K_\infty$ 取并集所得的 $\mathcal{B}_{P,\pi}(\tau,J)$。

2.4.5. 相对特征。 本节中，我们证明沿基 $\mathcal{B}_{P,\pi}(J)$ 求和的一个界。该界将用于定义我们的相对特征。

命题 2.3。 令 J 为 G 的一个层，令 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$。存在 $N > 0$ 使得级数

$$\sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{P,\pi}(J)} I_P(\lambda,f)\varphi \otimes \overline{\varphi}$$

在 $\mathcal{T}_N([G]_P)\ \widehat{\otimes}\ \mathcal{T}_N([G]_P)$ 中绝对收敛。当 $\Re(\lambda)$属于某个固定的紧子集时，收敛关于 λ 一致。

证明。 根据 [Cha25，引理 3.8.1，1], 存在 $N > 0$ 使得 $\mathcal{A}_{P,\mathrm{disc}}(G)^J \subset \mathcal{T}_N([G]_P)$。令 $\|\cdot\|$ 为该空间上的一个连续半范数。我们可取其形式为 $\|\cdot\|_{-N,X}$，其中 $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$。令 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$ 满足 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^J \neq \{0\}$。根据基的定义，我们要对下式进行估计

$$\sum_{\tau \in \widehat{K}_\infty} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{P,\pi}(\tau,J)} \|I_P(\lambda,f)\varphi\|\|\varphi\|. \tag{2.6}$$

令 Ω_G 和 Ω_{K_∞} 分别为 G 与 K_∞ 上与标准基灵形式相对应的卡西米尔算子 $\mathfrak{g}_\infty$ (见 [Cha25，第 3.2 节。2]). 令 $\Delta = \mathrm{Id} - \Omega_G + 2\Omega_K$。根据 [Cha25，引理 3.8.1，1],存在绝对常数 $r \geq 1$ 和 $C > 0$ (与 π无关)，使得 (2.6) 有如下上界

$$\sum_{\tau \in \widehat{K}_\infty} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{P,\pi}(\tau,J)} C \sum_{i,j=1}^{r} \|\mathrm{R}(\Delta^i) I_P(\lambda,f)\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}} \|\mathrm{R}(\Delta^j)\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}.$$

令 λ_τ 为 τ的卡西米尔特征值，且 λ_π 为 π_∞的卡西米尔特征值。根据 [Kna01，命题 8.22], 我们知道Δ 在 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^{\tau,J}$ 上的作用为标量 $1-\lambda_\pi+2\lambda_\tau$。因此，存在绝对常数$\backsim B>0$，使得对于任意 $\tau\in K_\infty$ 和 $\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(\tau,J)$，有

$$\|\mathrm{R}(\Delta^i)\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}\leq B^r(1+\lambda_\pi^2+\lambda_\tau^2)^r.$$

假设 $\Re(\lambda)$ 属于某个紧集 ω。对于任意 $R>0$，考虑算子 $\Delta_R=R\times\mathrm{Id}-\Omega_G+2\Omega_{K_\infty}$。它在 $\mathcal{A}_{P,\pi_\lambda}(G)^{\tau,J}$ 上的作用为标量 $R-(\lambda,\lambda)-\lambda_\pi+2\lambda_\tau$，其中我们用 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$ 上的标准实二次型。我们可以假设 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^{\tau,J}\neq\{0\}$，并由 [Mülol02，引理 6.1] 得出 $\lambda_\tau\geq\lambda_\pi$。因此，只需增大 B，我们就可以选取 R，使得对于任意 $\Re(\lambda)\in\omega$，都有 $(1+\|\lambda\|^2+\lambda_\pi^2+\lambda_\tau^2)\leq B\,|R-(\lambda,\lambda)-\lambda_\pi+2\lambda_\tau|^2$。对于任意 N'，取 $f_{i,N'}=\mathrm{R}(\Delta_R^{2N'})\mathrm{L}(\Delta^i)f$，可得

$$\begin{aligned}\|\mathrm{R}(\Delta^i)I_P(\lambda,f)\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}&\leq B^{N'}(1+\|\lambda\|^2+\lambda_\pi^2+\lambda_\tau^2)^{-N'}\|I_P(\lambda,f_{i,N'})\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}\\&\leq B^{N'}(1+\lambda_\pi^2+\lambda_\tau^2)^{-N'}\|I_P(\lambda,f_{i,N'})\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}.\end{aligned}$$

但存在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$ 上的一个连续半范数，使得对于任意 $\Re(\lambda)\in\omega$、任意 $\varphi\in\mathcal{A}_{P,\,\mathrm{disc}}(G)^J$ 以及任意 $1\leq i\leq r$，都有 $\|I_P(\lambda,\,f_{i,\,N'})\varphi\|_{P,\,\mathrm{Pet}}\leq\|f\|\|\varphi\|_{P,\,\mathrm{Pet}}$。最后还需说明，当 N' 足够大时，我们有如下界

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)}\sum_{\tau\in\widehat{K}_\infty}\dim(\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^{\tau,J})(1+\lambda_\pi^2+\lambda_\tau^2)^{r-N'}<\infty.$$

这是 [Mülol89，推论 0。3]。 □

2.5. **自守核与谱分解**。

2.5.1. 尖点数据与粗朗兹分解。令 $\mathfrak{X}(G)$ 为由有序对 (M_P,π) 组成的集合，其中

- $P=M_PN_P$ 是 G 的一个标准抛物子群，
- $\pi\in\Pi_{\text{尖点}}(M_P)$，其中心特征在 A_P^∞ 上平凡。

若存在 $w\in W(P,\,Q)$ 使得 $w.\pi=\tau$，则称 $\mathfrak{X}(G)$ 中的两个元素 $(M_P,\,\pi)$ 和 $(M_Q,\,\tau)$ 等价。我们将此类 $(M_P,\,\pi)$ 的等价类定义为尖点数据，并用 $\mathfrak{X}(G)$ 表示所有尖点数据的集合。若 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$ 由 $(M_P,\,\pi)$ 表示，则定义 $\chi^\vee$ 为由 $(M_P,\,\pi^\vee)$ 表示的尖点数据。

令 P 为 G的一个标准抛物子群。在 [BPCZ22，第 2.9 节2], 中，为每个 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$关联一个空间 $L^2_\chi([G]_P)$。它是由 $\mathcal{A}_Q$诱导的伪艾森斯坦级数所张成的空间在 $L^2([G]_P)$中的闭包，其中 (M_Q,σ) 属于 χ 在 $\mathfrak{X}(M_P)\to\mathfrak{X}(G)$ 下的有限逆像。更一般地，对于 $N\in\mathbb{R}$，$L^2_N(\chi)$ 是同一空间在 $L^2_N([G]_P)$中的闭包。也可以将这些定义推广到子集 $\mathfrak{x}\subset\mathfrak{X}(G)$（见 [BPCZ22，第 2.9 节2]）。对于任意子集$\mathfrak{x}\subset\mathfrak{X}(G)$，令 $\mathcal{S}_{\mathfrak{x}}([G]_P)=\mathcal{S}([G]_P)\cap L^2_{\mathfrak{x}}([G]_P)$；对于任意 $\mathcal{F}\in\{L^2_N,\mathcal{T}_N,\mathcal{T},\mathcal{C}\}$，定义 $\mathcal{F}_{\mathfrak{x}}([G]_P)$ 为 $\mathcal{S}_{\mathfrak{x}^c}([G]_P)$ 在 $\mathcal{F}([G]_P)$ 中的正交补，其中 $\mathfrak{x}^c$是 $\mathfrak{x}$ 在 $\mathfrak{X}(G)$中的补集。我们有一个稠密性结果。

命题 2.4 ([BPCZ22，第 2.9 节。5])。令 $\mathfrak{X}$ 为 $\mathfrak{X}(G)$的一个子集。空间 $\mathcal{S}_{\mathfrak{X}}([G]_P)$ 在 $L^2_{N,\,\mathfrak{X}([G]_P)}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}([G]_P)$中稠密。

$\mathcal{A}_{P,\,\chi,\,\mathrm{disc}}(G)$ 是 $\mathcal{A}_{P,\,\mathrm{disc}}(G)$ 的闭子空间，其中的形式所属的类属于 $L^2_\chi([G]_{P,\,0})$。我们有一个同型分解

$$\mathcal{A}_{P,\chi,\mathrm{disc}}(G)=\widehat{\bigoplus_{\pi}}\mathcal{A}_{P,\pi}(G). \tag{2.7}$$

令 J为 G 的一个层。对于任意 $\tau\in K_\infty$，令 $\mathcal{B}_{P,\,\chi}(\tau,\ J)$ 为基 $\mathcal{B}_{P,\,\pi}(\tau,\ J)$ 的并集，其中 π出现在（2.7）中。于是我们将 $\mathcal{B}_{P,\,\chi}(J)$ 定义为 $\mathcal{B}_{P,\,\chi}(\tau,\ J)$ 的并集。

2.5.2. 正则尖点数据。设 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$ 是由（$M_P,\ \pi$）表示的尖点数据。若满足条件 χ，则称其为正则；若 $w\in W(P,\ P)$ 中唯一满足条件 $w\pi\simeq\pi$的元素是 $w=1$。根据朗兹谱分解定理 [Lan 89], ，该定理通过艾森斯坦级数的留数描述 $L^2([G])$ 的分解，因此若 χ 正则，则（ π）中出现的离散表示 2.7是尖点的。

2.5.3. 核函数的分解。设 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$。 $L^2([G])$ 上的右卷积 $\mathrm{R}(f)$ 导出一个核 K_f。对于任意 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$，$\mathrm{R}(f)$ 在 $L^2_\chi([G])$ 上的作用也是一个积分算子，其核记为 $K_{f,\chi}$。现在我们陈述一个关于核函数的朗兰兹谱分解定理的版本。这是对 [Art78 第 4]节中一个结果向施瓦茨函数的推广。在定理陈述中，我们在 R 上添加下标 x或 y，以表示该算子作用于变量 x 或 y。

定理 *2.5*（[*BPCZ22*，引理 *2.10.2*.1]）。设 J 为一个层，并假设 G 具有各向异性中心。存在一个定义在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$ 上的连续半范数 $\|\cdot\|$ 以及一个整数 N，使得对于所有$X,Y\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$、所有 x, $y\in G(\mathbb{A})$，以及所有 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$，都有

$$\begin{aligned}&\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}\sum_{P_0\subset P}\int_{i\mathfrak{a}_P^*}\sum_{\tau\in\widehat{K}_\infty}\left|\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\chi}(\tau,J)}\left(\mathrm{R}_x(X)E(x,I(\lambda,f)\varphi,\lambda)\right)\left(\mathrm{R}_y(Y)E(y,\varphi,\lambda)\right)\right|\mathrm{d}\lambda\\ \le&\|\mathrm{L}(X)\mathrm{R}(Y)f\|\|x\|_G^N\|y\|_G^N.\end{aligned}$$

此外，对所有 $x,y\in G(\mathbb{A})$ 以及所有正则的 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$，我们有

$$K_{f,\chi}(x,y)=\int_{i\mathfrak{a}_P^*}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\chi}(J)}E(x,I(\lambda,f)\varphi,\lambda)\overline{E(y,\varphi,\lambda)}\mathrm{d}\lambda. \tag{2.8}$$

第1 部分： 谱展开的比较

在第 1 部分，我们只讨论零余秩情形（即 $V=W$）。我们的主要目标是完成对 Liu 的相对迹公式的比较，这项工作始于 [BLXa] 和 [BLXb]，具体做法是分析谱侧。我们计算正则尖点数据对谱展开的贡献。精确的正则性条件见 §3.4 和§3.5，这些条件经过专门设计，以涵盖某些尖点

艾森斯坦级数及其基变换。这些贡献需要正则化。对于一般线性群上的情形，我们在§4 中完成这项工作；对于酉群上的情形，则在 §5 中完成。随后在§6 中，我们引入 [BLXb] 的结果，将酉群上一个（一般位置正则）Arthur 包所对应的全局相对特征与其基变换所对应的全局相对特征进行比较：这就是定理 6.5的内容。最后，在 §7中，我们由定理 1.5证明一般位置 GGP 猜想和 Ichino–Ikeda 猜想。

3. Groups, regularity conditions on automorphic representations and base-change

本节将介绍本文相关的一些记号和概念。第1 部分旨在比较刘氏迹公式的两种展开。一般线性群一侧的展开称为 G-侧，而酉群一侧的展开称为 U-侧。

3.1.群： G-侧。

3.1.1. 域与自守特征。设 E/F 是数域的二次扩张。记 c 为 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 中非平凡的元素。记$\eta_{E/F}$ 为由整体类域论与 E/F 相关联的 $\mathbb{A}^\times$ 的二次自守特征，并设 μ为 $\mathbb{A}_E^\times$的一个自守（酉）特征，它提升到$\eta_{E/F}$。设 $\tau \in E^-$ 为一个虚元（即 $\mathrm{c}(\tau) = -\tau$）。考虑由 $\psi_E(x) = \psi(\mathrm{Tr}^{E/F}(x))$ 和 $\psi^E(x) = \psi(\mathrm{Tr}^{E/F}(\tau x))$ 定义的 $\mathbb{A}_E$的自守特征。

3.1.2. 群。 我们用 E^n 表示坐标取自 E 的 n 维列向量组成的 E-向量空间，用 E_n 表示 n 维行向量空间。类似地，我们定义 $\mathbb{A}_E^n$ 和 $\mathbb{A}_{E,\ n}$。

对于任意 $k \geq 1$，令 $G_k = \mathrm{Res}^{E/F}\,\mathrm{GL}_k$。我们将使用以下群：

$$G = G_n \times G_n, \quad H = G_n, \quad G' = \mathrm{GL}_{n,F} \times \mathrm{GL}_{n,F},$$

其中 H 对角嵌入 G，而 G' 嵌入 G。我们还记 $G'_n = \mathrm{GL}_{n,\ F}$。对于 G 中元素的分量，我们记作 $(g_1,\ g_2)$。我们用 $(T,\ B)$ 表示 G 中由对角矩阵和上三角矩阵构成的标准 Borel 对。令 N 为 B 的幂零根。我们可以写作 $T = T_n \times T_n$、$B = B_n \times B_n$ 和 $N = N_n \times N_n$。令 $e_n = (0,\ \ldots\ldots,\ 0,\ 1) \in E_n$，并令 P_n 为 G_n 的 mirabolic 子群，它由末行为 e_n 的矩阵构成。令 $P_{n,\ n} = P_n \times P_n$，将其视为 G 的子群。我们设

$$G_+ = G \times \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbf{A}_{E,n},$$

其中，$\mathbf{A}_{E,n}$ 表示由 E 构成的 n 维行向量仿射空间，因此 G_+ 是定义在 F 上的代数群。

若 A是 G的任意子群，令 $A_H := A \cap H$。特别地，(T_H, B_H) 是 H的标准 Borel 对。我们还令 $A' = A \cap G'$。

令 K 为 $G(\mathbb{A})$的一个极大紧子群，如§2.2.2中所述。则 $K = K_n \times K_n$。

3.2.群：U 侧。

3.2.1.斜厄米空间。令 $\mathcal{H}$ 为 E/F上 n维非退化斜厄米空间的同构类集合。若 S 是一个有限个处的集合，令 $\mathcal{H}_{\mathsf{S}}$ 为 $E_{\mathsf{S}} = E \otimes_F F_{\mathsf{S}}$上 n维非退化斜厄米空间的同构类集合。令 $\mathcal{H}^{\mathsf{S}}$ 为满足以下条件的 $V \in \mathcal{H}$ 的集合：对于所有非阿基米德$v \notin$S， $V \otimes_E E_v$ 都承认一个自对偶格。这两个集合都是有限的。若 $V \in \mathcal{H}$，我们将其斜厄米形式记为 q_V。

因此，以下固定 $V \in \mathcal{H}$。以 U(V) 表示由 V 的 E-线性酉变换组成的 GL(V) 子群。它是一个 F-代数群。考虑 $\mathbb{V}$ 上的 F-向量空间：$= \mathrm{Res}_{E/F} V$，配备辛形式 $q_{\mathbb{V}} := \mathrm{Tr}^{E/F} \circ q_V$。我们固定一个极化 $\mathbb{V} = Y \oplus Y^\vee$，使得 Y和 $Y^\vee$ 是 F 上的 n 维仿射空间。

3.2.2. 群。我们定义群

$$\mathrm{U}_V := \mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(V), \quad \mathrm{U}'_V = \mathrm{U}(V) \subset \mathrm{U}_V,$$

其中最后一个嵌入是对角嵌入。

令 $S(V)$ 为 V 的海森堡群，即其点为 $\mathbb{V} \times F$ 的 F-线性群，其群律由下述规则给出

$$(v_1, z_1).(v_2, z_2) = \left(v_1 + v_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2} q_{\mathbb{V}}(v_1, v_2)\right). \tag{3.1}$$

它接受一个作用 U(V) 对第一坐标的作用。接着，我们将 V 的*Jacobi* 群定义为

$$J(V) := S(V) \rtimes \mathrm{U}(V).$$

最后我们定义

$$\widetilde{\mathrm{U}}_V := \mathrm{U}(V) \times J(V), \quad \mathrm{U}_{V,+} = \mathrm{U}_V \times Y^\vee \times Y^\vee.$$

~若 $g \in \mathrm{U}_V$，我们仍将其在 U_V上的投影记为 g，并将其在 $J(V)$中的分量记为 $\tilde{g}$。

设 K_V 是 U_V 中的一个极大紧子群，如 §2.2.2所述。假设 S 包含 、∞ 以及在 E中分歧的赋值。若 $V \in \mathcal{H}^{\mathsf{S}}$，则对于每个不属于 S 的 $v \notin$ ，U_V 都存在定义在 $\mathcal{O}_{F_v}$ 上的模型，并且我们可以取 $K_{V,v} := \mathrm{U}_V(\mathcal{O}_{F_v})$（即 $V \otimes_E E_v$中某个自对偶格的稳定子之积）。我们用 K'_V表示 $K_V \cap \mathrm{U}'_V$。

3.3. **测度**。 对于 $\mathbb{G} \in \{G, \mathrm{U}_V\}$，对每个赋值 v，我们在 [BLXb第 5 节中定义2] 一个定义在 g_v 上的局部测度 d $\mathbb{G}(F_v)$。由 [BP21a第 2 节5] 可知，它们是 §2.2.4中这些群上的全局Tamagawa测度的局部分量，具体而言

$$\mathrm{d}g = (\Delta^*_{\mathbb{G}})^{-1} \prod_v \Delta_{\mathbb{G},v} \mathrm{d}g_v. \tag{3.2}$$

我们对每个赋值 v 都有相应的公式

$$\Delta_{\mathrm{U}(V)} = \prod_{i=1}^{n} L(i, \eta^i_{E/F}), \quad \Delta_{\mathrm{U}(V),v} = \prod_{i=1}^{n} L(i, \eta^i_{E_v/F_v}). \tag{3.3}$$

若 X 是 F 上的仿射空间，我们在 $X(\mathbb{A})$ 上赋予玉河测度 $\mathrm{d}x = \prod_v \mathrm{d}x_v$。

3.4. **关于尖点数据和 Arthur 参数的条件：** G**-侧**。在深入探讨刘氏迹公式的谱展开之前，我们先对 Arthur 参数（即 $L^2([G])$ 的成分，无论离散还是连续）引入一些正则性条件。此处的目标是描述与具有一般基变换的酉群尖点表示的基变换相关联的谱贡献。用我们的术语来说，它们将是离散 *Hermitian Arthur* 参数。然而，为了证明定理 1.5 ，我们还需要处理更一般的贡献，这些贡献将是 (G, H, μ)-正则厄米。

–

3.4.1. 离散厄米 *Arthur* 参数。设 π 是 $G_k(\mathbb{A})$的一个不可约自守表示，其中 $k \geq 1$满足某条件。令 $\pi^\vee$ 为 π的对偶表示，并设 $\pi^{\mathsf{c}} = \pi \circ \mathsf{c} = \{\varphi \circ \mathsf{c} \mid \varphi \in \pi\}$以及 $\pi^* = (\pi^{\mathsf{c}})^\vee$。若 $\pi \simeq \pi^*$成立，我们称 π 为共轭自对偶的。

若存在一个分拆 $n = n_1 + \cdots + n_r$和 $\pi_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(G_{n_i})$，其中$i = 1, \ldots, r$，使得下述条件成立，我们称 Π 为 G_n 的不可约自守表示 G_n的离散 Hermitian Arthur 参数：

- Π同构于完全抛物诱导表示 $I_P^{G_n}(\pi_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \pi_r)$，其中 P是 G_n的标准抛物子群，其 Levi 因子为$G_{n_1} \times \ldots \times G_{n_r}$；
- π_i 是共轭自对偶的，且 Asai L-函数 $L(s, \pi_i, \mathrm{As}^{(-1)^{n+1}})$ 在 $s = 1$ 处有极点，对所有 $1 \leq i \leq r$均成立；
- 当 $1 \leq i \leq r$时，表示 π_i 两两不同构。

整数 r 和自守表示 $(\pi_i)_{1 \leq i \leq r}$ 是唯一的（在置换意义下），我们将群定义为 $S_\Pi = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$。

3.4.2. 正则厄米阿瑟参数。 我们称 $G_n(\mathbb{A})$ 上的不可约自守表示 Π 为 G_n 的正则厄米阿瑟参数，如果

- Π同构于 $I_P^{G_n}((\tau_1 \boxtimes \tau_1^*) \boxtimes \ldots \boxtimes (\tau_s \boxtimes \tau_s^*) \boxtimes \Pi_0)$，其中 P 是 G_n 的一个抛物子群，具有 Levi 因子 $G_{m_1}^2 \times \ldots \times G_{m_s}^2 \times G_{n_0}$，且 $n_0 + 2(m_1 + \ldots + m_r) = n$；
- Π_0 是G_{n_0}的离散 Hermitian Arthur 参数；
- $\tau_i \in \Pi_{\text{尖点}}(G_{m_i})$，对于 $1 \leq i \leq s$，表示 τ_1、 $\ldots \tau_s$、 τ_1^*，……， τ_s^*两两不同构。

表示 Π_0 由 Π唯一确定，称为Π的离散分量 。

令 w 为置换矩阵，它对所有 $1 \leq i \leq s$交换对应于 τ_i 和 τ_i^*的块 G_{m_i} 。设

$$\mathfrak{a}_{\Pi,\mathbb{C}}^* := \{\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* \mid w\lambda = -\lambda\}, \quad i\mathfrak{a}_\Pi^* := \mathfrak{a}_{\Pi,\mathbb{C}}^* \cap i\mathfrak{a}_P^*. \tag{3.4}$$

对于任意 $\lambda \in \mathfrak{a}_{\Pi,\mathbb{C}}^*$，考虑完全诱导表示

$$\Pi_\lambda := I_P^{G_n}(((\tau_1 \boxtimes \tau_1^*) \boxtimes \ldots \boxtimes (\tau_s \boxtimes \tau_s^*) \boxtimes \Pi_0) \otimes \lambda).$$

如果 $\lambda \in i\mathfrak{a}_\Pi^*$，那么 Π_λ 是不可约的。

最后，如果我们将 Π_0 写成类似于 §3.4.1 中的诱导表示，我们可以考虑 G 的 Levi 子群 n

$$L_\pi = \prod_{i=1}^{s} G_{2m_i} \times \prod_{j=1}^{r} G_{n_i}.$$

它包含 M_P。我们设

$$S_\Pi := S_{\Pi_0} = 2^{\dim(\mathfrak{a}^*_{L_\pi}) - \dim \mathfrak{a}^{L_\pi,*}_P}. \tag{3.5}$$

3.4.3. (G, H, μ)-正则性。设 $\Pi = \Pi_n \boxtimes \Pi'_n$ 是 G 的自守表示，其形式为 $\Pi_n = I_{P_n}^{G_n}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_r)$ 和 $\Pi'_n = I_{P'_n}^{G_n}(\pi'_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi'_{r'})$，其中 P_n, $P'_n \subset G_n$ 及 π_1, ..., π_r, π'_1, ..., $\pi'_{r'}$ 是较小的 G_l 的一些尖点表示。我们称

- Π 是 G-正则的，如果所有 π_1, ..., π_r 都互不相同，且所有 π'_1, ..., $\pi'_{r'}$ 都互不相同；
- Π 是 (H, μ)-正则的。

若对于所有 $1 \le i \le r$ 和 $1 \le j \le r'$，表示 $\mu\pi_i$ 都不同构于 π'_j 的对偶表示，则称 Π 两者皆为 G 且 (H, μ) 正则，则称其为 (G, H, μ)-正则 *Arthur* 参数。

若 Π_n 和 Π'_n 均为正则 Hermitian Arthur 参数，则称 Π 为正则厄米。此时，定义 $i\mathfrak{a}^*_\Pi = i\mathfrak{a}_{\Pi_n} \oplus i\mathfrak{a}_{\Pi'_n}$ 和 $L_\pi = L_{\pi_n} \boxtimes L_{\pi'_n}$。这取决于诱导数据的选择。

备注 3.1。注意，若 Π 为正则厄米，且 Π_n 或 Π'_n 是离散的，则它必然是 (G, H, μ)-正则的；否则，某个 $L(s, \pi_i, \mathrm{As}^{(-1)^l})$ 会在 $s = 1$ 处对 $l = n, n+1$ 有极点，这是不可能的。

3.4.4. 关于尖点数据的条件。现在我们将这些条件转述为尖点数据上的条件。设 G 的一个尖点数据为 $\chi \in \mathfrak{X}(G)$，由 (M_P, π) 表示。令 $\Pi := I_P^G \pi$。于是我们称

- χ 若 Π 是一个 (G, H, μ)-正则 Arthur 参数，则称其为 (G, H, μ)-正则；
- χ 若 Π 是正则厄米特 Arthur 参数，则称 χ 为厄米。

若 χ 兼具两者，则它是一个 (G, H, μ)-正则厄米尖点数据。在此情形下，我们有 Levi 子群 L_π，并且总是假设 P 具有 §3.4.2 中所述的形式，$M_P \subset L_\pi$。

3.5. **尖点数据的正则性条件：U-侧。** 设 $\chi = (\chi_V, \chi'_V) \in \mathfrak{X}(\mathrm{U}_V)$ 是由 (M_Q, σ) 表示的尖点数据，其中 M_Q 是 U_V 的标准抛物子群 Q 的 Levi 因子，且 $\sigma \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(M_Q)$。我们有如下分解：

- $M_Q = M_V \times M'_V$, $M_V = G_{n_1} \times \cdots \times G_{n_s} \times \mathrm{U}(V_0)$, $M'_V = G_{n'_1} \times \cdots \times G_{n'_{s'}} \times \mathrm{U}(V'_0)$;
- $\sigma = \sigma_V \boxtimes \sigma'_V$, $\sigma_V = \tau_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \tau_s \boxtimes \sigma_0$, $\sigma'_V = \tau'_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \tau'_{s'} \boxtimes \sigma'_0$;

其中

- V_0 和 V'_0 是维数分别为 n_0 和 n'_0 的非退化斜厄米向量空间，$2(n_1 + \cdots + n_s) + n_0 = 2(n'_1 + \cdots + n'_{s'}) + n'_0 = n$;
- τ_i 和 τ'_i 分别是 G_{n_i} 和 $G_{n'_i}$ 的尖点自守表示；

- σ_0一个d σ_0' 分别是 U(V_0) 和 U(V_0') 的尖点自守表示 .

