arXiv:2601.01741v1 [math.DS] 5 Jan 2026

潜空间单元方法

Seung Whan Chung
应用科学计算中心 劳伦斯利弗莫尔国家实验室 利弗莫尔，加利福尼亚州 94550 chung28@llnl.gov

Youngsoo Choi
应用科学计算中心 劳伦斯利弗莫尔国家实验室 利弗莫尔，加利福尼亚州 94550 choi15@llnl.gov

Christopher Miller
材料科学部
劳伦斯利弗莫尔国家实验室
利弗莫尔，加利福尼亚州 94550
miller279@llnl.gov

H. Keo Springer
材料科学部
劳伦斯利弗莫尔国家实验室
利弗莫尔，加利福尼亚州 94550
springer12@llnl.gov

Kyle T.Sullivan材料科学部 劳伦斯利弗莫尔国家实验室 利弗莫尔，加利福尼亚州 94550
sullivan34@llnl.gov

摘要

如何构建一种代理求解器，使其能够在小区域上进行训练，却无需侵入式访问偏微分方程算子即可扩展到更大的区域？受用于模块化数据驱动求解器的数据驱动有限元方法（DD-FEM）框架启发，我们提出了潜空间单元方法（LSEM）：一种基于单元的潜在代理组装方法，其中，经过学习的子域（“单元”）模型可以进行平铺和耦合，从而构成更大的计算域。每个单元都是一个 LaSDI 潜在常微分方程代理模型，由局部补丁上的快照训练而成；相邻元素则通过潜在空间中学习得到的定向交互项进行耦合，从而避免 Schwarz迭代和界面残差评估。通过平滑的基于窗口的混合，可根据重叠单元的预测结果重构全局场，进而得到一个可扩展的组装式潜在动力系统。在一维 Burgers 方程和 Korteweg-de Vries方程上的实验表明，LSEM 在扩展到训练数据未覆盖的更大空间区域时，仍能保持预测精度。LSEM 为构建由可复用局部模型组成的基础模型代理求解器，提供了一条具有可解释性且可扩展的路径。

1 引言

大语言模型（LLMs）的迅速演化——包括 ChatGPT、Gemini、Claude 等——展现了基础模型的变革性潜力。这类模型基于海量数据构建，能够在极其广泛的任务中进行通用推理。大语言模型的成功自然激发了人们对计算科学基础模型的兴趣，也引出了一个问题：科学模拟能否从同样通用、可复用且高度可扩展的模型中获益？然而，计算科学中的基础模型与自然语言处理领域的模型在几个根本方面有所不同 [1]。大语言模型优先考虑对非结构化文本的语义泛化，而科学基础模型则必须复现支配性物理定律、保持稳定性并实现可控精度，同时还要比传统数值求解器快几个数量级

。这一目标转变重新界定了设计标准：科学基础模型不仅必须具有强大的表达能力，还必须符合物理规律、适应不同几何形状，并具备高计算效率。

近年来，科学机器学习（SciML）领域提出了多种前景广阔的数据驱动和算子学习方法。SINDy [2] 提出了从数据中稀疏发现控制方程的方法。傅里叶神经算子（FNO） [3] 和广义神经算子框架 [4]等神经算子，展现出出色的精度，并能以与网格无关的方式学习偏微分方程解算子。DeepONet [5] 还为学习非线性算子确立了理论上的普适性。尽管这些方法显著加速了偏微分方程代理建模，但大多数模型都在固定区域上训练，因此缺乏实现可扩展科学基础模型所需的几何灵活性。

另一条研究路线聚焦于数据驱动有限元方法（DD-FEM） [1], ，它提供了一种模块化且可解释的替代方案。DD-FEM 将降阶模型（ROMs）用作可重复利用的单元级求解器，并通过区域分解将其组装起来，从而支持在任意几何形状或扩展区域上进行预测。其应用包括热传递 [6], 、基于降阶模型的晶格设计 [7, 8], 、可扩展的含时偏微分方程求解器 [9, 10], 、非线性流形降阶模型 [11, 12], 以及改进的基于Schwarz方法的耦合策略 [13]。这些研究表明，由降阶模型赋能的有限元构成了一个有前景的蓝图，可用于构建计算科学领域具备几何灵活性的基础模型。

然而，现有的所有 DD-FEM 方法仍然是侵入式的，需要深入访问底层高保真求解器，以提取快照、残差和全阶算子。这种侵入性虽然提供了理论上的严谨性，却也带来了显著的开销：专有求解器的访问权限可能受到限制，而构建侵入式降阶模型往往需要投入大量工程工作，甚至从头开发全阶模型。这些局限促使人们开发一种非侵入式单元框架，在消除对侵入式求解器依赖的同时，保留 DD-FEM 在几何方面的灵活性。
然而，非侵入式模型也带来了自身的挑战。大多数科学机器学习模型都基于固定几何形状进行训练，因此无法自然地泛化到未见过的空间构型或更大的域尺寸。一些近期研究尝试通过迭代耦合来解决这一问题：例如，Wang 等人 [14] 采用深度神经算子结合 Schwarz交替法，但迭代次数会随域尺寸增大而迅速增加。Ouyang 等人 [15] 将神经算子单元（NOE）嵌入经典有限元求解器中，但未能展示完全由 NOE 驱动的全局预测。因此，能够组装任意几何形状的实用、可扩展非侵入式 DD-FEM 流程仍然缺失。

在本文中，我们提出潜空间单元方法（LSEM）：一种新的区域分解有限元框架，采用非侵入式潜在空间动力学模型——潜在空间动力学识别（LaSDI） [16–23]——作为单元求解器，从而无需迭代 Schwarz过程或访问侵入式求解器，即可实现对几何形状和尺度具有泛化能力的预测。

To a为实现几何与尺度灵活性，我们围绕若干关键
原则

1. **可复用的潜在空间单元模型**。每个单元均由一个 LaSDI 模型表示，该模型学习描述其局部潜在动力学的紧凑常微分方程。这些单元模型在参考子域上进行训练，并可在任意全局构型中重复使用。 2. **平滑的界面组装**。相邻单元通过基于窗口的插值进行耦合，在重叠区域内实现平滑过渡和连续性，使单元能够在无需重新训练的情况下排列成新的几何形状。 3. **相互作用动力学学习**。相邻单元的潜变量通过学习得到的相互作用模型进行通信，实现信息流，其行为模拟经典偏微分方程求解器中的单元间通量或耦合。 4. **可扩展的全局演化**。通过将所有局部潜在动力学组装成一个块结构潜在常微分方程系统，推进全局系统，从而支持扩展到远大于训练数据所用区域的区域。

这些设计机制使潜空间单元能够以类似经典有限元的方式发挥作用：只需训练一次，即可任意组装，并能在训练过程中从未见过的几何形状和尺度上进行准确预测。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍方法，包括潜在动力学识别、界面处理和交互建模。第 3 节通过 Burgers 方程和 KdV 方程展示该方法，体现其出色的几何可扩展性。第 4 节总结全文，并探讨计算科学中基础建模的未来方向。

2 方法论

2.1 潜在空间动力学识别

潜在空间动力学识别（LaSDI）为我们的非侵入式单元模型奠定了基础。LaSDI 的目标是学习一个低维动力系统，使其演化能够准确表示高维物理状态变量的演化。令$\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^N$表示在单个物理域 Ω 的固定网格点上定义的状态变量，

$$\mathbf{q}(t) = \begin{pmatrix} q(\mathbf{x}_1, t) & q(\mathbf{x}_2, t) & \cdots & q(\mathbf{x}_N, t) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

for 一个标量变量 $q(\mathbf{x}\ t)$。向量变量的扩展应该很直接。令 th e trai训数据由一系列快照的时间序列组成，

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}(t_1) & \mathbf{q}(t_2) & \cdots & \mathbf{q}(t_{N_t}) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

