arXiv:2601.01742v1 [math.NA] 5 Jan 2026

耦合椭圆–抛物系统的隐式与隐式–显式高阶BDF方法

GEORGIOS AKRIVIS、MINGHUA CHEN 和 FAN YU

ABSTRACT.Ern and Meunier, ESAIM: M2AN，2009]以及[Altmann 等人，Math. Comp.，2021], 分别讨论了耦合椭圆-抛物系统的一阶全隐式格式和隐式–显式格式。将分析推广到高阶（三阶、四阶、五阶和六阶）格式并非易事，因为显式构造 G 矩阵（G-稳定性）往往颇具难度。本文提出了阶数最高达六阶的全隐式及隐式–显式后向差分公式（BDF）格式。隐式–显式变体采用解耦形式，从而提高了计算效率；其收敛性分析要求孔弹性参数满足弱耦合条件。相比之下，全隐式耦合格式不需要任何耦合条件。我们为所提出的两类格式确定了新颖且合适的乘子，并通过能量技巧建立了误差估计。这些高阶格式的一大优势在于，它们几乎只需一阶格式的计算成本，却能显著提高精度。

1. 引言

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$，$d = 2$，3，是一个具有利普希茨边界 $\partial\Omega$. 的有界区域。系统的未知量为位移场 u : $[0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^d$ 以及压力 p : $[0,T]\times\Omega \to\mathbb{R}$。给定时间区间 $T > 0$，线性孔隙弹性方程[12, 22], 写为

$$\begin{aligned} -\nabla\cdot\sigma(u) + \eta\nabla p &= f \quad \text{in } [0,T]\times\Omega, \\ \partial_t\Big(\eta\nabla\cdot u + \frac{1}{M}p\Big) - \nabla\cdot(\kappa\nabla p) &= g \quad \text{in } (0,T]\times\Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

满足初始条件 $p(0) = p^0$. 这里，$\varepsilon(u) := \frac{1}{2}\big(\nabla u + (\nabla u)^\top\big)$ 表示连续介质力学中使用的对称梯度，σ 表示应力张量，

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda\,(\nabla\cdot u)\,I,$$

其中，Lam´é 系数 λ 和 μ，κ 表示渗透率与流体黏度之比，η 为比奥–威利斯流固耦合系数，M 为比奥模量，I 为 $d\times d$ 单位矩阵；参见 [12]。右端项 f 和 g 分别为体积载荷和流体源项，用于模拟注入或生产过程。本文中，我们假设在 $(0,T]\times\partial\Omega$ 上满足齐次狄利克雷边界条件 $u = 0$ 和 $p = 0$。

本文旨在分析线性孔隙弹性模型（1.1）的隐式和隐式-显式 BDF格式，并将其扩展到一般线性椭圆-抛物系统。孔弹性方程可表述为由椭圆型方程和抛物型方程组成的耦合系统。该问题的重要应用包括生物力学，其中人脑和心脏被建模为具有

2020年数学主题分类：主要分类 65M12、65M60；次要分类 65L06。关键词与短语：椭圆-抛物系统、BDF方法、乘子、能量技巧、误差估计。

多个流体网络，[16]。此外，孔弹性方程还可作为地质力学中的模型问题。

对于椭圆-抛物系统（如孔弹性方程）的时间离散，广泛采用的一种策略是使用解耦方法，使椭圆方程和抛物型方程能够按顺序求解。这种解耦框架将大型耦合系统替换为两个较小的子系统，从而提高计算效率。文献 [8]提出了一种一阶半显式格式，可在弱耦合条件下将系统解耦。随后，文献[9] 通过构造延迟方程，将该框架扩展为二阶半显式格式。最近，文献[10], 分析了一种三阶半显式格式，并明确构造了 G 用于最高三阶方法的加权矩阵。然而，扩展到更高阶格式并非易事。相比之下，全隐式格式（如隐式欧拉方法） [17],保持强耦合，但无需满足耦合条件。这种方法为无条件稳定性和误差估计建立了稳健的理论框架。

本文分析了适用于耦合椭圆–抛物系统的高阶BDF方法，包括隐式方法和隐式–显式方法。我们证明了辅助数值格式的A-稳定性，并利用A稳定性和G稳定性之间的等价关系，推导出存在合适的正定对称矩阵 G。

本文结构如下：第2节介绍耦合椭圆-抛物系统的抽象表述。第3节重点讨论采用高阶BDF方法进行时间离散化。第4节确定合适的一致乘子。第5 节讨论相关的延迟方程。第6 节和第7节证明所提出数值格式的一致性，并推导误差估计。最后，第8 节给出数值结果。

2. Abstract formulation

本节将（1.1）作为椭圆-抛物系统引入其抽象表述。我们将使用希尔伯特空间

$$\mathcal{V} := \big(H_0^1(\Omega)\big)^d, \quad \mathcal{H}_{\mathcal{V}} := \big(L^2(\Omega)\big)^d, \quad \mathcal{W} := H_0^1(\Omega), \quad \mathcal{H}_{\mathcal{W}} := L^2(\Omega).$$

对于 $\mathcal{V}$、$\mathcal{W}$ 的对偶空间 $\mathcal{V}'$、$\mathcal{W}'$，$(\mathcal{V}, \mathcal{H}_{\mathcal{V}}, \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{W}, \mathcal{H}_{\mathcal{W}}, \mathcal{W}')$ 均构成具有稠密嵌入的Gelfand三元组。此外，我们定义双线性型

$$a(u,v) := \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(v)\,\mathrm{d}x, \qquad b(p,w) := \int_\Omega \kappa \nabla p \cdot \nabla w\,\mathrm{d}x,$$
$$c(p,w) := \int_\Omega \frac{1}{M}\, p\, w\,\mathrm{d}x, \qquad d(u,w) := \int_\Omega \eta\,(\nabla\cdot u)\, w\,\mathrm{d}x$$

采用经典的双点记号，即对于矩阵 A，$B \in \mathbb{R}^{n,\,m}$ 有 $A : B =$迹 $\big(A^\top B\big)$。据此，方程（1.1）的弱形式如下：求 $u :\ [0,T] \to \mathcal{V}$和$p :\ [0,T] \to \mathcal{W}$使得

$$\begin{aligned} a(u,v) - d(v,p) &= (f,v) \quad \forall v \in \mathcal{V}, \\ d(u_t,w) + c(p_t,w) + b(p,w) &= (g,w) \quad \forall w \in \mathcal{W}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

相应地，我们假设右端项满足 $f :\ [0,T] \to \mathcal{V}'$，$g :\ [0,T] \to \mathcal{W}'$，并将相应的对偶配对记为 $(\cdot,\ \cdot)$。我们强调，只需给定初始数据 p^0 ，对应于 p，因为 (2.1) 中的第一方程在 p^0 和 u^0之间施加了一致性条件。

对称双线性型 $a\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$, $b\colon \mathcal{W}\times\mathcal{W}\to\mathbb{R}$, $c\colon \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\times\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\to\mathbb{R}$ 均为强制且有界；例如，存在正常数 c_a 和 C_a，使得

$$a(u,u)\geqslant c_a\|u\|_{\mathcal{V}}^2,\quad a(u,v)\leqslant C_a\|u\|_{\mathcal{V}}\|v\|_{\mathcal{V}}\quad \forall u,v\in\mathcal{V}.$$