我们称 χ 是 U_V-正则的，如果 χ_V和χ_V'是正则的（见 §2.5.2）；称其是 (U_V', μ)-正则的，如果$\mu\tau_i$既不同构于 $(\tau_j')^\vee$，也不同构于 $(\tau_j')^c$；称其是 (U_V, U_V', μ)-正则的，如果它同时满足上述两种条件。对于 χ_V，正则性意味着表示 $\tau_1, \ldots, \tau_s, \tau_1^*, \ldots, \tau_s^*$两两不同，且$\chi_V'$也同样如此。

3.6. **基变换**。

3.6.1. 局部基变换。设 v 是 F 的一个赋值。令 ${}^L G_n$、v 和 ${}^L\mathrm{U}(V)_v$ 分别为 G_n、v 和 $\mathrm{U}(V)_v$ 的朗兰兹对偶群（视为 F_v 上的群）。我们有一个基变换映射 BC：${}^L\mathrm{U}(V)_v \to {}^L G_{n,v}$（例如参见 [Mok15、KMSW]）。由于一般线性群（由 [Lan89] 和 [HT01]）以及酉群（由 [Lan89], [Mok15] 和 [KMSW]）的局部朗兰兹对应已知，因此根据函子性，对于 $\mathrm{U}(V)(F_v)$ 的任意光滑不可约表示 σ_v，我们可以指定 $G_n(F_v)$ 的一个光滑不可约表示 BC(σ_v)。我们将这一概念推广到 $\mathrm{U}_V(F_v)$ 的表示。注意，BC(σ_v) 决定了 σ_v的朗兰兹参数。

若赋值 v 在 E 中分裂，则 σ_v 是 $\mathrm{GL}_n(F_v)$ 的一个表示，而 BC(σ_v) 是 $G_n(E_v) = \mathrm{GL}_n(F_v)^2$ 的一个 $\sigma_v \boxtimes \sigma_v^\vee$ 表示。

若赋值 v 是非分歧的，则萨塔克同构诱导一个球面 Hecke 代数态射

$$\mathrm{BC} : \mathcal{H}(G(F_v), K_v) \to \mathcal{H}(\mathrm{U}_V(F_v), K_{V,v}). \tag{3.6}$$

3.6.2. 自守表示的弱基变换。我们回到整体情形。设 $Q \subset \mathrm{U}(V)$ 是一个标准抛物子群，其 Levi 因子 M_Q 同构于 $G_{n_1} \times \ldots \times G_{n_r} \times \mathrm{U}(V_0)$，其中 V_0 是 V 的一个非退化子空间。设 $\sigma \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(M_Q)$。我们根据这一分解写作 $\sigma = \tau_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \tau_s \boxtimes \sigma_0$。

我们称 G_n 的正则厄米阿瑟参数 Π 是 (Q, σ) 的弱基变换，若存在 G_n 的一个抛物子群 P，其 Levi 因子为 $M_P = G_{n_1}^2 \times \ldots \times G_{n_s}^2 \times G_{n_0}$，一个 G_{n_0} 的离散 Hermitian Arthur 参数 Π_0，以及满足以下条件的 $\tau_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(G_{n_i})$（其中 $1 \le i \le s$）：

- Π 同构于 $I_P^{G_n}((\tau_1 \boxtimes \tau_1^*) \boxtimes \ldots \boxtimes (\tau_s \boxtimes \tau_s^*) \boxtimes \Pi_0)$，
- 对于在 E 中分裂的 F 的几乎所有赋值 v，局部分量 $\Pi_{0,v}$ 是$\sigma_{0,v}$的分裂局部基变换。

这意味着 Π_0 是 Π的离散分量。如果第二个条件对 F 的集合 T 中的所有赋值v 都成立，我们就称 Π 是（Q, σ）的 T 弱基变换。我们自然地将弱基变换推广到酉群的直积。特别地，在此情形下，我们也有尖点表示σ_0 。

根据定义可知，若 Π 是 G 的一个 (G, H, μ)-正则厄米特 Arthur 参数，且它是 (Q, σ) 的弱基变换，则 (Q, σ) 表示一个 $(\mathrm{U}_V, \mathrm{U}_V', \mu)$-正则尖点数据。

注 3.2。 若假设 [Mok15] 和 [KMSW], 的结果成立，则根据 [Ram18], (G, H, μ)-正则厄米特 Arthur 参数 Π 恰好是那些表示 (U_Q, σ) 的 (强) 基变换，这些成对对象代表 $(\mathrm{U}_V, \mathrm{U}'_V, \mu)$-正则尖点数据，且 $\mathrm{BC}(\sigma_0)$ 处于一般位置。

4. Spectral expansion of Liu's trace formula on general linear groups

本节中，我们将刘氏相对迹公式的 G 侧上 (G, H, μ)-正则厄米尖点数据的谱贡献正则化。

4.1. 刘氏迹公式在 G 侧的粗谱展开。

我们首先回顾 [BLXa] 关于相对迹公式粗正则化的主要结果。

4.1.1. θ 级数。

我们定义 $G'(\mathbb{A})$ 的一个自守特征如下：

$$\eta_{n+1}(g_1, g_2) = \eta(\det g_1 g_2)^{n+1}, \quad (g_1, g_2) \in G'(\mathbb{A}). \tag{4.1}$$

我们定义一个表示 R^μ，它由 $H(\mathbb{A})$ 作用在 $\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})$ 上实现，定义规则如下：

$$(\mathrm{R}_{\overline{\mu}}(h)\Phi)(x) = |\det h|_E^{\frac{1}{2}} \overline{\mu}(h)\Phi(xh), \quad h \in H(\mathbb{A}_F), \quad x \in \mathbb{A}_{E,n},$$

其中，我们用 $\mu(h)$ 表示 $\overline{\mu(\det(h))}$。请注意，$\det h$ 是将 h 视为 $G_n(\mathbb{A})$ 中的元素时的行列式，而不是 $G(\mathbb{A})$。

对于每个 $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,\,n})$，我们定义 [JS81第 4 节中的 Epstein–Eisenstein 级数。1]

$$\Theta(h, \Phi) = \sum_{x \in E_n} (\mathrm{R}_{\overline{\mu}}(h)\Phi)(x), \quad \Theta'(h, \Phi) = \sum_{x \in E_n \setminus \{0\}} (\mathrm{R}_{\overline{\mu}}(h)\Phi)(x), \quad h \in [H]. \tag{4.2}$$

引理 4.1。 级数 $\Theta(h, \Phi)$ 和 $\Theta'(h, \Phi)$ 绝对收敛。存在 $N > 0$，使得 Θ 和 Θ' 定义连续映射 $\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,\,n}) \to \mathcal{T}_N([H])$。

证明。 对于每个 $M > 0$，存在 $N' > 0$ 和 $N > 0$，使得 $\|xh\|_{\mathbb{A}_{E,\,n}}^{-N'} \ll \|x\|_{\mathbb{A}_{E,\,n}}^{-M} \|h\|^N$。此外，根据 [BP21a，命题 A.1.1.(v)]，，存在 $M > 0$，使得 $\sum_{x \in \mathbb{A}_{E,\,n}} \|x\|_{\mathbb{A}_{E,\,n}}^{-M}$ 有限。对于所有 $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,\,n})$，我们有 $\sup_{x \in \mathbb{A}_{E,\,n}} |\Phi(x)| \, \|x\|_{\mathbb{A}_{E,\,n}}^{N'} < \infty$，由此定义了 $\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,\,n})$上的连续范数，故结论成立。□

4.1.2. 截断核。

对于每个 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))$，自守核 K_{f_+} 定义于[BLXa，第 5 节。3]。它是定义在 $H(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A})$ 上的函数，并定义了 $K_{f_+} \in \mathcal{T}([H \times G])$ 中的一个元素。

设 χ 为 G的一个尖点数据。在 [BLXa，第 5 节中，也定义了一个核$K_{f_+,\,\chi}$。它可以描述如下。首先，对于 $f_+ = f \otimes \Phi$，我们设

$$K_{f\otimes\Phi,\chi}(h, g) = K_{f,\chi}(h, g)\Theta(h, g), \quad (h, g) \in H(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A}). \tag{4.3}$$

在 [BLXa第 5 节中，3], 证明了指派$f \otimes \Phi \mapsto K_{f\otimes\Phi,\,\chi}$ 可通过连续性延拓为映射 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))$ $\to K_{f_+,\,\chi} \in \mathcal{T}([H \times G])$。或者，$K_{f_+,\,\chi}$ 可通过 [BLXa第 5 节中所述的过程实现为某个算子的核3]。

所谓截断参数，是指一个元素 $T \in \mathfrak{a}_{0}^{*}$。若对于足够大的 M（取决于具体语境），有 $\min_{\alpha\in\Delta_0^G}\langle\alpha,\ T\rangle > M$，我们就称 T 充分正。这也定义了 $\lim_{T\to\infty}$。我们在 $\mathfrak{a}_0$上取 $\|\cdot\|$ 一个范数。

在 [BLXa, 第 5.3] 节和 [BLXa, 第 5.5], 节中，定义了三个截断核 $K_{f_+}^T$、$K_{f_+}^T$、χ 和 $k_{f_+}^T$、χ。它们是定义在 $H(\mathbb{A})\times G'(\mathbb{A})$ 上的函数。我们还需要 Arthur 截断函数的两个变体 $F^{G'_{n+1}}(\cdot,T)$ 和 $F^{G_{n+1}}(\cdot,T)$。它们分别是定义在 G'_n 和 H 上的函数。具体定义与我们无关，我们只需知道，对于所有 $g'\in G'_n(\mathbb{A})$ 和 $h\in H(\mathbb{A})$，都有 $\lim_{T\to\infty}F^{G'_{n+1}}(g',T)=\lim_{T\to\infty}F^{G_{n+1}}(h,T)=1$。

我们在下面的定理中总结截断核及其相关正则化周期的性质。

定理 4.2. 当 T 足够大时，以下性质成立。

(1) [BLXa, 定理 5.8] 积分

$$I^T(f_+)=\int_{[H]}\int_{[G']}K_{f_+}^T(h,g')\eta_{n+1}(g')\mathrm{d}g'\mathrm{d}h,\quad I_\chi^T(f_+)=\int_{[H]}\int_{[G']}K_{f_+,\chi}^T(h,g')\eta_{n+1}(g')\mathrm{d}g'\mathrm{d}h,$$

绝对收敛。此外，对于每个 $r>0$，存在一个定义在 $\mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))$ 上的连续半范数 $\|\cdot\|$，使得对于所有充分正的 T

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}\int_{[G']}\int_{[H]}\left|K_{f_+,\chi}^T(h,g')-F^{G'_{n+1}}(g'_1)K_{f_+,\chi}(h,g')\right|\mathrm{d}h\mathrm{d}g'\le\|f_+\|e^{-r\|T\|}.$$

(2) [BLXa，定理 5.10] 对于充分正的 T，函数 $I^T(f_+)$ 和 $I_\chi^T(f_+)$ 是指数多项式函数的限制，其纯多项式部分为常数。我们分别将它们记为 $I(f_+)$ 和 $I_\chi(f_+)$。那么，I 和 I_χ 作为 $\mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))$ 上的分布是连续的，并且对于任意 $f_+\in\mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))$，有

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}I_\chi(f_+)=I(f_+),$$

其中该和绝对收敛。

(3) [BLXa，命题 5。13] 积分

$$i_\chi^T(f_+)=\int_{[H]}\int_{[G']}k_{f_+}^T(h,g')\eta_{n+1}(g')\mathrm{d}g'\mathrm{d}h$$

绝对收敛。此外，对于每个 $r>0$，存在一个定义在 $\mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))$ 上的连续半范数 $\|\cdot\|$，使得对于所有充分正的 T

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}\int_{[G']}\int_{[H]}\left|k_{f_+,\chi}^T(h,g')-F^{G_{n+1}}(h)K_{f_+,\chi}(h,g')\right|\mathrm{d}h\mathrm{d}g'\le\|f_+\|e^{-r\|T\|}.$$

(4) [BLXa，第 5 节。14] 当 T 充分正时，函数 $i_\chi^T(f_+)$ 是一个指数多项式函数的限制，其纯多项式部分为常数，且等于$I_\chi(f_+)$。

该定理的第二点是刘氏迹公式在一般线性群上的粗谱展开。

4.2. **Rankin–Selberg 周期的扩展。** 本节考虑*Rankin–Selberg*周期，即

$$\mathcal{P}_H(f,\Phi)=\int_{[H]} f(h)\Theta'(h,\Phi)\mathrm{d}h,\quad f\in\mathcal{S}([G]),\quad \Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n}). \tag{4.4}$$

这一周期在 [JPSS83], 中发挥着重要作用，其中考虑了 f 为尖点自守形式的情形。我们的目标是进一步将 $\mathcal{P}_H(\cdot,\Phi)$ 扩展到由 (G,H,μ)-正则 Arthur 参数诱导的艾森斯坦级数。最终结果是推论 4.8。提醒读者，尽管我们在记号 μ 中省略了 $\mathcal{P}_H$，但实际上仍与其有关。

–

4.2.1. 惠特克泛函。 我们有 $[N_n]$ 的两个特征，定义如下

$$\psi_{n,\pm}=\psi^E\left(\pm(-1)^n\sum_{i=1}^{n-1}u_{i,i+1}\right),\quad u\in[N_n], \tag{4.5}$$

并定义 $[N]$ 的一个特征为 $\psi_N=\psi_{n,\ +}\boxtimes\psi_{n,\ -}$。这是一个在 $[N_H]$ 上平凡的一般位置特征。对于 $f\in\mathcal{T}([G])$，令

$$W^\psi(f,g):=\int_{[N]} f(ng)\overline{\psi_N}(n)\mathrm{d}n,\quad g\in G(\mathbb{A}). \tag{4.6}$$

如果我们改为对 ψ_N 积分，则记作 W^ψ。

4.2.2. 泽塔函数。 对于每个 $\Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})$，我们定义

$$Z(f,\Phi,\overline{\mu},s)=\int_{N_H(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})} W^\psi(f,h)\,|\det h|_E^s\,(\mathrm{R}_{\overline{\mu}}(h)\Phi)(e_n)\mathrm{d}h, \tag{4.7}$$

对每个 $s\in\mathbb{C}$ 使得该表达式绝对收敛的泽塔函数，它与 f 和 Φ相关，定义见 [JPSS83]

若 c 是实数，定义 $\mathcal{H}_{>c}:=\{s\in\mathbb{C}\mid\Re(s)>c\}$；若 $c<C$，定义 $\mathcal{H}_{]c,C[}:=\{s\in\mathbb{C}\mid c<\Re(s)<C\}$。

引理 4.3。 设 $N\geq 0$。存在 $c_N>0$ 使得下述结论成立。

- 对每个 $f\in\mathcal{T}_N([G])$、$\Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})$ 以及 $s\in\mathcal{H}_{>c_N}$，$Z(f,\Phi,\mu,s)$的定义积分都绝对收敛。
- 对每个 $s\in\mathcal{H}_{>c_N}$，双线性形式 $(f,\Phi)\in\mathcal{T}_N([G])\times\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})\mapsto Z(f,\Phi,\mu,s)$ 分别连续。
- 对于每个 $f\in\mathcal{T}_N([G])$ 和 $\Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})$，函数 $s\in\mathcal{H}_{>c_N}\mapsto Z(f,\Phi,\mu,s)$ 是全纯的，且在垂直带内有界。

证明。 证明可直接改编自 [BPCZ22，引理 7.1.1。1] 结合 [BPCZ22，引理 2.6.1.1。2]以及如下事实：由于 Φ 是施瓦茨函数，对所有 $N>0$，存在一个半范数 $\|\cdot\|$ 使得

$$|\Phi(e_n t)| \leq \|t_n\|_{\mathbb{A}_E}^{-N} \|\Phi\|, \quad t=(t_1,\dots,t_n)\in T_n(\mathbb{A}).$$

□

4.2.3. *Rankin–Selberg* 周期。 对于每个 $f\in\mathcal{S}([G])$ 和 $\Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,\ n})$，我们置

$$Z_n(f,\Phi,\overline{\mu},s)=\int_{[H]} f(h)\Theta'(h,\Phi)\,|\det h|^s\,\mathrm{d}h. \tag{4.8}$$

由于 $f\in\mathcal{S}([G])$ 以及 $|\Theta'(h,\ \Phi)|\ll\|h\|_H^N$ 根据引理 4.1，由 [BP21a，命题 A.1.1 (vi)] 可知，对于所有 $s\in\mathbb{C}$，该积分绝对收敛，并给出一个在垂直带上有界的整函数。在 $s=0$处，我们得到 $\mathcal{P}_H(f,\ \Phi)$ 由 (*Rankin–Selberg*得到的周期（4.4）

注 4.4。我们在 §4.1.1 中对 $\Theta'(\cdot,\Phi)$ 的定义仿照了 [JS81 第 4] 节中的 Epstein–Eisenstein 级数。我们也可以考虑 $\Theta(\cdot,\Phi)$，它与前者的区别在于多出了项 $\mu(h)\ |\det\ h|^{\frac{1}{2}}\Phi(0)$。当 $f\in\mathcal{S}_\chi([G])$ 带有 χ 一个（H,μ）-正则尖点数据时，对于所有 $s\in\mathbb{C}$

$$\int_{[H]} f(h)\overline{\mu}(h)\,|\det h|^{s+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}h=0$$

由此可知，对于这样的 f，这两个定义一致。

4.2.4. *Rankin*–塞尔伯格积分的延拓。 关于 Rankin–Selberg 周期的主要结果如下。

定理 4.5. 设 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$ 为一个(G,H,μ)-正则尖点数据。

(1) 对于每个 $f\in\mathcal{T}_\chi([G])$ 以及 $\Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})$，函数 $s\mapsto Z(f,\Phi,\mu,s)$先验定义于某个右半平面上，并可延拓为 $\mathbb{C}$ 上的整函数，且其在垂直带内的阶有限（与f 和 Φ无关）。

(2) 对于所有的 $s\in\mathbb{C}$ 和 $\Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})$，其在 $\mathcal{S}_\chi([G])$ 上的限制。

$$f\in\mathcal{S}([G])\mapsto Z_n(f,\Phi,\overline{\mu},s),$$

连续延拓为 $\mathcal{T}_\chi([G])$ 上的线性形式。

此外，若对这些扩张沿用相同的记号，则对所有的 $f\in\mathcal{T}_\chi([G])$、 $\Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})$和 $s\in\mathbb{C}$，我们有

$$Z(f,\Phi,\overline{\mu},s)=Z_n(f,\Phi,\overline{\mu},s). \tag{4.9}$$

证明中的关键步骤是下面这个引理，它是经典 Rankin–Selberg 展开论证的一个变体。

引理 4.6. 对于固定的 $f\in\mathcal{S}_\chi([G])$ 和 $\Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})$，对每个 $\Re s\gg 0$，我们有

$$Z(f,\Phi,\overline{\mu},s)=Z_n(f,\Phi,\overline{\mu},s). \tag{4.10}$$

特别地，函数 $s\mapsto Z(f,\Phi,\mu,s)$ 可解析延拓至 $s\in\mathbb{C}$。

证明。引入以下记号。令 $1 \le r \le n$，并用 $N_{r,n}$ 表示 G_n 中具有 Levi 因子 $(G_r) \times (G_1)^{n-r}$ 的标准抛物子群的幂零根。设 $N_r^G := N_{r,n} \times N_{r,n}$ 以及 $N_{r,H} := N_r^G \cap H$。令 P_r 为 G_r 的 mirabolic 子群，其末行是 e_r，即 E_r 的典范基中的最后一个向量。

对于 $f \in \mathcal{S}([G])$，我们定义

$$f_{N_r^G,\psi}(g) = \int_{[N_r^G]} f(ug)\overline{\psi_N}(u)\mathrm{d}u, \quad g \in G(\mathbb{A}).$$

对于 $s \in \mathbb{C}$ 和 $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})$，我们令

$$Z_r(f,\Phi,\overline{\mu},s) = \int_{P_r(F)N_{r,H}(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})} f_{N_r^G,\psi}(h)(\mathrm{R}_{\overline{\mu}}(h)\Phi)(e_n)|\det h|_E^s \mathrm{d}h.$$

对于 $r=1$，我们得到 $Z_1(f,\Phi,\mu,s)^\vee = Z(f,\Phi,\mu,s)$。与引理 4.3的证明中相同的论证表明，对于每个 $1 \le r \le n$ 都存在 $c_r > 0$，使得以下断言成立。

- 对于所有 $f \in \mathcal{S}([G])$ 和 $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})$，定义 $Z_r(f,\Phi,\mu,s)$ 的表达式对于 $s \in \mathcal{H}_{>c_r}$ 绝对收敛。
- 对于所有 $s \in \mathcal{H}_{>c_r}$，$(f,\Phi) \mapsto Z_r(f,\Phi,\mu,s)$ 分别连续。
- 对于每个 $f \in \mathcal{S}([G])$ 和 $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})$，函数 $s \in \mathcal{H}_{>c_r} \mapsto Z_r(f,\Phi,\mu,s)^\vee$ 在垂直带内全纯且有界。

所需的恒等式（4.10）随后由以下断言推出：对于所有 $1 \le r \le n-1$、所有$f \in \mathcal{S}_\chi([G])$ 以及 $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})$，存在 $c > 0$，使得对于所有 $s \in \mathcal{H}_{>c}$，我们有

$$Z_{r+1}(f,\Phi,\overline{\mu},s) = Z_r(f,\Phi,\overline{\mu},s). \tag{4.11}$$

现在我们证明恒等式（4.11）。首先，对于 r、f 和 Φ，我们选取 $c > 0$，使得 $Z_{r+1}(f,\Phi,\mu,s)$ 和 $Z_r(f,\Phi,\mu,s)$ 对于 $s \in \mathcal{H}_{>c}$ 都有定义。令 U_r 为 P_r 的幂零根。于是$N_{r,n} = U_r N_{r+1,n}$。设 $U_r^G = U_r \times U_r \le G$ 和 $U_{r,H} = (U_r^G)_H \le H$。于是我们计算

$$Z_{r+1}(f,\Phi,\overline{\mu},s) = \int_{G_r(F)N_{r,H}(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})} (\mathrm{R}_{\overline{\mu}}(h)\Phi)(e_n)|\det h|_E^s \int_{[U_{r,H}]} f_{N_{r+1}^G,\psi}(uh)\mathrm{d}u\mathrm{d}h.$$

由紧阿贝尔群 $U_r^G(F)U_{r,H}(\mathbb{A})\backslash U_r^G(\mathbb{A})$ 上的傅里叶反演，我们得到

$$\int_{[U_{r,H}]} f_{N_{r+1}^G,\psi}(uh)\mathrm{d}u = \sum_{\gamma \in P_r(F)\backslash G_r(F)} f_{N_r^G,\psi}(\gamma h) + \int_{[U_r^G]} f_{N_{r+1}^G,\psi}(uh)\mathrm{d}u.$$

因此我们有

$$Z_{r+1}(f,\Phi,\overline{\mu},s) = Z_r(f,\Phi,\overline{\mu},s) + F_r(s),$$

其中

$$F_r(s) = \int_{G_r(F)N_{r,H}(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})} (\mathrm{R}_{\overline{\mu}}(h)\Phi)(e_n)|\det h|_E^s \int_{[U_r^G]} f_{N_{r+1}^G,\psi}(uh)\mathrm{d}u\mathrm{d}h.$$

由于我们的函数在 $\Re(s) \gg 0$上全纯，因此还需证明 F_r 在 $\mathbb{C}$的某个右半平面上恒为零。令 Q_r 为 G 的标准抛物子群，其 Levi 因子为 $L_r = (G_r \times G_{n-r}) \times (G_r \times G_{n-r})$，并设 $Q_{r,H} = Q_r \cap H$。令 χ^L 为 χ 在26 中的原像

$\mathfrak{X}(L_r)$。我们将 $\mathfrak{X}(L_r)$ 中任意元素写作 (χ_1,χ_2)，其中 $\chi_1\in\mathfrak{X}(G_r^2)$ 且 $\chi_2\in\mathfrak{X}(G_{n-r}^2)$。于是由 [BPCZ22，第 2.9.6 节10]，我们得到如下分解

$$\mathcal{C}_{\chi^L}([L_r])=\bigoplus_{(\chi_1,\chi_2)\in\chi^L}\mathcal{C}_{\chi_1}([G_r^2])\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{C}_{\chi_2}([G_{n-r}^2]). \tag{4.12}$$

对所有 $s\in\mathbb{C}$ 和 $k\in K_n$定义

$$f_{Q_r,k,s}=\delta_{Q_r}^{-\frac{1}{2}+\frac{2s+1}{4n-4r}}\mathrm{R}(k)f_{Q_r}\Big|_{[L_r]},$$

其中，f_{Q_r} 是 f 关于 Q_r的常数项。由于 χ 是 G-正则的，[BPCZ22，推论 2.9.7.2] 适用，因此对于 $\Re s>0$ 和 $k\in K_n$，有 $(f_{Q_r,k,s})\big|_{[L_r]}\in\mathcal{C}_{\chi^L}([L_r])$。最后，对于$k\in K_n$，令 $\Phi_{k,n-r}=(\mathrm{R}(k)\Phi)\big|_{\{0\}\times\mathbb{A}_E}$，$\in\mathcal{S}_{n-r}(\mathbb{A}_{E,n-r})$。然后利用 $H(\mathbb{A})=Q_r,_H(\mathbb{A})K_n$的岩泽分解，仿照 [BPCZ22，命题 7.2.0.2]的证明，可得:

$$F_r(s)=\int_{K_n}\left(P^{\overline{\mu}}_{G_r^\Delta}\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{Z}_{n-r}\left(\cdot,\Phi_{k,n-r},\overline{\mu},s+2r\frac{2s+1}{4n-4r}\right)\right)(f_{Q_r,k,s})\mathrm{d}k,$$

其中

- $P^{\mu}_{G_r^\Delta}$表示在对角子群 G_r 上，关于 G_r^2的周期积分，取特征 μ，它通过引理2.1定义了 $([G_r^2])$ 上的连续线性形式，
- $\mathcal{Z}_{n-r}$ 是针对 G_{n-r}的 Z_{ψ^r}，其中 $\psi^r=\psi((-1)^r\cdot)$。根据引理 4.3，对于每个 $\Phi'\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n-r})$，只要 s 位于 $\mathbb{C}$ 的某个右半平面内（该半平面的选取与 Φ' 无关），它就是 $\mathcal{T}([G_{n-r}^2])$ 上的连续线性形式，
- 完备张量积是相对于分解（4.12）取的；回顾引理 $\mathcal{C}([G_{n-r}^2])\subset\mathcal{T}([G_{n-r}^2])$ 中的连续嵌入 2.2 （4）。

由于 χ 是 (H,μ)-正则的，对于每个原像 $(\chi_1,\chi_2)\in\mathfrak{X}(G_r^2)\times\mathfrak{X}(G_{n-r}^2)$，若满足 $\chi_1=(\chi_1',\chi_1'')$，则有 $\mu\chi_1'\neq\chi_1''^\vee$。因此，$P^{\mu}_{G_r^\Delta}$在 $\mathcal{C}_{\chi_1}([G_r^2])$ 上恒等于零，这意味着当 $\Re(s)\gg0$ 时，$F_r(s)=0$。由此证明恒等式 (4.11)，从而完成该引理的证明。□

现在我们可以结束定理4.5的证明

定理4.5的证明。固定 Φ 并考虑 Z_n 和 Z 作为 f上的（族）线性形式。令 w_0为 G的魏尔群中的最长元素，我们将其视为 $G(F)$ 中的一个元素。对于$f\in\mathcal{T}([G])$，置 $\widetilde{f}(g)=f({}^tg^{-1})=f(w_0\,{}^tg^{-1})\in\mathcal{T}([G])$。

对于 $s\in\mathbb{C}$，我们考虑 $\mathcal{T}([G])$ 上由下式给出的线性形式

$$f\mapsto\widetilde{Z}(f,\Phi,\overline{\mu},s):=Z(\widetilde{f},\widehat{\Phi},\mu,s), \tag{4.13}$$

其中，我们用 $\widehat{\Phi}$ 表示由下式定义的 Φ的傅里叶变换

$$\widehat{\Phi}(y)=\int_{\mathbb{A}_{E,n}}\Phi(x)\psi_E(x\,{}^ty)\mathrm{d}x.$$

注意，如果 $f\in\mathcal{T}_\chi([G])$，那么 $\widetilde{f}$ 也成立。由引理 4.3 可知，Z 和 $\widetilde{Z}$ 具有以下性质。

~(1) 对所有 $N>0$，存在 $C_N>0$，使得对所有 $s\in\mathcal{H}_{>C_N}$， $Z(\cdot,\Phi,\overline{\mu},s)$ 和 $Z(\cdot,\Phi,\mu,\overline{s})$ 都是定义在$\mathcal{T}_N$上的连续线性泛函，$\chi([G])$。~(2) 对所有 $N>0$和 $f\in\mathcal{T}_N$， $\chi([G])$、 $s\mapsto Z(f,\Phi,\mu,s)$ 和 $s\mapsto Z(f,\Phi,\mu,s)$ 都是定义在 $\mathcal{H}_{>C_N}$上的全纯函数，且在垂直带上有界。~(3) 根据引理 4.6，对于 $f\in S_\chi([G])$，函数 $s\mapsto Z(f,\Phi,\mu,s)$ 和 $s\mapsto Z(f,\Phi,\mu,s)$ 可解析延拓至所有 $s\in\mathbb{C}$。(4) 根据注 4.4，我们可以将 Θ' 替换为 Θ，并使用泊松求和公式，从而得到任意 $f\in\mathcal{S}_\chi([G])$ 满足的函数方程

$$Z_n(f,\Phi,\overline{\mu},s)=Z_n(\widetilde{f},\widehat{\Phi},\mu,-s).$$

因此，由引理 4.6可得

$$Z(f,\Phi,\overline{\mu},s)=\widetilde{Z}(f,\Phi,\overline{\mu},-s). \tag{4.14}$$

令 $N'>0$。由引理 2.2 (2)，存在 $N>0$，使得我们有一个连续嵌入$L^2_{-N'}([G])^\infty\subset\mathcal{T}_N([G])$。由命题 2.4，空间 $\mathcal{S}_\chi([G])$ 在 $L^2_{-N',\chi}([G])^\infty$ 中稠密。因此，定义在 $S_\chi([G])$ 上的两个泛函 $f\mapsto Z(f,\Phi,\mu,s)$ 和 $f\mapsto Z_\psi(f,\Phi,\mu,s)$ 满足 [BPCZ22, 推论 A.0.11.2] 的假设。该推论表明，对于所有 $f\in L^2_{-N',\chi}([G])^\infty$， Z 可解析延拓至$\mathbb{C}$，且 Z_n 可连续延拓至 $L^2_{-N',\chi}([G])^\infty$。由引理 2.2 (1)，即使将$L^2_{-N',\chi}([G])^\infty$ 替换为 $\mathcal{T}_\chi([G])$，这一结论仍然成立。由于等式 (4.9) 对 $f\in\mathcal{S}_\chi([G])$ 和 $\Re(s)\gg 0$ 成立，由稠密性（命题 2.4），它对 $f\in\mathcal{T}_\chi([G])$ 成立，最终由解析延拓可知它对所有 s成立。由引理 4.3 的第三点以及 [BPCZ22, 推论 A.0.11.2] 的证明可知， $Z(f,\Phi,\mu,\cdot)$ 的阶与 f和 Φ 无关。证明完毕。□

线性形式 Z 由定理4.5 给出，且依赖于一个固定的施瓦茨函数 Φ，但如以下引理所述，在改变 Φ 时，可以得到一致有界。

引理 4.7。设 $N>0$。存在连续半范数 $\|.\|_N$ 和 $\|.\|$，分别定义在 $\mathcal{T}_{N,\chi}([G])$和$\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})$ 上，使得

$$|Z(f,\Phi,\overline{\mu},0)|\ll\|f\|_N\|\Phi\|,\quad f\in\mathcal{T}_{N,\chi}([G]),\quad \Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n}).$$

证明。这可由泽塔函数$Z(f,\Phi,\mu,s)$ 的解析延拓显式公式直接推出，该公式以 [BPCZ22，引理 A.0.10 中的积分表示；1], 再结合引理 4.3。□

现在我们定义 Rankin–Selberg 周期向 (G,H,μ)-正则艾森斯坦级数的延拓 .