LaSDI 首先使用自编码器（AE）学习物理状态的非线性低维嵌入。AE 由编码器 $\mathrm{En}(\mathbf{q}; \theta)$ 和解码器 $\mathrm{De}(\mathbf{z}; \theta)$ 组成，其参数为神经网络权重 θ。编码器将高维状态映射到潜变量$\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^{N_z}$，其中 $N_z \ll N$:

$$\mathbf{z} = \mathrm{En}(\mathbf{q}; \theta), \tag{3a}$$

解码器重构物理状态，

$$\mathbf{q} = \mathrm{De}(\mathbf{z}; \theta). \tag{3b}$$

尽管 LaSDI 不受 AE 架构限制，但为保持简洁性和可复现性，本文对编码器和解码器均采用全连接神经网络。

对物理轨迹进行编码后，LaSDI 将潜变量$\mathbf{z}(t)$的时间演化建模为一阶常微分方程（ODE）：

$$\dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{z}). \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^M$ 是由$\mathbf{z}$ 的候选非线性函数（例如多项式、交互项）组成的特征库，$\boldsymbol{\Xi} \in \mathbb{R}^{N_z \times M}$ 是待学习的系数矩阵。该公式与非线性动力学稀疏辨识（SINDy） [2], 的结构相似，但动力学辨识直接在潜在空间中进行，在该空间中，降阶系统的控制行为往往显著简单。

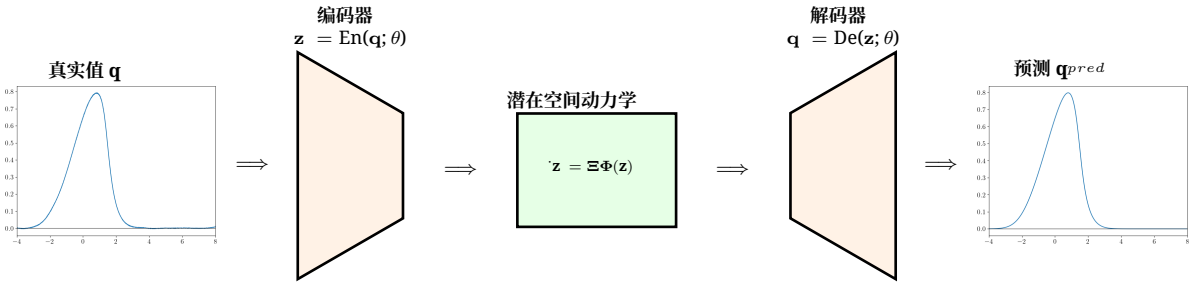


图1：潜在动力学辨识框架示意图：自编码器将高维状态 $\mathbf{q}$ 映射为低维潜变量 $\mathbf{z}$，其演化由学习得到的潜在常微分方程 $\dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{z})$ 所支配。随后，预测得到的潜在轨迹经解码后重构出物理状态，从而实现对复杂动力系统的高效降阶建模。

图1展示了 LaSDI 流程的总体示意图。简而言之，自编码器提供了一种非线性坐标变换，用于压缩物理状态；而潜在常微分方程则捕捉其关键的时间演化。

LaSDI 的训练过程包含三个主要组成部分：

1. **自编码器（AE）损失**。
   编码训练轨迹

$$\mathbf{Z} \equiv (\mathbf{z}(t_1) \quad \mathbf{z}(t_2) \quad \cdots \quad \mathbf{z}(t_{N_t})) = \mathrm{En}(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^{N_z \times N_t}. \tag{5}$$

   被解码回物理空间。自编码器的重构误差通过均方误差 (MSE) 衡量：

$$\mathcal{J}_{AE} = \mathrm{MSE}(\mathbf{Q}, \mathrm{De}(\mathbf{Z})). \tag{6}$$

2. **潜在动 y力学 (LD) 损失**。
   为确保潜在轨迹遵循常微分方程 (4)，我们强制要求学习得到的右端与有限差分时间导数保持一致：

$$\mathcal{J}_{LD} = \mathrm{MSE}(\mathbf{D}_t \mathbf{Z}^\top, \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{Z})^\top \boldsymbol{\Xi}^\top), \tag{7}$$

   其中 $\mathbf{D}_t \in \mathbb{R}^{N_t \times N_t}$ 是用于计算时间导数的有限差分算子。

3. **正则化**。
   可选地，为避免过拟合或病态动力学，可以对 $\boldsymbol{\Xi}$施加正则化惩罚项：

$$\mathcal{J}_{reg} = \|\boldsymbol{\Xi}\|^2. \tag{8}$$

   不过，在本研究中采用了不同的正则化损失，后续章节将对此进行介绍。

总损失是加权组合：

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_{AE} + \alpha_{LD}\mathcal{J}_{LD} + \alpha_{reg}\mathcal{J}_{reg}. \tag{9}$$

其中，超参数 α_{LD} 和 α_{reg} 控制动力学保真度和稳定性的相对重要性。

对于单个区域，上述过程可得到一个能够重构和推进物理状态的高效降阶模型。然而，要将 LaSDI 作为区域分解框架中的单元模型，还需要额外的组件：(i) 用于在重叠区域中编码和重构子域状态的方法，以及 (ii) 用于建模单元间相互作用的学习机制。这些扩展将在后文介绍。

2.2 通过光滑窗插值处理界面

要将 LaSDI 从单区域建模扩展到几何形状灵活的 DD-FEM 框架，我们必须使逐单元潜变量模型能够组合成协调一致的全局预测。每个单元模型都定义在一个单位参考子域上，而全局构型则通过将这些参考子域平铺到任意几何形状上构建（见图2）。相邻子域彼此重叠，并通过光滑窗插值机制重构全局状态，从而保持界面处的连续性和光滑性。

每种参考子域类型 r 都分配有各自的自编码器，使该框架能够适应异质几何或材料区域。对于类型为 r（m）的子域 m，其局部状态变量的编码和解码方式如下：

$$\mathbf{z}_r = \mathrm{En}_r(\mathbf{q}_r; \theta_r) \tag{10a}$$

$$\mathbf{q}_r = \mathrm{De}_r(\mathbf{z}_r; \theta_r). \tag{10b}$$

其中，$\mathbf{q}_m \in \mathbb{R}^{N_m}$ 表示与子域 m 相关联的局部物理状态。实际上，这些子域构成了基本构件，可用于组装任意大型或几何形状复杂的构型。

给定定义在组装后区域 Ω 上的全局状态 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$，局部子域状态 $\mathbf{q}_m$ 可通过限制算子获得：

$$\mathbf{q}_m = \mathbf{R}_m \mathbf{q}, \tag{11}$$

其中，$\mathbf{R}_m \in \mathbb{R}^{N_m \times N}$ 提取子域网格上的自由度。尽管为便于记号表示而将其写成矩阵形式，但该操作实际上是根据子域索引直接对$\mathbf{q}$ 进行切片。

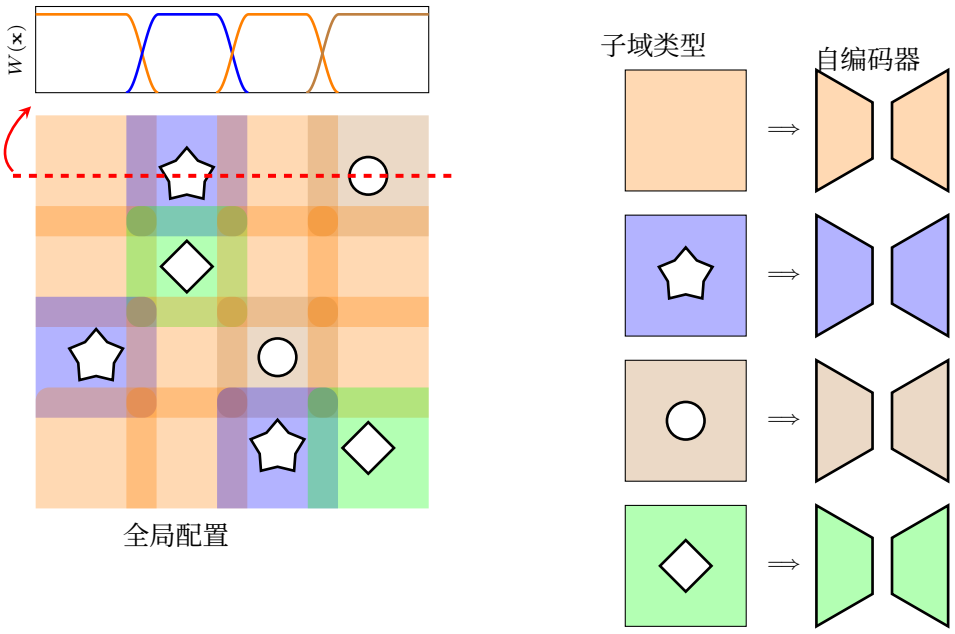


图2：所提出的 LSEM 框架中界面处理的示意图：将局部自编码器分配给参考子域类型，并通过以重叠区域平铺这些子域来构建全局构型。光滑窗函数 $W(\mathbf{x})$ 对重构的子域解进行融合，确保单元界面处的连续性和平滑过渡。