为方便起见，我们引入 a-范数、b-范数和 c-范数，$\|\cdot\|_a:=a(\cdot,\cdot)^{1/2}$, $\|\cdot\|_b:=b(\cdot,\cdot)^{1/2}$，以及 $\|\cdot\|_c=c(\cdot,\cdot)^{1/2}$，它们分别满足

$$\frac{1}{C_a}\|\cdot\|_a^2\leqslant\|\cdot\|_{\mathcal{V}}^2\leqslant\frac{1}{c_a}\|\cdot\|_a^2,\quad \frac{1}{C_b}\|\cdot\|_b^2\leqslant\|\cdot\|_{\mathcal{W}}^2\leqslant\frac{1}{c_b}\|\cdot\|_b^2,\quad \frac{1}{C_c}\|\cdot\|_c^2\leqslant\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}^2\leqslant\frac{1}{c_c}\|\cdot\|_c^2,$$

分别成立。双线性形式 $d\colon \mathcal{V}\times\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\to\mathbb{R}$ 描述了耦合，且是连续的，即存在一个正常数 C_d，使得

$$d(u,p)\leqslant C_d\,\|u\|_{\mathcal{V}}\,\|p\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}\quad \forall u\in\mathcal{V}\ \forall p\in\mathcal{H}_{\mathcal{W}}.$$

变分形式（2.1）也可以在对偶空间中写成算子形式$\mathcal{V}'$ 和 $\mathcal{W}'$。令 $\mathcal{A}\colon \mathcal{V}\to\mathcal{V}'$, $\mathcal{B}\colon \mathcal{W}\to\mathcal{W}'$, $\mathcal{C}\colon \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\to\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$, and $\mathcal{D}\colon \mathcal{V}\to\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ 分别表示与双线性形式 a, b, c, and d 相对应的有界算子。我们用 $\mathcal{D}^\star$ 表示 $\mathcal{D}$的对偶算子。于是，（2.1）可得等价表述

$$\begin{aligned}\mathcal{A}u(t)-\mathcal{D}^\star p(t)&=f(t)\quad \text{in } \mathcal{V}',\\ \mathcal{D}u_t(t)+\mathcal{C}p_t(t)+\mathcal{B}p(t)&=g(t)\quad \text{in } \mathcal{W}'.\end{aligned}\tag{2.2}$$

由于 $\mathcal{A}$ 可逆，我们可以消去变量 u，得到一个抛物型方程，

$$(\mathcal{M}+\mathcal{C})\,p_t+\mathcal{B}p=g-\mathcal{D}\mathcal{A}^{-1}f_t;\tag{2.3}$$

其中 $\mathcal{M}:=\mathcal{D}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{D}^\star$ 是一个自伴非负算子。

注2.1 (椭圆-抛物系统)。 系统（2.1）也可用于模拟线性热弹性问题，该问题研究材料因温度变化而产生的位移，[12]。更一般地，（2.1）是一个椭圆-抛物系统；椭圆部分（由 a 建模）和抛物部分（由 b 和 c建模）通过双线性形式 d耦合。我们强调，接下来的分析不依赖于具体应用，只取决于双线性型的性质。

3. Temporal discretization

令（α,β）和（α,γ）分别为由多项式 α、β 和 γ生成的隐式和显式 q步BDF方法，

$$\alpha(\zeta)=\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{j}\zeta^{q-j}(\zeta-1)^j=\sum_{i=0}^{q}\alpha_i\zeta^i,\quad \beta(\zeta)=\zeta^q,\quad \gamma(\zeta)=\zeta^q-(\zeta-1)^q=\sum_{i=0}^{q-1}\gamma_i\zeta^i,$$

$q=1$, ..., 6。众所周知，隐式 BDF格式（α、β）对于 $q=1$, ..., 6 是强 $A(0)$-稳定的，但对于 $q\geqslant 7$. 甚至都不是零稳定的

令 $N\in\mathbb{N}$, $\tau:=T/N$为常时间步长，并令 $t_n:=n\tau$, $n=0$, ..., N, 为区间 $[0,T]$. 的均匀划分。由于我们考虑 q步数值格式，假设已知 q初始近似 p^0, ..., $p^{q-1}\in\mathcal{W}$. 鉴于（2.2）中的第一个微分方程，我们进而令相应的近似值 u^0, ..., $u^{q-1}\in\mathcal{V}$对于 u 定义如下：

$$\mathcal{A}u^i-\mathcal{D}^\star p^i=f(t_i),\quad i=0,\dots,q-1.\tag{3.1}$$

对于序列 $(v^n)_{n\geq -q}$，我们将与 q 步 BDF 方法相关的离散时间导数记作 $\dot{v}^n$，

$$\dot{v}^n := \frac{1}{\tau}\sum_{i=0}^{q}\alpha_i v^{n-q+i}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.2}$$

以及$\hat{v}^n$ 在 t_n 处，对插值于 (t_{n-q+i}, v^{n-q+i}) $i = 0, \ldots, q-1$ 的次数至多为 $q-1$ 的多项式所取的外推值，

$$\hat{v}^n := \sum_{i=0}^{q-1}\gamma_i v^{n-q+i}, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{3.3}$$

我们递归地定义近似序列 $u^m \in \mathcal{V}$，$p^m \in \mathcal{W}$，对应于节点值$u(t_m, \cdot)$ 和 $p(t_m, \cdot)$，它们是椭圆-抛物系统（2.2）中解 u 和 p 的节点值。我们采用以下记号 $f^m := f(t_m, \cdot)$ 和 $g^m := g(t_m, \cdot)$。

3.1. 全隐式格式。 此处，我们用隐式 q 步 BDF 格式（α, β）对系统（2.1）进行离散，

$$\left.\begin{aligned} a(u^n, v) - d(v, p^n) &= (f^n, v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \\ d(\dot{u}^n, w) + c(\dot{p}^n, w) + b(p^n, w) &= (g^n, w) \quad \forall w \in \mathcal{W} \end{aligned}\right\}, \quad n = q, \ldots, N, \tag{3.4}$$

或者等价地，

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}u^n - \mathcal{D}^\star p^n &= f^n \\ \mathcal{D}\dot{u}^n + \mathcal{C}\dot{p}^n + \mathcal{B}p^n &= g^n \end{aligned}\right\}, \quad n = q, \ldots, N.$$

现在，类比（2.3），由（3.1）可知，第一方程给出 $\mathcal{A}\dot{u}^n = \mathcal{D}^\star\dot{p}^n + \dot{f}^n$，$n = q, \ldots, N$，并且，利用 $\mathcal{M} = \mathcal{D}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{D}^\star$，我们可以从第二方程中消去 $\dot{u}^n$，得到

$$(\mathcal{M} + \mathcal{C})\dot{p}^n + \mathcal{B}p^n = g^n - \mathcal{D}\mathcal{A}^{-1}\dot{f}^n, \quad n = q, \ldots, N, \tag{3.5}$$

也就是说

$$(\mathcal{M} + \mathcal{C})\sum_{i=0}^{q}\alpha_i p^{n-q+i} + \tau\mathcal{B}p^n = \tau g^n - \mathcal{D}\mathcal{A}^{-1}\sum_{i=0}^{q}\alpha_i f^{n-q+i}, \quad n = q, \ldots, N. \tag{3.6}$$

注意，p^{n-q}，...，p^n和 f^{n-q}，...，f^n都出现在（3.6）中；特别地，（3.6）具有 q步格式的形式。

3.2. 隐式–显式格式。首先，我们依次定义 $p^{-1}, p^{-2}, \ldots, p^{-q}$，其中 $n = q-1, q-2, \ldots, 0$，由以下方程确定

$$\hat{p}^n = p^n, \quad n = q-1, q-2, \ldots, 0; \tag{3.7}$$

因为 $\gamma_0 = (-1)^{q-1} \neq 0$, $p^{-1}, p^{-2}, \ldots, p^{-q}$ 确实定义良好。

其次，将（ p^n 中第一方程里的3.4）替换为外推值 $\hat{p}^n$，我们用隐式–显式 q步 BDF 格式（α, β, γ）对系统（2.1）离散化，

$$\left.\begin{aligned} a(u^n, v) - d\,(v, \hat{p}^n) &= (f^n, v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \\ d(\dot{u}^n, w) + c(\dot{p}^n, w) + b(p^n, w) &= (g^n, w) \quad \forall w \in \mathcal{W} \end{aligned}\right\}, \quad n = q, \ldots, N, \tag{3.8}$$