推论 4.8. 设 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$ 是由(M_P,π)表示的一个(G,H,μ)-正则尖点数据。那么，*Rankin–Selberg* 周期 $\mathcal{P}_H(\cdot,\Phi)$ 在 $\mathcal{S}_\chi([G])$ 上的限制可连续延拓至 $\mathcal{T}_\chi([G])$。我们将此延拓记为 $\mathcal{P}^*_H(\cdot,\Phi)$。这个正则化周期满足

$$\mathcal{P}^*_H(E(\varphi,\lambda),\Phi)=Z(E(\varphi,\lambda),\Phi,\overline{\mu},0),\quad \varphi\in\mathcal{A}_{P,\pi}(G),\quad \lambda\in i\mathfrak{a}_P^*,\quad \Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n}).$$

证明。 这是定理 4.5 的直接应用，因为 $E(\varphi,\lambda)\in\mathcal{T}_\chi([G])$。注意，两边均由解析延拓定义。 □

4.3. **Flicker–Rallis 周期的延拓**。 在本节中，我们固定 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$ 为一个 G-正则尖点数据，由 (M_P,π) 表示。令 $\Pi=I_P^G\pi$，并对所有 $\lambda\in i\mathfrak{a}_{M_P}^{G,*}$ 定义 $\Pi_\lambda=I_P^G\pi_\lambda$。我们回顾 [BPC25]关于 Flicker–Rallis 周期的主要结果。

4.3.1. *Flicker–Rallis* 周期。 Flicker–Rallis 周期定义为

$$\mathcal{P}_{G'}(f)=\int_{[G']}f(g')\eta_{n+1}(g')\mathrm{d}g',\quad f\in\mathcal{S}([G]). \tag{4.15}$$

该积分绝对收敛，并根据 $\mathcal{S}([G])$，定义了一个连续泛函 [BPCZ22，定理 6.2.6。1]。

4.3.2. 周期的谱展开。 设 J 为 G的一个层。若 $f\in\mathcal{S}([G])^J$ 且 $\lambda\in i\mathfrak{a}_P^*$，则定义

$$f_{\Pi_\lambda}=\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)}\langle f,E(\cdot,\varphi,\lambda)\rangle E(\cdot,\varphi,\lambda). \tag{4.16}$$

由命题 2.3 和 [Lap08，定理 2。2], 存在一个 $N>0$，使得该级数在 $\mathcal{T}_N([G])$ 中绝对收敛。令 $\mathcal{W}(\Pi_\lambda,\overline{\psi}_N)$ 为 Π_λ关于 $\overline{\psi}_N$的惠特克函数空间，从而$W^\psi(f_{\Pi_\lambda})\in\mathcal{W}(\Pi_\lambda,\overline{\psi}_N)$。

设 F 和 $\lambda\in i\mathfrak{a}_P^*$ 的赋值中有一个充分大的有限集 S，令

$$\beta_\eta(W)=(\Delta_{G'}^{\mathsf{S},*})^{-1}L^{\mathsf{S},*}(1,\Pi,\mathrm{As}^{n+1,n+1})\int_{N'(F_\mathsf{S})\backslash P'_{n,n}(F_\mathsf{S})}W(p_\mathsf{S})\eta_{n+1}(p_\mathsf{S})\mathrm{d}p_\mathsf{S},\quad W\in\mathcal{W}(\Pi_\lambda,\overline{\psi}_N) \tag{4.17}$$

其中我们令 $\mathrm{As}^{n+1,\,n+1}=\mathrm{As}^{(-1)^{n+1}}\oplus\mathrm{As}^{(-1)^{n+1}}$。此表达式绝对收敛，并且当 S 充分大时，由 [Fli88] 可知它与 S 无关。

我们在 $i\mathfrak{a}_{*M_P}^{L_\pi,*}$ 赋予§2.2.5中所述的测度。以下内容出自 [BPC25，推论 6.2.7。1] .

定理 4.9。 若 χ 是厄米的，则函数 $\lambda\in i\mathfrak{a}_{M_P}^{L_\pi,*}\mapsto\beta_\eta(W^\psi(f_{\Pi_\lambda}))$ 是施瓦茨函数，且由此得到的映射

$$\mathcal{S}_\chi([G])\to\mathcal{S}(i\mathfrak{a}_{M_P}^{L_\pi,*}),\quad f\mapsto\Big(\lambda\mapsto\beta_\eta(W^{\overline{\psi}}(f_{\Pi_\lambda}))\Big)$$

是连续的。此外，我们有

$$\mathcal{P}_{G'}(f)=\begin{cases}2^{-\dim\mathfrak{a}_{L_\pi}^*}\displaystyle\int_{i\mathfrak{a}_{M_P}^{L_\pi,*}}\beta_\eta(W^{\overline{\psi}}(f_{\Pi_\lambda}))\mathrm{d}\lambda, & \textit{if } \chi \textit{ is Hermitian;}\\ 0, & \textit{otherwise.}\end{cases}$$

4.4. **一侧的相对特征展开**。本节中，我们令 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$ 为 G 由 (M_P,π) 表示的尖点数据。令 $\lambda\in i\mathfrak{a}_{,P}^{G,*}$。我们固定 J一个 G层。现在结合推论4.8 和定理4.9 ，将 I_χ 的谱展开写成相对特征的形式。

4.4.1. 相对特征 I_{Π_λ}。假设 $\chi \in \mathfrak{X}(G)$ 是 (G,H,μ)-正则且为厄米。由命题2.3, [Lap08、定理 2. 2], [BPCZ22、引理 2.10.1、1], 定理 4.5和定理 4.9，对任意 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$ 和 $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})$，我们可以考虑相对特征

$$I_{\Pi_\lambda}(f\otimes\Phi)=\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)} Z(E(I_P(f,\lambda)\varphi,\lambda),\Phi,\overline{\mu},0)\overline{\beta_\eta(W^\psi(E(\varphi,\lambda)))}. \tag{4.18}$$

由连续性可得另一种描述

$$I_{\Pi_\lambda}(f\otimes\Phi)=\mathcal{P}_H^*\left(g\mapsto\beta_\eta\left(W^{\overline{\psi}}\left(K_{f,\chi}(g,\cdot)_{\Pi_{-\lambda}^\vee}\right)\right),\Phi\right). \tag{4.19}$$

特别地，利用定理 4.5 和引理 4.7，我们看到分布 I_{Π_λ} 可通过连续性延拓到 $\mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))^J$，且线性泛函 $f_+\mapsto\int_{i\mathfrak{a}_{M_P}^{L_\pi,*}} I_{\Pi_\lambda}(f_+)\mathrm{d}\lambda$ 定义良好且连续。如果 $f_+=f\otimes\Phi$，由定理 4.9 可得

$$\int_{i\mathfrak{a}_{M_P}^{L_\pi,*}} I_{\Pi_\lambda}(f_+)\mathrm{d}\lambda=\mathcal{P}_H^*\left(g\mapsto\int_{i\mathfrak{a}_{M_P}^{L_\pi,*}}\beta_\eta\left(W^{\overline{\psi}}\left(K_{f,\chi}(g,\cdot)_{\Pi_{-\lambda}^\vee}\right)\right)\mathrm{d}\lambda,\Phi\right). \tag{4.20}$$

4.4.2. 的谱展开 I_χ。令 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$ 和 $\Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_E)$。设

$$K_{f\otimes\Phi,\chi}^H(g)=\int_{[H]}K_{f\otimes\Phi,\chi}(h,g)\mathrm{d}h,\quad K_{f,\chi}^{G'}(g)=\int_{[G']}K_{f,\chi}(g,g')\eta_{n+1}(g')\mathrm{d}g',\quad g\in[G].$$

命题 4.10。假设 χ 是(G,H,μ)-正则的。我们有以下断言。

(1) 若 χ 不是 *Hermitian*，则 $K_{f,\chi}^{G'}(g)=0$ 对每个 $g\in[G]$均成立。此外 $I_\chi(f\otimes\Phi)=0$。(2) 假设 χ 是厄米的。则

$$I_\chi(f\otimes\Phi)=\int_{[G']}K_{f\otimes\Phi,\chi}^H(g')\eta_{n+1}(g')\mathrm{d}g'=\mathcal{P}_H^*\left(K_{f,\chi}^{G'},\Phi\right), \tag{4.21}$$

其中中间的积分绝对收敛。

证明。我们首先假设 χ 不是厄米的。根据定义，我们有

$$K_{f,\chi}^{G'}(g)=\mathcal{P}_{G'}\left(K_{f,\chi}(g,\cdot)\right).$$

令 $\chi^\vee\in\mathfrak{X}(G)$ 表示由 $(M_P,\pi^\vee)$ 表示的 (G,H,μ)-正则尖点数据。由于 $\chi^\vee$ 不是厄米的，根据定理 4.9，线性形式 $\mathcal{P}_{G'}$ 在 $\mathcal{S}_{\chi^\vee}([G])$ 上恒等为零。因此，$K_{f,\chi}^{G'}(g)=0$。由定理 4.2，我们得出，对于某个 $r>0$ 以及所有 T 充分正时，$\left|i_\chi^T(f\otimes\Phi)\right|\ll e^{-r\|T\|}$。由定理 4.2 可知，$I_\chi(f\otimes\Phi)=0$。

现在假设 χ 是厄米的。根据 [BPCZ22，引理 2.10.1。1], 函数族$g'\mapsto K_{f,\chi}(\cdot,g')$ 在 $[G']$ 中关于 $\mathcal{T}_N([G])$ 绝对可积，其中某个 N成立。根据定理 4.5，线性形式 $\mathcal{P}_H(\cdot,\Phi)$ 从 $\mathcal{S}_\chi([G])$ 连续延拓到 $\mathcal{T}_\chi([G])$。由于

$$K_{f\otimes\Phi,\chi}^H(g')=\mathcal{P}_H\left(K_{f,\chi}(\cdot,g'),\Phi\right)=\mathcal{P}_H^*\left(K_{f,\chi}(\cdot,g'),\Phi\right),$$

我们得出积分

$$\int_{[G']} K^H_{f\otimes\Phi,\chi}(g')\eta_{n+1}(g')\mathrm{d}g' \tag{4.22}$$

绝对收敛，且等于

$$\mathcal{P}^*_H\left(\int_{[G']} K_{f\otimes\Phi,\chi}(\cdot,g')\eta_{n+1}(g')\mathrm{d}g',\Phi\right)=\mathcal{P}^*_H\left(K^{G'}_{f,\chi},\Phi\right).$$

(4.22) 的绝对收敛性以及定理 4.2 表明该积分等于 $I_\chi(f\otimes\Phi)$。 □

定理 4.11。 假设 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$ 是(G,H,μ)-正则且为厄米。则对所有 $f_+\in\mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))^J$ ，有

$$I_\chi(f_+)=2^{-\dim\mathfrak{a}^*_{L_\pi}}\int_{i\mathfrak{a}^{L_\pi,*}_{M_P}} I_{\Pi_\lambda}(f_+)\mathrm{d}\lambda, \tag{4.23}$$

其中右端的积分绝对收敛。

证明。 由定理 4.2，(4.23) 两边关于 f_+连续，且右端绝对收敛。因此我们可以假设 $f_+=f\otimes\Phi$。继续沿用命题 4.10中的记号。由于 $\chi^\vee$ 是厄米的，且 (G,H,μ)-正则，定理 4.9 适用，并对所有 $g\in[G]$ −

$$K^{G'}_{f,\chi}(g)=\mathcal{P}_{G'}(K_{f,\chi}(g,\cdot))=2^{-\dim\mathfrak{a}^*_{L_\pi}}\int_{i\mathfrak{a}^{L_\pi,*}_{M_P}}\beta_\eta\left(W^{\overline{\psi}}\left(K_{f,\chi}(g,\cdot)_{\Pi^\vee_{-\lambda}}\right)\right)\mathrm{d}\lambda. \tag{4.24}$$

现在由 (4.20)、命题4.10 和 (4.24) 可得

$$I_\chi(f\otimes\Phi)=\mathcal{P}^*_H\left(K^{G'}_{f,\chi},\Phi\right)=2^{-\dim\mathfrak{a}^*_{L_\pi}}\int_{i\mathfrak{a}^{L_\pi,*}_{M_P}} I_{\Pi_\lambda}(f_+)\mathrm{d}\lambda.$$

这就证明了该定理。 □

5. Spectral expansion of Liu's trace formula on unitary groups

本节中，我们固定 V一个定义在 E/F上的非退化斜厄米空间。我们取一个极化$\mathbb{V}=Y\oplus Y^\vee$。我们将（$\mathrm{U}_V$，$\mathrm{U}'_V$，$\mu$）-正则尖点数据对 Liu 相对迹公式 U 侧的谱贡献正则化。

5.1. 魏尔表示与 θ 级数。

5.1.1. 局部 *Heisenberg-Weil* 表示。设 v 是 F的一个赋值。我们在 §1.1.1 中介绍了 $S(V)(F_v)$的 Heisenberg 表示$\rho^\vee_{\psi,\,v}$，以及 $\mathrm{U}(V)(F_v)$的魏尔表示 $\omega^\vee_v$。 $J(V)(F_v)$的*Heisenberg–Weil* 表示 $\nu^\vee_v$由以下规则定义

$$\nu^\vee_v(hg)=\rho^\vee_{\psi,v}(h)\omega^\vee_v(g),\quad g\in\mathrm{U}(V)(F_v),\quad h\in S(V)(F_v). \tag{5.1}$$

它实现于局部 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(Y^\vee(F_v))$ 上，并且相对于内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{L^2}$是酉的，该内积由沿 $Y^\vee(F_v)$ 积分给出。

5.1.2. 自守魏尔表示与 θ 级数。通过选取一组基，我们得到一个 $\mathcal{O}_F$-整模型 $Y^\vee$，因此在每个有限处 v，都有 $1_{Y^\vee}(\mathcal{O}_v) \in \mathcal{S}(Y^\vee(F_v))$。因此，我们可以考虑受限张量积 $\nu^\vee = \otimes'_v \nu_v^\vee$ 和 $\omega^\vee = \otimes'_v \omega_v^\vee$，二者均相对于这些非分歧向量定义。它们分别是 $J(V)(\mathbb{A})$ 和 $\mathrm{U}(V)(\mathbb{A})$ 的表示，均实现于 $\mathcal{S}(Y^\vee(\mathbb{A}))$ 上，并且相对于全局内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ 是酉的。按照 §3.3 中的测度选取，它分解为 $\prod_v \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2,v}$。

根据 [GGP12，第 23],节，这些表示通过 θ 级数成为自守表示

$$\theta^\vee(j,\phi) = \sum_{y^\vee \in Y^\vee(F)} \nu^\vee(j)\phi(y^\vee), \quad j \in J(V)(\mathbb{A}), \quad \phi \in \mathcal{S}(Y^\vee(\mathbb{A})). \tag{5.2}$$

在 [BLXa，第 3.3 节5], 中，我们定义了一个空间 $\mathcal{T}([J(V)], \psi)$，其中的函数在 $J(V)$ 上具有一致中等增长，并具有固定的中心特征。

引理 5.1。存在 $N > 0$，使得 $\theta^\vee$ 定义了一个连续映射 $\mathcal{S}(Y^\vee(\mathbb{A})) \to \mathcal{T}_N([J(V)], \psi)$。

证明。若 V 是各向异性的，则 $[J(V)]$ 是紧的，因此无需证明。一般而言，V 可以写成 $V = X \oplus V_0 \oplus X^*$，其中 $X \oplus X^*$ 是分裂的。在这种情况下，我们可以使用§8.2.2中给出的魏尔表示公式。利用与引理4.1相同的论证，这就归结为 $\mathrm{U}(V_0)$ 的情形。□

5.2. **正则艾森斯坦级数的傅里叶–雅可比周期**。现在，我们定义傅里叶–雅可比周期的一种扩展，它适用于由 (U'_V, μ)-正则尖点数据诱导的艾森斯坦级数。

在 [BLXa第 7 节中。5], 我们定义了一个截断算子 Λ_u^T。它是一个映射，将 $\mathcal{T}([\widetilde{\mathrm{U}_V}], \psi)$ 上$\widetilde{\ }$具有一致中等增长且 $[\mathrm{U}_V]$ 上具有固定中心特征的函数空间（精确定义见 [BLXa第 3.3 节。5] ）映射到空间 $\mathcal{S}^0([\mathrm{U}'_V])$ 中的连续快速衰减函数空间 $[\mathrm{U}'_V]$。

设 Q 是 U_V 的一个标准抛物子群，令 $\sigma \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(M_Q)$。若 $\varphi \in \mathcal{A}_{Q,\sigma}(\mathrm{U}_V)$，$\lambda \in i\mathfrak{a}_Q^{*\widetilde{\ }}$ 且 $\phi \in \mathcal{S}(Y^\vee(\mathbb{A}))$，则可考虑 $g \in [\mathrm{U}_V] \mapsto E(g,\varphi,\lambda)\theta^\vee(\widetilde{g},\phi)$。根据引理 5.1，该函数$\widetilde{\ }$属于 $\mathcal{T}([\mathrm{U}_V], \psi)$，记作 $E(\cdot,\varphi,\lambda)\cdot\theta^\vee(\cdot,\phi)$。由 [BP21a 命题 A.1.1 (vi)],，因此我们可以应用 Λ_u^T，并在 $[\mathrm{U}'_V]$ 上对结果积分。由此定义了一个截断傅里叶–雅可比周期。

如果由（M_Q, σ）表示的尖点数据 χ 是（U'_V, μ）-正则的，那么截断傅里叶–雅可比周期与 T 无关。

命题 5.2. 设 $T \in \mathfrak{a}_0$ 充分正。假设 χ 是 (U'_V,μ)-正则的。那么积分

$$\int_{[\mathrm{U}'_V]} \Lambda_u^T \left(E(\cdot,\varphi,\lambda)\cdot\theta^\vee(\cdot,\phi)\right)(h)\mathrm{d}h \tag{5.3}$$

与 T 无关。我们将其记为 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}(\varphi,\phi,\lambda)$。

证明。 证明过程与 [BPCZ22，命题 5.1.4 非常相似。1], 为方便读者，我们概述主要步骤。设 T 和 T' 是两个截断参数，满足 T 且$T+T'$充分正。在 [BLXa，公式 (7.16)], 中证明了我们有如下形式的展开恒等式:

$$\begin{aligned}&\int_{[\mathrm{U}'_V]} \Lambda_u^{T+T'}\left(E(\cdot,\varphi,\lambda)\cdot\theta^\vee(\cdot,\phi)\right)(h)\mathrm{d}h\\&=\sum_{R\in\mathcal{F}_V}\int_{K'_V}\int_{[M_{R'}]} e^{\langle -2\rho_{R'},H_{R'}(m)\rangle}\Gamma'_{R'}(H_{R'}(m)-T_{R'},T'_{R'})\Lambda_u^{R,T}\left(E_{R_\mathrm{U}}(\cdot,\varphi,\lambda)\cdot {}_R\theta^\vee(\cdot,\phi)\right)(mk)\mathrm{d}m\mathrm{d}k.\end{aligned}$$

这里， $\mathcal{F}_V$ 是 $S(V)$的一个抛物子群集合（见 [BLXa，第4.3]节）， R' 是由 R确定的 U'_V的一个标准抛物子群， R_U 是 $R'\times R'$，视为 U_V的一个标准抛物子群，而 ${}_R\theta^\vee$ 定义于 [BLXa，第4.4]节。截断算子 Λ^R、${}_u{}^T$以及 $\Gamma_{R'}$ 函数也分别定义于 [BLXa，第7.5]节和 [BLXa，定理7.6]的证明中（ Γ 函数源自 [Art81，第 2]节）。若 $R=S(V)$，则 $\Gamma'_{R'}$ 恒等于1，因此求和中的相应项是关于 T'的常数。所以，只需证明其余项都趋于零。

令 $R\in\mathcal{F}_V$并非 $S(V)$。那么根据 [BLXa 第 4.3] 节中的描述，我们有 $R'\neq \mathrm{U}'_V$，因此 $R_\mathrm{U}\neq \mathrm{U}_V$。回到 Λ^R的定义，${}_u{}^T$并利用 [BLXa 第 4.4] 节给出的混合模型描述（另见 §8.2.2），可知对每个 $a\in A_{R'}^\infty$，都有

$${}^{R_u}{}^T\left(E_{R_\mathrm{U}}(\ \varphi,\lambda)\cdot {}_R\theta^\vee(\phi)\right)(amk)=e^{\langle\lambda+\rho_{R_\mathrm{U}},H_{R_\mathrm{U}}(a)\rangle}\overline{\mu}(a)|a|^{\frac{1}{2}}\Lambda_u^{R,T}\left(E_{R_\mathrm{U}}(\varphi,\lambda)\cdot {}_R\theta^\vee(\phi)\right)(mk).$$

根据 $\Gamma'_{R'}$ 的性质 [Art81第 2] 节以及式（2.5）中回顾的艾森斯坦级数常数项公式，只需证明对每个 $w\in W(Q;\ R_U)$ 都有

$$\int_{[M_{R'}]^1}\Lambda_u^{R,T}\left(E^{R_\mathrm{U}}(\cdot,M(w,\lambda)\varphi,w\lambda)\cdot {}_R\theta^\vee(\cdot,\phi)\right)(m)\mathrm{d}m=0 \tag{5.4}$$

注意，表示 $w\pi$ 也是 (U'_V,μ^{-1})-正则的，因此我们可以假设 $w=1$，这意味着 $Q\subset R_\mathrm{U}$。

作分解 $M_{R'}=M_{R',\bullet}\times M_{R',*}$，其中 $M_{R',\bullet}$ 同构于 GL^{n_i}与 $M_{R'}$ 的乘积，而 $*$ 是一个酉群。类似地，记 $M_{R_\mathrm{U}}=M_{R_\mathrm{U},\bullet}\times M_{R_\mathrm{U},*}$，使得 $M_{R_\mathrm{U},\bullet}\cong M_{R',\bullet}^2$，且嵌入 $M_{R',\bullet}\subset M_{R_\mathrm{U},\bullet}$ 是对角嵌入。记 $Q_1\times Q_2=M_{R_\mathrm{U},\bullet}\cap Q$，并将表示 σ 在 $M_{Q_1}(\mathbb{A})\times M_{Q_2}(\mathbb{A})$ 上的限制记为 $\sigma=\sigma_1\boxtimes\sigma_2$。若 $\varphi|_{[M_{R_\mathrm{U}}]}=(\varphi_1\otimes\varphi_2)\otimes\varphi_*$，则只需证明 (5.4)，其中 $\varphi_1\otimes\varphi_2\in\mathcal{A}_{Q_1\times Q_2,\sigma_1\otimes\sigma_2}(M_{R_\mathrm{U},\bullet})$ 且 $\varphi_*\in\mathcal{A}_{Q\cap M_{R_\mathrm{U},*}}(M_{R_\mathrm{U},*})$。

根据 $J(V$中 [BLXa第 4 节对抛物子群的描述，可以很容易地证明，算子3]，Λ^R，${}_u{}^T$是以下各项的乘积:

- 通常的 Arthur 算子 Λ^T，它与一般线性群的乘积$M_{R'}$相关联，$\bullet$并被视为作用于空间 $\mathcal{T}([M_{R_\mathrm{U}}\bullet]$上的算子，在该空间中作用于第二个分量（见 [Art82]），
- 附属于酉群 $M_{R',\ *}\subset M_{R_\mathrm{U}*}$的截断算子 Λ_u^T，视为作用于空间 $\mathcal{T}([M_{R_\mathrm{U}*}])$ 上的算子。

对于 $m \in [M_{R'}]^1$ 按照我们的分解写作 $m = m_\bullet m_*$。利用 [BLXa第 4 节中对混合模型的描述，4], 我们看到 ${}_R\theta^\vee(m, \phi) = \mu(m_\bullet) \cdot {}_R\theta^\vee(m_*, \phi)$。因此，(5.4) 中的积分具有

$$\int_{[M_{R',\bullet}]^1} E(m_\bullet, \varphi_{1,}, \lambda)\Lambda^T E(m_\bullet, \varphi_2, \lambda)\overline{\mu}(m_\bullet)\mathrm{d}m_\bullet \tag{5.5}$$

作为一个因子。假设 $R_{\mathrm{U}} \neq \mathrm{U}_V$ 意味着 $M_{R'.} \bullet$ 并非平凡。根据朗兹公式，将其应用于每个一般线性群（[Art82]）上截断 Eisenstein 级数的内积，(5.5) 为零，因为 χ 是（U'_V， μ）-正则的。证明至此结束。□ −

注记 5.3。截断算子 Λ_u^T 涉及对常数项取交错和。特别地，如果 $\sigma = \sigma_V \boxtimes \sigma'_V$ 满足 σ_V 或 σ'_V 为尖点，我们就简单地有 $\Lambda_u^T E(\varphi, \lambda) \cdot \theta^\vee(\phi) = E(\varphi, \lambda) \cdot \theta^\vee(\phi)$。由此可知，$\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}(\varphi, \phi, \lambda)$ 就是沿 $[\mathrm{U}'_V]$ 对此函数取积分。

对于任意层 J，根据 [Lap08，定理 2。2], 引理 5.1 和定理 5.4，在 $\mathcal{A}_{Q,\sigma}(\mathrm{U}_V)^J$ 和 $\mathcal{S}(Y^\vee(\mathbb{A}))$ 上分别存在连续半范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_{Y^\vee}$，使得

$$\left|\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}(\varphi, \phi, \lambda)\right| \ll \|\varphi\|\|\phi\|_{Y^\vee}, \quad \varphi \in \mathcal{A}_{Q,\sigma}(\mathrm{U}_V)^J, \quad \phi \in \mathcal{S}(Y^\vee(\mathbb{A})). \tag{5.6}$$

5.3. **刘氏迹公式在酉群上的粗谱展开**。本节回顾 [BLXa] 关于刘氏相对迹公式 U 侧正则化的主要结果。

设 $\chi \in \mathfrak{X}(\mathrm{U}_V)$。设 $f_V \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_V(\mathbb{A}))$， ϕ_1， $\phi_2 \in \mathcal{S}(Y^\vee(\mathbb{A}))$。对于 $\chi_0 \in \{\emptyset, \chi\}$，我们有核函数

$$K_{f_V \otimes \phi_1 \otimes \phi_2, \chi_0}(g_1, g_2) = K_{f_V, \chi_0}(g_1, g_2)\theta^\vee(\widetilde{g}_1, \phi_1)\overline{\theta}^\vee(\widetilde{g}_2, \phi_2), \quad g_1, g_2 \in [\widetilde{\mathrm{U}}_V].$$

映射 $f_V \otimes \phi_1 \otimes \phi_2 \mapsto K_{f_V \otimes \phi_1 \otimes \phi_2, \chi_0}$ 通过连续性延拓至 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A}))$。对于 T 充分大的 a，修正核 $K^T_{f_{V,+},\chi_0}$ 也在 [BLXa第 7 节中定义。3]它是定义在 $\widetilde{\mathrm{U}}_V(\mathbb{A})^2$ 上的函数。

对于固定的 g_1，函数 $K_{f_{V,+},\chi_0}(g_1, \cdot)$ 属于 $\mathcal{T}([\widetilde{\mathrm{U}}_V], \psi)$。因此，我们可以应用 Λ_u^T，并将由此得到的二元函数记为 $K_{f_{V,+},\chi_0}\Lambda_u^T(\cdot, \cdot)$。现在总结这两个修正核的主要性质。

定理 5.4。定 以下性质对任意 T 足够大的正值以及任意 $f_{V,+} \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A}))$.