编码后，每个潜变量$\mathbf{z}_m$ 都在全局潜在动力学模型下演化（该模型在第2.3节中介绍）。随后重构得到的单元状态$\mathbf{q}_m$ 必须合并为一个全局场。

子域重叠对于在无需额外求解方程的情况下保证单元边界处的连续性和光滑性至关重要。为合并重构的子域状态，我们通过对单元贡献进行加权叠加来构建全局重构：

$$\mathbf{q} = \sum_m \mathbf{R}_m^\top \mathrm{diag}(W_m(\mathbf{x}_m))\mathbf{q}_m. \tag{12}$$

此处，$\mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^{N_m \times d}$ 表示子域 m 的坐标，而 $W_m : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ 是一个在子域边界处衰减至零的光滑窗函数。窗函数在区域内满足单位分解，即

$$\sum_m W_m(\mathbf{x}) = 1 \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \tag{13}$$

这种平滑衰减确保重叠子域之间能够无缝插值，从而生成全局连续且可微的场，同时避免引入人为的突变或振荡。

例如，在重叠长度为 L_b 的一维子域 $[x_m, x_{m+1}]$ 上，

$$W_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\pi \frac{x - x_m}{L_b}\right) & x \in [x_m, x_m + L_b] \\ 1 & x \in [x_m + L_b, x_{m+1} - L_b] \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\pi \frac{x - x_{m+1}}{L_b}\right) & x \in [x_{m+1} - L_b, x_{m+1}] \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{14}$$

这种基于余弦的窗函数使单元边界处具有 C^1 连续性，并符合重叠区域分解和单位分解有限元方法中的既有做法。

2.3 单元间相互作用动力学建模

要将局部 LaSDI 单元模型组装成协调一致的全局系统，不仅需要对每个单元的内部动力学建模，还需要对相邻单元之间的相互作用进行建模。

尽管每个子域都有自己的编码器、解码器和潜在演化定律，但由此得到的单元并非孤立地演化；它们的潜变量必须交换信息，其方式类似于传统区域分解或有限体积方法中的通量项或耦合项。本节旨在说明我们如何直接在潜在空间中引入这些相互作用。

为简化起见，我们假设所有子域都采用相同的潜在动力学形式，而不考虑子域类型。这一假设体现了这样的物理预期：控制偏微分方程在任何位置都相同，而局部几何上的差异可由元素特定自编码器捕捉，无需修改潜在常微分方程结构。不过，这一假设并非必不可少；如果不同物理机制或材料模型要求各单元具有异质动力学，则可以放宽这一假设。

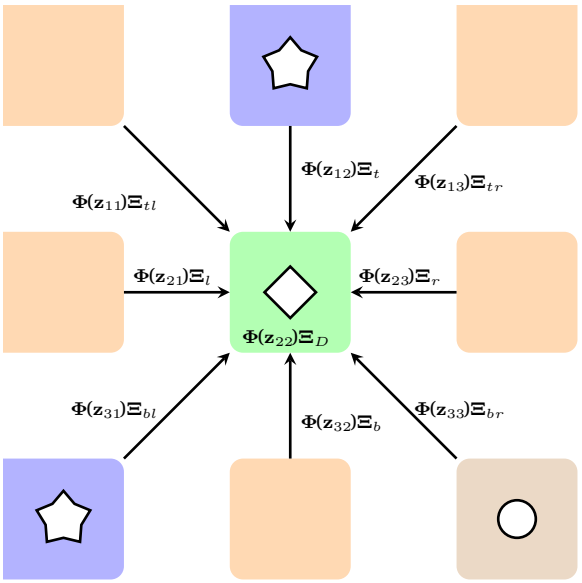


图3：相邻潜在空间元素之间交互动力学建模示意图：每个单元的潜变量根据其内部动力学以及相邻单元的贡献而演化，这些贡献由方向系数块表示（例如 Ξ_t, Ξ_l,Ξ_{br}）。这种结构使模型能够捕捉单元间的信息流，并构建连贯的全局潜在动力学算子。

考虑图3所示配置中位于位置 (2,2) 的单元。其潜变量 $\mathbf{z}_{22}$ 根据内部动力学与相邻单元的相互作用贡献的组合而演化：

$$\dot{\mathbf{z}}_{22} = \underbrace{\Xi_D \mathbf{\Phi}(\mathbf{z}_{22})}_{\text{internal dynamics}} + \underbrace{\mathbf{f}[\mathbf{z}_{22}; \mathbf{N}(\mathbf{z}_{22})]}_{\text{interaction dynamics}}, \tag{15}$$

其中， Ξ_D 是控制内部潜在动力学的系数矩阵， $\mathbf{\Phi}(\cdot)$是潜在特征库，并且

$$\mathbf{N}(\mathbf{z}_{22}) = \{\mathbf{z}_{11}, \mathbf{z}_{12}, \mathbf{z}_{13}, \mathbf{z}_{21}, \mathbf{z}_{23}, \mathbf{z}_{31}, \mathbf{z}_{32}, \mathbf{z}_{33}\} \tag{16}$$

表示与八个相邻单元相关联的潜变量集合。函数$\mathbf{f}$刻画相邻状态如何影响$\mathbf{z}_{22}$的演化。

构建$\mathbf{f}$ 的一种最简单且最有效的方法，是使用另一个LaSDI类项对每个相邻单元的贡献进行建模，从而得到

$$\mathbf{f} = \sum_{\mathbf{z}_n \in \mathbf{N}(\mathbf{z}_{22})} \Xi_{\text{dir}(\mathbf{z}_n; \mathbf{z}_{22})} \mathbf{\Phi}(\mathbf{z}_n), \tag{17}$$

其中，方向索引 $\text{dir}(\mathbf{z}_n;\ \mathbf{z}_{22}) \in \{tl, t, tr, l, r, bl, b, br\}$ 用于指定相邻元素相对于元素（2，2）位于左上、上、右上等位置。这种方向索引

使学习到的交互能够区分例如从左到右的平流和从上到下的传播。在具有主导流动方向的双曲型系统中，相应的方向矩阵（例如 $\boldsymbol{\Xi}_r$ 或 $\boldsymbol{\Xi}_l$）自然会获得更大的幅值，使潜变量模型能够模拟迎风通量行为。

当然，更复杂的系统可能需要更丰富的相互作用形式，尤其是在流动方向不占主导地位或随时间显著变化时。在这种情况下，相互作用也可以包含中心单元本身的贡献：

$$\mathbf{f} = \sum_{\mathbf{z}_n \in \mathbf{N}(\mathbf{z}_{22})} \boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{dir}(\mathbf{z}_n;\mathbf{z}_{22})} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{z}_n) + \boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{dir}(\mathbf{z}_{22};\mathbf{z}_n)} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{z}_{22}). \tag{18}$$

这种双向形式增强了表达能力，使潜在动力学模型能够模拟数值通量机制，例如有限体积方法中使用的拉克斯–弗里德里希通量。

矩阵 $\boldsymbol{\Xi}_D$ 和所有方向矩阵 $\boldsymbol{\Xi}_{dir}$ 共同构成全局动力学算子的基本构件。当单元组装成更大的配置时，这些构件会按照迎风模型 (17) 排列成全局系数矩阵 $\boldsymbol{\Xi}$，

$$\boldsymbol{\Xi} = \begin{pmatrix}
\boldsymbol{\Xi}_D & \boldsymbol{\Xi}_r & & & \boldsymbol{\Xi}_b & \boldsymbol{\Xi}_{br} & & & \\
\boldsymbol{\Xi}_l & \boldsymbol{\Xi}_D & \boldsymbol{\Xi}_r & & \boldsymbol{\Xi}_{bl} & \boldsymbol{\Xi}_b & \boldsymbol{\Xi}_{br} & & \\
 & \boldsymbol{\Xi}_l & \boldsymbol{\Xi}_D & \boldsymbol{\Xi}_r & & \boldsymbol{\Xi}_{bl} & \boldsymbol{\Xi}_b & \boldsymbol{\Xi}_{br} & \cdots \\
 & & \boldsymbol{\Xi}_l & \boldsymbol{\Xi}_D & & & \boldsymbol{\Xi}_{bl} & \boldsymbol{\Xi}_b & \\
\boldsymbol{\Xi}_t & \boldsymbol{\Xi}_{tl} & & & \boldsymbol{\Xi}_D & \boldsymbol{\Xi}_r & & & \\
\boldsymbol{\Xi}_{tr} & \boldsymbol{\Xi}_t & \boldsymbol{\Xi}_{tl} & & \boldsymbol{\Xi}_l & \boldsymbol{\Xi}_D & \boldsymbol{\Xi}_r & & \\
 & \boldsymbol{\Xi}_{tr} & \boldsymbol{\Xi}_t & \boldsymbol{\Xi}_{tl} & & \boldsymbol{\Xi}_l & \boldsymbol{\Xi}_D & \boldsymbol{\Xi}_r & \cdots \\
 & & \boldsymbol{\Xi}_{tr} & \boldsymbol{\Xi}_t & & & \boldsymbol{\Xi}_l & \boldsymbol{\Xi}_D & \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots
\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{16N_z \times 16M}. \tag{19}$$