或者，等价地，

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}u^n - \mathcal{D}^\star\hat{p}^n &= f^n \\ \mathcal{D}\dot{u}^n + \mathcal{C}\dot{p}^n + \mathcal{B}p^n &= g^n \end{aligned}\right\}, \quad n = q, \ldots, N. \tag{3.9}$$

(3.9) 的主要计算优势在于该系统是解耦的：我们先由第一方程计算 u^n，随后由第二方程计算 p^n。

现在，根据（3.7）和（3.1），（3.9）中的第一方程对 $n=0,\dots,q-1$ 也成立；这就是引入 $p^{-1},p^{-2},\dots,p^{-q}$. 的动机。这个事实使我们能够从（ u ）中的第二方程消去变量，并将其写成对所有相关 n. 都适用的相同形式。事实上， $\mathcal{A}u^\ell-\mathcal{D}^\star\hat{}\,p^\ell=f^\ell,\ \ell=0,\dots,N$，可得

$$\mathcal{A}\dot{u}^n-\mathcal{D}^\star\sum_{j=0}^{q-1}\gamma_j\dot{p}^{n-q+j}=\dot{f}^n,\quad n=q,\dots,N,$$

并且我们很容易推断出，（3.9）中的第二方程具有如下形式

$$\mathcal{C}\dot{p}^n+\mathcal{M}\sum_{j=0}^{q-1}\gamma_j\dot{p}^{n-q+j}+\mathcal{B}p^n=g^n-\mathcal{D}\mathcal{A}^{-1}\dot{f}^n,\quad n=q,\dots,N, \tag{3.10}$$

即,

$$\mathcal{C}\sum_{i=0}^{q}\alpha_i p^{n-q+i}+\mathcal{M}\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{q-1}\alpha_i\gamma_j p^{n-2q+i+j}+\tau\mathcal{B}p^n=\tau g^n-\mathcal{D}\mathcal{A}^{-1}\sum_{i=0}^{q}\alpha_i f^{n-q+i}, \tag{3.11}$$

$n=q,\dots,N.$注意， $p^{n-2q},\dots,p^n$和 $f^{n-q},\dots,f^n$均出现在（3.11）中；特别地，（3.11）具有 $2q$ 步数值格式的形式。

受（3.11）左端第一项和第二项的启发，分别引入多项式

$$\tilde{\alpha}(\zeta):=\alpha(\zeta)\beta(\zeta)=\sum_{i=0}^{q}\alpha_i\zeta^{q+i}=\sum_{i=0}^{2q}\tilde{\alpha}_i\zeta^i,\quad \hat{\alpha}(\zeta):=\alpha(\zeta)\gamma(\zeta)=\sum_{i=0}^{2q-1}\hat{\alpha}_i\zeta^i \tag{3.12}$$

$_i$其中 $\hat{}\,\alpha_i=\sum\alpha_j\gamma_{i-j},\quad i=0,\ \dots,\ 2q-1$；这里使用了记号 $\alpha_{q+1}=\cdots=\alpha_{2q-1}=0_{j=0}$和 $\gamma_q=\cdots=\gamma_{2q-1}=0.$ 利用这一记号，可将（3.11）写为

$$\mathcal{C}\sum_{i=0}^{2q}\tilde{\alpha}_i p^{n-2q+i}+\mathcal{M}\sum_{i=0}^{2q-1}\hat{\alpha}_i p^{n-2q+i}+\tau\mathcal{B}p^n=\tau g^n-\mathcal{D}\mathcal{A}^{-1}\sum_{i=0}^{2q}\tilde{\alpha}_i f^{n-2q+i}, \tag{3.13}$$

$n=q,\ \dots,\ N.$

为确保解耦格式的稳定性，我们需要对椭圆型方程与抛物型方程之间的耦合强度 ω 施加条件,

$$\omega:=\frac{C_d^2}{c_a c_c}=\frac{\eta^2 M}{\mu+\lambda}. \tag{3.14}$$

ω 的值取决于具体应用中的物理系数，并在隐式–显式格式的收敛性分析中发挥着关键作用。

3.3. 隐式–显式方法的必要稳定性条件 （3.9）。 容易看出

$$\|\mathcal{M}v\|_{\mathcal{H}_\mathcal{W}}\leqslant\omega\|\mathcal{C}v\|_{\mathcal{H}_\mathcal{W}}\quad\forall v\in\mathcal{H}_\mathcal{W} \tag{3.15}$$

其中 $\mathcal{M}=\mathcal{D}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{D}^\star$ 且 ω 式（3.14）中的常数。

显然，$\mathcal{A}^{-1}\colon\ \mathcal{V}'\to\mathcal{V}$ 且 $\mathcal{D}^\star\colon\ \mathcal{H}_\mathcal{W}\to\mathcal{V}'$，因为 $\mathcal{A}\colon\ \mathcal{V}\to\mathcal{V}'$ 且 $\mathcal{D}\colon\ \mathcal{V}\to\mathcal{H}_\mathcal{W}$。因此，$\mathcal{M}\colon\ \mathcal{H}_\mathcal{W}\to\mathcal{H}_\mathcal{W}$，从而得到

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}v\|_{\mathcal{H}_\mathcal{W}} &= \|\mathcal{D}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{D}^\star v\|_{\mathcal{H}_\mathcal{W}} \leqslant C_d\|\mathcal{A}^{-1}\mathcal{D}^\star v\|_\mathcal{V} \leqslant \frac{C_d}{c_a}\|\mathcal{D}^\star v\|_{\mathcal{V}'} \leqslant \frac{C_d^2}{c_a}\|v\|_{\mathcal{H}_\mathcal{W}}\\ &= c_c\omega\|v\|_{\mathcal{H}_\mathcal{W}} \leqslant \omega\|\mathcal{C}v\|_{\mathcal{H}_\mathcal{W}} \quad \forall v\in\mathcal{H}_\mathcal{W}.\end{aligned}$$

引理 3.1 （隐式–显式方法 (3.9) 的必要稳定性条件）。考虑一个一般的椭圆-抛物系统，并设 $\mathcal{M}$ 受 $\mathcal{C}$ 控制，即设 (3.15) 成立。那么，隐式–显式 q步 BDF方法(3.9) 的必要稳定性条件为

$$\omega \leqslant \frac{1}{2^q-1}, \quad q=1,\dots,6.$$

证明。受 (3.13) 启发，考虑 $2q$步数值格式

$$\mathcal{C}\sum_{i=0}^{2q}\tilde\alpha_i v^{n-2q+i} + \mathcal{M}\sum_{i=0}^{2q-1}\hat\alpha_i v^{n-2q+i} + \tau\mathcal{B}v^n = 0, \quad n=q,\dots,N. \tag{3.16}$$

我们将证明，对于 $\mathcal{M}=\ell\mathcal{C}$ 满足 $\ell>1/(2^q-1)$，数值格式 (3.16) 通常并非无条件稳定。首先，在这种情况下，(3.16) 具有如下形式

$$\mathcal{C}\sum_{i=0}^{2q}(\tilde\alpha_i+\ell\hat\alpha_i)v^{n-2q+i} + \tau\mathcal{B}v^n = 0,$$

具有 $\hat{}\alpha_{2q}=0$，即

$$\sum_{i=0}^{2q}(\tilde\alpha_i+\ell\hat\alpha_i)\tilde v^{n-2q+i} + \tau\mathcal{C}^{-1/2}\mathcal{B}\mathcal{C}^{-1/2}\tilde v^n = 0, \quad n=q,\dots,N,$$