(1) [BLXa，命题 7。5] 积分

$$J^T_{V,\chi_0}(f_+) = \int_{[\mathrm{U}'_V]}\int_{[\mathrm{U}'_V]} K^T_{f_{V,+},\chi_0}(h_1, h_2)\mathrm{d}h_1\mathrm{d}h_2,$$

绝对收敛。

(2) [BLXa，定理 7。6] 当 T 充分正时，函数 $J^T_{V,\chi_0}(f_{V,+})$ 是一个指数多项式函数的限制，其纯多项式部分为常数。我们记为

is 为 $J_{V,\chi_0}(f_{V,+})$。它在 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+})$) 上定义了一个连续分布，并且我们有

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G_V)} J_{V,\chi}(f_{V,+}) = J_V(f_{V,+}),$$

其中的求和绝对收敛。

(3) [BLXa，第 7 节。7] 算子 Λ_u^T: $\mathcal{T}([\widetilde{\ }\mathrm{U}_V], \psi) \to \mathcal{S}^0([\mathrm{U}'_V])$ 是连续的。

(4) [BLXa，第 7 节。8] 对于任意 $r>0$，存在一个连续半范数 $\|\cdot\|$，定义在 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A}))$ 上，使得

$$\left| J^T_{V,\chi_0}(f_{V,+}) - \int_{[\mathrm{U}'_V]}\int_{[\mathrm{U}'_V]} K_{f_{V,+},\chi_0}\Lambda^T_u(h_1,h_2)\mathrm{d}h_1\mathrm{d}h_2 \right| \le \|f_{V,+}\|e^{-r\|T\|}.$$

特别地，绝对收敛积分

$$\int_{[\mathrm{U}'_V]}\int_{[\mathrm{U}'_V]} K_{f_{V,+},\chi_0}\Lambda^T_u(h_1,h_2)\mathrm{d}h_1\mathrm{d}h_2$$

渐近于关于 T 的一个指数多项式，其纯多项式项是一个常数，等于$J_{V,\chi_0}(f_{V,+})$。

定理的第二个要点是刘氏迹公式在酉群上的粗谱展开 。

5.4. U侧的相对特征展开。以下我们假设 χ 是 U_V、U'_V、μ 的一个正则尖点数据，属于 U_V。我们固定 U_V 的一个层 J。现在我们用相对特征写出 $J_{V,\chi}$ 的谱展开。

5.4.1. 相对特征 $J_{Q,\sigma}$。根据命题 2.3, [Lap08，定理 2.2] 和（5.6），对于处于一般位置的 $\lambda\in\mathfrak{a}^*_Q$、$\mathbb{C}$，我们可以定义 $f_V\in\mathcal{S}(\mathrm{U}_V(\mathbb{A}))^J$ 和 ϕ_1、$\phi_2\in\mathcal{S}(Y^\vee(\mathbb{A}))$ 的相对特征

$$J_{Q,\sigma}(f_V\otimes\phi_1\otimes\phi_2,\lambda) = \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{Q,\sigma}(J)} \mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}(I_Q(\lambda,f)\varphi,\phi_1,\lambda)\overline{\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}(\varphi,\overline{\phi_2},\lambda)}. \tag{5.7}$$

固定 f_V、ϕ_1 和 ϕ_2 时，它关于 λ 是亚纯的，并且在区域 $\lambda\in i\mathfrak{a}^*_Q$ 内是全纯的。固定 λ 时，映射 $f_V\otimes\phi_1\otimes\phi_2\mapsto J_{Q,\sigma}(f_V\otimes\phi_1\otimes\phi_2,\lambda)$ 通过连续性延拓到 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A}))^J$。我们需要对它在族中的情形给出界。

命题 5.5。存在连续半范数 $\|\cdot\|$，定义在 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_V(\mathbb{A}))^J$ 上，以及 $\|\cdot\|_{Y^\vee}$，定义在 $\mathcal{S}(Y^\vee(\mathbb{A}))$ 上，使得对于任意 $f_V\in\mathcal{S}(\mathrm{U}_V(\mathbb{A}))^J$ 和 ϕ_1，$\phi_2\in\mathcal{S}(Y^\vee(\mathbb{A}))$

$$\sum_{(M_Q,\sigma)}\int_{i\mathfrak{a}^*_Q} |J_{Q,\sigma}(f_V\otimes\phi_1\otimes\phi_2),\lambda|\,\mathrm{d}\lambda \le \|f_V\|\|\phi_1\|_{Y^\vee}\|\phi_2\|_{Y^\vee}, \tag{5.8}$$

其中，$(M_Q$、$\sigma)$ 遍历$(\mathrm{U}_V$、U'_V、$\mu)$-正则尖点数据在U_V中的代表元集。

证明。 固定 ϕ_1 和 ϕ_2。我们断言，映射 $f_V \mapsto (((Q、\ \sigma)\ \lambda) \mapsto J_{Q、\ \sigma}(f_V \otimes \phi_1 \otimes \phi_2、\ \lambda))$取值于变量为 $((Q、\ \sigma)\ \lambda)$ 的 L^1 函数空间（赋予计数测度与勒贝格测度的乘积），是连续的。为证明这一点，只需证明对于每个$f_V \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_V(\mathbb{A}))^J$，和

$$\sum_{(M_Q,\sigma)} \int_{i\mathfrak{a}_Q^*} |J_{Q,\sigma}(f_V \otimes \phi_1 \otimes \phi_2), \lambda| \, \mathrm{d}\lambda \tag{5.9}$$

是有限的。事实上，若确实如此，则我们的泛函是 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_V(\mathbb{A}))$ 上一列连续形式的逐点极限，因此根据闭图像定理，它是连续的。

令 $f_V \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_V(\mathbb{A}))^J$。根据命题 5.2，当 T充分大时（5.9）为

$$\sum_{(M_Q,\sigma)} \int_{i\mathfrak{a}_Q^*} \left| \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{Q,\sigma}(J)} \int_{[\mathrm{U}_V']^2} \Lambda_u^T \left(E(I_Q(\lambda, f_V)\varphi, \lambda)\theta^\vee(\phi_1) \right)(h_1) \overline{\Lambda_u^T \left(E(\varphi, \lambda)\theta^\vee(\overline{\phi_2}) \right)}(h_2) \mathrm{d}h_i \right| \mathrm{d}\lambda.$$

根据命题 2.3和定理 5.4，我们可以交换最后的求和与积分，因此该表达式的上界为

$$\sum_{(M_Q,\sigma)} \int_{i\mathfrak{a}_Q^*} \int_{[\mathrm{U}_V']^2} \left| \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{Q,\sigma}(J)} \Lambda_u^T \left(E(I_Q(\lambda, f_V)\varphi, \lambda)\theta^\vee(\phi_1) \right)(h_1) \overline{\Lambda_u^T \left(E(\varphi, \lambda)\theta^\vee(\overline{\phi_2}) \right)}(h_2) \right| \mathrm{d}h_i \mathrm{d}\lambda. \tag{5.10}$$

根据 [DM78], 中的迪克斯米耶–马利亚万定理，我们可以假设 $f_V = f_1 * f_2^\vee$，其中 $f_2^\vee(g) = f_2(g^{-1})$。通过基变换，由柯西–施瓦茨不等式可得，只要将$\phi_2$ 替换为 ϕ_2，则（5.10）被 $i = 1, 2$ 上的乘积的平方根所控制，具体为

$$\sum_{(M_Q,\sigma)} \int_{i\mathfrak{a}_Q^*} \int_{[\mathrm{U}_V'] \times [\mathrm{U}_V']} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{Q,\sigma}(J)} \left| \Lambda_u^T \left(E(I_Q(\lambda, f_i)\varphi, \lambda) \cdot \theta^\vee(\phi_i) \right)(h_i) \right|^2 \mathrm{d}h_1 \mathrm{d}h_2 \mathrm{d}\lambda. \tag{5.11}$$

置 $g_i = f_i * f_i^\vee$。再次使用变量替换以及 Λ_u^T的连续性（定理 5.4），我们得到

$$\sum_{\varphi} \left| \Lambda_u^T \left(E(I_Q(\lambda, f_i)\varphi, \lambda)\theta^\vee(\phi_i) \right) \right|^2 = \Lambda_u^T \left(\sum_{\varphi} E(I_Q(\lambda, g_i)\varphi, \lambda)\theta^\vee(\phi_i) \otimes \overline{E(\varphi, \lambda)\theta^\vee(\phi_i)} \right) \Lambda_u^T, \tag{5.12}$$

其中我们用 $\Lambda_u^T F \Lambda_u^T$表示对函数 F左右变量的截断。此外，由于正性，我们可以交换积分，(5.11) 变为

$$\mathrm{vol}([\mathrm{U}_V']) \int_{[\mathrm{U}_V']} \sum_{(M_Q,\sigma)} \int_{i\mathfrak{a}_Q^*} \Lambda_u^T \left(\sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{Q,\sigma}(J)} E(I_Q(\lambda, g_i)\varphi, \lambda)\theta^\vee(\phi_i) \otimes \overline{E(\varphi, \lambda)\theta^\vee(\phi_i)} \right) \Lambda_u^T(h, h) \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}h. \tag{5.13}$$

定义 $K_{g_i,\ \text{正则}} = \sum_\chi K_{g_i,\ \chi}$，其中求和遍及 U_V，U_V'，μ-正则尖点数据（属于 U_V）。根据[BPCZ22，引理 2.10.1。1] 和定理 2.5 $K_{g_i,\ \text{正则}}$ 是良定义的，属于 $\mathcal{T}([\mathrm{U}_V \times \mathrm{U}_V])$，并且我们有谱展开

$$K_{g_i,\mathrm{reg}}(x, y)\theta^\vee(x, \phi_i)\theta(y, \phi_i) = \sum_{(M_Q,\sigma)} \int_{i\mathfrak{a}_Q^*} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{Q,\sigma}(J)} E(x, I_Q(\lambda, g_i)\varphi, \lambda)\theta^\vee(x, \phi_i)\overline{E(y, \varphi, \lambda)\theta^\vee(y, \phi_i)} \mathrm{d}\lambda.$$

二重积分 $\sum_{(M_Q,\ \sigma)} \int_{i\mathfrak{a}_Q^*}$ 对固定的 x 和 y 根据定理 2.5绝对收敛。因此，对于固定的 $h \in [\mathrm{U}_V']$，我们有

$$\sum_{(M_Q,\sigma)} \int_{i\mathfrak{a}_Q^*} \Lambda_u^T \left(\sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{Q,\sigma}(J)} E(I_Q(\lambda, g_i)\varphi, \lambda) \cdot \theta^\vee(\phi_i) \otimes \overline{E(\varphi, \lambda) \cdot \theta^\vee(\phi_i)} \right) \Lambda_u^T(h,h) \mathrm{d}\lambda$$
$$= \Lambda_u^T \left(K_{g_i,\mathrm{reg}} \theta_x^\vee(\phi_i) \overline{\theta}_y^\vee(\phi_i) \right) \Lambda_u^T(h,h),$$

其中，我们将 $\theta^\vee(\phi_i)$ 看作关于第一个变量的函数时记作 $\theta_x^\vee(\phi_i)$（相应地，将 $\theta^\vee(\phi_i)$ 看作关于第二个变量的函数时记作 $\theta_y^\vee(\phi_i)$）。事实上，根据 BLXa 第 7.5] 节中给出的 Λ_u^T 的定义，以及 [Art78 的引理 5.1]，对于任意 $F \in \mathcal{T}([\widetilde{\mathrm{U}}_V \times \widetilde{\mathrm{U}}_V])$，$\Lambda_u^T F \Lambda_u^T F(h,h)$ 都是 F 的常数项的有限个左平移之和（与 F 无关），并在 h 处取值。这些常数项是紧子集上的积分，因此与绝对收敛的二重积分 $\sum_{(M_Q,\sigma)} \int_{i\mathfrak{a}_Q^*}$ 可交换。这意味着

$$(5.13) \leq \mathrm{vol}([\mathrm{U}_V']) \int_{[\mathrm{U}_V']} \Lambda_u^T \left(K_{g_i,\mathrm{reg}} \theta_x^\vee(\phi_i) \overline{\theta}_y^\vee(\phi_i) \right) \Lambda_u^T(h,h) \mathrm{d}h,$$

并且根据定理 5.4，该表达式是有限的。因此，（5.9）也有限，从而完成了该断言的证明。

剩下的工作是对 ϕ_i 取得一致有界。由于 g_i 只依赖于 f_V，我们看到关于 ϕ_1 和 ϕ_2 的界是一致的，也就是说，存在定义在 $\mathcal{S}(Y^\vee(\mathbb{A}))$ 上的连续半范数 $\|.\|_{Y^\vee}$，使得对每个 f_V

$$\sup_{\substack{\phi_i \in \mathcal{S}(Y^\vee(\mathbb{A})) \\ \|\phi_i\|_{Y^\vee} \leq 1}} \sum_{(M_Q,\sigma)} \int_{i\mathfrak{a}_Q^*} |J_{Q,\sigma}(f_V \otimes \phi_1 \otimes \phi_2, \lambda)| \, \mathrm{d}\lambda < \infty.$$

由一致有界原理，5.8 中的界现在成立。 □

作为证明的副产品，我们得到以下引理。

引理 5.6. 设 $f_{V,+} \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A}))^J$。那么，当 T_1 和 T_2 充分正时，我们有

$$\int_{i\mathfrak{a}_Q^*} J_{Q,\sigma}(f_{V,+}, \lambda) \mathrm{d}\lambda = \int_{[\mathrm{U}_V'] \times [\mathrm{U}_V']} \Lambda_u^{T_1} \left(K_{f_{V,+},\chi} \right) \Lambda_u^{T_2}(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \tag{5.14}$$

证明。 根据命题 f_+ 和定理 5.5，两边关于 5.4 连续，因此我们可以假设 $f_+ = f \otimes \phi_1 \otimes \phi_2$。该引理现在由定理 2.5 中核的谱展开得到，因为利用命题 5.5 及其证明，根据控制收敛定理，积分上的所有必要操作都是合理的。 □

5.4.2. 的谱展开$_{\chi,}$ 。我们现在介绍本章的主要结果。

定理 5.7. 令 $\chi \in \mathfrak{X}(\mathrm{U}_V)$ 为由 (M_Q, σ) 表示的 $(\mathfrak{U}_V, \mathrm{U}_V', \mu)$-正则尖点数据。那么对于所有的 $f_{V,+} \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A}))^J$，我们有

$$J_{V,\chi}(f_{V,+}) = \int_{i\mathfrak{a}_Q^*} J_{Q,\sigma}(f_{V,+}, \lambda) \mathrm{d}\lambda. \tag{5.15}$$

证明。 由引理5.6，当 T_1 和 T_2 足够大时，我们有

$$\int_{[\mathrm{U}'_V]\times[\mathrm{U}'_V]}(\Lambda_u^{T_1}K_{f_{V,+},\chi}\Lambda_u^{T_2})(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{i\mathfrak{a}_Q^*}J_{Q,\sigma}(f_{V,+},\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

由于右端与 T_1 和 T_2无关，我们 conclude 左端也与之无关。根据 [BPCZ22，引理 2.10.1。1]以及定理5.4，我们有

$$\lim_{T_1\to\infty}\int_{[\mathrm{U}'_V]\times[\mathrm{U}'_V]}(\Lambda_u^{T_1}K_{f_{V,+},\chi}\Lambda_u^{T_2})(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{[\mathrm{U}'_V]\times[\mathrm{U}'_V]}K_{f_{V,+},\chi}\Lambda_u^{T_2}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

定理现由定理5.4得出。 □

6. Global comparison of relative characters for regular cuspidal data

本章使用 [BLXa]和 [BLXb]的结果，对刘氏迹公式中相匹配的正则尖点数据的谱贡献进行比较。随后，我们在定理6.5中将其表述为相对特征。

6.1. 几何侧的比较。

本节回顾 [BLXb]关于刘氏迹公式几何侧比较的主要结果。这些结果最终依赖于将刘氏迹公式进行无穷小归约至 Jacquet–Rallis 迹公式，在此过程中可以使用 [Zha14a], [Xue 14], [Xue19], [Yun11], [BP21c], [Zha21]和 [CZ21]的结果。

6.1.1. 测试函数的局部传递。

设 S 是 F 的有限个处的集合。在 [BLXb 第 4.3],节中，我们引入了 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_+(F_\mathrm{S}))$ 中的测试函数与 $\prod_{V\in\mathcal{H}_\mathrm{S}}\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(F_\mathrm{S}))$ 中的元素元组之间的匹配概念。它定义为沿匹配轨道的正则半单轨道积分相等。

如果存在一个与之匹配的集合 $(f_{V,+,\mathrm{S}})_{V\in\mathcal{H}_\mathrm{S}}\in\prod_{V\in\mathcal{H}_\mathrm{S}}\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(F_\mathrm{S}))$，我们就称 $f_{+,\mathrm{S}}\in\mathcal{S}(\mathrm{U}_+(F_\mathrm{S}))$ 是可传递的。如果存在一个与之匹配的 $f_{+,\mathrm{S}}$ ，我们就称集合 $(f_{V,+,\mathrm{S}})_{V\in\mathcal{H}_\mathrm{S}}$ 是可传递的；对于 $V\in\mathcal{H}_\mathrm{S}$ ，若集合 $(f_{V,+,\mathrm{S}},0,\ldots,0)$ 是可传递的，我们就称单个 $f_{V,+,\mathrm{S}}$ 是可传递的。现在我们陈述关于 [BLXb] 的可传递函数的主定理。

定理 6.1 ([BLXb，定理 4。3])。 $\mathcal{S}(G_+(F_\mathrm{S}))$ 和$\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(F_\mathrm{S}))$ 中的可转移测试函数子集是稠密的。

6.1.2. 基本引理。

对于几乎所有赋值 v ， F其情形按照 [BLXb，定理 4。8]的意义是非分歧的。对于这些赋值，我们有一个基本引理。

定理 6.2 ([BLXb，定理 4。8])。 对于几乎每个赋值 v，函数 $\Delta_{H(F_v)}\Delta_{G'(F_v)}1_{G_+(\mathcal{O}_v)}$和 $\Delta^2_{\mathrm{U}(V)(F_v)}1_{\mathrm{U}_{V,+}(\mathcal{O}_v)}$ 相匹配。这里的 Δ 因子是 *§2.2.4*中所述的局部常数。

6.1.3. 全局转移。 我们回到整体情形。若存在一个有限个处集合 S，包含 E 中所有阿基米德地方和分歧地方，使得：则称测试函数 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))$ 与测试函数族 $(f_{V,+})_{V\in\mathcal{H}}$（其中 $f_{V,+} \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A}))$）相匹配：

- $f_{V,+} = 0$ for $V \notin \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$;
- for each $V \in \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$, $f_{V,+} = (\Delta^{\mathrm{S}}_{\mathrm{U}(V)})^2 f_{V,+,\mathrm{S}} \otimes 1_{\mathrm{U}_{V,+}(\mathcal{O}^{\mathrm{S}})}$ where $f_{V,+,\mathrm{S}} \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(F_{\mathrm{S}}))$;
- $f_+ = \Delta_H^{\mathrm{S},*}\Delta_{G'}^{\mathrm{S},*} f_{+,\mathrm{S}} \otimes 1_{G_+(\mathcal{O}^{\mathrm{S}})}$, where $f_{+,\mathrm{S}} \in \mathcal{S}(G_+(F_{\mathrm{S}}))$;
- $f_{+,\mathrm{S}}$ and $(f_{V,+,\mathrm{S}})_{V\in\mathcal{H}_{\mathrm{S}}}$ match.

根据 定理6.2的基本引理，匹配不依赖于 S.

6.1.4. 几何侧的匹配。 在 [BLXa], 中，我们证明分布 I 和 J_V 定理 4.2及定理 5.4 中引入的分布均有几何展开。通过比较匹配测试函数对应的几何展开，我们证明以下结果。

定理 6.3 ([BLXa, 定理 6.7], [BLXa, 定理 8.7], [BLXb, 定理 4.10])。 若 f_+ 和$(f_{V,+})_V$ 匹配，则有

$$I(f_+) = \sum_{V\in\mathcal{H}} J_V(f_{V,+}).$$

6.2. **局部转移的谱刻画**。 本节给出 [BLXb]中证明的局部转移谱刻画。它是 [BPLZZ21，引理 4.9] 的傅里叶–雅可比版本，其证明通过比较局部迹公式完成，这与 [BP21b]类似。此后，我们固定 v 的一个赋值 F。

6.2.1. G上的局部球特征。设 π_v 是$G(F_v)$的光滑不可约 tempered 表示。记 $\mathcal{W}(\pi_v,\psi_{N,v})$为相对于自守特征 ψ_N 的局部分量$\psi_{N,v}$ 的惠特克函数空间，其中 ψ_N 定义于§4.2.1。通过沿 $N(F_v)\backslash P_{n,n}(F_v)$ 积分，可在该空间上赋予不变内积$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{Whitt},v}$（由 [Jac77]可知其定义良好）。回顾一下，$P_{n,n}$ 是 G_n的拟抛物子群之积。对于 $W \in \mathcal{W}(\pi_v,\psi_{N,v})$和 $\Phi \in \mathcal{S}(E_{n,v})$，令

$$Z_v(W,\Phi,\overline{\mu},0) = \int_{N_H(F_v)\backslash H(F_v)} W(h)\Phi(e_n h)\overline{\mu_v}(h)\,|\det h|_{E_v}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}h, \tag{6.1}$$

and

$$\beta_{\eta,v}(W) = \int_{N'(F_v)\backslash P'_{n,n}(F_v)} W(p)\eta_{n+1,v}(p)\mathrm{d}p. \tag{6.2}$$

这些积分定义良好，是由 [BLXb，引理 65] 以及 [BP21b，引理 2.151]得出的。若 $f \in \mathcal{S}(G(F_v))$，则记 $\pi_v(f)$为 f 在 π_v上的作用。于是令

$$I_{\pi_v}(f\otimes\Phi) = \sum_W Z_v(\pi_v(f)W,\Phi,\overline{\mu},0)\overline{\beta}_{\eta,v}(W), \tag{6.3}$$

其中求和遍历 $\mathcal{W}(\pi_v,\psi_{N,v})$ 的标准正交基。根据 [BLXb，引理 6，6] 映射I_{π_v} 按连续性延拓至 $\mathcal{S}(G_+(F_v))$。

6.2.2. 局部傅里叶–雅可比周期。 设 $V \in \mathcal{H}_{\{v\}}$。 设 σ_v 是 $\mathrm{U}_V(F_v)$ 的不可约温和表示。我们将局部傅里叶–雅可比周期 定义为积分

$$\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V,v}(\varphi_1 \otimes \phi_1, \varphi_2 \otimes \phi_2) := \int_{\mathrm{U}'_V(F_v)} \langle \sigma_v(h)\varphi_1, \varphi_2\rangle \langle \omega_v^\vee(h)\phi_1, \phi_2\rangle_{L^2} \mathrm{d}h, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \sigma_v, \quad \phi_1, \phi_2 \in \omega_v.$$

由 [Xue16 命题 1.1.1] 可知，此积分绝对收敛。若 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ 且 $\phi_1 = \phi_2 = \phi$，我们简记为 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V,v}(\varphi, \phi)$。

6.2.3. U 上的局部球特征。 我们定义酉侧上的特征。沿用 V 和 σ_v。 设 $f_V \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_V(F_v))$ 且 $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(Y^\vee(F_v))$。我们定义

$$J_{\sigma_v}(f_V \otimes \phi_1 \otimes \phi_2) = \sum_{\varphi \in \sigma_v} \mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V,v}(\sigma_v(f_V)\varphi \otimes \phi_1, \varphi \otimes \overline{\phi_2}), \tag{6.4}$$

其中求和遍历 σ_v的一组标准正交基。根据 [BLXb 引理 6.2]，，映射 J_{σ_v} 可由连续性延拓到 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(F_v))$。

6.2.4. 测试函数匹配作为球特征的等式。 沿用 $V \in \mathcal{H}_{\{v\}}$。 记 $\mathrm{Temp}^{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V(F_v))$ 为 $\mathrm{U}_V(F_v)$ 的光滑不可约温和表示 σ_v 所成的子集，其中傅里叶–雅可比泛函空间 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}'_V(F_v)}(\sigma_v \otimes \omega_v^\vee, \mathbb{C})$ 的维数为 1。

定理 *6.4*（[*BLXb*，定理 *7.11*]）。设 κ_V 为 [*BLXb*，定理 *7.10*]所定义的常数。设 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+(F_v))$ 以及 $f_{V,+} \in \mathcal{S}(U_{V,+}(F_v))$。那么，当且仅当对于所有 $\sigma_v \in \mathrm{Temp}^{\mathrm{U}'_V}(U_V(F_v))$，我们有

$$\kappa_V I_{\mathrm{BC}(\sigma_v)}(f_+) = J_{\sigma_v}(f_{V,+}).$$

若 V现在是整体域 F上的斜厄米空间，则对于每个赋值 v，我们得到常数$\kappa_{V,v}$。如果我们选择 §3.3 中的局部测度，则由 [BLXb，定理 7.10]可知，它们几乎全都等于 1，并且$\prod_v \kappa_{V,v} = 1$。

6.3. **谱侧的比较**。 现在我们得到了所需的相对特征比较。

6.3.1. 层。 设 S 是 F 的一个有限个处，其中包含$V_{F,\infty}$ 以及E/F的分歧地方。设 $V \in \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$。对于每个有限处 $v \in \mathrm{S}\backslash V_{F,\infty}$，我们取 $J_v \subset G(F_v)$ 和 $J_{V,v} \subset \mathrm{U}_V(F_v)$ 的某些开紧子群。令

$$J := \prod_{v \in \mathrm{S}\backslash V_{F,\infty}} J_v \prod_{v \notin \mathrm{S}} K_v, \quad \text{and} \quad J_V := \prod_{v \in \mathrm{S}\backslash V_{F,\infty}} J'_{V,v} \prod_{v \notin \mathrm{S}} K_{V,v}.$$

我们用 $\mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))^J$ 和 $\mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A}))^{J_V}$ 表示 J 双不变（分别为双-J_V 不变）函数的子集，其中紧子群作用在第一因子上。

6.3.2. 乘子。令 T 为 $S\setminus V_{F,\infty}$ 与 F 所有在 E中惰性的有限赋值的集合之并。用 $\mathcal{M}^{T}(G(\mathbb{A}))$表示相对于 $\prod_{v\notin T}K_v$定义的 T-乘子代数，见 [BPLZZ21，定义 3.5]。任意 $m\in\mathcal{M}^{T}(G(\mathbb{A}))$都导出一个 $m*$ 的连续线性算子$\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$。它们满足以下性质：对每个$G(\mathbb{A})$的不可约光滑表示 ρ，都存在一个复数 $m(\rho)$，使得对所有 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$，我们有

$$\rho(m*f)=m(\rho)\rho(f). \tag{6.5}$$

在受限张量积的层面上，存在一个有限的赋值集 S'，包含 $V_{F,\infty}$且与 T 不相交，使得对于任意 $f=f_{S'}\otimes f^{S'}\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$，我们有

$$m*f=m_{S'}*f_{S'}\otimes f^{S'} \tag{6.6}$$

其中 $m_{S'}*$ 是 $\mathcal{S}(G(F_{S'}))^{J_{S'}}$ 中由 $\mathcal{S}(G(F_{S'}))$的施瓦茨函数构成的子代数上的连续线性算子，这些函数是 $\prod_{v\in S'\setminus V_{F,\infty}}K_v$ 双不变的。我们将任意乘子 $m\in\mathcal{M}^{T}(G(\mathbb{A}))$ 延拓至$\mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))^J$，其作用在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J\otimes\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})$ 的最后一个因子上是平凡的，并利用稠密性。

对于 $V\in\mathcal{H}^S$，我们用 $\mathcal{M}^{T}(\mathbf{U}_V(\mathbb{A}))$ 表示相对于$\prod_{v\notin T}K_{V,v}$的 $\mathbf{U}_V(\mathbb{A})$ 的 T-乘子代数。我们有与上述类似的结论，特别是将任意 $m_V\in\mathcal{M}^{T}(\mathbf{U}_V(\mathbb{A}))$ 延拓至 $\mathcal{S}(\mathbf{U}_{V,+}(\mathbb{A}))^{J_V}$。

6.3.3. 全局 Arthur 参数包。令 P 为 G 的标准抛物子群，其标准 Levi 因子为 M_P。令 $\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(M_P)$，并设 $\Pi=I_P^G\pi$。假设 Π 是一个 (G,H,μ)-正则厄米特 Arthur 参数，并记 $\chi_0\in\mathfrak{X}(G)$ 为由有序对 (M_P,π) 表示的尖点数据。令 Π_0 为 Π 的离散分量（见 §3.4.2）。如有必要，扩大 S 并缩小 J_v，我们假设 Π 存在非零的 J-不变向量。

对于 $V\in\mathcal{H}^S$，我们用 $\mathfrak{X}_\Pi(\mathbf{U}_V)\subset\mathfrak{X}(\mathbf{U}_V)$ 表示由有序对 (M_Q,σ) 表示的尖点数据集合，其中 Π 是 $(V_F\setminus(T\cup V_{F,\infty}))$ 的弱基变换，且 σ 在 S 外非分歧。因此，这样的 (M_Q,σ) 表示一个 $(\mathbf{U}_V,\mathbf{U}'_V,\mu)$-正则尖点数据。此外，我们有一个自然同构 $-$

$$bc:\mathfrak{a}_P^{L_\pi,*}\to\mathfrak{a}_Q^*. \tag{6.7}$$

事实上，若 $M_Q=G^\sharp\times\mathbf{U}$，其中 $G^\sharp$ 是线性群的乘积，而 U 是两个酉群的乘积，则 $G^\sharp\times G^\sharp$ 是 M_P 的一个因子，因此 $\mathfrak{a}_Q^*\oplus\mathfrak{a}_Q^*$ 是 $\mathfrak{a}_P^*$ 的子空间。映射 (6.7) 现在是 $x\mapsto(x,-x)$ 的逆映射，其像为 $\mathfrak{a}^{L_\pi,P}{}^*$。特别地，$\mathfrak{a}^{L_\pi,P}{}^*$ 同构于 (3.4) 中定义的 $\mathfrak{a}_\Pi^*$。通过 bc，$i\mathfrak{a}_Q^*$ 上测度的拉回为 $2^{\dim(\mathfrak{a}_P^{L_\pi,*})}$ 乘以 $i\mathfrak{a}^{L_\pi,P}{}^*$ 上的测度。

6.3.4. 全局相对特征的比较。设 $V\in\mathcal{H}^S$。对于一般位置的 $\lambda\in\mathfrak{a}^{L_\pi,M_P}{}^*,\mathbb{C}$，我们定义一个相对特征

$$J_{V,\Pi}(f_{V,+},\lambda):=\sum_{(M_Q,\sigma)}J_{Q,\sigma}(f_{V,+},bc(\lambda)),\quad f_{V,+}\in\mathcal{S}(\mathbf{U}_{V,+}(\mathbb{A}))^{J_V}, \tag{6.8}$$

其中求和遍历 $\mathfrak{X}_\Pi(\mathbf{U}_V)$ 中各等价类的代表元。注意，由于艾森斯坦级数满足函数方程，该和与所选代表元无关。此和绝对

收敛，且根据命题 2.3在紧子集上一致收敛。特别地，它给出 λ上的一个亚纯函数，并且在 $i\mathfrak{a}^{L_\pi,}$ $_P{}^*$ 上全纯。

定理 6.5. 设 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))^J$ 具有 $f_+ = \Delta^{\mathrm{S}}, {}_*\Delta^{\mathrm{S}}{}_{G'}{}^* f_{+,\mathrm{S}} \times \prod_{v\notin \mathrm{S}} 1_{G_+}(\mathcal{O}_v)$ 的形式，其中$f_{+,\mathrm{S}} \in \mathcal{S}(G_+(F_{\mathrm{S}}))$。对每个 $V \in \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$，令 $f_{V,+} \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(\overset{H}{\mathbb{A}}))^{J_V}$，并对每个 $V \notin \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$ 设 $f_+^V = 0$。假设 f_+ 与 $(f_{V,+})_V$ 匹配。那么对每个 $\lambda_0 \in i\mathfrak{a}^{L_\pi}{}_{,P}{}^*$，我们有

$$\sum_{V\in\mathcal{H}^{\mathrm{S}}} J_{V,\Pi}(f_{V,+},\lambda_0) = |S_\Pi|^{-1} I_{\Pi_{\lambda_0}}(f_+). \tag{6.9}$$

证明。证明与 [BPC25，定理 7.1.6 非常相似。1] 并使用乘子。下面回顾主要步骤。以下两个引理是 [BPC25，引理 7.1.7。1] 以及 [BPC25，引理 7.1.7。2]。

引理 6.6. 设 $V \in \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$ 和 $\lambda_0 \in i\mathfrak{a}^{L_\pi}{}_{,P}{}^*$ 处于一般位置。存在一个乘子 $m_V \in \mathcal{M}^{\mathrm{T}}(\mathrm{U}_V(\mathbb{A}))$，使得满足以下条件。

(1) 对于所有 $f_V \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_V(\mathbb{A}))^{J_V}$，右卷积 $m_V * f_V$将 $L^2([\mathrm{U}_V])$ 映入

$$\widehat{\bigoplus}_{\chi\in\mathfrak{X}_\Pi(\mathrm{U}_V)} L^2_\chi([\mathrm{U}_V]).$$

(2) 对于 $(M_Q,\sigma) \in \mathfrak{X}_\Pi(\mathrm{U}_V)$，我们有 $m_V(I_Q^{\mathrm{U}_V}(\sigma_{bc(\lambda_0)})) = 1$。

引理 6.7. 设 $\lambda_0 \in i\mathfrak{a}^{L_\pi}{}_{,P}{}^*$。存在一个乘子 $m \in \mathcal{M}^{\mathrm{T}}(G(\mathbb{A}))$，使得满足以下条件。

(1) 对于所有 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$，右卷积 $m * f$将 $L^2(G(F)A_G(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}))$ 映入$L^2_{\chi_0}([G])$。(2) 我们有 $m(\Pi_{\lambda_0}) = 1$。