这种块结构组织编码了有关局部动力学、邻居相互作用和单元连接关系的所有信息。

对于潜在动力学，所有子域潜变量都合并为一个全局潜变量，

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}_{11}, \mathbf{z}_{12}, \mathbf{z}_{13}, \mathbf{z}_{14}, \mathbf{z}_{21}, \ldots, \mathbf{z}_{44}) \in \mathbb{R}^{16N_z}. \tag{20}$$

全局特征库 $\boldsymbol{\Phi}$**(z)**由各单元的特征库构成，

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{z}) = (\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{z}_{11}), \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{z}_{12}), \ldots, \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{z}_{44})) \in \mathbb{R}^{16M}. \tag{21}$$

Co结合全局特征库 $\boldsymbol{\Phi}$（$\mathbf{z}$）后，所得的全局动力学模型形式为

$$\dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{z}). \tag{22}$$

通过这种方式，潜变量相互作用可以直接从数据中学习，从而实现跨单元边界的信息传递，而无需进行侵入式通量计算或迭代式 Schwarz 型过程。这种潜空间耦合最终使单元模型能够协同运行，构成与底层物理动力学一致的大规模、几何灵活的替代模型。

2.4 重参数化技术

当 LaSDI 作为单元模型应用于大型组装式 DD-FEM 系统时，潜变量必须在时间积分过程中保持稳健演化。然而，标准自编码器在过拟合时通常会表现出潜在空间敏感性：$\mathbf{z}$ 中的微小扰动可能解码为物理状态 $\mathbf{q}$中的大幅扰动。由于这种敏感性，即使是很小的积分误差也可能激发非物理模态，从而导致重构不准确。为缓解这些问题，我们引入了一种受变分自编码器某个组成部分启发的重参数化技术。

核心思路是在训练过程中让解码器接触受到扰动的潜变量，迫使自编码器学习在微小偏差下仍保持稳定的表示。我们不再使用精确编码得到的潜在轨迹$\mathbf{Z}$来计算重构损失，而是添加随机扰动，并训练解码器从这些带噪输入中准确重构物理状态：

$$\mathcal{J}_{AE} = \mathrm{MSE}(\mathbf{Q}, \mathrm{De}(\mathbf{Z} + \delta\mathbf{Z})). \tag{23}$$

噪声 $\delta\mathbf{Z} = (\delta\mathbf{z}(t_1)\ \delta\mathbf{z}(t_2)\dots,\delta\mathbf{z}(t_{N_t})) \in \mathbb{R}^{N_z\times N_t}$ 由从正态分布中抽取的瞬时噪声项组成，

$$\delta\mathbf{z}(t)\sim\mathcal{N}(0,\epsilon(t)^2). \tag{24}$$

我们不预先设定固定的噪声幅度，而是根据潜在 ODE 模型的动力学残差自适应地确定标准差 $\epsilon(t)$。利用编码后的训练轨迹 $\mathbf{Z}$，我们评估有限差分时间导数与潜在 ODE 预测之间的差异：

$$\mathrm{RMS}(\mathbf{D}_t\mathbf{Z}^\top-\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{Z})^\top\boldsymbol{\Xi}^\top). \tag{25}$$

该残差为时间积分过程中可能出现的局部误差提供了自然的度量。因此，我们将随时间变化的噪声水平定义为

$$\epsilon(t)=\beta\frac{t}{\Delta t}\mathrm{RMS}(\mathbf{D}_t\mathbf{Z}^\top-\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{Z})^\top\boldsymbol{\Xi}^\top), \tag{26}$$

其中，β 是一个可调超参数，用于控制正则化的强度。

这种构造带来两个理想效果。首先，由于扰动随时间线性增长，它模拟了稳定线性系统在数值积分中自然出现的放大效应，确保解码器经过训练，能够应对预测过程中出现的各类偏差。其次，重参数化有效地平滑了潜在流形，避免解码器对精确编码值构成的狭窄子流形过拟合。因此，潜在表示对积分漂移和建模缺陷更加鲁棒。

尽管该技术类似于变分自编码器中使用的噪声注入，但我们强调，我们并未加入 KL 散度正则化。KL 散度通过添加额外约束来正则化潜在空间分布；然而，数值实验表明，噪声注入足以平滑潜在空间，同时不会对优化施加过多约束。相反，噪声通过拓宽训练期间采样的潜在分布来提高稳定性，并促使彼此接近的潜在状态解码为物理上一致的场。在实践中，这显著降低了出现非物理伪影的风险。

2.5 训练中的正则化

可靠的潜在空间动力学有一项关键要求：学习得到的常微分方程在向前进行时间积分时必须保持数值稳定，尤其是在大型组装构型中，因为建模误差可能会在许多相互作用的单元间传播。尽管第2.4节中的重参数化技术通过对自编码器进行正则化提高了鲁棒性，但训练过程中也必须确保潜在动力学本身的稳定性。为此，我们采用正则化策略，对学习得到的系数矩阵中的不稳定行为进行惩罚。

当特征库 $\boldsymbol{\Phi}$ 仅包含线性项时，全局潜在动力学可简化为一个线性系统，其稳定性可通过特征值分析直接评估。在这种情况下，我们计算式（22）中算子的特征值 $\Lambda(\boldsymbol{\Xi})$，并对实部为正的特征值进行惩罚：

$$\mathcal{J}_{reg}=\mathrm{ReLU}(\mathrm{Re}(\Lambda(\boldsymbol{\Xi})))^2. \tag{27}$$

这一项确保学习得到的算子不会引入呈指数增长的潜在模式，从而保证训练构型和未见构型的时间积分均保持稳定。

对于非线性特征库——捕捉复杂偏微分方程行为时通常需要用到这类特征库——直接进行特征值分析已不再适用，因为完整非线性系统的稳定性取决于 $\mathbf{z}(t)$，因而会随时间变化。在这种情况下，我们采用基于能量的正则化方法，评估沿编码训练轨迹的潜在状态能量瞬时变化率。对于每个快照 $\mathbf{z}(t_k)$，潜在动力学（22）的能量增长率为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\|\mathbf{z}(t_k)\|^2}{2}\right)=\mathbf{z}(t_k)^\top\dot{\mathbf{z}}(t_k)=\mathbf{z}(t_k)^\top\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{z}(t_k)). \tag{28}$$

对所有快照中的这些贡献取平均，即可得到正则化项

$$\mathcal{J}_{reg}=\frac{1}{N_t}\sum_k^{N_t}\mathrm{ReLU}\left(\mathbf{z}(t_k)^\top\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{z}(t_k))\right). \tag{29}$$

惩罚该量的正值，可以抑制潜在动力学沿训练轨迹增加能量，从而提升稳定性，而无需进行显式线性化。

这两种正则化形式——用于线性系统的基于特征值的正则化，以及用于非线性系统的基于能量的正则化——目的相同：防止学习到的潜在动力学偏离并进入不稳定状态。将这些正则化项纳入完整的训练目标后，LaSDI 模型不仅能拟合观测到的动力学，还能以符合底层物理系统稳定性特征的方式演化。

2.6 总体训练流程

由于该方法旨在推广到任意全局几何构型，训练数据由多个构型组成，这些构型均由同一组参考单元构成。每个构型都提供一条高维物理状态时间序列，我们从中提取子域级信息，并组装相应的全局潜在轨迹。

假设给定 N_{train} 个训练仿真，每个仿真均定义在由 R 种参考单元类型构成的区域上。对于仿真 n，全局物理轨迹 $\mathbf{Q}^{(n)}$ 根据式 (11) 中的限制规则分解为子域状态 $\mathbf{q}_m^{(n)}$。随后，将每个子域状态编码为其潜在表示，具体如下：

$$\mathbf{z}_m^{(n)} = \mathrm{En}_{r(m)}(\mathbf{q}_m^{(n)}; \theta_r), \tag{30}$$