具有 $\tilde v^j := \mathcal{C}^{1/2}v^j$. 注意，算子 $\mathcal{C}^{-1/2}\mathcal{B}\mathcal{C}^{-1/2}$ 是正定且自伴的。

现在考虑函数 κ,

$$\kappa(\zeta,x) := \tilde\alpha(\zeta)+\ell\hat\alpha(\zeta)+x[\beta(\zeta)]^2.$$

由于 $\kappa(\cdot,x)$ 是一个次数为偶数 $2q$ 且具有正首项系数的多项式，因此我们有

$$\lim_{\zeta\to-\infty}\kappa(\zeta,x)=\infty. \tag{3.17}$$

此外，$\alpha(-1)=c_q(-1)^q$，$\beta(-1)=(-1)^q$，且 $\gamma(-1)=-(-1)^q(2^q-1)$，其中 c_q 为正常数，因此

$$\kappa(-1,x)=\tilde\alpha(-1)+\ell\hat\alpha(-1)+x[\beta(-1)]^2 = c_q\big[1-\ell(2^q-1)\big]+x.$$

由于右端的第一项为负，当 $x>0$ 足够小时，我们有$\kappa(-1,x)<0$. 根据这一性质和（3.17），我们推知存在 $\zeta^\star<-1$ 和 $x^\star>0$使得

$$\kappa(\zeta^\star,x^\star)=0. \tag{3.18}$$

根据冯·诺依曼判据，稳定性的一个必要条件是：若 $\lambda>0$是 $\mathcal{C}^{-1/2}\mathcal{B}\mathcal{C}^{-1/2}$的一个特征值，则...

...的解

$$\sum_{i=0}^{2q}(\tilde\alpha_i+\ell\hat\alpha_i)\tilde v^{n-2q+i} + \tau\lambda\tilde v^n = 0$$

有界。对于 $\tau\lambda = x^\star$，情况并非如此，因为根据（3.18），根条件不满足；因此，该数值格式不是无条件稳定的。□

4. Uniform multipliers for implicit–explicit BDF methods

Nevanlinna 和 Odeh 于 1981年 引入了用于（隐式）三步、四步和五步BDF方法的乘子（参见 [20]），使能量技巧能够应用于这些抛物型方程方法的稳定性分析；A稳定的一步和两步BDF方法则不需要乘子。乘子技巧首次应用于抛物型方程的稳定性分析是在 [19]。

这一技巧基于 Dahlquist 关于多步方法的 A稳定性和G稳定性之间著名的等价性；参见 [15]。

引理4.1（[15]；另见 [11] 和 [18, 第 V.6] 节）。设 $\alpha(\zeta) = \alpha_q\zeta^q + \cdots + \alpha_0$ 和 $\kappa(\zeta) = \kappa_q\zeta^q + \cdots + \kappa_0$ 是次数为 q 的实系数多项式，且没有公因子。设 $(\cdot,\cdot)$ 是实内积，其关联范数为 $|\cdot|$。若

$$\text{(A)}\qquad \operatorname{Re}\frac{\alpha(\zeta)}{\kappa(\zeta)} > 0 \quad \textit{for } |\zeta| > 1,$$

那么存在一个正定对称矩阵 $G = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{q,\,q}$ 以及实数 $\delta_0, \ldots, \delta_q$，使得对于内积空间中的 $v^0, \ldots, v^q$，

$$\text{(G)}\qquad \Big(\sum_{i=0}^{q}\alpha_i v^i, \sum_{j=0}^{q}\kappa_j v^j\Big) = \sum_{i,j=1}^{q} g_{ij}(v^i, v^j) - \sum_{i,j=1}^{q} g_{ij}(v^{i-1}, v^{j-1}) + \Big|\sum_{i=0}^{q}\delta_i v^i\Big|^2.$$

性质（A）和（G）表示 q步方法（α，κ）分别是 A稳定和 G稳定的。

定义4.1（乘子和 Nevanlinna–Odeh乘子）。设 α 为次数为 q的实多项式，且 $\beta(\zeta) = \zeta^q$。取一个由实数组成的 q元组 $(\mu_1, \ldots, \mu_q)$，使得对于 $\mu(\zeta) := \zeta^q - \mu_1\zeta^{q-1} - \cdots - \mu_q$ 以及给定的 α，有序对 (α, μ) 满足 A稳定性条件 (A)，其中以 $\mu(\zeta)$ 替换 $\kappa(\zeta)$，并且多项式 α 和 μ 没有公因子。那么，如果 $(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ 满足下列条件，它们分别称为 q步方法 (α, β) 的 Nevanlinna–Odeh乘子或乘子：

$$|\mu_1| + \cdots + |\mu_q| < 1$$

或满足较弱的正性性质

$$\text{(P)}\qquad 1 - \mu_1\cos\varphi - \cdots - \mu_q\cos(q\varphi) > 0 \quad \forall\varphi \in \mathbb{R},$$

分别；参见 [3]（P）。

对于 $\mu_i \geqslant 0$，（P）等价于 $|\mu_1| + \cdots + |\mu_q| < 1$；否则，对于 $q \geqslant 2$，这是一个较弱的条件。

注 4.1（切比雪夫多项式与三角恒等式）。回顾第一类和第二类切比雪夫多项式 T_ℓ 和 U_ℓ，分别有 $T_\ell(x) = \cos(\ell \arccos x)$ 和 $\sin(\ell \arccos x) = \sqrt{1-x^2}U_{\ell-1}(x)$ $x \in [-1, 1]$. 它们给出三角恒等式

$$\cos(\ell\varphi) = T_\ell(x) \quad \ell \in \mathbb{N}_0, \text{ 以及 } \sin(\ell\varphi) = U_{\ell-1}(x)\sin\varphi, \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad x := \cos\varphi; \tag{4.1}$$

在下文中，我们将使用这些恒等式来处理 $\ell = 2, \ldots, 6$。切比雪夫多项式满足以下关系：$T_0(x) = U_0(x) = 1, T_1(x) = x, U_1(x) = 2x, T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, 以及 $U_{n+1}(x) = 2U_n(x) - U_{n-1}(x)$ $n = 1, \ldots$。

还要指出，正性性质（P）可以改写为如下形式

$$1-\mu_1 T_1(x)-\cdots-\mu_q T_q(x)>0 \quad \forall x\in[-1,1]. \tag{4.2}$$

我们的目标是确定隐式–显式q步 BDF格式 $q=4$、5、6 的一致乘子，其生成多项式为 $\check{}\alpha$，

$$\check{\alpha}(\zeta)=\tilde{\alpha}(\zeta)+m\hat{\alpha}(\zeta),$$

见（3.12）和（3.13），对所有参数 m 在范围 $[0,1/(2^q-1)]$内。注意，对于$m=0$，$\check{}\alpha$ 会化为相应全隐式格式的生成多项式 $\check{}\alpha(\zeta)=\tilde{\alpha}(\zeta)=\zeta^q\alpha(\zeta)$。

命题 4.1（隐式–显式六步 BDF 方法的一致乘子）。对于$0\leqslant m\leqslant 1/63$，数集

$$\mu_1=1,\quad \mu_2=-0.9,\quad \mu_3=0.3,\quad \mu_4=\mu_5=\mu_6=0, \tag{4.3}$$

是隐式–显式六步 BDF 方法的一个一致乘子。

证明。证明分为两部分；我们先证明 A-稳定性（A），随后证明正性性质（P）。

A-稳定性 (A)。相应的多项式 μ是

$$\mu(\zeta)=\zeta^{12}-\zeta^{11}+0.9\zeta^{10}-0.3\zeta^9=\zeta^9\tilde{\kappa}(\zeta)\quad\text{with}\quad \tilde{\kappa}(\zeta)=\zeta^3-\zeta^2+0.9\zeta-0.3. \tag{4.4}$$