令 $\lambda_0 \in i\mathfrak{a}^{L_\pi}{}_{,P}{}^*$ 处于一般位置，并取用于 $V \in \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$ 的乘子 m 和 m_V，它们分别来自引理 6.6 和引理 6.7。根据 [BPLZZ21, 引理 4.12]，，我们可以假设 m_V 是 m 的基变换，其意义见 [BPLZZ21, 等式 (4.7)]。这意味着，对于每个与 T 不相交且足够大的有限个处集 S′，以及每个 $\sigma_{\mathrm{S}'} \in \mathrm{Temp}^{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V(F_{\mathrm{S}'}))$，我们有

$$m_{\mathrm{S}'}(\mathrm{BC}(\sigma_{\mathrm{S}'})) = m_{V,\mathrm{S}'}(\sigma_{\mathrm{S}'}). \tag{6.10}$$

引理 6.8。 令 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))^J$ 和 $f_{V,+} \in \mathcal{S}(\mathrm{U}_{V,+}(\mathbb{A}))^{J_V}$ 用于 $V \in \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$。设 $f_{V,+} = m_V * f_{V,+} = 0$ 用于 $V \notin \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$，并假设 f_+ 与 $(f_{V,+})_V$ 相匹配。那么 $m * f_+$ 与 $(m_V * f_{V,+})_V$ 也相匹配。

证明。对于每个惰性的 $v \notin \mathrm{S}$，我们有 $(m * f_+)_v = 1_{G_+}(\mathcal{O}_v)$。由基本引理（定理 6.2）可知，对于每个 $V \notin \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$，函数 $m * f_+$ 与 $0 = m_V * f_{V,+}$ 匹配。现在假设 $V \in \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$。令 S′ 为有限个处的集合，使得 m，且 m_V 如 (6.6) 所示在 S′ 之外平凡作用。只需证明 m 和 m_V 在 S′ 中的赋值处保持匹配。由定理 6.4，若 $f_{+,\mathrm{S}'}$ 与 $f_{V,+,\mathrm{S}'}$ 匹配，则它们具有匹配的局部相对特征。由 (6.5) 和 (6.10)，$m_{\mathrm{S}'} * f_{+,\mathrm{S}'}$ 与 $m_{V,\mathrm{S}'} * f_{V,+,\mathrm{S}'}$ 也具有匹配的相对特征。再由定理 6.4 可知它们匹配，证明完毕。□

通过比较 G 侧（定理 4.2）和 U 侧（定理 5.4）上匹配测试函数 $m*f_+$ 和 $m_V*f_{V,+}$（定理 6.3）的粗谱展开，我们得到谱恒等式

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)} I_\chi(m*f_+)=\sum_{V\in\mathcal{H}^{\mathrm{S}}}\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(\mathrm{U}_V)} J_{V,\chi}(m_V*f_+^V), \tag{6.11}$$

根据定理4.2 和引理6.6 ，对左端；根据定理5.4 和引理6.7 ，对右端，(6.11)可化为

$$I_{\chi_0}(m*f_+)=\sum_{V\in\mathcal{H}^{\mathrm{S}}}\sum_{\chi\in\mathfrak{X}_\Pi(\mathrm{U}_V)} J_{V,\chi}(m_V*f_{V,+}).$$

根据定理4.11 和5.7，再经简单的变量代换，(6.11)可写为

$$2^{-\dim(\mathfrak{a}^*_{L_\pi})}\int_{i\mathfrak{a}_P^{L_\pi,*}} I_{\Pi_\lambda}(m*f_+)\mathrm{d}\lambda=2^{-\dim\mathfrak{a}_P^{L_\pi,*}}\sum_{V\in\mathcal{H}^{\mathrm{S}}}\int_{i\mathfrak{a}_P^{L_\pi,*}} J_{V,\Pi}(m_V*f_{V,+},\lambda)\mathrm{d}\lambda, \tag{6.12}$$

其中 $(M_Q,\ \sigma)$ 是 $\chi\in\mathfrak{X}_\Pi(\mathrm{U}_V)$ 的一个代表元。注意，根据定理4.11 和命题5.5，所有积分都绝对收敛。此外，由 (3.5) 可得 $|S_\Pi|=2^{\dim(\mathfrak{a}^*_{L_\pi})-\text{维数}\,\mathfrak{a}^{L_\pi,\ P}}$。

取 v_1 和 v_2 为 T 之外剩余特征不同的两个有限赋值。令 S° 为 F 的任意有限赋值集合，其中包含 v_1 和 v_2，且与 T 不相交。因此，S° 中的任意赋值在 E 中分裂，并且在 §6.1.2 的意义下非分歧。考虑映射 $\mathcal{T}_{\mathrm{S}^\circ}:\lambda\in i\mathfrak{a}^*_\Pi\mapsto\Pi_{\lambda,\mathrm{S}^\circ}$，其中以 $\Pi_{\lambda,\mathrm{S}^\circ}$ 表示 Π_λ 在 S° 中各赋值处局部分量的乘积。根据我们对 v_1 和 v_2 的假设，该映射的纤维一致有界。注意，此时 $\mathcal{T}^{-1}_{\mathrm{S}^\circ}(\{\Pi_{\lambda_0,\mathrm{S}^\circ}\})\subset\mathcal{T}^{-1}_{\{v_1,v_2\}}(\{\Pi_{\lambda_0,\mathrm{S}^\circ}\})$，并且我们知道这个集合是有限的。根据 [Ram18]，的强重数一定理，对于每个满足 $\Pi_\lambda\not\simeq\Pi_{\lambda_0}$ 的 λ，都存在一个 T 之外的赋值 v，使得 $\Pi_{\lambda,v}\not\simeq\Pi_{\lambda_0,v}$。因此，我们可以选取 S°，使得对于任意 $\lambda\in\mathcal{T}^{-1}_{\mathrm{S}^\circ}(\{\Pi_{\lambda_0,\mathrm{S}^\circ}\})$，都有 $\Pi_\lambda=\Pi_{\lambda_0}$。由[JS81 定理 4.4]，并且由于 Π 是 G-正则的，且 λ_0 处于一般位置，这意味着$\pi_\lambda=\pi_{\lambda_0}$，而且 $\lambda=\lambda_0$。

令 $\mathcal{A}_{\mathrm{S}^\circ}$ 为球 Hecke 代数 $\otimes_{v\in\mathrm{S}^\circ}\mathcal{H}(G(F_v)\ K_v)$。令 $g\in\mathcal{A}_{\mathrm{S}^\circ}$。对于每个 $V\in\mathcal{H}^{\mathrm{S}}$，记 g_V 为式 (3.6) 中定义的非分歧分裂基变换 $g_V=\otimes_{v\in\mathrm{S}^\circ}\mathrm{BC}_{V,v}(g)$。它属于$\otimes_{v\in\mathrm{S}^\circ}\mathcal{H}(\mathrm{U}_V(F_v)K_{V,v})$。那么，函数 f_+*g 和 $f_{V,+}*g_V$（其中我们在第一个变量上作用卷积）仍满足定理 6.3 的要求。根据定义，我们有

$$J_{V,\Pi}(m_V*(f_{V,+}*g_V),\lambda)=J_{V,\Pi}(m_V*f_{V,+},\lambda)\widehat{g}(\Pi_{\lambda,\mathrm{S}^\circ}),$$

其中 $\widehat{g}(\Pi_{\lambda,\ \mathrm{S}^\circ})$ 是 g 在非分歧表示$\Pi_{\lambda,\ \mathrm{S}^\circ}$ 上作用的标量。因此，若令

$$h:\lambda\in i\mathfrak{a}_P^{L_\pi,*}\mapsto I_{\Pi_\lambda}(m*f_+)-|S_\Pi|^{-1}\sum_{V\in\mathcal{H}^{\mathrm{S}}} J_{V,\Pi}(m_V*f_{V,+},\lambda),$$

我们看到，(6.12) 可写为

$$\int_{i\mathfrak{a}_P^{L_\pi,*}} h(\lambda)\widehat{g}(\Pi_{\lambda,\mathrm{S}^\circ})\mathrm{d}\lambda=0. \tag{6.13}$$

$G(F_{S^\circ})$ 的非分歧酉对偶相对于由萨塔克同构从 $T(F_{S^\circ})$ 的非分歧特征空间诱导的拓扑是紧的（参见 [Tad88]）；根据 Stone–Weierstrass 定理，子空间 $\{\widehat{g} \mid g \in \mathcal{A}_{S^\circ}\}$ 在其连续函数空间中稠密。由于 h 绝对可积，且 $\mathcal{T}_{S^\circ}$ 的纤维一致有界，通过在紧集上截断 (6.13)，我们看到对几乎所有 $\lambda \in i\mathfrak{a}^{L_\pi,*}_P$ 均有

$$\sum_{\mu \in \mathcal{T}_{S^\circ}^{-1}(\{\Pi_{\lambda,S^\circ}\})} h(\mu) = 0.$$

由 h 的连续性可知，这对所有 λ 都成立；并且根据我们对 S° 的选择，在 λ_0 处，它化简为 $h(\lambda_0) = 0$。此外，由引理 6.6 和引理 6.7，我们有 $I_{\Pi_{\lambda_0}}(m * f_+) = I_{\Pi_{\lambda_0}}(f_+)$ 以及 $J_{V,\Pi}(m_V * f_{V,+}, \lambda_0) = J_{V,\Pi}(f_{V,+}, \lambda_0)$。我们假设 λ_0 处于一般位置，由连续性即可完成证明。□

7. Proof of the Gan–Gross–Prasad conjecture: Eisenstein case

本章中，我们证明定理 1.5 中关于 (U_V, U'_V, μ)-正则 Eisenstein 级数的 GGP 猜想和 Ichino–Ikeda 猜想。

7.1. Gan– n–Gross–Prasad 猜想：正则厄米特 Arthur 参数 s.

7.1.1. 结果陈述。设 $\Pi = I_P^G \pi$ 是一个 (G, H, μ)-正则厄米特 Arthur 参数，并设 $\lambda \in i\mathfrak{a}^{L_\pi,*}_P = i\mathfrak{a}^*_\Pi$。我们需要证明的结论如下。

定理 7.1。以下各项等价：

(1) $L(\frac{1}{2}, \Pi_\lambda \otimes \mu) \neq 0$; (2) 存在 $V \in \mathcal{H}$、一个标准抛物子群 $Q \subset U_V$ 以及 $\sigma \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(M_Q)$，使得 Π 是 (Q, σ) 的弱基变换，并且傅里叶–雅可比周期 $\mathcal{P}_{U'_V}(\cdot, \lambda)$ 在 $\mathcal{A}_{Q,\sigma}(U_V) \otimes \omega^\vee$ 上不恒等于零。

这里，$\mathcal{P}_{U'_V}(\cdot, \lambda)$ 是命题 5.2 中定义的正则化傅里叶–雅可比周期。证明可由定理 6.5 中进行的迹公式比较得出。

7.1.2. 定理 7.1 的一种改述。由连续性可知，式 (4.18) 中定义的相对特征 I_{Π_λ} 非零，当且仅当它在纯张量上非零；而这又当且仅当泽塔函数 $Z(\cdot, \cdot, \mu, 0)$ 和 β_η 分别在 $\Pi_\lambda \otimes \mathcal{S}(\mathbb{A}_E^n)$ 和 $\mathcal{W}(\Pi_\lambda, \psi_N)$ 上非零。根据 [JPSS83] 和 [Jac04]，$Z(\cdot, \cdot, \mu, 0)$ 非零，当且仅当 $L(\frac{1}{2}, \overline{\Pi}_\lambda \otimes \mu) \neq 0$。根据 [GK75], [Jac10、命题 5] 和 [Kem15]，β_η 在 $\mathcal{W}(\Pi_\lambda, \psi_N)$ 上总是非零。

—

在酉侧，令 $V \in \mathcal{H}$。令 Q 为 U_V 的标准抛物子群，并令 $\sigma \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(M_Q)$。假设 Π 是 (Q, σ) 的弱基变换。由 (5.7) 可知，$J_{Q,\sigma}(\cdot, bc(\lambda))$ 非零，当且仅当周期 $\mathcal{P}_{U'_V}(\cdot, \cdot, bc(\lambda))$ 在 $\mathcal{A}_{Q,\sigma}(U_V) \otimes \mathcal{S}(Y^\vee(\mathbb{A}))$ 上非零。因此，定理 7.1 等价于以下两个陈述。

（A）分布 I_{Π_λ} 非零。

（B）存在一个 V、U_V 的抛物子群 Q 以及 $\sigma \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(M_Q)$，使得 Π 是（Q，σ）的弱基变换，并且 $J_{Q,\sigma}(\cdot,\ bc(\lambda))$ 非零。

7.1.3. $(A) \implies (B)$的证明。设 S 是一个足够大的有限个处集合，包含阿基米德处和分歧处。对每个 $v \in \mathrm{S}\backslash V_F$，$\infty$ 取 $J_v \subset G(F_v)$ 为开紧子群；对每个 $v \notin \mathrm{S}$，令 J_v 为 $G(F_v)$ 的极大开紧子群。假设I_{Π_λ} 在 $\mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))^J$ 上非零（这意味着 Π_λ 有非零的 J-不变向量）。由于 I_{Π_λ}连续，根据非阿基米德情形下迁移的存在性及其在阿基米德情形下的逼近（定理 6.1），再结合基本引理（定理 6.2），通过扩大 S 并缩小 J，我们可以选取 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))^J$ 以及一族 $f_{V,+} \in \mathcal{S}(G_{V,+}(\mathbb{A}))^{J_V}$，使其满足定理 6.5 的假设，并且 $I_{\Pi_\lambda}(f_+) \neq 0$。由定理 6.5 中整体相对迹公式的比较，即得所求结论。

7.1.4. $(B) \implies (A)$的证明。按前文选取 S，$V \in \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$，$J'_{V,v} \subset \mathrm{U}_V(F_v)$ 为一个开紧子群，Q 为 U_V，$\sigma \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(M_Q)^{J_V}$ 的一个标准抛物子群，并且$g_{V,+} = g_V \otimes \phi_1 \otimes \phi_2 \in \mathcal{S}(G_{V,+}(\mathbb{A})^{J_V}$使得由 (M_Q,σ) 表示的尖点数据属于 $\mathfrak{X}_\Pi(\mathrm{U}_V)$，且 $J_{Q,\sigma}(g_{V,+}, bc(\lambda)) \neq 0$。令 $f_{V,+} = g_V * g_V^\vee \otimes \phi_1 \otimes \phi_1$。对于 $\mathfrak{X}_\Pi(\mathrm{U}_V)$ 中的所有配对 (Q',σ')，我们得到 $J_{Q',\sigma'}(f_{V,+}, bc(\lambda)) \geq 0$，此外$J_{Q,\sigma}(f_{V,+}, bc(\lambda)) > 0$。由此得到 $J_{V,\Pi}(f_{V,+},\lambda) > 0$。对于不等于 V 的 $V' \in \mathcal{H}^{\mathrm{S}}$，令 $f_{V',+} = 0$。于是有

$$\sum_{V' \in \mathcal{H}^{\mathrm{S}}} J_{V',\Pi}(f_{V',+},\lambda) > 0.$$

由于左端是连续的，借助非阿基米德迁移的存在性、光滑迁移的逼近（定理 6.1）以及基本引理（定理 6.2），我们可以假设存在一个 J 的层 G 和 $f_+ \in \mathcal{S}(G_+(\mathbb{A}))^J$，使得 f_+ 以及（$f_{V',+}$）满足定理 6.5 的假设，且 $\sum_{V' \in \mathcal{H}^{\mathrm{S}}} J_{V',\Pi}(f_{V',+},\lambda) \neq 0$。现在再次由定理 6.5中整体相对迹公式的比较即可得到结论。

7.2. 正则厄米特 Arthur 参数的 Ichino–Ikeda 猜想。

7.2.1. 结果陈述。固定斜厄米空间 V。令 Q 为 U_V 的一个标准抛物子群，并令 $\sigma \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(M_Q)$。我们将其分解为局部分量 $\sigma = \otimes'_v \sigma_v$，并假设所有 σ_v 均为温和的。对任意 $\lambda \in i\mathfrak{a}_Q^*$，令 $\Sigma_\lambda = I_Q^{\mathrm{U}_V}\sigma_\lambda$，于是对每个 v，局部分量$\Sigma_{\lambda,v}$ 都是温和的。

我们假设 (Q,σ) 存在一个弱基变换 Π，它是一个 (G,H,μ)-正则厄米阿瑟参数。

设 $\mathrm{As}^{n,n} = \mathrm{As}^{(-1)^n} \oplus \mathrm{As}^{(-1)^n}$。考虑全局 L 因子

$$\mathcal{L}(s,\Sigma_\lambda) = (s-\frac{1}{2})^{-\dim \mathfrak{a}_\Pi^*} \frac{L(s,\Pi_\lambda \otimes \overline{\mu})}{L(s+\frac{1}{2},\Pi_\lambda,\mathrm{As}^{n,n})},$$

注 7.2。 若 π_1 和 π_2 分别是 $G_{n_1}(\mathbb{A})$ 和 $G_{n_2}(\mathbb{A})$ 的不可约自守表示，且满足 $n_1+n_2=n$；若 P 是 G_n 的标准抛物子群，其 Levi 因子为$G_{n_1}\times G_{n_2}$，则有诱导公式

$$L(s, I_P^{G_n}(\pi_1\boxtimes\pi_2), \mathrm{As}^{(-1)^n}) = L(s,\pi_1\times\pi_2^c)L(s,\pi_1,\mathrm{As}^{(-1)^n})L(s,\pi_2,\mathrm{As}^{(-1)^n}). \tag{7.1}$$

根据 [BPCZ22，第4.1节，若 π 是一个与 π^*不同构的自守尖点表示，则 $L(s,\pi,\mathrm{As}^{(-1)^n})$在 $s=1$处正则。此外，若 Π_0 是 G_{n_0}的一个离散厄米特 Arthur 参数，且 $n-n_0$为偶数，则对（7.1）作归纳并应用注3.1可知， $L(s,\Pi_0,\mathrm{As}^{(-1)^n})$在 $s=1$处也正则。因此，关于厄米特 Arthur 参数 Π 的假设意味着，亚纯函数 $L(s,\Pi_\lambda,\mathrm{As}^{n,n})$在 $s=1$处有$\mathfrak{a}_\Pi^*$ 维的极点。特别地，$\mathcal{L}(s,\Sigma_\lambda)$在$s=\frac{1}{2}$处全纯。

–

我们将相应的局部 L因子记为 $\mathcal{L}(s,\Sigma_{\lambda,v})$，因此当 $\Re(s)$足够大时，有

$$\mathcal{L}(s,\Sigma_\lambda) = (s-\frac{1}{2})^{-\dim\mathfrak{a}_\Pi^*}\prod_{v\in V_F}\mathcal{L}(s,\Sigma_{\lambda,v}),$$

由于 $\Sigma_{\lambda,v}$是温和的， $\mathcal{L}(s,\Sigma_{\lambda,v})$ 在 $s=\frac{1}{2}$ 处既无极点也无零点。 –

设 v 是 F 的一个赋值。在 §6.2.2 中，我们在 Σ_λ 上引入了一个局部周期 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}_V',v}$， $v\otimes\omega_v^\vee$。它取决于 $\mathrm{U}_V'(F_v)$ 上测度的选取，以及 $\Sigma_{\lambda,v}$ 和 $\omega_v^\vee$ 上内积的选取。我们使用 §3.3 中定义的测度 $\mathrm{d}g_v$。注意，$\mathrm{d}g=(\Delta_{\mathbb{G}}^*)^{-1}\prod_v\Delta_{\mathbb{G},v}\mathrm{d}g_v$。对于 $\Sigma_{\lambda,v}$ 上的内积，我们采用由 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{Q,\mathrm{Pet}}$ 的一个分解所得到的内积。对于 $\omega_v^\vee$ 上的内积，我们采用 $\omega^\vee$ 上内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ 的一个分解，该内积由使用玉河测度对 $Y^\vee(\mathbb{A})$ 积分给出。现在，我们对 $\varphi_v\in\Sigma_{\lambda,v}$ 和 $\phi_v\in\omega_v^\vee$ 定义局部归一化周期

$$\mathcal{P}^\sharp_{\mathrm{U}_V',v}(\varphi_v,\phi_v,\lambda) := \mathcal{L}(\frac{1}{2},\Sigma_{\lambda,v})^{-1}\mathcal{P}_{\mathrm{U}_V',v}(\varphi_v,\phi_v,\lambda).$$

我们所证明的 Ichino–Ikeda 猜想版本如下。

定理 7.3。 令 Π 以及$(Q,\ \sigma)$ 如上。对于 $\lambda\in i\mathfrak{a}_\Pi^*$ 以及每个非零且可分解的$\varphi=\otimes_v'\varphi_v\in\mathcal{A}_{Q,\ \sigma}(\mathrm{U}_V)$ 和 $\phi=\otimes_v'\phi_v\in\omega^\vee$，我们有

$$|\mathcal{P}_{\mathrm{U}_V'}(\varphi,\phi,\lambda)|^2 = |S_\Pi|^{-1}\mathcal{L}(\frac{1}{2},\Sigma_\lambda)\prod_v\mathcal{P}^\sharp_{\mathrm{U}_V',v}(\varphi_v,\phi_v,\lambda). \tag{7.2}$$

注 7.4。 由非分歧 Ichino–Ikeda 猜想 [Xue16，命题 1.11]可知，右端中的几乎所有因子都等于 1。

证明再次基于定理 6.5中所进行的迹公式的比较。

7.2.2. 相对特征标在 G-侧的分解。令 $\varphi\in\Pi$和 $\lambda\in i\mathfrak{a}_P^*$。写作 $W^\psi(E(\varphi,\ \lambda))=\otimes_v W_v$，其中 $W_v\in\mathcal{W}(\Pi_{\lambda,\ v},\ \psi_{N,\ v})$ 满足 $W_v(1)=1$，对几乎所有 v均成立。回想一下，我们已经装备了

这些局部惠特克空间上的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{Whitt},v}$ 见 §6.2.1。根据 [BPCZ22，定理 8.1.2，1], 存在 S 这是 F 的有限赋值集合，使得

$$\langle\varphi,\varphi\rangle_{P,\mathrm{Pet}}=(\Delta_G^{\mathsf{S},*})^{-1}L^{\mathsf{S},*}(1,\Pi_\lambda,\mathrm{Ad})\prod_{v\in\mathsf{S}}\langle W_v,W_v\rangle_{\mathrm{Whitt},v}.$$

此外，适当扩大 S 后，根据 [Zha14b 第 3] and [JS81], 节的非分歧计算以及 [Fli88], ，对于 $\Phi=\otimes_v\Phi_v\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_{E,n})$，我们有

$$Z(W^\psi(E(\varphi,\lambda)),\Phi,\overline{\mu},0)=(\Delta_G^{\mathsf{S},*})^{-1}(\Delta_H^{\mathsf{S},*})^{-1}L^{\mathsf{S}}(\frac{1}{2},\Pi_\lambda\otimes\overline{\mu})\prod_{v\in\mathsf{S}}Z_v(W_v,\Phi_v,\overline{\mu},0),$$
$$\beta_\eta(W^\psi(E(\varphi,\lambda)))=(\Delta_{G'}^{\mathsf{S},*})^{-1}L^{\mathsf{S},*}(1,\Pi_\lambda,\mathrm{As}^{n+1,n+1})\prod_{v\in\mathsf{S}}\beta_{\eta,v}(W_v).$$

由 L 函数 $L(s,\Pi_\lambda,$ 伴随表示$)=L(s,\Pi_\lambda,\mathrm{As}^{n+1,n+1})L(s,\Pi_\lambda,\mathrm{As}^{n,n})$ 的相等性，以及 (6.3) 中局部球特征的定义可知，对于可分解测试函数$f_+=(\Delta^{\mathsf{S}}_{H^*},\Delta^{\mathsf{S}}_{G'})\prod_{v\in\mathsf{S}}f_{+,v}\times\prod_{v\notin\mathsf{S}}1_{G_+}(\mathcal{O}_v)$，我们有

$$I_{\Pi_\lambda}(f_+)=\frac{L^{\mathsf{S}}(\frac{1}{2},\Pi_\lambda\otimes\overline{\mu})}{L^{\mathsf{S},*}(1,\Pi_\lambda,\mathrm{As}^{n,n})}\prod_{v\in\mathsf{S}}I_{\Pi_{\lambda,v}}(f_{+,v}).\tag{7.3}$$

7.2.3. 酉群上球特征的非分歧计算。 适当扩大S后，根据非分歧局部 Ichino–Ikeda 猜想 [Xue16, 命题 1.1.1], 对于 $v\notin\mathsf{S}$ 且 $f_{V,+,v}=f_{V,v}\otimes\phi_{1,v}\otimes\phi_{2,v}=1_{G_{V,+}(\mathcal{O}_{F,v})}$，我们有

$$J_{\Sigma_{\lambda,v}}(f_{V,+,v})=\Delta^{-2}_{\mathrm{U}(V),v}\frac{L(\frac{1}{2},\Pi_{\lambda,v}\otimes\overline{\mu})}{L(1,\Pi_{\lambda,v},\mathrm{As}^{n,n})}.\tag{7.4}$$

注意，平方因子 $\Delta^{-2}{}_{\mathrm{U}(V)\,v}$ 源于以下事实：若 φ° 是 $\Sigma_{\lambda,v}$中的球向量，则根据我们选取测度的方式，即令 $\mathrm{vol}(\mathrm{U}_V(\mathcal{O}_v),\mathrm{d}g_v)=\Delta^{-2}{}_{\mathrm{U}(V)\,v}$，有 $\Sigma_{\lambda,v}(f_{V,v})\varphi^\circ=\Delta^{-2}{}_{\mathrm{U}(V)\,v}\varphi^\circ$。

7.2.4. 证明结束。若存在一个赋值 $v\in\mathsf{S}$，使得 $\Sigma_{\lambda,v}$ 没有任何非零的连续 $\mathrm{U}'_V(F_v)$-不变泛函，那么 (7.2) 的两边自动为零。现在假设情况并非如此，即对所有 v，都有 $\Sigma_{\lambda,v}\in\mathrm{Temp}^{\mathrm{U}'_V}(\mathrm{U}_V(F_v))$。由 [Xue16, 命题 1.1.1] 可知，分布的乘积 $\prod_{v\in\mathsf{S}}J_{\Sigma_{\lambda,v}}$ 不恒等于零。根据非分歧情形的计算 (7.4), 并采用与 [Zha14b, 引理 1.7],相同的论证，定理 7.3 现等价于以下断言：对每个形如 $f_{V,+}=(\Delta^{\mathsf{S}}_{\mathrm{U}(V)})^2\prod_{v\in\mathsf{S}}f_{V,+,v}\times\prod_{v\notin\mathsf{S}}1_{G_{V,+}}(\mathcal{O}_v)$ 的可分解测试函数$f_{V,+}\in\mathcal{S}(G_{V,+}(\mathbb{A}))$，我们有

$$J_{Q,\sigma}(f_{V,+},bc(\lambda))=|S_\Pi|^{-1}\frac{L^{\mathsf{S}}(\frac{1}{2},\Pi_\lambda\otimes\overline{\mu})}{L^{\mathsf{S},*}(1,\Pi_\lambda,\mathrm{As}^{n,n})}\prod_{v\in\mathsf{S}}J_{\Sigma_{\lambda,v}}(f_{V,+,v}).\tag{7.5}$$

令 $f_{V,+}$ 如（7.5）中所述。对每个 $V'\neq V$，令 $f_{V',+}=0$。根据定理 6.1，并且由于（7.5）两边均连续，我们可以假设对所有 $v\in\mathsf{S}$，都存在 $f_{+,v}\in\mathcal{S}(G_+(F_v))$ 使得47

使得 $f_{+,v}$ 与（$f_{V',+,v}$）匹配$_{V'}$。现在令 $f_+ = (\Delta^{\mathsf{S}}, {}^*_H\Delta^{\mathsf{S}}, {}^*_{G'})\prod_{v\in\mathsf{S}} f_{+,v} \times \prod_{v\notin\mathsf{S}} 1_{G_+(\mathcal{O}_v)}$。根据定理 6.5，可得

$$\sum_{(M_{Q'},\sigma')\in\mathfrak{X}_\Pi(\mathrm{U}_V)} J_{Q',\sigma'}(f_{V,+}, bc(\lambda)) = |S_\Pi|^{-1} I_{\Pi_\lambda}(f_+). \tag{7.6}$$

根据定义，除非对每个赋值 v，傅里叶–雅可比泛函空间 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}'_V(F_v)}(I_{Q'}^{G_V}\sigma'_v\otimes\omega_v^\vee, \mathbb{C})$ 的维数为 1，否则 $J_{Q',\sigma'}$ 为零。根据 [GI16] 和 [Xue24]，提出的局部 Gan–Gross–Prasad 猜想，在每个 L-包中至多有一个元素满足这一条件。然而，由基变换与局部朗兰兹对应的相容性可知，所有由 (7.6) 得到的 $I_{Q'}^{G_V}\sigma'_v$在所有赋值 v 处都必须属于同一个 L-包。因此，这个和式中的所有项都必须消失，至多只可能留下 $J_{Q,\sigma}(f_{V,+}, bc(\lambda))$，从而 (7.6) 化为

$$J_{Q,\sigma}(f_{V,+}, bc(\lambda)) = |S_\Pi|^{-1} I_{\Pi_\lambda}(f_+). \tag{7.7}$$

根据定理 6.4，对所有赋值 v，都存在常数 $\kappa_{V,v}\in\mathbb{C}^\times$，使得 $\prod_{v\in\mathsf{S}}\kappa_{V,v}=1$，并且

$$J_{\Sigma_\lambda,v}(f_{V,+,v}) = \kappa_{V,v} I_{\Pi_{\lambda,v}}(f_{+,v}). \tag{7.8}$$

因此，(7.5)由全局等式(7.7)、分解(7.3)和局部等式(7.8)得出。至此，定理7.3的证明告一段落。

第2. 部分　正余秩下的傅里叶–雅可比周期

在第2部分，我们证明正余秩下傅里叶–雅可比周期的 GGP 猜想和 Ichino–Ikeda 猜想（定理 1.1 和1.4）。我们的主要工作是证明展开恒等式。对于局部周期，这部分工作在§9中完成；对于全局周期，则是§10的重点。最后，我们将在§11 中说明，如何将主要结果归结为第1.5定理，该定理已在第1部分证明。