生成一组潜在轨迹，这些轨迹共同构成全局潜在轨迹$\mathbf{Z}^{(n)}$。基于这些轨迹，我们计算逐单元特征评估 $\mathbf{\Phi(Z}^{(n)})$，并按照式（22）中描述的块结构组装全局动力学矩阵 $\mathbf{\Xi}$。这一过程确保每个训练构型都能为所有内部和方向动力学块提供信息，使模型无论最终组装几何构型如何，都能学习到一致的相互作用。

有了潜在轨迹和全局动力学算子后，我们在所有训练仿真中计算潜在动力学损失，

$$\mathcal{J}_{LD} = \frac{1}{N_{train}} \sum_{n}^{N_{train}} \mathrm{MSE}(\mathbf{D}_t \mathbf{Z}^{(n)\top}, \mathbf{\Phi}(\mathbf{Z}^{(n)})^\top \mathbf{\Xi}^\top), \tag{31}$$

从而确保学习到的算子能够在异构构型下正确预测潜在时间导数。

与此同时，我们使用第2.4节介绍的重参数化公式计算自编码器重构损失。对于每个子域和每个训练仿真，我们向潜在轨迹添加噪声 $\delta\mathbf{Z}_m^{(n)}$，并通过解码获得重构状态。相应的损失为

$$\mathcal{J}_{AE} = \frac{1}{N_{train}} \sum_{n}^{N_{train}} \mathrm{MSE}(\mathbf{Q}_m^{(n)}, \mathrm{De}_{r(m)}(\mathbf{Z}_m^{(n)} + \delta\mathbf{Z}_m^{(n)})), \tag{32}$$

其中，求和涵盖所有训练仿真中的所有子域 m。值得注意的是，我们在子域层面局部评估重构质量，而非在全局层面进行评估。这样可以确保每个解码器都能学习捕捉其子域内的细尺度结构，同时将全局组装交由第2.2节的窗口机制处理。

为促进动力学稳定性，我们纳入了第2.5节所述的正则化项。对于每次训练模拟，其贡献为

$$\mathcal{J}_{reg} = \sum_{n}^{N_{train}} \mathrm{ReLU}(\mathrm{Re}(\Lambda(\mathbf{\Xi}^{(n)})))^2, \tag{33}$$

或其非线性替代形式（29），具体取决于所使用的特征库。

最后，将所有组成部分合并为全局训练目标，

$$\mathcal{J} = \alpha_{AE}\mathcal{J}_{AE} + \alpha_{LD}\mathcal{J}_{LD} + \alpha_{reg}\mathcal{J}_{reg}, \tag{34}$$

其中，权重 α_{AE}、 α_{LD}、 α_{reg} 分别用于平衡重建保真度、动力学精度和稳定性。优化变量包括每个参考元素的自编码器参数 θ_r

类型 $r = 1$、.....、 R 以及内部和方向性潜在动力学的全部系数矩阵。训练采用基于梯度的优化，在此过程中，模型将学习：(i) 如何压缩和重建子域状态；(ii) 如何使潜变量的演化与底层偏微分方程保持一致；以及 (iii) 如何以与几何无关的方式耦合各单元间的潜在动力学。

通过这一统一的训练过程，得到的 LaSDI 单元成为可重复使用的构建模块，能够组装成大型、任意形状的构型，同时保持稳定性和预测精度。

3 结果

3.1 一维 Burgers方程

我们首先考虑一维无黏伯格斯方程，将其作为一个最简测试案例，以展示所提出的 LSEM框架能够准确再现局部动力学，同时推广至远大于训练数据所涵盖范围的区域。这个示例在物理机制上刻意保持简单，但利用极少的训练数据实现扩展预测能力这一点颇具挑战性。

控制方程为

$$\frac{\partial q}{\partial t} + q\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{35}$$

该方程定义在一个具有齐次狄利克雷边界条件的空间区域上。所有训练仿真均在区域 $x \in [-4, 8]$ 上进行，时间区间为 $t \in [0, 1]$，离散为 $N_x = 2048$ 个网格点，时间步长为 $\Delta t = 10^{-3}$。全阶模型采用一阶迎风有限差分空间离散，并结合一阶隐式后向欧拉时间积分。

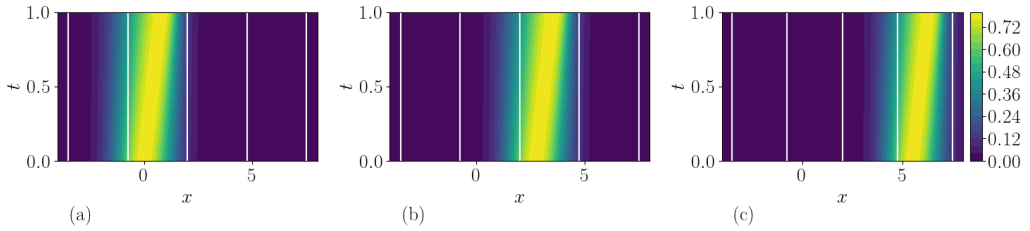


图4：一维Burgers方程的四单元训练数据集。白线表示单元界面。

为确保潜在相互作用模型能够捕捉定向传播，训练区域被划分为四个重叠单元。每个单元覆盖长度为 $L_e = \frac{14}{3}$ 的区域，包含639个网格点，其中包括重叠区域内的网格点。重叠宽度设为 $L_b = 1$。如图4所示，重叠区域的中点作为有效的单元界面。图5展示了窗函数 $W_m(x)$如何融合子域重构，从而形成平滑的全局解。

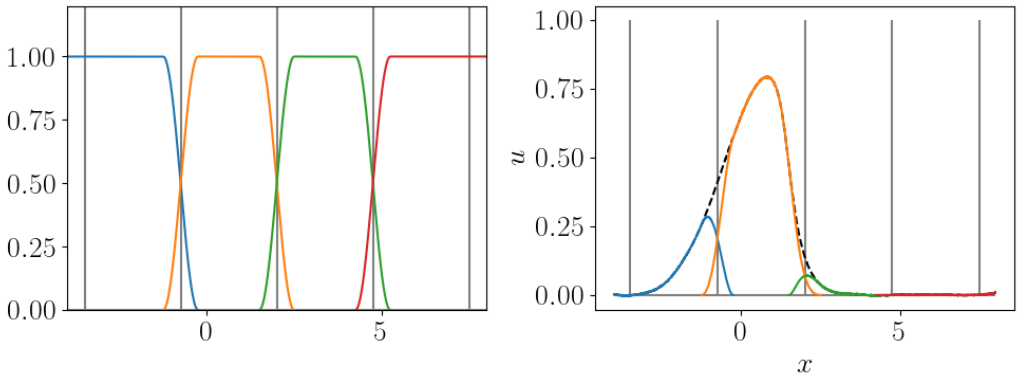
每次训练模拟的初始条件都是一个经过平移的高斯脉冲，

$$q(x, t = 0) = A \exp\left(-\frac{(x - x_n)^2}{w^2}\right), \tag{36}$$

其振幅为 $A = 0.8$，宽度为 $w = 1$。在不同训练过程中，平移量 x_n 按照以下方式变化：

$$x_n = 1.25 + nL_e, \qquad n = 1, 2, 3. \tag{37}$$

这种设计使初始条件的峰值位于每个单元内部相同的相对位置——具体来说，距其所属单元左侧界面 0.75 处——同时改变其全局坐标。因此，所有训练数据集中的子域级快照都变得相同，从而能够高效地训练自编码器和逐单元潜在动力学。另一方面，由于位置发生了偏移，全局潜在轨迹各不相同，确保全局动力学矩阵的所有分块