因此，要证明 μ 的根位于单位圆盘内，只需证明 $\tilde{\kappa}$也满足这一点。现在，$\tilde{\kappa}(0.3)=-93/1000<0$，$\tilde{\kappa}(0.5)=1/40>0$，因此 $\tilde{\kappa}$ 在 $\zeta_1\in(0.3,0.5)$内有一个实根。实际上，这是 $\tilde{\kappa}$唯一的实根，因为 $\tilde{\kappa}$ 在实轴上严格递增，$\tilde{\kappa}'(x)=3x^2-2x+0.9>0$。

设 ζ_2、ζ_3 为 $\tilde{\kappa}$. 的共轭复根。根据韦达公式，

$$\zeta_1\zeta_2\zeta_3=\zeta_1|\zeta_2|^2=0.3,$$

结合 $\zeta_1>0.3$可得 $|\zeta_2|<1.$。因此，$|\zeta_1|$、$|\zeta_2|$、$|\zeta_3|<1$。由此可知，μ 的所有根都位于单位圆盘内。

对于 $q=6$，生成多项式 $\check{}\alpha$ 为

$$\begin{aligned}60\check{\alpha}(\zeta)=&\,147\zeta^{12}-(360-882m)\zeta^{11}+(450-4365m)\zeta^{10}-(400-11040m)\zeta^9\\&+(225-18555m)\zeta^8-(72-22632m)\zeta^7+(10-20864m)\zeta^6\\&+14700m\zeta^5-7815m\zeta^4+3030m\zeta^3-807m\zeta^2+132m\zeta-10m.\end{aligned}$$

对于 $0\leqslant m\leqslant 1/(2^q-1)$ $\tilde{\alpha}+m\hat{}\alpha$ 是 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\alpha}+1/(2^q-1)\,\hat{}\alpha$ 的凸组合；因此，要证明 A-稳定性

$$\operatorname{Re}\frac{\check{\alpha}(\zeta)}{\mu(\zeta)}=\operatorname{Re}\frac{\tilde{\alpha}(\zeta)+m\tilde{\gamma}(\zeta)}{\mu(\zeta)}>0\quad\text{for }|\zeta|>1,\quad 0\leqslant m\leqslant\frac{1}{2^q-1},$$

只需考虑两个极端情况：$m=0$ 和 $m=1/63$.

情况 I：$m=0$。我们有

$$60\check{\alpha}(\zeta)=60\zeta^6\alpha(\zeta)=\zeta^6\left(147\zeta^6-360\zeta^5+450\zeta^4-400\zeta^3+225\zeta^2-72\zeta+10\right)$$

并且 $\mu(\zeta)=\zeta^9\tilde{\kappa}(\zeta)=\zeta^6\delta(\zeta)$，其中 $\delta(\zeta)=\zeta^3\tilde{\kappa}(\zeta)$。

首先，$\alpha(0)=1/6$. 此外，$60\alpha(\zeta)=(\zeta-1)\chi(\zeta)$，其中

$$\begin{aligned}\chi(\zeta)&:=147\zeta^5-213\zeta^4+237\zeta^3-163\zeta^2+62\zeta-10\\&=\left(147\zeta^2-66\zeta+\frac{387}{10}\right)\tilde{\kappa}(\zeta)-\frac{1}{100}\nu(\zeta)\end{aligned}$$

以及 $\nu(\zeta) := 2080\zeta^2 - 737\zeta - 161$，并且二次多项式 ν 的根中没有一个是 $\tilde{\kappa}$ 的根；因此，多项式 χ 和 $\tilde{\kappa}$ 没有公因子。于是我们很容易推断出，多项式 α 和 δ 没有公因子。

现在， α/δ 在复平面的单位圆盘外全纯，并且

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\alpha(z)}{\delta(z)} = \alpha_6 = \frac{147}{60} > 0.$$

因此，根据调和函数的最大值原理，A-稳定性（A）等价于

$$\operatorname{Re} \frac{\alpha(\zeta)}{\delta(\zeta)} \geqslant 0 \quad \forall \zeta \in \mathscr{K},$$

其中 $\mathscr{K} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$，即等价于

$$\operatorname{Re}\left[\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\delta(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\right] \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

所需性质（4.5）可写为

$$\operatorname{Re}\left[60\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\varphi}\left(10\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\varphi} - 10\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\varphi} + 9\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} - 3\right)\right] \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

现在，很容易看出

$$\begin{aligned} 60\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\varphi} = {} & \left[157\cos(3\varphi) - 432\cos(2\varphi) + 675\cos\varphi - 400\right] \\ & + \mathrm{i}\left[137\sin(3\varphi) - 288\sin(2\varphi) + 225\sin\varphi\right]. \end{aligned}$$

当 $x := \cos\varphi$，利用形式为 (4.1) 的三角恒等式，可得

$$60\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\varphi} = 4(1-x)(8 + 59x - 157x^2) + \mathrm{i}4(137x^2 - 144x + 22)\sin\varphi. \tag{4.7}$$

注意， $\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\varphi}$ 实部中的因子 $1-x$ 是由于 $\alpha(1) = 0$。类似地，

$$\begin{aligned} 10\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\varphi} - 10\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\varphi} + 9\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} - 3 = {} & \left[10\cos(3\varphi) - 10\cos(2\varphi) + 9\cos\varphi - 3\right] \\ & - \mathrm{i}\left[10\sin(3\varphi) - 10\sin(2\varphi) + 9\sin\varphi\right] \end{aligned}$$

and

$$10\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\varphi} - 10\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\varphi} + 9\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} - 3 = 40x^3 - 20x^2 - 21x + 7 - \mathrm{i}(40x^2 - 20x - 1)\sin\varphi. \tag{4.8}$$

I鉴于 (4.7) 和 (4.8)，所需性质 (4.6) 可写成以下形式

$$4(1-x)P(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$$

with

$$\begin{aligned} P(x) &= -800x^5 + 2480x^4 - 2440x^3 + 829x^2 - 73x + 34 \\ &= x^2(-800x^3 + 2480x^2 - 2440x + 789) + 40x^2 - 73x + 34. \end{aligned}$$

现在， P 在区间 $[-1, 1]$ 内为正，因此 (4.6) 成立。事实上，二次多项式 $40x^2 - 73x + 34$ 对所有实数 x 都为正，因为它没有实根。此外，三次多项式 $-800x^3 + 2480x^2 - 2440x + 789$ 在区间 $[-1, 1]$内为正。事实上，对于负的 x，所有项均为正；关于该三次多项式在$[0, 1]$ 中的正性，见图 4.1 （左图）。

情形 II： $m = 1/63$。我们有 $\mu(\zeta) = \zeta^9\tilde{\kappa}(\zeta)$，并且

$$\begin{aligned} 60\check{\alpha}(\zeta)63 = {} & 9261\zeta^{12} - 21798\zeta^{11} + 23985\zeta^{10} - 14160\zeta^9 - 4380\zeta^8 + 18096\zeta^7 \\ & - 20234\zeta^6 + 14700\zeta^5 - 7815\zeta^4 + 3030\zeta^3 - 807\zeta^2 + 132\zeta - 10. \end{aligned}$$

首先，$\check{\alpha}(0) = -1/378$. 此外，$60\,\check{\alpha}(\zeta)63 = (3\zeta-1)(\zeta^2-1)(3\zeta^2+1)(7\zeta^2-4\zeta+1)\chi(\zeta)$；这里，$\chi$ 和 $\tilde{\kappa}$ 是情况 I 的多项式。由于 χ 和 $\tilde{\kappa}$ 没有公因子，我们推断多项式 $\check{\alpha}$ 和 μ 没有公因子。