8. Groups and representations

本节将精确描述任意余秩下 Gan–Gross–Prasad 猜想的设定。我们将直接沿用§3中为零余秩情形引入的记号和概念。

8.1. 傅里叶–雅可比群。

8.1.1. 斜厄米空间、酉群。 设 (V, q_V) 是 E/F 上一个 n 维非退化斜厄米空间。设 $W\subset V$ 是一个维数为 m 的子空间，满足 $n = m+2r$。我们将整数 r 称为对 $W\subset V$ 的余秩。我们还总是假设 $W^\perp$ 是分裂的。这意味着存在 $W^\perp$ 作为 E-向量空间的一组基 $\{x_i, x_i^* \mid i=1,\dots,r\}$，使得对所有 $1\le i,j\le r$，都有

$$q_V(x_i,x_j)=0,\quad q_V(x_i^*,x_j^*)=0,\quad q_V(x_i,x_j^*)=\delta_{i,j}. \tag{8.1}$$

令 $X = \mathrm{span}_E(x_1,\dots,x_r)$ 和 $X^* = \mathrm{span}_E(x_1^*,\dots,x_r^*)$，使得 $V = X\oplus W\oplus X^*$。我们还将始终假设余秩 r 大于 1。

我们将酉群 $\mathrm{U}(W)$ 视为 $\mathrm{U}(V)$ 中的子群，其中 $g \in \mathrm{U}(V)$ 在 $W^{\perp}$ 上作用为恒等变换。此外，我们定义以下乘积

$$\mathrm{U}_V := \mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(V), \quad \mathcal{U}_W := \mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(W), \quad \mathrm{U}'_V := \mathrm{U}(V) \subset \mathrm{U}_V,$$

其中最后一个嵌入是对角嵌入。

令 $P(X) = M(X)N(X)$ 为 $\mathrm{U}(V)$ 中稳定 X 的极大抛物子群，其中$M(X)$ 是稳定 X^* 的 Levi 子群，$N(X)$ 是 $P(X)$ 的幂零根。我们通过限制到 $X \oplus W$，将$M(X)$ 与 $G_r \times \mathrm{U}(W)$ 等同；这里回顾一下，$G_r = \mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_r$。我们可以将 $P(X)$ 的元素写成 $m(a)g_W n(b)n(c)$，其中 $g_W \in \mathrm{U}(W)$，$a \in \mathrm{GL}(X)$，$b \in \mathrm{Hom}(W, X)$，$c \in \mathrm{Herm}(X^*, X)$，并且

$$m(a) = \begin{pmatrix} a & & \\ & 1_W & \\ & & (a^*)^{-1} \end{pmatrix}, \quad n(b) = \begin{pmatrix} 1_X & b & -\frac{1}{2}bb^* \\ & 1_W & -b^* \\ & & 1_{X^*} \end{pmatrix}, \quad n(c) = \begin{pmatrix} 1_X & 0 & c \\ & 1_W & 0 \\ & & 1_{X^*} \end{pmatrix},$$

其中我们定义

$$\mathrm{Herm}(X^*, X) = \{c \in \mathrm{Hom}(X^*, X) \mid c^* = -c\}. \tag{8.2}$$

这里 $a^* \in \mathrm{GL}(X^*)$、$b^* \in \mathrm{Hom}(X^*, W)$ 和 $c^* \in \mathrm{Hom}(X^*, X)$ 定义为

$$q(ax, x^*)_V = q(x, a^*x^*)_V, \quad q(bv, x^*)_V = q(v, b^*x^*)_V, \quad q(cx^*, y^*)_V = q(x^*, c^*y^*)_V,$$

对于 $v \in V$、$x \in X$ 和 x^*，$y^* \in X^*$。

将 $\mathrm{U}(V)$ 中稳定 X 和 X^* 且在 W 上恒等的 $g \in \mathrm{U}(V)$ 子群，通过限制到 X 识别为 G_r。令 (T_r, B_r) 为相对于 $(x_1, \ldots, x_r)$ 的 G_r 的对角矩阵与上三角矩阵组成的标准 Borel 对。我们用 P_r 表示 G_r 的 mirabolic 子群。

对于每个 $1 \le k \le r$，我们将群 G_k 嵌入 G_r，使其成为 $\mathrm{span}_E(x_1, \ldots, x_k)$ 的自同构群。我们有标准 Borel 对 (T_k, N_k)。

8.1.2. 海森堡群、*Jacobi* 群与傅里叶–雅可比群。我们取 $\mathbb{W} = Y \oplus Y^{\vee}$ 为辛空间 $(\mathbb{W}, \mathrm{Tr}^{E/F} \circ q_V)$ 的一个极化。我们还得到一个极化 $\mathbb{V} = (X \oplus Y) \oplus (X^* \oplus Y^{\vee})$。记 $q(\cdot, \cdot)_{\mathbb{V}}$ 为 $\mathbb{V}$ 的辛配对。我们将把 X 和 X^* 视为 E-仿射空间，并将 Y 和 $Y^{\vee}$ 视为 F-仿射空间。

我们将 $S(W)$ 记为 W 的海森堡群，并将 $J(W) := S(W) \rtimes \mathrm{U}(W)$ 记为其 Jacobi 群。我们有一个单态射 $h\colon S(W) \to \mathrm{U}(V)$（例如参见 [Boi25，公式 (2.1.5.1)]），因此我们将 $S(W)$ 视为 $\mathrm{U}(V)$ 的子群。

令 U_{r-1} 和 U_r 分别为 $\mathrm{U}(V)$ 中稳定旗 $\mathrm{span}_E(x_1) \subset \mathrm{span}_E(x_1, x_2) \subset \ldots \subset \mathrm{span}_E(x_1, \ldots, x_{r-1})$ 和完整旗 $\mathrm{span}_E(x_1) \subset \ldots \subset X$ 的抛物子群的幂零根。定义傅里叶 – 雅可比群

$$\mathcal{H}_W := U_{r-1} \rtimes J(W) \subset \mathcal{U}_W,$$

其中，嵌入是嵌入 $\mathcal{H}_W \subset \mathrm{U}(V)$ 与投影 $\mathcal{H}_W \to \mathrm{U}(W)$ 的乘积。注意， $U_{r-1} \rtimes S(W) = U_r$，因此我们有另一种定义 $\mathcal{H}_W = U_r \rtimes \mathrm{U}(W)$。若将其视为通过嵌入包含于 U'_V 的子群，我们记作 $\mathcal{H}'_W$。

令 $L := \mathcal{U}_W \times G_r$。它是 $\mathrm{U}(V) \times P(X)$ 中 U_V 的 Levi 子群。定义

$$\mathcal{H}_L = \mathcal{H}_W \times N_r \subset L.$$

8.2. **Heisenberg–Weil 表示。**

8.2.1. 定义。 定义一个态射 $\lambda : U_{r-1} \to \mathbb{G}_a$，使得

$$\lambda(u) = \mathrm{Tr}_{E/F}\left(\sum_{i=1}^{r-1} q_V(u(x_{i+1}), x_i^*)\right),\ u \in U_{r-1}. \tag{8.3}$$

注意，通过共轭作用， $J(W)$ 在 U_{r-1} 上的作用在 λ 上是平凡的，因此我们可以将 λ 扩展到 $\mathcal{H}_W = U_{r-1} \rtimes J(W)$。

设 v 是 F 的一个赋值。考虑特征

$$\psi_{U,v}(h) := \psi_{E,v}(\lambda(h)), \quad h \in \mathcal{H}_W(F_v). \tag{8.4}$$

注意， U_r 包含 N_r。对于每个 $1 \le k \le r$，我们用 $\psi_{k,\,v}$ 表示 $\psi_{U,\,v}$ 在 $N_k(F_v)$ 上的限制。

我们有 §5.1.1 中定义的 $\rho^\vee_{\psi,v}$ 的 $S(W)(F_v)$ 的局部 Heisenberg 表示。我们还有 §5.1.1 中给出的 $\mathrm{U}(W)(F_v)$ 和 $\mathrm{U}(V)(F_v)$ 的魏尔表示 $\omega^\vee_{W,v}$ 和 $\omega^\vee_{V,v}$。第一个实现于 $\mathcal{S}(Y^\vee(F_v))$ 上，第二个实现于 $\mathcal{S}(X^*(E_v) \oplus Y^\vee(F_v))$ 上。它们都是相对于对 $(\psi_v^{-1}, \mu_v^{-1})$ 定义的。

我们可以按以下规则定义 $\mathcal{H}_W(F_v)$ 的表示 $\nu_v^\vee$

$$\nu_v^\vee(uhg_W) = \overline{\psi_{U,v}}(u)\rho^\vee_{\psi,v}(h)\omega^\vee_{W,v}(g_W), \quad u \in U_{r-1}(F_v), \quad g_W \in \mathrm{U}(W)(F_v), \quad h \in S(W)(F_v). \tag{8.5}$$

这是*Heisenberg–Weil* 表示，定义在 $\mathcal{H}_W(F_v)$ 上。

我们还将考虑 $\nu^\vee_{L,\,v}$ $\mathcal{H}_L(F_v)$ 的表示，其定义如下

$$\nu^\vee_{L,v} := \nu_v^\vee \otimes \psi_{r,v}. \tag{8.6}$$

8.2.2. 混合模型中的显式公式。设 $\phi \in \nu_v^\vee$。由 [Kud94], 对于 $y_0^\vee \in Y^\vee(F_v)$， $y \in Y(F_v)$， $y^\vee \in Y^\vee(F_v)$ 以及 $z \in F_v$ 我们有

$$\rho^\vee_{\psi,v}((y + y^\vee, z))\phi(y_0^\vee) = \overline{\psi_v}\left(z + q(y_0^\vee, y)_{\mathbb{W}} + \frac{1}{2}q(y^\vee, y)_{\mathbb{W}}\right)\phi(y_0^\vee + y^\vee). \tag{8.7}$$

令 $\Phi \in \omega^\vee_{V,\,v}$。我们将 Φ 视为 $X^*(F_v)$ 上取值于 $\omega^\vee_{W\text{的施瓦茨函数},\,v}$。若 $a \in G_r(F_v)$，则记 $\mu_v(a)$ 为 $\mu_v(\det a)$。令 $x^* \in X^*(F_v)$。取与 §8.1.1中相同的元素，我们有以下公式

$$\omega_{V,v}^{\vee}(g_W)\Phi(x^*) = \omega_{W,v}^{\vee}(g_W)(\Phi(x^*)), \tag{8.8}$$

$$\omega_{V,v}^{\vee}(m(a))\Phi(x^*) = \overline{\mu_v}(a)\,|\det a|^{\frac{1}{2}}\,\Phi(a^*x^*), \tag{8.9}$$

$$\omega_{V,v}^{\vee}(n(b))\Phi(x^*) = \rho_{\psi,v}^{\vee}((b^*x^*,0))(\Phi(x^*)), \tag{8.10}$$

$$\omega_{V,v}^{\vee}(n(c))\Phi(x^*) = \overline{\psi}_{E,v}(q(cx^*,x^*)_V)\Phi(x^*). \tag{8.11}$$

考虑映射

$$\Phi \in \omega_{V,v}^{\vee} \mapsto \Phi_{Y^\vee} := \Phi(x_r^*) \in \nu_v^{\vee}. \tag{8.12}$$

利用公式（8.7）至（8.11），我们看到，对于 n_r、$n_r' \in N_r$（F_v） $n \in N$（X）（F_v） $g_W \in$U（W）（F_v），以及 $g_V \in$ U（V）（F_v），有如下关系

$$\psi_{r,v}(n_r')\overline{\psi}_{r,v}(n_r)(\omega_{V,v}^{\vee}(n_r' n g_W g_V)\Phi)_{Y^\vee} = \nu_{L,v}^{\vee}(n_r n g_W, n_r')(\omega_{V,v}^{\vee}(g_V)\Phi)_{Y^\vee}. \tag{8.13}$$

8.2.3. 自守海森堡–韦伊表示。 如同§5.1.2中一样，通过取限制张量积，我们得到自守表示 $\omega_V^{\vee}$、$\omega_W^{\vee}$、 $\nu^\vee$和 $\nu_L^{\vee}$，它们分别属于 U（V）（$\mathbb{A}$）、U（W）（$\mathbb{A}$）、 $\mathcal{H}_W$（$\mathbb{A}$）和 $\mathcal{H}_L$（$\mathbb{A}$）。我们还有自守特征 ψ_U 和 ψ_r。

注8.1。在分裂处 v，表示$\omega_{V,\ v}^{\vee}$实现于 $\mathcal{S}$（X_0^*（E_v）$\oplus Y^\vee$（F_v））$= \mathcal{S}$（F_v^n）上，其作用如§8.2.2中所述；这源于我们对整体极化的选择。特别是，它并非由 $\mu\,|\cdot|^{1/2}$ 扭曲的通常左正则表示，例如 [GGP12第 13]节中所考察的情形。

8.3. **测度**。 对于我们迄今为止考虑过的每个代数群 $\mathbb{G}$ 上 F，我们令 $\mathrm{d}g$ 为 $\mathbb{G}(\mathbb{A})$ 上在第 2.2.4 小节中定义的玉河测度。我们固定一个分解 $\mathrm{d}g = \prod_v \mathrm{d}g_v$，使得在$\mathbb{G}(\mathbb{A}$上，对于几乎所有 v， $\mathbb{G}($ $\mathcal{O}_v$的体积为 1。请注意，这与 §2.2.4 和 §3.3 中所作的选择不同，但对本节而言更为方便（尤其是§9.3 的非分歧计算）。

对于幺幂群，采用特定的局部测度 $\mathrm{d}g_v$ 是很方便的。对于 E 的每个赋值 v，我们令 $\mathrm{d}_{\psi_v}x_v$ 为 E_v 上关于 $\psi_{E,\ v}$ 自对偶的唯一哈尔测度。这给出 $\mathbb{A}_E$ 上的测度 $\mathrm{d}x = \prod_v \mathrm{d}_{\psi_v}x_v$。更一般地，对于每个 k，我们在 $N_k(F_v)$ 上赋予乘积测度

$$\mathrm{d}n_v = \prod_{1\le i<j\le k} d_{\psi_v} n_{i,j},$$

并令 $\mathrm{d}n = \prod_v \mathrm{d}n_v$。众所周知，对于几乎所有 v，$\mathrm{d}n_v$ 赋予 $N_k(\mathcal{O}_v)$ 的体积为 1，且 $\mathrm{d}n$ 确实是 N_k $(\mathbb{A})$ 上的玉河测度。

对于每个 k，测度 $\mathrm{d}_{\psi_v}g_v$ 在 $G_k(F_v$上的测度取自§2.2.4，可以取为

$$\mathrm{d}_{\psi_v}g_v := \frac{\prod_{1\le i,j\le k}\mathrm{d}_{\psi_v}g_{i,j}}{|\det g|_v^k}.$$

我们将 $\upsilon(G_{k,\ v})\ >0$ 记为哈尔测度 $\mathrm{d}g_v(\mathrm{d}^{\psi_v}g_v)^{-1}$的商。由 (2.1) 可知，对于 F 的任意充分大的有限个赋值集合 S，我们有 $\upsilon(G_{k,\ v})=\Delta_{G_k,\ v}$ 对于 $v\notin \mathsf{S}$，且

$$\prod_{v\in \mathsf{S}}\upsilon(G_{k,v})=(\Delta_{G_k}^{\mathsf{S},*})^{-1}. \tag{8.14}$$

通过对 $X^*(\mathbb{A})\ \oplus Y^\vee(\mathbb{A})$ 和 $Y^\vee(\mathbb{A})$ 沿 $\omega_V^\vee$和 $\nu^\vee$ 相对于玉河测度进行积分，我们在 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$上得到不变内积，并将二者都记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$。对于每个赋值 v，我们都有局部版本 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2,v}$。

9. Local Fourier–Jacobi periods

本节首先讨论傅里叶–雅可比周期的局部理论 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W,v}$。这将 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V,v}$ 从 §6.2.2 中的周期推广到正余秩情形。在该情形下，矩阵系数的朴素积分不收敛，因此需要更精细的构造。我们还证明了一些展开结果，以便将 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W,v}$ 与其零余秩类比 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V,v}$联系起来。特别地，我们证明了定理1.3的温和交织性质。

下文固定 v 一个 F的赋值。由于本节始终处于局部情形，我们在本节中省略赋值 v，因此 E/F 或者是局部域的二次扩张（非分裂情形），或者是 $E=F\times F$（分裂情形）。此外，若 $\mathbb{G}$ 是 F上的代数群，我们将简写 $\mathbb{G}$ 表示 $\mathbb{G}(F)$。

9.1. 傅里叶–雅可比周期的定义。

9.1.1. 温和函数空间。设 $\mathbb{G}$ 是定义在 F 上的一个连通约化群。设 ς 是 $\mathbb{G}$ 上的一个（类）对数高度函数，如 [BP20，第 1.2] 节所述。注意，如果 $\mathbb{G}'\leq\mathbb{G}$，我们可以取 $\varsigma|_{\mathbb{G}'}$ 作为 $\mathbb{G}'$ 上的对数高度函数，因此记号中不再注明群。记 $\Xi^{\mathbb{G}}$ 为 $\mathbb{G}$ 上的 Harish-Chandra 特殊球函数，见 [Wal03，第二部分第 II.1] 节。令 $\mathcal{C}^w(\mathbb{G})$ 表示 $\mathbb{G}$ 上的温和函数空间（见 [BP21b，第 2.4] 节）。本文不使用其精确定义，但对于所有 $f\in\mathcal{C}^w(\mathbb{G})$，存在 $d>0$ 使得

$$|f(g)|\ll\Xi^{\mathbb{G}}(g)\varsigma(g)^d,\quad g\in\mathbb{G}; \tag{9.1}$$

拓扑向量空间 $\mathcal{C}^w(\mathbb{G})$ 包含 $C_c^\infty(\mathbb{G})$ 作为稠密子集。

根据 [CHH88], , 已知若 $\pi\in\mathrm{Temp}(\mathbb{G})$，则 π 的矩阵系数属于 $\mathcal{C}^w(\mathbb{G})$。

9.1.2. 估计。 本节汇总一些关于 Weil 表示以及 Harish-Chandra 特殊球面函数的矩阵系数的估计。

引理 9.1。 我们有以下断言。

(1) 存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$\left|\langle\omega_V^\vee(g_V)\Phi_1,\Phi_2\rangle_{L^2}\right|\ll_{\Phi_1,\Phi_2}e^{-\varepsilon\varsigma(g_V)},\quad g_V\in\mathrm{U}(V),\quad \Phi_1,\Phi_2\in\omega_V^\vee,$$

(2) 存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$\left|\langle \nu^\vee(g_W u)\phi_1,\phi_2\rangle_{L^2}\right| \ll_{\phi_1,\phi_2} e^{-\varepsilon\varsigma(g_W)},\quad u\in U_r,\quad g_W\in \mathrm{U}(W),\quad \phi_1,\phi_2\in\nu^\vee.$$

(3) 对于任意非退化斜厄米空间 V_0 以及任意 $\varepsilon>0$，我们有 ve

$$\int_{\mathrm{U}(V_0)} \Xi^{\mathrm{U}(V_0)\times \mathrm{U}(V_0)}(h)e^{-\varepsilon\varsigma(h)}\mathrm{d}h<\infty.$$

(4) 对于所有 $\delta>0$，存在 $\varepsilon>0$，使得对任意 ϕ_1、$\phi_2\in\nu^\vee$，我们有

$$\int_{\mathcal{H}_W} \Xi^{\mathcal{U}_W}(h)e^{\varepsilon\varsigma(h)}\left|\langle \nu^\vee(h)\phi_1,\phi_2\rangle_{L^2}\right|(1+|\lambda(h)|)^{-\delta}\mathrm{d}h<\infty,$$

其中我们回顾 λ 定义于 (8.3)。

证明。我们将同时证明第一点和第二点。根据（8.7），Heisenberg 表示通过平移和乘以酉特征标作用，因此只需证明以下结论：若V_0是任意一个维数为 n_0 且带有极化 $\mathbb{V}_0=Y_0\oplus Y_0^\vee$的非退化斜厄米空间，则存在 $\varepsilon>0$，使得对所有 Φ_1、$\Phi_2\in\mathcal{S}(Y_0^\vee)$ 都有

$$\left|\langle \omega_{V_0}^\vee(g)\Phi_1,\Phi_2(\cdot+y^\vee)\rangle_{L^2}\right|\ll e^{-\varepsilon\varsigma(g)},\quad g\in\mathrm{U}(V_0),\quad y^\vee\in Y_0^\vee, \tag{9.2}$$

其中 $\omega_{V_0}^\vee$ 是与（V_0）关联的 $\mathrm{U}(\psi^{-1},\ \mu^{-1})$ 的魏尔表示。注意，若能证明（9.2）对某个极化 $\mathbb{V}_0=Y_0\oplus Y_0^\vee$成立，则它对所有极化都成立。事实上，改变拉格朗日子空间会诱导一个$\omega_{V_0}^\vee$ 的同构，而该同构也是 Heisenberg 表示的同构。由于后者不可约，内积至多相差一个非零常数。

首先假设 $E=F\times F$，使得 $\mathrm{U}(V_0)=\mathrm{GL}_{n_0}$。令 $V_0\cong E^{n_0}=F^{n_0}\times F^{n_0}$并取 $Y_0^\vee=\{0\}\times F^{n_0}$。由嘉当分解，只需证明 (9.2) 对$\alpha=\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n_0})$ 在 $|\alpha_1|\le|\alpha_s|\le 1\le|\alpha_{s+1}|\le\ldots\le|\alpha_{n_0}|$时成立。但我们有

$$\langle \omega_{V_0}^\vee(\alpha)\Phi_1,\Phi_2(\cdot+y^\vee)\rangle_{L^2}=\overline{\mu}(\alpha)\,|\det\alpha|^{\frac12}\int_{F^{n_0}}\Phi_1(\alpha^* x^\vee)\overline{\Phi_2(y_0^\vee+x^\vee)}\mathrm{d}x^\vee.$$

将任意 $x^\vee$ 在典范基下的坐标记作 (x_i)，将 $y^\vee$ 的坐标记作 (y_i)。取 $d>0$ 使得 $\int_F \frac{1}{1+|x|^d}\mathrm{d}x<\infty$，并令 $P=\prod_i(1+|x_i|^d)$ 视为定义在 $Y_0^\vee$ 上的多项式函数。于是 $\sup_{x^\vee}|\Phi_i(x^\vee)P(x^\vee)|<\infty$，且

$$\left|\langle \omega_{V_0}^\vee(\alpha)\Phi_1,\Phi_2(\cdot+y_0^\vee)\rangle_{L^2}\right|\ll\prod_{i=1}^{s}|\alpha_i|^{\frac12}\prod_{i=s+1}^{n'}|\alpha_i|^{-\frac12}\prod_{i=1}^{s}\int_F\frac{1}{1+|x+y_i|^d}\mathrm{d}x\prod_{i=s+1}^{n'}\int_F\frac{1}{1+|x|^d}\mathrm{d}x.$$

Th积分的乘积有限，且不依赖于 $y_0^\vee$，因此 $\varepsilon=\frac12$ 有效 .

在 E/F 是二次扩张的情形下，设 $(z_1,\dots,z_{r_0},z_1^*,\dots,z_{r_0}^*)$ 是 V_0 的极大双曲族，即满足 $q(z_i,z_j)_{V_0}=q(z_i^*,z_j^*)_{V_0}=0$ 且 $q(z_i,z_j^*)_{V_0}=\delta_{i,j}$ 的族，并令 $Z:=\mathrm{span}_E(z_1,\dots,z_{r_0})$ 和 $Z^*=\mathrm{span}_E(z_1^*,\dots,z_{r_0}^*)$。由嘉当分解，只需证明对于 $\alpha=\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_{r_0})\in\mathrm{GL}(Z)\subset\mathrm{U}(V_0)$，且 $|\alpha_1|\le\ldots\le|\alpha_{r_0}|\le 1$时，(9.2) 成立。令 $Y_1\oplus Y_1^\vee$ 为 $(Z\oplus Z^*)^\perp$ 的一个极化。我们取极化 53

$(Z \oplus Y_1) \oplus (Z^* \oplus Y_1^\vee)$ 的 $\mathbb{V}_0$，并使用 (8.9) 中给出的混合模型描述，采用与分裂情形相同的证明。

第三点见 [Wal03，引理 II.1。5]在 p-adic 情形以及 [Var77，命题 31] 在阿基米德情形。

最后，我们证明第四点。证明过程与 [BP20，引理 6.5.1 (iii)], 非常接近，因此我们只回顾主要步骤。由于 $\varsigma(g_W u) \ll \varsigma(g_W) + \varsigma(u)$ 对于 $g_W \in \mathrm{U}(W)$ 以及 $u \in U_r$，由 (2) 和 (3) 应用于 $V_0 = W$ 以及等式 $\mathcal{H}_W = U_r \rtimes \mathrm{U}(W)$，只需证明对于所有 $\delta > 0$和 $\varepsilon_0 > 0$，存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$I^0_{\varepsilon,\delta}(g_W) := \int_{U_r} \Xi^{\mathcal{U}_W}(u g_W) e^{\varepsilon \varsigma(u)} (1 + |\lambda(u)|)^{-\delta} \mathrm{d}u$$

对所有 $g_W \in \mathrm{U}(W)$ 都绝对收敛，并且满足

$$I^0_{\varepsilon,\delta}(g_W) \ll \Xi^{\mathrm{U}(W)\times\mathrm{U}(W)}(g_W) e^{\varepsilon_0 \varsigma(g_W)}.$$

[BP20，引理 6.5.1 (iii)] 中的证明引入了两个中间积分，对于 $b > 0$:

$$I^0_{\varepsilon,\delta,\le b}(g_W) := \int_{U_r} 1_{\varsigma(u)\le b} \Xi^{\mathcal{U}_W}(u g_W) e^{\varepsilon \varsigma(u)} (1 + |\lambda(u)|)^{-\delta} \mathrm{d}u,$$

$$I^0_{\varepsilon,\delta,> b}(g_W) := \int_{U_r} 1_{\varsigma(u)> b} \Xi^{\mathcal{U}_W}(u g_W) e^{\varepsilon \varsigma(u)} (1 + |\lambda(u)|)^{-\delta} \mathrm{d}u.$$

关于一 h　　并且，如同所引文献的证明中一样，很容易看出存在 $d > 0$，使得　　t

$$I^0_{\varepsilon,\delta,\le b}(g_W) \ll e^{\varepsilon b} b^d \Xi^{\mathrm{U}(W)\times\mathrm{U}(W)}(g_W), \tag{9.3}$$

对所有 $\varepsilon > 0$、$b > 0$ 和 $g_W \in \mathrm{U}(W)$ 均成立。但另一方面，存在 $\alpha > 0$，使得$\Xi^{\mathcal{U}_W}(g_1 g_2)$ $\ll e^{\alpha \varsigma(g_2)} \Xi^{\mathcal{U}_W}(g_1)$ 对所有 $g_1, g_2 \in \mathcal{U}_W$ 均成立。因此

$$I^0_{\varepsilon,\delta,> b}(g_W) \ll e^{\alpha \varsigma(g_W) - \sqrt{\varepsilon} b} \int_{U_r} \Xi^{\mathcal{U}_W}(u) e^{(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon})\varsigma(u)} (1 + |\lambda(u)|)^{-\delta} \mathrm{d}u, \tag{9.4}$$

对所有 $g_W \in \mathrm{U}(W)$ 和 $b > 0$ 均成立。由[BP20，引理 B.3 可知，当 ε 足够小时，最后一个积分收敛，因为 λ 是 $\mathrm{U}(V)$ 的一个极小抛物子群的幂零根上的非退化加性特征的限制；该极小抛物子群稳定一个极大旗标，这个旗标通过用 W 中的直线补全 $\mathrm{span}_E(x_1) \subset \mathrm{span}_E(x_1, x_2)$ 而得到。现在，利用与 [BP20，引理 6.5.1 (iii)] 中相同的技巧，可得结论对足够小的 ε 成立。□

命题 9.2. 我们有以下断言。

(1) 对于每个 ϕ_1 和 $\phi_2 \in \nu^\vee$，线性形式

$$f \in C_c^\infty(\mathcal{U}_W) \mapsto \int_{\mathcal{H}_W} f(h) \langle \nu^\vee(h)\phi_1, \phi_2 \rangle_{L^2} \mathrm{d}h$$

通过连续性延拓至 $\mathcal{C}^w(\mathcal{U}_W)$。

(2) 线性形式

$$f \in C_c^\infty(G_r) \mapsto \int_{N_r} f(n_r) \psi_r(n_r) \mathrm{d}n_r$$

通过连续性延拓至 $\mathcal{C}^w(G_r)$。

证明。对于第一点，我们固定由 a 参数化的单参数子群： $t \in \mathbb{G}_m \mapsto \mathrm{diag}(t^{r-1}, t^{r-2}, \ldots, 1) \in \mathrm{GL}(X) \subset \mathrm{U}(V)$。由公式（8.7）和（8.9），对所有 $t \in F^\times$和 $h \in \mathcal{H}_W$

$$\langle \nu^\vee(a(t)ha(t)^{-1})\phi_1, \phi_2\rangle_{L^2} = \overline{\psi_U}(t\lambda(h))\langle \nu^\vee(h)\phi_1, \phi_2\rangle_{L^2}.$$

现在的证明与 [BP20，命题 7.1 中的证明完全相同。1], 使用引理 9.1(4) 代替 [BP20引理 6.5 中的 (iii)。1]。

第二点的证明与 [BP20，命题 7.1 中的证明相同。1] 这得益于 [BP20，引理 B.3。2]。 □

9.1.3. 局部傅里叶–雅可比周期。我们将其记为

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W} : f \otimes \phi_1 \otimes \phi_2 \in \mathcal{C}^w(\mathcal{U}_W) \otimes \nu^\vee \otimes \nu^\vee \to \mathbb{C}, \quad \mathcal{P}_{N_r} : f \in \mathcal{C}^w(G_r) \to \mathbb{C}$$

通过对 $\mathcal{H}_W$和 N_r上的积分延拓得到的线性形式；由命题 9.2可知这些延拓存在。第一个是傅里叶–雅可比周期，第二个是惠特克周期。

对于 ϕ_1， $\phi_2 \in \nu_L^\vee$，令

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}_L}(f \otimes \phi_1 \otimes \phi_2) := \int_{\mathcal{H}_L} f(h)\langle \nu_L^\vee(h)\phi_1, \phi_2\rangle_{L^2} \mathrm{d}h, \quad f \in C_c^\infty(L),$$