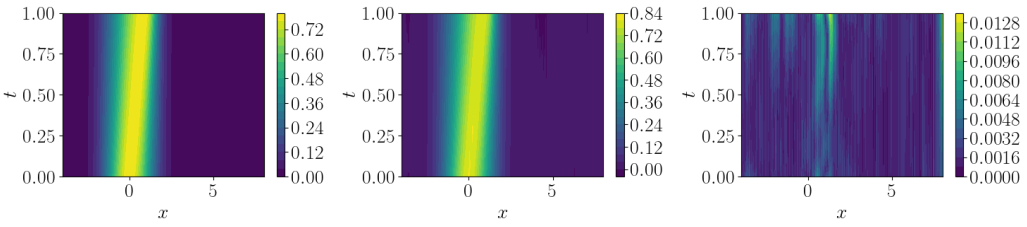
(a) $W_i(x)$ (b) $W_i(x)u_i(x)$

图5：四单元域上的解的组合：(a) 各单元的窗函数 $W_i(x)$ $i = 1, \ldots, 4$；(b) 逐单元贡献 $W_i(x)u_i(x)$，黑色虚线表示全局解 $u(x) = \sum_i W_i(x)u_i(x)$。灰线标示单元界面。

the 都能获得充足的训练数据，并使模型能够复现 th e sam位于任意单元位置的初始脉冲。

每个单元的潜在空间模型维度为 $N_z = 5$，所有单元共用同一种自编码器架构：编码器的各层大小为 $[639, 100, 30, 5]$，解码器则采用反向结构。全程使用 Softplus 激活函数。单元间动力学遵循单向单块公式 (17)；对于这个信息主要从左向右传播的简单解而言，该公式已足够。

使用 SOAP 优化器进行训练，共 2000 个训练轮次，学习率为 3×10^{-3}，损失权重为 $\alpha_A E = \alpha_{LD} = 1$、$\alpha_{reg} = 0$。由于动力学简单且特征集以线性成分为主，因此无需进行稳定性正则化。



(a) Ground truth (b) Prediction (c) Point-wise error

图6：四单元训练区域上的 Burgers方程再现预测：(a) 全阶模型（真实值）；(b) LSEM 预测；(c) 时空上的逐点绝对误差；(d) 比较全局预测（实线）与全阶解（虚线）的最终时刻快照。学习得到的潜在单元模型准确再现了初始脉冲的演化，误差在整个区域内始终较小。

图6展示了第一个训练数据集的再现预测。重构的全局解与全阶模型高度吻合，相对 L_2 误差为 0.51%，基于窗口的重构生成了平滑且连续的全局场。

为评估可扩展性，我们在一个比训练区域大三倍的区域 $x \in [-4, 32]$ 上测试训练好的模型，该区域被划分为 12 个单元。初始条件由三个高斯函数

脉冲组成：

$$q(x,t=0)=\sum_{k=1}^{3} A\exp\left(-\frac{(x-x_k)^2}{w^2}\right), \tag{38}$$

中心位于 $x_k=1.25+X_kL_e$和 $X_k=1$、6、9。这样的布置使脉冲在扩展区域内的位置相距较远。图7展示了由此得到的预测。该框架成功地以很高的精度传播了全部三个脉冲，相对 L_2 误差为 0.41%。计入全局插值（12）后，该预测速度约为全阶模型的 32 倍。预测中未发现人为过渡或振荡。

3.2 一维科尔特韦格-德弗里斯方程

接下来，我们考虑一维科尔特韦格-德弗里斯（KdV）方程。由于其具有色散波动力学和非线性波-波相互作用，因此这是一个更具挑战性的测试。与 Burgers方程不同，后者只有一个平流脉冲，动力学相对简单；KdV 系统呈现出孤子传播和碰撞现象，且高度依赖于初始条件。因此，该示例可用于评估潜在动力学模型的表达能力，以及 LSEM 组装对于各种局部波行为的鲁棒性。

控制方程为

$$\frac{\partial q}{\partial t}+6q\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial^3 q}{\partial x^3}=0, \tag{39}$$

采用周期边界条件。在区域 $x\in[-10,30]$上进行训练仿真，时间区间为 $t\in[0,1]$，使用 $N_x=2000$ 个空间网格点，时间步长为 $\Delta t=10^{-3}$。全阶模型采用一阶-二阶分部求和（SBP）有限差分格式计算空间导数，并使用四阶显式龙格-库塔时间积分器。

为构建训练配置，将区域划分为四个重叠单元，每个单元长度为 $L_e=10$，包含 600 个网格点。重叠宽度设为 $L_b=2$，通过图5所示的窗函数，确保在子域边界处实现平滑重构。

每个训练仿真的初始条件由随机排列的孤子组成，旨在生成多样化的相互作用情景。我们从 KdV 方程的双孤子解 [24], 开始

$$q(x,t=0)=\frac{6}{\cosh(x)^2}, \tag{40}$$

并通过将孤子随机分配到各个单元来构造复合初始条件：

$$q(x,t=0)=\sum_{k=1}^{4} A_k\frac{6}{\cosh(x-x_k)^2}, \tag{41a}$$

其中，振幅 A_k

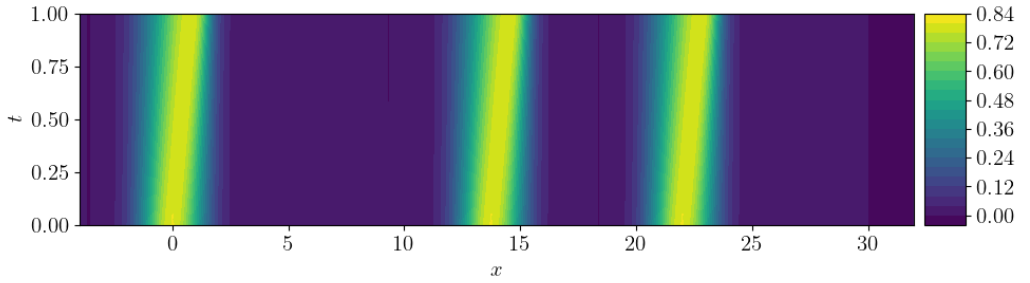
$$A_k\sim \mathrm{Bernoulli}(\frac{1}{2}), \tag{41b}$$

随机将每个孤子设为“开启”或“关闭”，中心位置 x_k

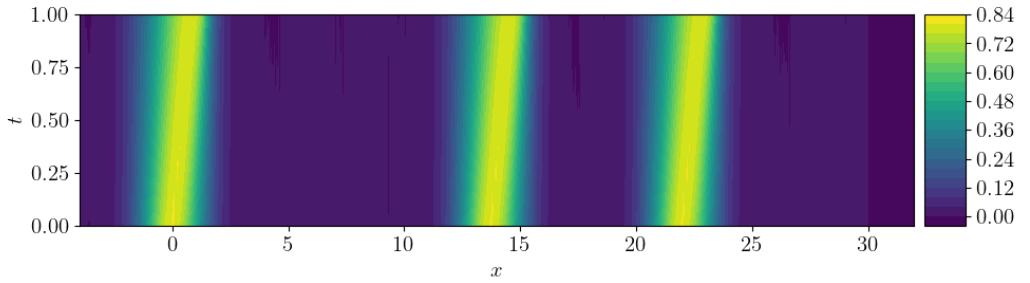
$$x_k\sim\mathcal{N}\left[\left(k-\frac{3}{2}\right)L_e,(0.1L_e)^2\right], \tag{41c}$$

在每个单元的中心附近进行采样，并具有较小的空间方差。该过程生成了各种各样的孤子相互作用——合并、分裂和相移——进而为内部动力学和单元间耦合提供丰富的训练数据。共生成了100个此类训练数据集，并移除了不包含孤子的简单情形。代表性示例见图8，展示了模型必须捕捉的碰撞模式的多样性。

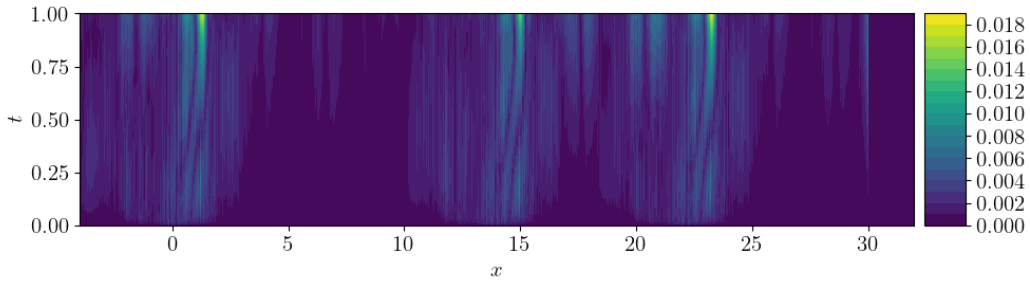
每个单元使用维度为 $N_z=7$ 的潜在空间，所有单元共享相同的自编码器架构。编码器由以下层组成：$[600,300,100,100,30,30,10,7],$，解码器则采用镜像结构。使用 tanh 激活函数，因为对于 KdV 特有的色散波形，它们能够提供更平滑的潜在表示。相互作用动力学再次遵循单向公式（17）；我们发现，该公式具有足够的表达能力，能够捕捉跨单元的孤子传播。