现在，$\check{\alpha}/\mu$在复平面单位圆盘外全纯，并且

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\check{\alpha}(z)}{\mu(z)} = \frac{147}{60} > 0.$$

如前所述，A稳定性性质（A）等价于

$$\operatorname{Re} \frac{\check{\alpha}(\zeta)}{\mu(\zeta)} \geqslant 0 \quad \forall \zeta \in \mathscr{K},$$

即，等价于

$$\operatorname{Re}\left[\check{\alpha}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mu(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\right] \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

鉴于（4.4），所需性质（4.9）可写为

$$\operatorname{Re}\left[60\check{\alpha}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}6\varphi}63 \cdot 10\mu(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}6\varphi}\right] \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

现在，很容易看出

$$\begin{aligned} 60\check{\alpha}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}6\varphi}63 = {} & 9251\cos(6\varphi) - 21666\cos(5\varphi) + 23178\cos(4\varphi) - 11130\cos(3\varphi) \\ & - 12195\cos(2\varphi) + 32796\cos\varphi - 20234 \\ & + \mathrm{i}\big[9271\sin(6\varphi) - 21930\sin(5\varphi) + 24792\sin(4\varphi) - 17190\sin(3\varphi) \\ & + 3435\sin(2\varphi) + 3396\sin\varphi\big]. \end{aligned}$$

取 $x := \cos\varphi$，利用形式为 (4.1) 的三角恒等式，可得

$$\begin{aligned} 60\check{\alpha}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}6\varphi}63 = {} & 32(1-x^2)\left(-9251x^4 + 10833x^3 - 1169x^2 - 1317x + 184\right) \\ & + \mathrm{i}32\left(9271x^5 - 10965x^4 - 3073x^3 + 6075x^2 - 1146x - 42\right)\sin\varphi. \end{aligned} \tag{4.11}$$

同理，

$$\begin{aligned} 10\mu(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}6\varphi} = {} & 10\cos(6\varphi) - 10\cos(5\varphi) + 9\cos(4\varphi) - 3\cos(3\varphi) \\ & - \mathrm{i}\big[10\sin(6\varphi) - 10\sin(5\varphi) + 9\sin(4\varphi) - 3\sin(3\varphi)\big] \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} 10\mu(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}6\varphi} = {} & 320x^6 - 160x^5 - 408x^4 + 188x^3 + 108x^2 - 41x - 1 \\ & - \mathrm{i}(320x^5 - 160x^4 - 248x^3 + 108x^2 + 24x - 7)\sin\varphi. \end{aligned} \tag{4.12}$$

鉴于 (4.11) 和 (4.12)，所需性质 (4.10) 可写成如下形式

$$32(1-x^2)P(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [-1,1]$$

with

$$\begin{aligned} P(x) = {} & 6400x^{10} - 45440x^9 + 138880x^8 - 237184x^7 + 245716x^6 - 159242x^5 \\ & + 66209x^4 - 16589x^3 + 473x^2 + 787x + 110. \end{aligned} \tag{4.13}$$

现在，P 在区间 $[-1,1]$内为正；因此，(4.10)成立。事实上，首先，三次多项式 $-16589x^3+473x^2+787x+110$ 对于负的 x为正；见图4.1 (中间)；所有其他项在负的 x时均为正。此外，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$时，$P$ 为正；见图4.1(右图)。

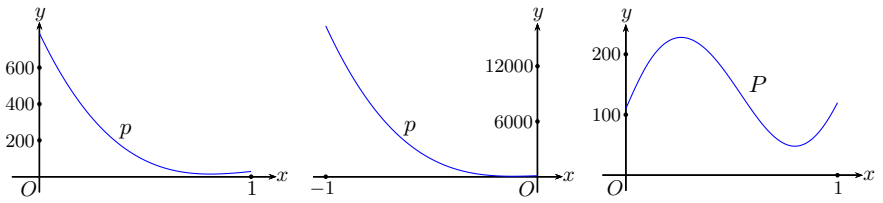

FIGURE 4.1. 多项式的图像 $p(x) = -800x^3 + 2480x^2 - 2440x +$区间789内 $[0,1]$ (左图)、 $p(x) = -16589x^3 + 473x^2 + 787x + 110$ 在$[-1,0]$ (中图)，以及 P（4.13）在 $[0,1]$ (右图)。

正性性质(P)。这里，我们证明乘子(P)所需的正性性质4.3。实际上，由于在稳定性分析中我们将使用数值 $\varepsilon = 9/100$，我们将直接证明乘子(P)4.3中的函数有下界 $9/100$. 为此，我们从相应表达式中减去 $9/100$，并将证明函数 g,

$$g(s) := \frac{91}{100} - \cos s + \frac{9}{10}\cos(2s) - \frac{3}{10}\cos(3s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{4.14}$$

为正。现在，利用 $x :=$ 余弦 s，形式为（4.1）的三角恒等式可得 $g(s) = p(x)$，其中 p多项式

$$p(x) := -\frac{6}{5}x^3 + \frac{9}{5}x^2 - \frac{1}{10}x + \frac{1}{100}, \quad x \in [-1,1].$$

容易看出， p 在 $[-1,1]$ 处于 $x^\star = (3 - 2\sqrt{2})/6$ 取得其最小值，并且

$$p(x^\star) > 0.008584 > 0.$$

因此， g 确实为正；所需的正性性质（P）得以满足 . □

与命题4.1类似，我们可以得到以下结果；为简洁起见，证明从略。

命题4.2（隐式–显式四步BDF方法的一致乘子）。对于 $0 \leqslant m \leqslant 1/15$，数集

$$\mu_1 = 0.5, \quad \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0, \tag{4.15}$$

是隐式–显式四步BDF方法的一致乘子。

命题4.3（隐式–显式五步BDF方法的一致乘子）。对于 $0 \leqslant m \leqslant 1/31$，数集

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = -0.25, \quad \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0, \tag{4.16}$$

是隐式–显式五步BDF方法的一致乘子。

5. RELATED DELAY EQUATIONS

借鉴[8, 9], 中的思路，我们首先为耦合椭圆-抛物系统（2.1）构造一个时滞系统，然后用隐式BDF方法对该时滞系统进行离散；由此得到原椭圆-抛物系统（2.2）的隐式–显式BDF方法。具体而言，我们考虑时滞系统

$$\begin{aligned} a(\mathfrak{u}, v) - d(v, \hat{\mathfrak{p}}) &= (f, v) \quad \forall v \in \mathcal{V}, \\ d(\mathfrak{u}_t, w) + c(\mathfrak{p}_t, w) + b(\mathfrak{p}, w) &= (g, w) \quad \forall w \in \mathcal{W}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

其中 $\hat{\mathfrak{p}}$ 是 $\mathfrak{p}$ 在区间 $[0,T]$上的一个近似，具体取决于所用的BDF方法以及时间步长 τ，即，类似于（3.3），

$$\hat{\mathfrak{p}}(t) := \sum_{i=0}^{q-1} \gamma_i \mathfrak{p}(t - q\tau + i\tau), \quad t \in [0,T]. \tag{5.2}$$

需要强调的是，由于（5.2），与原系统（2.1）不同，这样的时滞系统需要历史函数 $\mathfrak{p}|_{[-q\tau,0]}(t) = \Phi(t)$，在 $[-q\tau,0]$ 中，而不仅仅需要一个初值，即规定 $\mathfrak{p}$ 对于 $-q\tau \leqslant t \leqslant 0$.