我们利用连续性将其延拓到 $\mathcal{C}^w(L)$。注意 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_L} = \mathcal{P}_{\mathcal{H}_W} \otimes \mathcal{P}_{N_r}$。

对于（$\mathbb{G}$， $\mathbb{H}$） $\in \{$（U_V， U'_V）、（$\mathcal{U}_W$， $\mathcal{H}_W$）、（L， $\mathcal{H}_L$）$\}$，若 σ 是配备不变内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$的 $\mathbb{G}$ 的光滑不可约温和表示，则对于每个 φ_1、$\varphi_2 \in \sigma$，映射c_{φ_1, φ_2}： $g \mapsto \langle \sigma(g)\varphi_1, \varphi_2\rangle$ 根据 [CHH88] 属于 $\mathcal{C}^w$（$\mathbb{G}$）。我们对 $\Phi_i \in \omega_V^\vee$、 $\nu^\vee$ 或 $\nu_L^\vee$ 记作

$$\mathcal{P}_{\mathbb{H}}(\varphi_1 \otimes \Phi_1, \varphi_2 \otimes \Phi_2) := \mathcal{P}_{\mathbb{H}}(c_{\varphi_1, \varphi_2} \otimes \Phi_1 \otimes \Phi_2). \tag{9.5}$$

若 $\varphi_1 = \varphi_2$ 和 $\Phi_1 = \Phi_2$，我们将简写 $\mathcal{P}_{\mathbb{H}}(\varphi, \Phi)$ 表示 $\mathcal{P}_{\mathbb{H}}(\varphi_1 \otimes \Phi_1, \varphi_2 \otimes \Phi_2)$。此外，对于 τ 的 G_r 的温和表示以及 $\varphi \in \tau$，我们定义惠特克周期 $\mathcal{P}_{N_r}(\varphi) := \mathcal{P}_{N_r}(c_{\varphi, \varphi})$。

9.2. **展开等式。**

9.2.1. 表示。 设 σ_V、 σ_W和 τ分别为U(V)、U(W)和 G_r的光滑不可约表示，并赋予不变内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。定义 $\sigma = \sigma_V \boxtimes \sigma_W$，它是 $\mathcal{U}_W$的一个不可约表示。对于 $s \in \mathbb{C}$，令 $\tau_s = \tau |\det|^s$和 $\Sigma_s = I_{P(X)\sigma_W \boxtimes \tau_s}^{\mathrm{U}(V)}$ 为归一化抛物诱导，并赋予其典范内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，该内积由沿$P(X)\backslash \mathrm{U}(V)$的积分给出。本节余下部分均固定使用这些表示。

9.2.2. 泛函展开。 设

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}_L} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_L}((\sigma \boxtimes \tau) \otimes \nu_L^\vee, \mathbb{C}).$$

根据 [Sun12], [GGP12]和 [LS13], 的重数一结果，我们知道 $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_L}$ 可分解为 $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_L} = \mathcal{L}_{N_r} \otimes \mathcal{L}_{\mathcal{H}_W}$其中 $\mathcal{L}_{N_r} \in \mathrm{Hom}_{N_r}(\tau, \psi_r)$ 且 $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_W} \in \overline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{H}_W}(\sigma \otimes \nu^\vee, \mathbb{C})$。

命题 9.3。 存在 $c\in\mathbb{R}$，使得对于 $\Re(s)>c$，泛函

$$\mathcal{L}_{\mathrm{U}'_V,s}:\varphi_V\otimes\varphi_s\otimes\Phi\in\sigma_V\otimes\Sigma_s\otimes\omega_V^\vee\mapsto\int_{\mathcal{H}'_W\backslash\mathrm{U}'_V}\mathcal{L}_{\mathcal{H}_L}(\sigma_V(h)\varphi_V\otimes\varphi_s(h),(\omega_V^\vee(h)\Phi)_{Y^\vee})\mathrm{d}h \tag{9.6}$$

绝对收敛。若所有表示都是温和的，我们可以取 $c=-\frac{1}{2}$。此外，对于$\Re(s)>\mathfrak{c}$，以下断言等价。

(1) 存在 φ_V、φ_W、φ_τ和 ϕ，使得 $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_L}(\varphi_V\otimes\varphi_W\otimes\varphi_\tau、\ \phi)\neq0$。
(2) 存在 φ_V、φ_s和 Φ，使得 $\mathcal{L}_{\mathrm{U}'_V,\ s}(\varphi_V\otimes\varphi_s、\ \Phi)\neq0$。

证明。 收敛性可按 [BPC25，命题 8.6.1。1] 利用 Iwasawa 分解 $\mathrm{U}'_V=T_r\mathcal{H}'_WK_V$，其中 K_V是一个极大紧子群，结合（8.9）和引理 9.1（1）和（2）即可证明。（2） $\Longrightarrow$ （1）显然成立。对于（1） $\Longrightarrow$ （2），我们注意到，对 $\Re(s)>c$，由（8.9）可得，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{U}'_V,s}(\varphi_V\otimes\varphi_s,\Phi)=$$
$$\int_{P(X)\backslash\mathrm{U}(V)}\int_{N_r\backslash G_r}\mathcal{L}_{\mathcal{H}_L}\left((\sigma_V(gh)\otimes\tau(g))(\varphi_V\otimes\varphi_s(h)),(\omega_V^\vee(h)\Phi)(g^*x_r^*)\right)(|\cdot|^{s+\frac{1}{2}}\overline{\mu}\delta_{P(X)}^{-\frac{1}{2}})(g)\mathrm{d}g\mathrm{d}h.$$

由于 Σ_s在乘以 $C^\infty(P(X)\backslash\mathrm{U}(V))$后保持不变，只需证明存在$\varphi_V\in\sigma_V$, $\varphi_W\in\sigma_W$, $\varphi_\tau\in\tau$, $\Phi\in\mathcal{S}(X^*)$和 $\phi\in\nu^\vee$使得

$$\int_{N_r\backslash G_r}\Phi(g^*x_r^*)\mathcal{L}_{\mathcal{H}_L}\left(\sigma_V(g)\varphi_V\otimes\varphi_W\otimes\tau(g)\varphi_\tau,\phi\right)(|\cdot|^{s+\frac{1}{2}}\overline{\mu}\delta_{P(X)}^{-\frac{1}{2}})(g)\mathrm{d}g\neq0.$$

回忆一下， P_r是 G_r的 mirabolic 子群。这个条件可以改写为

$$\int_{P_r\backslash G_r}\Phi(g^*x_r^*)\int_{N_r\backslash P_r}\mathcal{L}_{\mathcal{H}_L}\left(\sigma_V(pg)\varphi_V\otimes\varphi_W\otimes\tau(pg)\varphi_\tau,\phi\right)(|\cdot|^{s+\frac{1}{2}}\overline{\mu}\delta_{P(X)}^{-\frac{1}{2}})(pg)\,|p|^{-1}\,\mathrm{d}p\mathrm{d}g\neq0.$$

映射 $g\in P_r\backslash G_r\mapsto g^*x_r^*\in X^*$ 诱导出一个嵌入 $\mathcal{S}(P_r\backslash G_r)\hookrightarrow\mathcal{S}(X^*)$，因此只需证明存在一些元素使得

$$\int_{N_{r-1}\backslash G_{r-1}}\mathcal{L}_{\mathcal{H}_W}(\varphi_W\otimes\sigma_V(g)\varphi_V,\phi)\mathcal{L}_{N_r}(\tau(g)\varphi_\tau)(|\cdot|^{s-\frac{1}{2}}\overline{\mu}\delta_{P(X)}^{-\frac{1}{2}})(g)\mathrm{d}g\neq0.$$

根据 [GK75，定理 6] 和 [Kem15，定理 1]，对每个 $f\in C_c^\infty(N_{r-1}\backslash G_{r-1},\ \psi_r)$都存在$\varphi_\tau\in\tau$使得 $\mathcal{L}_{N_r}(\tau(g)\varphi_\tau)=f(g)$对每个 $g\in N_{r-1}\backslash G_{r-1}$。由 $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_W}$的非消失性，命题得证。 □

9.2.3. 温和周期的展开。 以下内容见 [Boi25，命题 6.3.1].

命题 9.4。 假设 σ_V、σ_W 和 τ 都是温和的。那么对于 φ_V^1、$\varphi_V^2\in\sigma_V$、φ_Σ^1、$\varphi_\Sigma^2\in\Sigma$以及 Φ_1、$\Phi_2\in\omega_V^\vee$，我们有

$$\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}(\varphi_V^1\otimes\varphi_\Sigma^1\otimes\Phi_1,\varphi_V^2\otimes\varphi_\Sigma^2\otimes\Phi_2)=\int_{(\mathcal{H}'_W\backslash\mathrm{U}'_V)^2}\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_L}\left((\sigma_V(h_i)\varphi_V^i\otimes\varphi_\Sigma^i(h_i)\otimes(\omega_V^\vee(h_i)\Phi_i)_{Y^\vee})_{i=1,2}\right)}{\upsilon(G_r)}\mathrm{d}h_i.$$

9.2.4. 傅里叶–雅可比周期的非消失性。 现在，我们从展开恒等式推出以下命题，它是温和表示情形下 Gan–Gross–Prasad 猜想的一个显式版本。这是对 [Xue16，命题 1.1 的推广。1] 其研究对象为 $r = 0$。

定理 9.5. 设 σ_V和 σ_W分别是$\mathrm{U}(V)$ 和$\mathrm{U}(W)$的光滑不可约温和表示。对于任意 $\varphi_V \in \sigma_V$、$\varphi_W \in \sigma_W$ 和 $\phi \in \nu^\vee$，我们有

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}(\varphi_V \otimes \varphi_W, \phi) \geq 0.$$

此外，若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_W}(\sigma_V \otimes \sigma_W \otimes \nu^\vee, \mathbb{C}) \neq \{0\}$，则 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}$不恒为零。

证明. 对所有满足 $f(g) = f(g^{-1})$ 的 $f \in C_c^\infty(\mathcal{U}_W)$，我们有 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}(f \otimes \phi \otimes \phi) \in \mathbb{R}$。因此，由连续性可知 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}(\varphi_V \otimes \varphi_W, \phi)$ 是实数。由惠特克泛函的重数一性质（[Rod75]）以及 [SV17，定理 6.3.4]，，对于任意光滑不可约温和表示 τ of G_r（由 [Zel80，定理 9.7] 可知其处于一般位置），存在某个 $\mathcal{L}_{N_r} \in \mathrm{Hom}_{N_r}(\tau, \psi_r)$ 非零，使得 $\mathcal{P}_{N_r} = \mathcal{L}_{N_r} \otimes \mathcal{L}_{N_r}$。利用命题 9.4，并按照命题 9.3 证明中相反的步骤，可证明，若存在 φ_V、φ_W和 ϕ使得 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}(\varphi_V \otimes \varphi_W, \phi) < 0$，则存在 $\varphi_\Sigma \in \Sigma := I^{\mathrm{U}(V)}{}_{P(X)}\sigma_W \boxtimes \tau$以及满足以下条件的 $\Phi \in \omega_V^\vee$

$$\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}(\varphi_V \otimes \varphi_\Sigma, \Phi) < 0.$$

由此可知，[Xue16，命题1.1.1（2）], 导致矛盾，第一点得证。注意，[Xue16] 利用局部Theta对应，将 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}$ 的正性归结为贝塞尔周期的正性，而根据 [SV17，定理 6.2，该周期已知满足这一性质。1]。

对于第二点，假设 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W} = 0$。根据命题9.4，这意味着 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V} = 0$，进而意味着 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}'_V}(\sigma_V \otimes \Sigma \otimes \omega_V^\vee, \mathbb{C}) = \{0\}$，依据 [Xue16，命题1.1.1（2）]。由命题9.3 可知 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_W}(\sigma_V \otimes \sigma_W \otimes \nu^\vee, \mathbb{C}) = \{0\}$。 □

9.3. **非分歧展开**。 现在假设情形满足[Boi25]所说的非分歧条件。只要我们在 v §9开头选取的赋值不属于整体域 的有限赋值集 F，这一条件便成立。我们有一个极大紧子群 K_V，如§3.2.2所述。

我们仍从记号中省略赋值 v。令 σ_V、σ_W 和 τ 分别为 $\mathrm{U}(V)$、$\mathrm{U}(W)$ 和 G_r 的光滑非分歧不可约表示。设 $\Sigma := I^{\mathrm{U}(V)}{}_{P(X)}\sigma_W \boxtimes \tau$，且 $\Sigma_s = I^{\mathrm{U}(V)}{}_{P(X)}\sigma_W \boxtimes \tau_s$。由于我们采用了非分歧假设，空间 $(\nu^\vee)^{K_V \cap \mathcal{H}'_W}$ 的维数为一。

定理 9.6. 令 $\varphi_V^\circ \in \sigma_V^{K_V}$、$\varphi_s^\circ \in \Sigma_s^{K_V}$ 和 $\phi^\circ \in (\nu^\vee)^{K_V \cap \mathcal{H}_W}$。设 $\Phi^\circ := 1_{X^*(\mathcal{O}_E)} \otimes \phi^\circ \in \omega_V^\vee$。当 $\Re(s)$ 充分大时，我们有

$$\mathcal{L}_{\mathrm{U}'_V, s}(\varphi_V^\circ \otimes \varphi_s^\circ, \Phi^\circ) = \frac{L(\frac{1}{2} + s, \tau \times \sigma_V \otimes \overline{\mu})}{L(1+s, \tau^{\mathsf{c}} \times \sigma_W) L(1+2s, \tau, \mathrm{As}^{(-1)^m})} \mathcal{L}_{\mathcal{H}_L}(\varphi_V^\circ \otimes \varphi_s^\circ(1), \phi^\circ). \tag{9.7}$$

其中 $\tau^{\mathsf{c}} = \tau \circ \mathsf{c}$且 m是 W的维数。此外，若 σ_V、σ_W和 τ均为温和，则对 $\Re(s) > -\frac{1}{2}$ (9.7) 成立。 –

证明。 根据 [Boi25，命题 7.3.1，1]，当 $\Re(s$足够大时，我们有非分歧展开等式

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda_r\in\Lambda_r}\mathcal{L}_{\mathcal{H}_L}\left(\sigma_V(\lambda_r)\varphi_V^\circ\otimes\varphi_s^\circ(\lambda_r),(\omega_V^\vee(\lambda_r)\Phi^\circ)_{Y^\vee}\right)(\delta_{P(X)}^{\frac12}\delta_P^{-1})(\lambda_r)\\=&\frac{L(\frac12+s,\tau\times\sigma_V\otimes\overline{\mu})}{L(1+s,\tau^{\mathsf{c}}\times\sigma_W)L(1+2s,\tau,\mathrm{As}^{(-1)^m})}\mathcal{L}_{\mathcal{H}_L}(\varphi_V^\circ\otimes\varphi_s^\circ(1),\phi^\circ),\end{aligned}\tag{9.8}$$

其中 P是 $\mathrm{U}(V)$ 中稳定旗 $0\subset Ex_1\subset\ldots\subset X$ 的抛物子群，并且我们令 $\Lambda_r=T_r(F)/T_r(\mathcal{O}_F)$。请注意，按照我们对测度的选取，体积 $\mathrm{vol}(K_V)$ 和 $\mathrm{vol}(K_V\cap\mathcal{H}_W)$ 均为 1。由（$\mathcal{L}_{\mathrm{U}_V'}$的定义$s$（见（9.6））以及 $\mathrm{U}(V)$ 的岩泽分解 $=T_r\mathcal{H}_W'K_V$，即可得出结论。□

10. Global Fourier–Jacobi periods

现在我们回到整体情形，并证明一个展开恒等式。

10.1. 全局周期的定义。 对于 $(\mathbb{H},\omega^\vee,Z^\vee)\in\{(\mathrm{U}_V',\omega_V^\vee,X^*\oplus Y^\vee),\ (\mathcal{H}_W,\nu^\vee,Y^\vee),\ (\mathcal{H}_L,\nu_L^\vee,Y^\vee)\}$，记 θ 级数为

$$\theta_{\mathbb{H}}^\vee(h,\Phi)=\sum_{z\in Z^\vee(F)}(\omega^\vee(h)\Phi)(z),\quad h\in\mathbb{H}(\mathbb{A}),\quad\Phi\in\omega^\vee.$$

在第一种情形下，这是（$\theta^\vee$ 来自（5.2）的级数。我们还将用到

$$\theta_W^{V,\vee}(h,\Phi):=\sum_{y^\vee\in Y^\vee(F)}(\omega_V^\vee(h)\Phi)_{Y^\vee}(y^\vee),\quad h\in\mathrm{U}_V'(\mathbb{A}),\quad\Phi\in\omega_V^\vee.$$

这些 θ 级数根据引理 5.1的变体具有适度增长。

根据展开恒等式（8.13），对于 $u\in U_{r-1}(\mathbb{A})$ $n\in N(X)(\mathbb{A})$ $\gamma\in P_r(F)$（G_r的米拉波利克群），$g_W\in\mathrm{U}(W)(\mathbb{A})$ 和 $g\in\mathrm{U}(V)(\mathbb{A})$，有如下公式

$$\overline{\psi}_U(u)\theta_W^{V,\vee}(n\gamma g_Wg,\Phi)=\theta_{\mathcal{H}_W}^\vee(un,(\omega_V^\vee(\gamma g_Wg)\Phi)_{Y^\vee}).\tag{10.1}$$

对于三元组 $(\mathbb{G},\ \mathbb{H},\ \omega^\vee)\in\{(\mathrm{U}_V,\ \mathrm{U}_V',\ \omega_V^\vee),(\mathcal{U}_W,\ \mathcal{H}_W,\ \nu^\vee),(L,\ \mathcal{H}_L,\ \nu_L^\vee)\}$，考虑积分

$$\mathcal{P}_{\mathbb{H}}(\varphi,\Phi):=\int_{[\mathbb{H}]}\varphi(h)\theta_{\mathbb{H}}^\vee(h,\Phi)\mathrm{d}h,\quad\varphi\in\mathcal{A}(\mathbb{G}),\quad\Phi\in\omega^\vee,\tag{10.2}$$

至少在积分收敛的情况下。最后，对于 $\varphi\in\mathcal{A}(G_r)$，令

$$\mathcal{P}_{N_r}(\varphi):=\int_{[N_r]}\varphi(h)\psi_r(n)\mathrm{d}n.$$

那么，对于 $\varphi=\varphi_{V,\ W}\otimes\varphi_r\in\mathcal{A}(L)$，我们有 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_L}(\varphi,\ \phi)=\mathcal{P}_{N_r}(\varphi_r)\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}(\varphi_{V,\ W},\ \phi)$。

10.2. 全局周期的展开。 设 $\sigma_V \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{U}(V))$ 和 $\sigma_W \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{U}(W))$。设 τ 是 $G_r(\mathbb{A})$ 的 Arthur 参数。对于 $s \in \mathbb{C}$，我们定义 $\Sigma_s := I^{\mathrm{U}(V)}{}_{P(X)}(\tau_s \boxtimes \sigma_W)$。记张量积分解为 $\sigma_V = \otimes'_v \sigma_{V,v}$, $\sigma_W = \otimes'_v \sigma_{W,v}$ 和 $\tau = \otimes'_v \tau_v$。

我们证明命题 9.4 的整体对应结果。

命题 10.1. 设 $\varphi_V \in \mathcal{A}_{\sigma_V}(\mathrm{U}(V))$、$\varphi \in \mathcal{A}_{P(X),\tau\boxtimes\sigma_W}(\mathrm{U}(V))$ 和 $\Phi \in \omega_V^\vee$。存在 $c > 0$，使得对于所有满足 $\Re(s) > c$ 的 s，等式成立

$$\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}\left(\varphi_V \otimes E^{\mathrm{U}(V)}_{P(X)}(\varphi, s), \Phi\right) = \int_{\mathcal{H}'_W(\mathbb{A})\backslash \mathrm{U}'_V(\mathbb{A})} \mathcal{P}_{\mathcal{H}_L}\left(\mathrm{R}(h)(\varphi_V \otimes \varphi_s), (\omega^\vee(h)\Phi)_{Y^\vee}\right) \mathrm{d}h,$$

其中右端绝对收敛。

注 10.2. 在 §5.2 中，我们定义了一个正则化周期 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}$，它定义在由 $_V$ 表示的 U 上的艾森斯坦级数上；该艾森斯坦级数由 $\mathrm{U}_V, \mathrm{U}'_V, \mu$)- 正则尖点数据诱导而来。由于 σ_V 是尖点的，这一构造在此处适用。此外，根据注 5.3，在这种情况下，该周期化简为沿 $[\mathrm{U}'_V]$ 的绝对收敛积分。

证明。 当 $\Re(s)$充分大时，艾森斯坦级数也绝对收敛，且有

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}\left(\varphi_V \otimes E^{\mathrm{U}(V)}_{P(X)}(\varphi, s), \Phi\right) &= \int_{[\mathrm{U}(V)]} \sum_{\gamma \in P(X)(F)\backslash \mathrm{U}(V)(F)} \varphi_s(\gamma g)\varphi_V(g)\theta^\vee_{\mathrm{U}'_V}(g, \Phi)\mathrm{d}g \\ &= \int_{M(X)(F)N(X)(\mathbb{A})\backslash \mathrm{U}(V)(\mathbb{A})} \varphi_s(g) \int_{[N(X)]} \varphi_V(ng)\theta^\vee_{\mathrm{U}'_V}(ng, \Phi)\mathrm{d}n\mathrm{d}g. \qquad (10.3)\end{aligned}$$

对于固定的 g，关于 $[N(X)]$ 的内层积分为

$$\int_{[N(X)]} \varphi_V(ng) \sum_{x^* \in X^*(F)} \sum_{y^\vee \in Y^\vee(F)} \omega_V^\vee(ng)\Phi(x^*, y^\vee)\mathrm{d}n.$$

注意，这个三重积分是绝对收敛的。由 (8.9) 和 (8.10) 中给出的混合模型描述可知，$N(X)$ 只作用于 $y^\vee$ 坐标，因此对于每个 x^*，映射 $n \mapsto \sum_{y^\vee \in Y^\vee(F)} \omega_V^\vee(ng)\Phi(x^*, y^\vee)$ 是 $N(X)(F)$ 左不变的，并且 $n \mapsto \sum_{y^\vee \in Y^\vee(F)} \omega_V^\vee(ng)\Phi(0, y^\vee)$ 在 $[N(X)]$ 上为常数。于是，由 φ_V 的尖点性及 (8.9) 可得

$$\begin{aligned}\int_{[N(X)]} \varphi_V(ng)\theta^\vee_{\mathrm{U}'_V}(ng, \Phi)\mathrm{d}n &= \sum_{x^* \in X^*\backslash\{0\}} \int_{[N(X)]} \varphi_V(ng) \sum_{y^\vee \in Y^\vee(F)} \omega_V^\vee(ng)\Phi(x^*, y^\vee)\mathrm{d}n \\ &= \sum_{\gamma \in P_r(F)\backslash G_r(F)} \int_{[N(X)]} \varphi_V(n\gamma g)\theta^{V,\vee}_W(n\gamma g, \Phi)\mathrm{d}n,\end{aligned}$$

其中最后一个等式是通过变量代换 $n \mapsto \gamma n \gamma^{-1}$ 得到的。现在固定 γ。令 $X_{r-1} = \mathrm{span}_E(x_1, \ldots\ldots, x_{r-1}) \subset X$。设 $N(X_{r-1})$ 为 $\mathrm{U}(V)$ 中稳定 X_{r-1} 的抛物子群的幂零根。我们有 $N(X) = S(W) \ltimes (N(X) \cap N(X_{r-1}))$。于是

$$\int_{[N(X)]} \varphi_V(n\gamma g)\theta^{V,\vee}_W(n\gamma g, \Phi)\mathrm{d}n = \int_{[S(W)]} \int_{[N(X)\cap N(X_{r-1})]} \varphi_V(nh\gamma g)\theta^{V,\vee}_W(nh\gamma g, \Phi)\mathrm{d}n\mathrm{d}h. \qquad (10.4)$$

固定 h，考虑 $p \in [P_r] \mapsto \int_{[N(X)\cap N(X_{r-1})]} \varphi_V(nph\gamma g)\mathrm{d}n$。这是良定义的，因为 $P_r(F)$ 正规化 $(N(X)\cap N(X_{r-1}))(\mathbb{A})$。但是 $N_r \ltimes (N(X)\cap N(X_{r-1})) = U_{r-1}$ 且 $S(W)$ 与 P_r 可交换，因此由 φ_V 的尖点性可知，我们沿着 $[N_r]$ 有傅里叶展开

$$\int_{[N(X)\cap N(X_{r-1})]} \varphi_V(nh\gamma g)\mathrm{d}n = \sum_{\gamma'\in N_r(F)\backslash P_r(F)} \int_{[U_{r-1}]} \varphi_V(uh\gamma'\gamma g)\overline{\psi_U(u)}\mathrm{d}u. \tag{10.5}$$

由于 $U_{r-1}\rtimes S(W) = U_r$，利用（10.1）和（10.5），可见（10.4）化简为

$$\int_{[N(X)]} \varphi_V(n\gamma g)\theta_W^{V,\vee}(n\gamma g,\Phi)\mathrm{d}n = \sum_{\gamma'\in N_r(F)\backslash P_r(F)} \int_{[U_r]} \varphi_V(u\gamma'\gamma g)\theta^\vee_{\mathcal{H}_W}(u,(\omega_V^\vee(\gamma'\gamma g)\Phi)_{Y^\vee})\mathrm{d}u.$$

因此，回到（10.3）可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}\left(E^{\mathrm{U}(V)}_{P(X)}(\varphi,s)\otimes\varphi_V,\Phi\right)\\ =&\int_{M(X)(F)N(X)(\mathbb{A})\backslash \mathrm{U}(V)(\mathbb{A})} \sum_{\gamma\in N_r(F)\backslash G_r(F)} \varphi_s(\gamma g)\int_{[U_r]}\varphi_V(u\gamma g)\theta^\vee_{\mathcal{H}_W}(u,(\omega_V^\vee(\gamma g)\Phi)_{Y^\vee})\mathrm{d}u\mathrm{d}g.\end{aligned} \tag{10.6}$$

暂且假设二重积分 $\int_{M(X)(F)N(X)(\mathbb{A})\backslash \mathrm{U}(V)(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in N_r(F)\backslash G_r(F)}$ 绝对收敛。于是可知

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}\left(\varphi_V\otimes E^{\mathrm{U}(V)}_{P(X)}(\varphi,s),\Phi\right)\\ =&\int_{\mathcal{H}'_W(\mathbb{A})\backslash \mathrm{U}'_V(\mathbb{A})}\int_{[N_r]}\int_{[\mathrm{U}(W)]}\int_{[U_r]}\varphi_s(n_rg_Wg)\varphi_V(un_rg_Wg)\theta^\vee_{\mathcal{H}_W}(u,(\omega_V^\vee(n_rg_Wg)\Phi)_{Y^\vee})\mathrm{d}u\mathrm{d}g_W\mathrm{d}n_r\mathrm{d}g\\ =&\int_{\mathcal{H}'_W(\mathbb{A})\backslash \mathrm{U}'_V(\mathbb{A})}\int_{[N_r]}\int_{[\mathrm{U}(W)]}\int_{[U_r]}\varphi_s(n_rg_Wg)\varphi_V(ug_Wg)\psi_r(n_r)\theta^\vee_{\mathcal{H}_W}(ug_W,(\omega_V^\vee(g)\Phi)_{Y^\vee})\mathrm{d}u\mathrm{d}g_W\mathrm{d}n_r\mathrm{d}g\\ =&\int_{\mathcal{H}'_W(\mathbb{A})\backslash \mathrm{U}'_V(\mathbb{A})}\int_{[\mathcal{H}_L]}\varphi_s(hg)\varphi_V(hg)\theta^\vee_{\mathcal{H}_L}(h,(\omega_V^\vee(g)\Phi)_{Y^\vee})\mathrm{d}h\mathrm{d}g\\ =&\int_{\mathcal{H}'_W(\mathbb{A})\backslash \mathrm{U}'_V(\mathbb{A})}\mathcal{P}_{\mathcal{H}_L}\left(\mathrm{R}(g)(\varphi_V\otimes\varphi_s),(\omega^\vee(g)\Phi)_{Y^\vee}\right)\mathrm{d}g,\end{aligned}$$

其中，从第二行到第三行时，我们使用了变量替换 $u\mapsto un_r$ 以及（10.1）。

剩下要证明（10.6）绝对收敛。这可用与 [BPC25，命题 8.5.1 中相似的技巧证明，1] 并利用引理 4.3，以及（8.8）中魏尔表示的公式。至此，命题得证。□

推论 10.3。以下各项等价。

(1) 存在 $\varphi_V\in\sigma_V$、$\varphi_W\in\sigma_W$ 和 $\phi\in\nu^\vee$，使得 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}(\varphi_V\otimes\varphi_W,\phi)\neq 0$。(2) 存在 $\varphi_V\in\sigma_V$、$\varphi_\Sigma\in\Sigma$、$\Phi\in\omega_V^\vee$ 和 $s\in\mathbb{C}$，使得 $E^{\mathrm{U}(V)}P(X)(\varphi,.)$ 在 s 处没有极点，且 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}\left(\varphi_V\otimes E_P^{\mathrm{U}(V}X)()(\varphi_\Sigma,s)\ \Phi\right)\neq 0$。

证明。令 $\varphi_V \in \sigma_V$, $\varphi_\Sigma \in \Sigma$ 和 $\Phi \in \mathcal{S}(X^*(\mathbb{A}_E) \oplus Y^\vee(\mathbb{A}))$。根据 [Boi25，命题 7.3.1。1] 和命题 10.1，在适当扩大S后，我们有

$$\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}\left(\varphi_V \otimes E^{\mathrm{U}(V)}_{P(X)}(\varphi_\Sigma, s), \Phi\right) = \frac{L^{\mathsf{S}}(\frac{1}{2}+s, \sigma_V \times \tau \otimes \overline{\mu})}{L^{\mathsf{S}}(1+s, \tau^{\mathsf{c}} \times \sigma_W) L^{\mathsf{S}}(1+2s, \tau, \mathrm{As}^{(-1)^m})} \times \int_{\mathcal{H}'_W(F_{\mathsf{S}}) \backslash \mathrm{U}'_V(F_{\mathsf{S}})} \mathcal{P}_{\mathcal{H}_L}\left(\mathrm{R}(h)(\varphi_V \otimes \varphi_{\Sigma,s}), (\omega^\vee_V(h)\Phi)_{Y^\vee}\right) \mathrm{d}h, \tag{10.7}$$