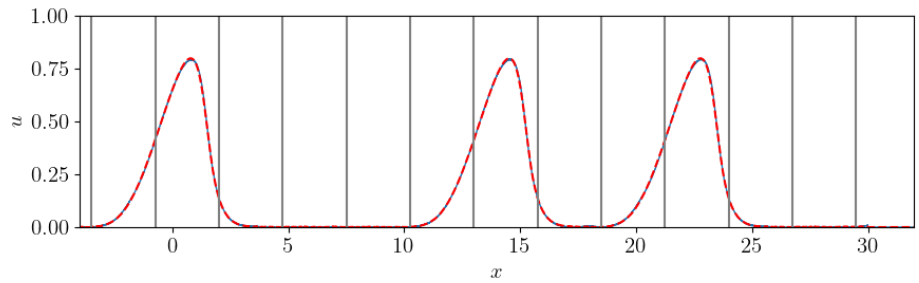
(a) Ground truth



(b) Prediction



(c) Pointwise error



(d) Snapshot at $t = 1.0$

图7：在扩展后的12单元域上对Burgers方程的预测：(a) 真实值；(b) LSEM 预测；(c) 时空逐点绝对误差；(d) 最终时刻快照，对比全局预测（实线）与全阶解（虚线）。模型从四个训练单元泛化到十二个单元，准确保持了脉冲形状和位置，仅出现少量局部误差。

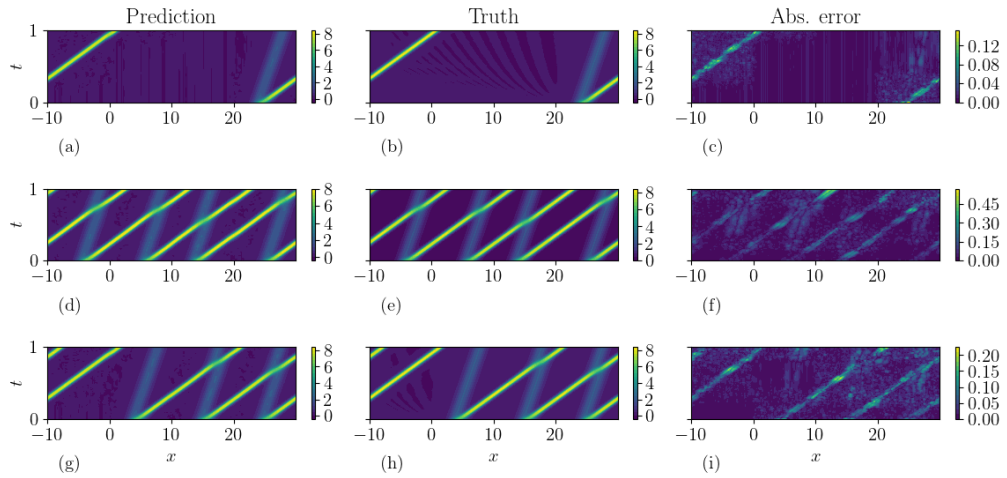


图8：在第42、46和54个KdV训练数据集上的预测。各列依次展示模型预测、真实值和绝对误差，表明模型准确再现了孤子传播及其相互作用。

使用 SOAP 优化器训练 10,000 个训练轮次，学习率为 3×10^{-3}。损失权重设为 $\alpha_{AE} = \alpha_{reg} = 1$ 和 $\alpha_{LD} = 10$，这反映了对于时间行为复杂的系统，确保潜在动力学准确性的重要性更高。在此处，正则化尤为重要，有助于缓解长期相位漂移和潜在模态不稳定性。

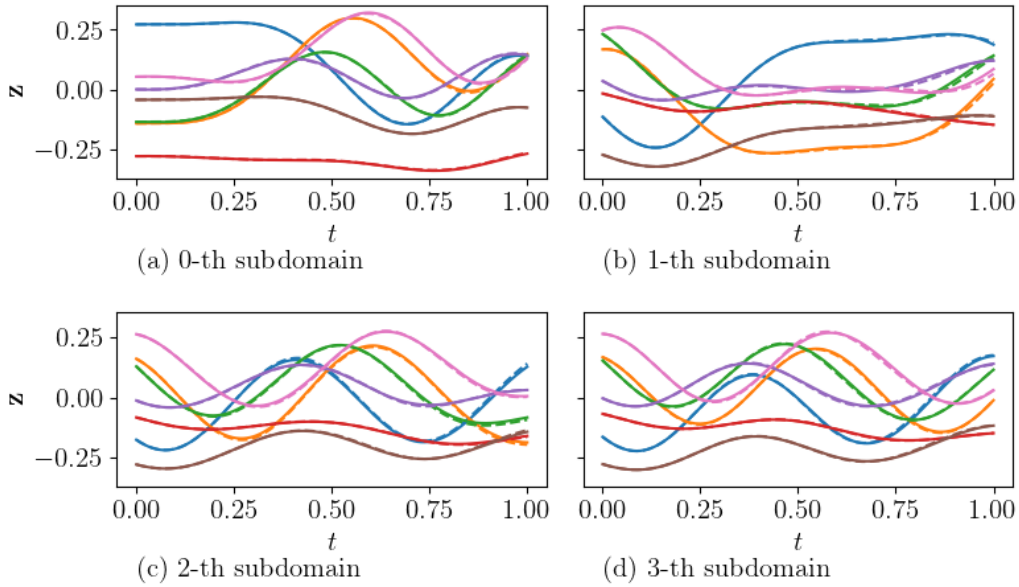


图9：第54个KdV训练数据集的潜在空间轨迹：将预测轨迹与编码后的真实轨迹（虚线）进行比较，结果显示所有单元均高度吻合。

在所有训练数据集上，自编码器的平均相对 L_2 重构误差为 0.76%，表明潜变量能够以足够高的保真度捕捉孤子结构。图8展示了一个有代表性的训练案例的再现预测，其中模型

准确捕捉了孤子碰撞的时间和位置。图9展示了第54个数据集的潜在轨迹，表明尽管存在高度非线性交互，预测的潜在演化仍与编码后的真实值高度吻合。该数据集的再现预测相对 L_2 误差为 5.64%，大部分误差源于峰值孤子位置处的轻微相位不匹配。

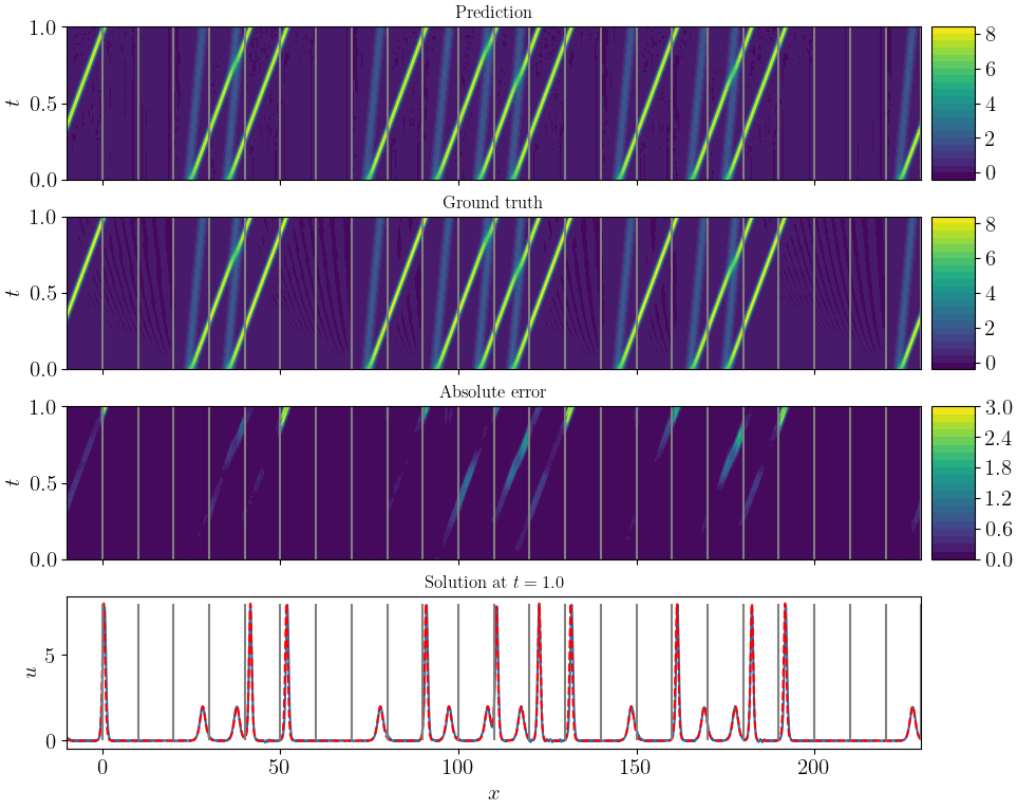


图10：在扩展至24单元的区域上对 KdV 方程进行预测。

为评估可扩展性，我们在比训练区域 $x \in [-10, 230]$ 大六倍、划分为24个单元的区域上测试训练好的模型。初始条件采用相同的随机过程 (41) 生成。图10展示了一种代表性配置下的预测结果。尽管从未在如此大的区域上接受过训练，模型仍成功地将多个孤子传播至远距离，并处理了反复发生的相互作用和碰撞。计入全局插值 (12) 后，此次预测的速度约为全阶模型的5500倍。相对L_2 误差为11.7%，主要由振幅最大的孤子发生轻微相位漂移造成。这是色散系统降阶模型中常见的难题，但定性动力学（包括碰撞顺序和振幅保持）仍然准确。