于是，（5.1）导出如下等价表述

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathfrak{u}(t) - \mathcal{D}^\star \hat{\mathfrak{p}}(t) &= f(t) \quad \text{in } \mathcal{V}', \\ \mathcal{D}\mathfrak{u}_t(t) + \mathcal{C}\mathfrak{p}_t(t) + \mathcal{B}\mathfrak{p}(t) &= g(t) \quad \text{in } \mathcal{W}', \end{aligned} \tag{5.3}$$

对于 $t \in (0, T)$。将（ $\mathfrak{p}$ 中的表达式代入（5.2）和（5.3），得到

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathfrak{u}(t) - \mathcal{D}^\star \sum_{i=0}^{q-1} \gamma_i \mathfrak{p}(t - q\tau + i\tau) &= f(t) \quad \text{in } \mathcal{V}', \\ \mathcal{D}\mathfrak{u}_t(t) + \mathcal{C}\mathfrak{p}_t(t) + \mathcal{B}\mathfrak{p}(t) &= g(t) \quad \text{in } \mathcal{W}'. \end{aligned}$$

消去变量 $\mathfrak{u}$，得到延迟抛物方程

$$\mathcal{C}\mathfrak{p}_t(t) + \mathcal{M} \sum_{j=0}^{q-1} \gamma_j \mathfrak{p}_t(t - q\tau + j\tau) + \mathcal{B}\mathfrak{p}(t) = g(t) - \mathcal{D}\mathcal{A}^{-1} f_t(t). \tag{5.4}$$

在（5.1）中，给定足够光滑的右端项和历史函数 $\Phi \in C^\infty([-q\tau,0];\ \mathcal{H}_\mathcal{W})$ 对于 $\mathfrak{p}$，我们寻求函数 $\mathfrak{u}:\ [0,T] \to \mathcal{V}$ 以及 $\mathfrak{p}:\ [-q\tau,T] \to \mathcal{W}$，使其确保原问题（2.1）初始条件的一致性。为此，一个充分条件为（[9]）

$$\Phi(t_{-\ell}) = p^{-\ell}, \quad \ell = 1, \dots, q, \quad \Phi(0) = p(0) = p^0; \tag{5.5}$$

参见（3.7）和（7.1）中对 $p^{-\ell}$ 的定义，以及对 p^ℓ的要求。分别由（5.5）和（5.1）中的第一方程可知，$\mathfrak{u}(0) = u(0) = u^0$，因为

$$a(\mathfrak{u}(0), v) = (f(0), v) + d(v, \hat{\mathfrak{p}}(0)) = (f(0), v) + d(v, p(0)) \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

命题 5.1（关于差异 $\mathfrak{u} - u$ 和 $\mathfrak{p} - p$）。假设强迫项f和 g足够光滑，且历史函数 $\Phi \in C^\infty([-q\tau,0];\ \mathcal{H}_\mathcal{W})$满足（5.5）。那么，时滞系统（5.1）存在一个解 $(\mathfrak{u},\mathfrak{p})$，满足 $\mathfrak{p}^{(q+1)} \in L^\infty((0,T);\ \mathcal{H}_\mathcal{W})$。此外，（2.1）和（5.1）的解仅相差一个$q$阶的项，即对几乎处处的 $t \in [0,T]$，有

$$\|\mathfrak{u}(t) - u(t)\|_\mathcal{V} + \|\mathfrak{p}(t) - p(t)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{W}} + \|\mathfrak{p}(t) - p(t)\|_\mathcal{W} \leqslant C\tau^q.$$

证明。令 $e_p := \mathfrak{p} - p$ 且 $e_u := \mathfrak{u} - u$。注意，我们有 $e_u(0) = 0$；并且，由于历史函数 Φ 在（5.5）中的特殊选取，还有 $e_p(0) = 0$。将（5.1）从（2.1）中相减，得到

$$\begin{aligned} a(e_u, v) - d(v, e_p) &= d(v, \hat{\mathfrak{p}} - \mathfrak{p}), \\ d(e_{u,t}, w) + c(e_{p,t}, w) + b(e_p, w) &= 0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

对所有测试函数 $v\in\mathcal{V}$ 和 $w\in\mathcal{W}$。取 $v=e_{u,\,t}$ 以及 $w=e_p$ 代入（5.6），可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|e_u\|_a^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|e_p\|_c^2+\|e_p\|_b^2&\leqslant C_d\|e_{u,t}\|_{\mathcal{V}}\|\hat{\mathfrak{p}}-\mathfrak{p}\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}\\&\leqslant\frac{1}{2}\|e_{u,t}\|_{\mathcal{V}}^2+\frac{C_d^2}{2}\|\hat{\mathfrak{p}}-\mathfrak{p}\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}^2.\end{aligned}\tag{5.7}$$

q步方法（α,γ）的阶数为 q，即，

$$\sum_{i=0}^{q-1}i^{\ell-1}\gamma_i=q^{\ell-1},\quad \ell=1,\dots,q.$$

因此，根据（5.2），在 $t-q\tau$处进行泰勒展开后，我们看到，直到 $q-1$ 阶的首项均相消，从而得到

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{p}}(t)-\mathfrak{p}(t)=\frac{1}{(q-1)!}\Bigg[&\sum_{i=0}^{q-1}\gamma_i\int_{t-q\tau}^{t-q\tau+i\tau}(t-q\tau+i\tau-s)^{q-1}\mathfrak{p}^{(q)}(s)\,\mathrm{d}s\\&-\int_{t-q\tau}^{t}(t-s)^{q-1}\mathfrak{p}^{(q)}(s)\,\mathrm{d}s\Bigg].\end{aligned}\tag{5.8}$$

因此，我们很容易推知

$$\|\hat{\mathfrak{p}}(t)-\mathfrak{p}(t)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}\leqslant C\tau^q\|\mathfrak{p}^{(q)}\|_{L^\infty((-q\tau,T);\mathcal{H}_{\mathcal{W}})}.\tag{5.9}$$

对（ $[0,t]$ 5.7）在上积分，并利用范数等价性，

$$\|\cdot\|_a^2\geqslant c_a\|\cdot\|_{\mathcal{V}}^2,\quad \|\cdot\|_b^2\geqslant c_b\|\cdot\|_{\mathcal{W}}^2,\quad \|\cdot\|_c^2\geqslant c_c\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}^2,\tag{5.10}$$

我们看到

$$\begin{aligned}&\|e_u(t)\|_{\mathcal{V}}^2+\|e_p(t)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}^2+\int_0^t\|e_p\|_{\mathcal{W}}^2\,\mathrm{d}s\\&\leqslant C\int_0^t\|e_{u,t}\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}s+C\tau^{2q}\|\mathfrak{p}^{(q)}\|_{L^\infty((-q\tau,T);\mathcal{H}_{\mathcal{W}})}^2.\end{aligned}\tag{5.11}$$

对第一方程（5.6）关于时间求导，得到

$$\begin{aligned}a(e_{u,t},v)-d(v,e_{p,t})&=d(v,\hat{\mathfrak{p}}_t-\mathfrak{p}_t),\\d(e_{u,t},w)+c(e_{p,t},w)+b(e_p,w)&=0,\end{aligned}\tag{5.12}$$

对所有测试函数 $v\in\mathcal{V},\quad w\in\mathcal{W}$。取 $v=e_{u,\,t}$ 和 $w=e_{p,\,t}$ 代入（5.12），可得

$$\|e_{u,t}\|_a^2+\|e_{p,t}\|_c^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|e_p\|_b^2\leqslant\frac{c_a}{2}\|e_{u,t}\|_{\mathcal{V}}^2+\frac{C_d^2}{2c_a}\|\hat{\mathfrak{p}}_t-\mathfrak{p}_t\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}^2.\tag{5.13}$$