若 $\Re(s) \gg 0$。由关于 τ 的假设可知，惠特克周期 $\mathcal{P}_{N_r}$在 τ 上非零，因为它处于一般位置。根据分解 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_L} = \mathcal{P}_{\mathcal{H}_W} \otimes \mathcal{P}_{N_r}$，(1) 等价于 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_L}$ 在 $\sigma_V \otimes \tau \otimes \sigma_W \otimes \nu^\vee$上非零；而根据（10.7）和命题9.3，这又等价于 (2)。□

11. Proof of the main theorems

本章中，我们证明主要结果定理 1.1 和1.4。

11.1. 正余秩情形下的 Gan–Gross–Prasad 猜想。 我们从 GGP 猜想开始。我们证明的陈述如下。

定理 11.1。 设 Π 是 $G_n \times G_m$ 的一个离散 *Hermitian Arthur* 参数。以下断言等价：

(1) $L(\frac{1}{2}, \Pi \otimes \mu) \neq 0$;(2) 存在非退化斜 *Hermitian* 空间 $W \subset V$，以及 σ 的一个尖点自守表示，该表示属于 $\mathrm{U}(V)(\mathbb{A}) \times \mathrm{U}(W)(\mathbb{A})$，使得 $W^\perp$ 是分裂的，σ 到 $G_n \times G_m$ 的弱基变换为 Π，且 $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}$ 在 $\sigma \otimes \nu^\vee$ 上不恒为零。

证明。设 α_1、……、α_r是 $\mathbb{A}_E^\times$的自守特征，使得 α_1、……、α_r、α_1^*、……、α_r^*两两不同。设 Q_n 是 G_n 的标准抛物子群，其 Levi 因子为 $G_1^{2r} \times G_m$，并对所有 $s \in i\mathbb{R}$定义

$$\widetilde{\Pi}_s := \Pi_n \boxtimes I^{G_n}_{Q_n}(\alpha_1 |.|^s_E \boxtimes \alpha_1^* |.|^{-s}_E \boxtimes \ldots \boxtimes \alpha_r |.|^s_E \boxtimes \alpha_r^* |.|^{-s}_E \boxtimes \Pi_m).$$

~注意到 Π_s是（G，H，$-\mu$）-正则厄米特 Arthur 参数。由 Rankin–Selberg L-函数的基本性质，定理 11.1 的断言（1）等价于以下断言。

（1′）存在 $s \in i\mathbb{R}$，使得 L（$\frac{1}{2}$，$\widetilde{\Pi}_s$）$\neq 0$。

由定理7.1中关于（G，H，μ）-正则厄米特 Arthur 参数的 Gan–Gross–Prasad 猜想，这推出（2）。

反过来，设 $\sigma = \sigma_V \boxtimes \sigma_W$ 是 $\mathcal{U}_W$ 的尖点自守表示，其到 $G_n \times G_m$ 的弱基变换为 Π。设 P 是 U(V) 中稳定旗 $Ex_1 \subset \ldots \subset X$ 的抛物子群，其 Levi 因子为 $T_r \times \mathrm{U}(W)$。

$$\kappa := \alpha_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \alpha_r, \tag{11.1}$$

~是 $T_r(\mathbb{A})$ 的自守特征。则对所有 $s \in i\mathbb{R}$，表示 Π_s 都是 $(\mathrm{U}(V) \times P,\ \sigma_V \boxtimes \kappa_s \boxtimes \sigma_W)$ 的弱基变换。

定义 $\tau = I_{B_r}^{G_r}(\kappa)$，使得 $I^{\mathrm{U}(V)}{}_{P(X)}(\kappa_s \boxtimes \sigma_W) = I^{\mathrm{U}(V)}{}_{P(X)}(\tau_s \boxtimes \sigma_W)$。于是，由推论 10.3可知，定理11.1 的 (2) 等价于以下断言。

(2') 存在一个 $s \in i\mathbb{R}$，使得双线性形式 $\mathcal{P}_{\mathrm{U}_V'}$ 在 $\sigma_V \otimes (I^{\mathrm{U}(V)}{}_{P(X)}\tau_s \boxtimes \sigma_W) \otimes \omega_V^\vee$ 上非零。

但是，由定理 7.1可知 (2') 蕴含 (1')。至此，定理11.1的证明完成。

□

11.2. **傅里叶–雅可比周期的 Ichino–Ikeda 猜想。** 本节将证明任意余秩下的傅里叶–雅可比周期的 Ichino–Ikeda 猜想。设 σ 是 $\mathcal{U}_W = \mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(W$ 的一个自守尖点表示，并假设对所有 v，局部分量 σ_v均为温和表示。我们采用与§1.3中相同的归一化和记号。我们需要证明以下结论。

定理 11.2. 令 σ 和 Π 如上。对于任意可分解向量 $\varphi = \otimes_v' \varphi_v \in \sigma$ 和 $\phi = \otimes_v' \phi_v \in \nu^\vee$，我们有

$$|\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}(\varphi, \phi)|^2 = |S_\Pi|^{-1} \mathcal{L}(\frac{1}{2}, \sigma) \prod_v \mathcal{P}^\sharp_{\mathcal{H}_W, v}(\varphi_v, \phi_v). \tag{11.2}$$

证明。 记 $\sigma = \sigma_V \boxtimes \sigma_W$。我们仍记 $\tau = I_{B_r}^{G_r}\kappa$，其中 κ 是在（11.1）中定义的特征，它在每个赋值处都是温和的。若 $s \in \mathbb{C}$，我们记 $\Sigma_s = I^{\mathrm{U}(V)}{}_{P(X)}\tau_s \boxtimes \sigma_W$。

令 $\varphi_V \in \sigma_V$，$\varphi_W \in \sigma_W$，$\varphi_\tau \in \tau$ 以及 $\varphi_\Sigma \in \Sigma_s$。我们还选取一些施瓦茨函数 $\Phi \in \omega_V^\vee$和 $\phi \in \nu^\vee$。假设这些向量均为可分解的。我们取一个足够大的赋值集合 S，使得 [Boi25的非分歧 Ichino–Ikeda 猜想（定理 1.0.3）1]在S之外成立。

我们有以下 L-函数的等式： $L^{\mathsf{S}}(1, \sigma_V,$ 伴随表示$)L^{\mathsf{S}}(1, \sigma_W,$ 伴随表示$) = L^{\mathsf{S}}(1, \Pi, \mathrm{As}^{n,m})$。因此，我们要证明

$$|\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}(\varphi, \phi)|^2 = |S_\Pi|^{-1} \Delta^{\mathsf{S}}_{\mathrm{U}(V)} \frac{L^{\mathsf{S}}(1/2, \sigma_V \times \sigma_W \otimes \overline{\mu})}{L^{\mathsf{S}}(1, \sigma_V, \mathrm{Ad}) L^{\mathsf{S}}(1, \sigma_W, \mathrm{Ad})} \prod_{v \in \mathsf{S}} \mathcal{P}_{\mathcal{H}_W, v}(\varphi_v, \phi_v). \tag{11.3}$$

~我们使用第 11.1 节中的相同记号，因此 Π_s 是 $(\mathrm{U}(V) \times P(X)\ \sigma_V \boxtimes \tau_s \boxtimes \sigma_W)$ 的弱基变换。另一方面，(10.7) 可写为

(11.4)

$$\left|\mathcal{P}_{\mathrm{U}_V'}\left(\varphi_V \otimes E^{\mathrm{U}(V)}_{P(X)}(\varphi_\Sigma, s), \Phi\right)\right|^2 = \left|\frac{L^{\mathsf{S}}(\frac{1}{2} + s, \sigma_V \times \tau \otimes \overline{\mu})}{L^{\mathsf{S}}(1 + s, \tau^{\mathsf{c}} \times \sigma_W) L^{\mathsf{S}}(1 + 2s, \tau, \mathrm{As}^{(-1)^m})}\right|^2 \times$$

$$\int_{(\mathcal{H}_W'(F_{\mathsf{S}}) \backslash \mathrm{U}_V'(F_{\mathsf{S}}))^2} \mathcal{P}_{\mathcal{H}_L}\left(\mathrm{R}(h_1)(\varphi_V \otimes \varphi_{\Sigma,s}), (\omega_V^\vee(h_1)\Phi)_{Y^\vee}\right) \overline{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_L}\left(\mathrm{R}(h_2)(\varphi_V \otimes \varphi_{\Sigma,s}), (\omega_V^\vee(h_2)\Phi)_{Y^\vee}\right)} \mathrm{d}h_i,$$

但另一方面，根据定理 7.3 中的零余秩 Ichino–Ikeda 猜想，并利用 $\Delta_{\mathrm{U}(V)}$ 和 $\Delta_{\mathrm{U}(V)\,v}$ 在 (3.3) 中的显式公式，我们有

(11.5)
$$\left|\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_V}\left(\varphi_V\otimes E^{\mathrm{U}(V)}_{P(X)}(\varphi_\Sigma,s),\Phi\right)\right|^2=\frac{\Delta^{\mathtt{S}}_{\mathrm{U}(V)}}{|S_\Pi|}\frac{L^{\mathtt{S}}(\frac12,\sigma_V\times\Sigma_s\otimes\overline{\mu})}{L^{\mathtt{S},*}(1,\Sigma_s,\mathrm{Ad})L^{\mathtt{S}}(1,\sigma_V,\mathrm{Ad})}\prod_{v\in\mathtt{S}}\mathcal{P}_{\mathrm{U}'_{V},v}\left(\varphi_{V,v}\otimes\varphi_{\Sigma,s,v},\Phi_v\right).$$

根据命题 9.4 在赋值 $\mathtt{S}$ 处应用于温和周期的局部计算，并利用（8.14），我们看到（11.5）为

(11.6)
$$\frac{\Delta^{\mathtt{S}}_{\mathrm{U}(V)}\Delta^{\mathtt{S},*}_{G_r}}{|S_\Pi|}\frac{L^{\mathtt{S}}(\frac12,\sigma_V\times\Sigma_s\otimes\overline{\mu})}{L^{\mathtt{S},*}(1,\Sigma_s,\mathrm{Ad})L^{\mathtt{S}}(1,\sigma_V,\mathrm{Ad})}\times\prod_{v\in\mathtt{S}}\int_{(\mathcal{H}'_W(F_v)\backslash\,\mathrm{U}'_V(F_v))^2}\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{L,v}}\left((\sigma_{V,v}(h_i)\varphi^i_{V,v}\otimes\varphi^i_{\Sigma,s,v}(h_i),(\omega^\vee_{V,v}(h_i)\Phi_{i,v})_{Y^\vee})_{i=1,2}\right)\mathrm{d}h_i.$$

由（11.4）、（11.6）、命题9.3 以及部分 L-函数的等式：

$$\frac{L^{\mathtt{S}}(\frac12,\sigma_V\times\Sigma_s\otimes\overline{\mu})}{L^{\mathtt{S},*}(1,\Sigma_s,\mathrm{Ad})}=\frac{L^{\mathtt{S}}(\frac12,\sigma_V\times\sigma_W\otimes\overline{\mu})}{L^{\mathtt{S}}(1,\sigma_W,\mathrm{Ad})L^{\mathtt{S},*}(1,\tau,\mathrm{Ad})}\left|\frac{L^{\mathtt{S}}(\frac12+s,\sigma_V\times\tau\otimes\overline{\mu})}{L^{\mathtt{S}}(1+s,\tau^c\times\sigma_W)L^{\mathtt{S}}(1+2s,\tau,\mathrm{As}^{(-1)^m})}\right|^2,$$

我们得到

(11.7)
$$|\mathcal{P}_{\mathcal{H}_L}(\varphi_V\otimes\varphi_\tau\otimes\varphi_W,\phi)|^2=\frac{\Delta^{\mathtt{S}}_{\mathrm{U}(V)}\Delta^{\mathtt{S},*}_{G_r}}{|S_\Pi|}\frac{L^{\mathtt{S}}(\frac12,\sigma_V\times\sigma_W\otimes\overline{\mu})}{L^{\mathtt{S}}(1,\sigma_V,\mathrm{Ad})L^{\mathtt{S},*}(1,\tau,\mathrm{Ad})L^{\mathtt{S}}(1,\sigma_W,\mathrm{Ad})}\times\prod_{v\in\mathtt{S}}\mathcal{P}_{\mathcal{H}_L,v}(\varphi_{V,v}\otimes\varphi_{\tau,v}\otimes\varphi_{W,v},\phi_v).$$

回顾一下，$\mathcal{P}_{\mathcal{H}_L}=\mathcal{P}_{\mathcal{H}_W}\otimes\mathcal{P}_{N_r}$。由 [FLO12] 和 [CS80] 可知

(11.8)
$$|\mathcal{P}_{N_r}(\varphi_\tau)|^2=\frac{\Delta^{\mathtt{S},*}_{G_r}}{L^{\mathtt{S},*}(1,\tau,\mathrm{Ad})}\prod_{v\in\mathtt{S}}\mathcal{P}_{N_r,v}(\varphi_{\tau,v}),$$

因此（11.3）可通过将（11.7）除以（11.8）得到；对于某个 $\varphi_\tau\in\tau$，后者非零。证明完毕。

□

References

[Art81]J. Arthur, 《 *The trace formula in invariant form*》, 《数学年刊》（第2辑）114（1981）, 第1期, 1–74, DOI 10.2307/1971376。MR625344 ↑33[Art78] J. G. Arthur, 《 *A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in G*》（Q）, 《杜克数学杂志》45（1978）, 第4期, 911–952。MR0518111 ↑16, 37[Art82] , 《 *On the inner product of truncated Eisenstein series*》, 《杜克数学杂志》49（1982）, 第1期, 35–70, DOI 10.1215/S0012-7094-82-04904-3。 ↑33, 34[Ber88] J. Bernstein, 《 *On the support of Plancherel measure*》, Journal of Geometry and Physics 5（1988）, 第4期, 663-710, DOI https://doi.org/10.1016/0393-0440(88)90024-1。 ↑[BK14] J. Bernstein 和 B. Kr¨otz, 《 *Smooth Fréchet globalizations of Harish-Chandra modules*》, 《以色列数学杂志》199（2014）, 第1期, 45–111, DOI 10.1007/s11856-013-0056-1。MR3219530 ↑

[Boi25] P. Boisseau, 《 *Whittaker-Shintani functions for Fourier-Jacobi models on unitary groups*》, IMRN。《国际数学研究通知》2025（2025），第17期，36，DOI 10.1093/imrn/rnaf271。编号 rnaf271。Zbl 08092265 ↑5，6，49，56，57，58，61，62[BLXa] P. Boisseau、W. Lu 和 H. Xue, 《 *The global Gan–Gross–Prasad conjecture for Fourier–Jacobi periods onunitary groups I: coarse spectral expansions*》。预印本。↑2，6，7，8，16，22，23，32，33，34，35，37，38，39[BLXb]，《 *The global Gan–Gross–Prasad conjecture for Fourier–Jacobi periods on unitary groups II: comparison of the relative trace formulae*》。预印本。↑2，7，8，16，17，18，38，39，40[BP20] R. Beuzart-Plessis, 《 *A local trace formula for the Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups: theArchimedean case*》, Ast´erisque 418（2020），viii + 299，DOI 10.24033/ast（英文，附英文和法文摘要）。MR4146145 ↑52，54，55[BP21a]，《 *Comparison of local relative characters and the Ichino-Ikeda conjecture for unitary groups*》, J. Inst. Math. Jussieu 20（2021），第6期，1803–1854，DOI 10.1017/S1474748019000707。MR4332778 ↑2，7，11，18，22，25，32[BP21b]，《 *Plancherel formula for* 》$\mathrm{GL}_n(F)\backslash\mathrm{GL}_n(E)$ *and applications to the Ichino-Ikeda and formal degreeconjectures for unitary groups*，《数学发明》225（2021），第1期，159–297，DOI 10.1007/s00222-021-01032-6。MR4270666 ↑2，39，52[BP21c]，《 *A new proof of the Jacquet-Rallis fundamental lemma*》，《杜克数学杂志》170（2021），第12期，2805–2814，DOI 10.1215/00127094-2020-0090。MR4305382 ↑38[BPC25] R. Beuzart-Plessis 和 P.-H. Chaudouard, 《 *The global Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups.II: From Eisenstein series to Bessel periods*》, Forum of Mathematics, Pi 13（2025），98，DOI 10.1017/fmp.2025.8。编号 e16。Zbl 08047525 ↑2，8，29，42，56，60[BPCZ22] R. Beuzart-Plessis、P.-H. Chaudouard 和 M. Zydor, 《 *The global Gan-Gross-Prasad conjecture for uni-tary groups: the endoscopic case*》, Publ. Math. Inst. Hautes´ Etudes Sci. 135（2022），183–336，DOI 10.1007/s10240-021-00129-1。MR4426741 ↑2，10，11，12，13，15，16，25，27，28，29，30，33，36，38，46，47[BPLZZ21]R. Beuzart-Plessis、Y. Liu、W. Zhang 和 X. Zhu, 《 *Isolation of cuspidal spectrum*》, *with applicationto the Gan-Gross-Prasad conjecture*，《数学年刊》（第2辑）194（2021），第2期，519–584，DOI 10.4007/an- nals.2021.194.2.5。MR4298750 ↑2，8，39，41，42[CS80] W. Casselman 和 J. Shalika, 《 *The unramified principal series of p-adic groups. II. The Whittaker function*》, Compositio Mathematica 41（1980），第2期，207–231（英文）。↑63[Cha25] P.-H. Chaudouard, *A spectral expansion for the symmetric space* $\mathrm{GL}_n(E)/\mathrm{GL}_n(F)$，2025。arXiv:2204.06069↑14[CZ21] P.-H. Chaudouard 和 M. Zydor, 《 *Le transfert singulier pour la formule des traces de Jacquet–Rallis*》, Compositio Mathematica 157（2021），第2期，303–434，DOI 10.1112/S0010437X20007599。↑38[CHH88] M. Cowling、U. Haagerup 和 R. Howe, 《 *Almost* L^2 *matrix coefficients*》, 《纯粹与应用数学杂志》387（1988），97–110。MR946351 ↑52，55[DM78] J. Dixmier 和 P. Malliavin, 《 *Factorisations de fonctions et de vecteurs indefiniment différentiables*》, Bulletin des Sciences Math´ematiques。Deuxi`eme S´erie 102（1978），305–330（法文）。Zbl 0392。43013 ↑36[FLO12] B. Feigon、E. Lapid 和 O. Offen, 《 *On representations distinguished by unitary groups*》, Publications Math´ematiques de l'IH´ES 115（2012），185–323，DOI 10.1007/s10240-012-0040-z（英文）。↑63[Fli88] Y. Z. Flicker, 《 *Twisted tensors and Euler products*》, Bulletin de la Soci´et´e Math´ematique de France 116（1988），第3期，295–313，DOI 10.24033/bsmf.2099（英文）。↑8，29，47[GGP12] W. T. Gan、B. H. Gross 和 D. Prasad, 《 *Symplectic local root numbers*》, *central critical L values*, *and restriction problems in the representation theory of classical groups*, Ast´erisque 346（2012），1–109（英文，

（附英文和法文摘要）。关于 Gross 与 Prasad 猜想。I. MR3202556 ↑1, 2, 3, 4, 32, 51, 55[GI16] W. T. Gan 和 A. Ichino, *The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence*, 《数学发明》206 (2016)，第 3 期，705–799，DOI 10.1007/s00222-016-0662-8。MR3573972 ↑4, 48[GK75] I. M. Gelfand 和 D. A. Kajdan, *Representations of the group $GL(n, K)$ where K is a local field* (1975)。↑44, 56[Gro97] B. Gross, *On the motive of a reductive group*, 《数学发明》130 (1997)，287–313。↑10[GP92] B. Gross 和 D. Prasad, *On the decomposition of a representation of SO_n when restricted to SO_{n-1}*, 《加拿大数学杂志》44 (1992)，第 5 期，974–1002，DOI 10.4153/CJM-1992-060-8。MR1186476 ↑1[GP94] , *On irreducible representations of $\mathrm{SO}_{2n+1} \times \mathrm{SO}_{2m}$*, 《加拿大数学杂志》46 (1994)，第 5 期，930–950，DOI 10.4153/CJM-1994-053-4。MR1295124 ↑1[HT01] M. Harris 和 R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, 《数学年刊研究》第 151 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，NJ，2001。附录由 Vladimir G. Berkovich 撰写。MR1876802 ↑21[Har14] R. N. Harris, *The refined Gross-Prasad conjecture for unitary groups*, 《国际数学研究通报》IMRN 2 (2014)，303–389，DOI 10.1093/imrn/rns219。MR3159075 ↑2, 5[II10] A. Ichino 和 T. Ikeda, *On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture*, 《几何与泛函分析》19 (2010)，第 5 期，1378–1425，DOI 10.1007/s00039-009-0040-4。MR2585578 ↑1, 5[IY19] A. Ichino 和 S. Yamana, *Periods of automorphic forms: the case of $(\mathrm{U}_{n+1} \times \mathrm{U}_n, \mathrm{U}_n)$*, 《纯粹与应用数学杂志》746 (2019)，1–38，DOI 10.1515/crelle-2015-0107。MR3895624 ↑6[Jac77] H. Jacquet, *Generic representations* (1977)。Zbl 0357.22010 ↑39[Jac04] , *Integral representation of Whittaker functions*, 《自守形式、几何与数论文集》，2004，第 373–419 页。↑44[Jac10] , *Distinction by the quasi-split unitary group*, 《以色列数学杂志》178 (2010)，269–324。↑44[JPSS83] H. Jacquet、I. I. Piatetskii-Shapiro 和 J. A. Shalika, *Rankin-Selberg convolutions*, 《美国数学杂志》105(2) (1983)，367–464。↑8, 24, 44[JR11] H. Jacquet 和 S. Rallis, *On the Gross-Prasad conjecture for unitary groups*, 关于某些 L-函数，《克莱数学会议录》第 13 卷，美国数学学会，普罗维登斯，RI，2011，第 205–264 页。MR2767518 ↑2[JS81] H. Jacquet 和 J. A. Shalika, *On Euler products and the classification of automorphic representations. I*, 《美国数学杂志》103 (1981)，第 3 期，499–558，DOI 10.2307/2374103。MR618323 ↑7, 22, 25, 43, 47[KMSW] T. Kaletha、A. Minguez、S. W. Shin 和 P.-J. White, *Endoscopic Classification of Representations: InnerForms of Unitary Groups*。arXiv:1409.3731v3。↑3, 4, 6, 21, 22[Kem15] A. Kemarsky, *A note on the Kirillov model for representations of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*, 《巴黎科学院数学报告》353 (2015)，第 7 期，579–582，DOI 10.1016/j.crma.2015.04.002（英文，附英文和法文摘要）。MR3352025 ↑44, 56[Kna01] A. Knapp, *Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples. With a new preface by the author.*，平装版，2001。Zbl 0993.22001 ↑15[Kud94] S. S. Kudla, *Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs*, 《以色列数学杂志》87 (1994)，第 1–3 期，361–401，DOI 10.1007/BF02773003。MR1286835 ↑50[Lan89] R. P. Langlands, *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*, 《半单李群上的表示论与调和分析》，《数学调查专著》第 31 卷，美国数学学会，普罗维登斯，RI，1989，第 101–170 页，DOI 10.1090/surv/031/03。MR1011897 ↑16, 21

[Lap08] E. M. Lapid, *A Remark on Eisenstein Series*（W. T. a. K. Gan Stephen S. 和 Tschinkel 编），Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，2008。↑14, 29, 30, 34, 35[Lap13] E. Lapid, *On the Harish-Chandra Schwartz space of $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$*，《自守表示与 L-函数》22 (2013)，335–377。附录由 F. Brumley 撰写。↑12[Liu14] Y. Liu, *Relative trace formulae toward Bessel and Fourier-Jacobi periods on unitary groups*，《数学手稿》145 (2014)，第 1–2 期，1–69，DOI 10.1007/s00229-014-0666-x。MR3244725 ↑2[Liu16] , *Refined global Gan-Gross-Prasad conjecture for Bessel periods*，《纯粹与应用数学杂志》717 (2016)，133–194，DOI 10.1515/crelle-2014-0016。MR3530537 ↑2[LS13] Y. Liu 和 B. Sun, *Uniqueness of Fourier-Jacobi models: the Archimedean case*，《泛函分析杂志》265 (2013)，第 12 期，3325–3344，DOI 10.1016/j.jfa.2013.08.034。MR3110504 ↑4, 55[Mok15] C. P. Mok, *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*，《美国数学会回忆录》235 (2015)，第 1108 号，vi+248，DOI 10.1090/memo/1108。MR3338302 ↑3, 4, 6, 21, 22[MVW87] C. Mœglin、M-F. Vign´eras 和 J-L. Waldspurger, *Correspondances de Howe sur un corps p-adique*，《数学讲义》第 1984 卷，Springer Berlin, Heidelberg，1987。↑3[MW95] C Moeglin 和 J. L. Waldspurger, *Spectral Decomposition and Eisenstein Series: A Paraphrase of theScriptures*，《剑桥数学论丛》，剑桥大学出版社，剑桥，1995。↑14[M¨ul89] W. M¨uller, *The trace class conjecture in the theory of automorphic forms*，《数学年刊》第二辑 130 (1989)，第 3 期，473–529，DOI 10.2307/1971453。Zbl 0701.11019 ↑15[M¨ul02] , *On the spectral side of the Arthur trace formula*，《几何与泛函分析》GAFA 12 (2002)，第 4 期，669–772，DOI 10.1007/s00039-002-8263-7。Zbl 1169.11313 ↑15[Ram18] D. Ramakrishnan, *A Theorem on GL(n) a la Tchebotarev*，2018。arXiv:1806.08429 ↑3, 22, 43[Rod75] F. Rodier, *Modèle de Whittaker et caractères de représentations* (1975)（法文）。Zbl 0339.22014 ↑57[SV17]Y. Sakellaridis 和 A. Venkatesh, *Periods and harmonic analysis on spherical varieties*，《Ast´erisque》第 396 卷，法国数学会（SMF），巴黎，2017。Zbl 1479.22016 ↑57[Sun12] B. Sun, *Multiplicity one theorems for Fourier-Jacobi models*，《美国数学杂志》134 (2012)，第 6 期，1655–1678，DOI 10.1353/ajm.2012.0044。MR2999291 ↑55[Tad88]M. Tadi´c, *Geometry of dual spaces of reductive groups (non-Archimedean case)*，《数学分析杂志》51 (1988)，139–181，DOI 10.1007/BF02791122。Zbl 0664.22010 ↑44[Var77] V. S. Varadarajan, *Harmonic analysis on real reductive groups*，《数学讲义》第 576 卷，Springer Berlin, Heidelberg，1977。↑54[Wal03] J.-L. Waldspurger, *La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques (d'après Harish-Chandra)*，《Jussieu 数学研究所杂志》2 (2003)，第 2 期，235–333，DOI 10.1017/S1474748003000082（法文，附法文摘要）。MR1989693 ↑52, 54[Wei82] A. Weil, *Adeles and Algebraic Groups*，《数学进展》第 23 卷，Birkh¨auser Boston，马萨诸塞州，1982。↑10[Yun11] Z. Yun, *The fundamental lemma of Jacquet and Rallis*，《杜克数学杂志》156 (2011)，第 2 期，167–227，DOI 10.1215/00127094-2010-210。附录由 Julia Gordon 撰写。MR2769216 ↑2, 38[Xue14] H. Xue, *The Gan-Gross-Prasad conjecture for* $\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n)$，《数学进展》262 (2014)，1130–1191，DOI 10.1016/j.aim.2014.06.010。MR3228451 ↑2, 38[Xue16] , *Fourier–Jacobi periods and the central value of Rankin–Selberg L-functions*，《以色列数学杂志》212 (2016)，第 2 期，547–633，DOI 10.1007/s11856-016-1300-2。MR3505397 ↑2, 4, 6, 40, 46, 47, 57[Xue17] H. Xue, *Refined global Gan-Gross-Prasad conjecture for Fourier-Jacobi periods on symplectic groups*，《组合数学》153 (2017)，第 1 期，68–131，DOI 10.1112/S0010437X16007752。MR3622873 ↑2

[Xue19] H. Xue,
On the global Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups: approximating smooth transfer of Jacquet-Rallis, 《纯粹与应用数学杂志》756（2019），65–100，DOI 10.1515/crelle-2017-0016。MR4026449↑2，38[Xue24]，
Fourier-Jacobi models for real unitary groups，《泛函分析杂志》287（2024），第12期，41，DOI 10.1016/j.jfa.2024.110645。编号/No 110645。Zbl 1556。22010 ↑4，48[Zel80] A. V. Zelevinsky,
Induced representations of reductive p-adic groups. II: On irreducible representations of GL（n），《高等师范学校科学汇刊》。《高等师范学校年鉴》13（1980），165–210，DOI 10.24033/asens.1379，网址：https://eudml.org/doc/82048。Zbl 0441。22014 ↑57[Zha14a] W. Zhang,
Fourier transform and the global Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups，《数学年刊》（第2辑）180（2014），第3期，971–1049。MR3245011 ↑2，38[Zha14b]，
Automorphic period and the central value of Rankin-Selberg L-function，《美国数学学会杂志》27（2014），第2期，541–612，DOI 10.1090/S0894-0347-2014-00784-0。MR3164988 ↑2，47[Zha21] W. Zhang,
Weil representation and arithmetic fundamental lemma，《数学年刊》（第2辑）193（2021），第3期，863–978，DOI 10.4007/annals.2021.193.3.5。MR4250392 ↑38[Zyd20]M. Zydor,
Les formules des traces relatives de Jacquet-Rallis grossières，《纯粹与应用数学杂志》762（2020），195–259，DOI 10.1515/crelle-2018-0027（法文，附英文和法文摘要）。MR4195660 ↑7

Paul Boisseau, Max Planck Institute for Mathematics, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany
Email address: boisseau@mpim-bonn.mpg.de

Weixiao Lu, Aix Marseille Univ, CNRS, I2M, Marseille, 13009, France
Email address: weixiao.lu@univ-amu.fr

Hang Xue, Department of Mathematics, The University of Arizona, Tucson, AZ, 85721, USA
Email address: xuehang@arizona.edu