总体而言，这项实验表明，所提出的框架能够捕捉丰富的非线性波相互作用，并在远大于训练所用区域的范围内保持预测能力，彰显了其在复杂动力学的可扩展仿真方面的潜力。

4 结论

本研究提出了潜空间单元方法——一种非侵入式域分解有限元框架，它采用潜在空间动力学识别（LaSDI）作为可复用的单元模型，以实现对动力系统的可扩展预测。该框架通过直接从数据中学习单元级潜在动力学，并利用平滑窗口融合和潜在空间交互

模型进行组装，可对远超训练阶段所用范围的几何形状和域尺寸实现准确预测。

数值实验突显了该方法的优势。对于 Burgers方程，即使训练数据极其有限，模型仍实现了很高的精度，展现出“小规模训练，大规模建模”的能力。对于更复杂的 Korteweg–De Vries方程，该框架成功复现了远大于训练配置的区域中的非线性孤子传播和碰撞模式，剩余差异主要源于轻微的相位漂移。这些结果凸显了该方法将非侵入式学习、几何灵活性和稳定的潜在动力学融合为统一全局预测器的能力。

尽管前景可期，本研究目前仍局限于一维系统。将该方法扩展至更高维度、更复杂的偏微分方程，以及具有强多尺度或混沌行为的问题，还需要在编码器/解码器架构、交互建模和稳定性控制方面取得进展。未来的研究方向包括二维和三维应用、物理信息特征库、自适应单元细化以及不确定性量化。总体而言，所提出的框架为在计算科学领域开发具有几何泛化能力的下一代模型，提供了可扩展且灵活的基础。

致谢与资金披露

本研究由劳伦斯利弗莫尔国家实验室代表美国能源部开展，合同编号为 DE-AC52-07NA27344；经费由项目 24-SI-004 下的实验室指导研发计划提供。LLNL 发布编号：LLNL-JRNL-2014444。

参考文献

[1] Y. Choi、S. W. Cheung、Y. Kim、P.-H. Tsai、A. N. Diaz、I. Zanardi、S. W. Chung、D. M. Copeland、C. Kendrick、W. Anderson 等，定义计算科学基础模型：呼吁清晰性与严谨性，arXiv 预印本 arXiv:2505.22904（2025）。[2] S. L. Brunton、J. L. Proctor、J. N. Kutz，通过非线性动力系统稀疏识别从数据中发现控制方程，《美国国家科学院院刊》113（15）（2016）3932–3937。[3] Z. Li、N. Kovachki、K. Azizzadenesheli、B. Liu、K. Bhattacharya、A. Stuart、A. Anand- kumar，面向参数化偏微分方程的傅里叶神经算子，arXiv 预印本 arXiv:2010.08895（2020）。[4] N. Kovachki、Z. Li、B. Liu、K. Azizzadenesheli、K. Bhattacharya、A. Stuart、A. Anandkumar，神经算子：学习函数空间之间的映射及其在偏微分方程中的应用，《机器学习研究杂志》24（89）（2023）1–97。[5] L. Lu、P. Jin、G. E. Karniadakis，DeepONet：基于算子通用逼近定理学习用于识别微分方程的非线性算子，arXiv 预印本 arXiv:1910.03193（2019）。[6] D. B. P. Huynh、D. J. Knezevic、A. T. Patera，静态凝聚约化基元方法：近似与后验误差估计，《ESAIM：数学建模与数值分析》47（1）（2013）213–251。[7] S. McBane、Y. Choi，分量级降阶模型晶格型结构设计，《计算力学与工程方法》381（2021）113813。[8] S. McBane、Y. Choi、K. Willcox，使用分量级降阶模型进行晶格状结构的应力约束拓扑优化，《计算力学与工程方法》400（2022）115525。[9] S. W. Chung、Y. Choi、P. Roy、T. Moore、T. Roy、T. Y. Lin、D. T. Nguyen、C. Hahn、E. B. Duoss、S. E. Baker，训练小模型，构建大模型：通过降阶建模与区域分解实现可扩展的物理模拟器，《计算力学与工程方法》427（2024）117041。

[10] S. W. Chung、Y. Choi、P. Roy、T. Roy、T. Y. Lin、D. T. Nguyen、C. Hahn、E. B. Duoss、S. E. Baker，使用分量降阶建模对稳态纳维–斯托克斯方程进行扩展预测，arXiv 预印本 arXiv:2410.21534（2024）。[11] A. N. Diaz、Y. Choi、M. Heinkenschloss，一种快速且精确的区域分解非线性流形降阶模型，《计算力学与工程方法》425（2024）116943。[12] I. Zanardi、A. N. Diaz、S. W. Chung、M. Panesi、Y. Choi，适用于动力系统的可扩展非线性流形降阶模型，arXiv 预印本 arXiv:2412.00507（2024）。[13] C. R. Wentland、F. Rizzi、J. L. Barnett、I. K. Tezaur，界面边界条件与采样策略对基于施瓦茨方法的基于投影的降阶模型耦合的作用，《计算与应用数学杂志》465（2025）116584。[14] H. Wang、R. Planas、A.Chandramowlishwaran、R. Bostanabad，Mosaicflows：一种用于在未见领域求解偏微分方程的可迁移深度学习框架，《计算力学与工程方法》389（2022）114424。[15] W. Ouyang、Y. Shin、S.-W. Liu、L. Lu，神经算子单元法：由可复用神经算子支持的高效且可扩展有限元法，arXiv 预印本 arXiv:2506.18427（2025）。[16] W. D. Fries、X. He、Y. Choi，LaSDI：参数化潜在空间动力学识别，《计算力学与工程方法》399（2022）115436。[17] A. Tran、X. He、D. A. Messenger、Y. Choi、D. M. Bortz，弱形式潜在空间动力学识别，《计算力学与工程方法》427（2024）116998。[18] C. Bonneville、Y. Choi、D. Ghosh、J. L. Belof，GPLaSDI：通过深度自编码器实现基于高斯过程的可解释潜在空间动力学识别，《计算力学与工程方法》418（2024）116535。[19] J. S. R. Park、S. W. Cheung、Y. Choi、Y. Shin，tLaSDI：热力学信息引导的潜在空间动力学识别，《计算力学与工程方法》429（2024）117144。[20] C. Bonneville、X. He、A. Tran、J. S. Park、W. Fries、D. A. Messenger、S. W. Cheung、Y. Shin、D. M. Bortz、D. Ghosh 等，侵入式与非侵入式降阶建模中潜在空间动力学识别算法的综合综述，arXiv 预印本 arXiv:2403.10748（2024）。[21] W. Anderson、S. W. Chung、Y. Choi，改进潜在空间动力学识别的顺序解码器训练，arXiv 预印本 arXiv:2510.03535（2025）。[22] R. Stephany、Y. Choi，Rollout-LaSDI：提升潜在空间动力学的长期精度，arXiv 预印本 arXiv:2509.08191（2025）。[23] R. Stephany、W. M. Anderson、Y. Choi，高阶 LaSDI：使用多重时间导数的降阶建模，arXiv 预印本 arXiv:2512.15997（2025）。[24] C. S. Gardner、J. M. Greene、M. D. Kruskal、R. M. Miura，求解科特韦格–德弗里斯方程的方法，《物理评论快报》19（19）（1967）1095。