类似于（5.9），在（ $\mathfrak{p}$ 中用 $\mathfrak{p}_t$ 替换（5.8），也可得

$$\|\hat{\mathfrak{p}}_t-\mathfrak{p}_t\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}\leqslant C\tau^q\|\mathfrak{p}^{(q+1)}\|_{L^\infty((-q\tau,T);\mathcal{H}_{\mathcal{W}})}.$$

对 $[0,t]$ 在（5.13）上积分，并利用范数等价性（5.10，可得

$$\int_0^t\|e_{u,t}\|_{\mathcal{V}}^2\,\mathrm{d}s+\int_0^t\|e_{p,t}\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}^2\,\mathrm{d}s+\|e_p\|_{\mathcal{W}}^2\leqslant C\tau^{2q}\|\mathfrak{p}^{(q+1)}\|_{L^\infty((-q\tau,T);\mathcal{H}_{\mathcal{W}})}^2.\tag{5.14}$$

结合（5.11）和（5.14），并回忆 $\mathfrak{p}|_{[-q\tau,0]} = \Phi$，可得

$$
\begin{aligned}
&\|e_u\|_{\mathcal{V}}^2 + \|e_p\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}^2 + \|e_p\|_{\mathcal{W}}^2 \\
&\leqslant C\tau^{2q}\Big(\|\mathfrak{p}^{(q)}\|_{L^\infty((-q\tau,T);\mathcal{H}_{\mathcal{W}})}^2 + \|\mathfrak{p}^{(q+1)}\|_{L^\infty((-q\tau,T);\mathcal{H}_{\mathcal{W}})}^2\Big) \\
&\leqslant C\tau^{2q}\Big(\|\mathfrak{p}^{(q)}\|_{L^\infty((0,T);\mathcal{H}_{\mathcal{W}})}^2 + \|\mathfrak{p}^{(q+1)}\|_{L^\infty((0,T);\mathcal{H}_{\mathcal{W}})}^2 \\
&\qquad + \|\Phi^{(q)}\|_{L^\infty((-q\tau,0);\mathcal{H}_{\mathcal{W}})}^2 + \|\Phi^{(q+1)}\|_{L^\infty((-q\tau,0);\mathcal{H}_{\mathcal{W}})}^2\Big).
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

沿着[8, 命题 A4], 的证明思路推导可知， $\mathfrak{p}$ 和 Φ 均为光滑函数，且方程（5.15）右端的导数有界。□

6. Consistency

令 $p_\star^\ell := p(t_\ell)$ 和 $\mathfrak{p}_\star^\ell := \mathfrak{p}(t_\ell)$，解 p 和 $\mathfrak{p}$的节点值，则原系统（3.5）的解 p 对应的全隐式格式（2.3）的一致性误差~，以及延迟方程（5.4）的解 $\mathfrak{p}$ 对应的隐式–显式格式（3.10）的一致性误差 d^n，也就是说，精确解未能满足（3.5）和（3.10）的差值分别为

$$
d^n := (\mathcal{M}+\mathcal{C})\dot{p}_\star^n + \mathcal{B}p_\star^n - g^n + \mathcal{D}\mathcal{A}^{-1}\dot{f}^n, \quad n = q,\dots,N, \tag{6.1}
$$

and

$$
\tilde{d}^n := \mathcal{C}\dot{\mathfrak{p}}_\star^n + \mathcal{M}\sum_{j=0}^{q-1}\gamma_j\dot{\mathfrak{p}}_\star^{n-q+j} + \mathcal{B}\mathfrak{p}_\star^n - g^n + \mathcal{D}\mathcal{A}^{-1}\dot{f}^n, \quad n = q,\dots,N. \tag{6.2}
$$

为方便起见，我们引入以下量

$$
\begin{aligned}
&\eta^\ell := \dot{p}_\star^\ell - p_t(t_\ell), \quad \ell = q,\dots,N, \quad \xi^\ell := \dot{f}^\ell - f_t(t_\ell), \quad \ell = q,\dots,N, \\
&\vartheta^\ell := \dot{\mathfrak{p}}_\star^\ell - \mathfrak{p}_t(t_\ell), \quad \ell = 0,\dots,N.
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

注意， η^ℓ、ϑ^ℓ 和 ξ^ℓ 分别是离散时间导数的缺陷，对应于 p、$\mathfrak{p}$ 和 f。量 ϑ^ℓ 仅会出现在隐式–显式方法的一致性误差中。

采用这一记号，分别利用微分方程（2.3）和（5.4），我们将~一致性误差 d^n 和 d^n 改写为

$$
d^n = (\mathcal{M}+\mathcal{C})\eta^n + \mathcal{D}\mathcal{A}^{-1}\xi^n, \quad n = q,\dots,N, \tag{6.4}
$$

and

$$
\tilde{d}^n = \mathcal{C}\vartheta^n + \mathcal{M}\sum_{j=0}^{q-1}\gamma_j\vartheta^{n-q+j} + \mathcal{D}\mathcal{A}^{-1}\xi^n, \quad n = q,\dots,N. \tag{6.5}
$$

引理 6.1（一致性估计）。一致性误差（6.4）和（6.5）有如下界

$$
\max_{q\leqslant n\leqslant N}\|d^n\|_{\mathcal{W}'} \leqslant C\tau^q, \quad \max_{q\leqslant n\leqslant N}\|\tilde{d}^n\|_{\mathcal{W}'} \leqslant \tilde{C}\tau^q, \tag{6.6}
$$

前提是解 p、 $\mathfrak{p}$和强迫项 f 具有足够的正则性。

证明。 q 步隐式方法（α、 β）的阶为 q，即，

$$\sum_{i=0}^{q} i^{\ell}\alpha_i = \ell q^{\ell-1}, \quad \ell = 0, 1, \ldots, q. \tag{6.7}$$

因此，通过在 $t_{n-q} \geqslant 0$处进行泰勒展开，我们看到，直到$q-1$ 阶的首项均相消，从而得到

$$\eta^n = \frac{1}{q!}\left[\frac{1}{\tau}\sum_{i=0}^{q}\alpha_i\int_{t_{n-q}}^{t_{n-q+i}}(t_{n-q+i}-s)^q p^{(q+1)}(s)\,\mathrm{d}s - q\int_{t_{n-q}}^{t_n}(t_n-s)^{q-1}p^{(q+1)}(s)\,\mathrm{d}s\right] \tag{6.8}$$

以及相应的关系 ϑ^n 和 ξ^n ，其中 p 替换为 $\mathfrak{p}$ 和 f，分别如此。由此可知，对于所有 n ，(6.6) 中的第一个估计，以及对于 $n = 2q$， ....., N， (6.6) 中的第二个估计均成立。

对于 $\tilde{d}^q$， ....., $\tilde{d}^{2q-1}$ 在 (6.5) 中，我们需要估计 ϑ^0， ....., ϑ^{q-1}。由于 $\mathfrak{p}$ 在区间 $[-q\tau, T]$上定义良好，泰勒展开得

$$\max_{q\leqslant n\leqslant 2q-1}\|\tilde{d}^n\|_{\mathcal{W}'} \leqslant \tilde{C}\tau^q. \tag{6.9}$$

事实上，(6.9) 可由以下方式得到。从 (6.3) 和 (3.2)，可得

$$\vartheta^0 = \dot{\mathfrak{p}}_\star^0 - \mathfrak{p}_t(t_0) = \dot{\mathfrak{p}}(t_0) - \mathfrak{p}_t(t_0) = \frac{1}{\tau}\sum_{i=0}^{q}\alpha_i\mathfrak{p}(t_{-q+i}) - \mathfrak{p}_t(t_0).$$

在 t_{-q}处进行泰勒展开，我们看到，类似于 (6.8)，

$$\vartheta^0 = \frac{1}{q!}\left[\frac{1}{\tau}\sum_{i=0}^{q}\alpha_i\int_{t_{-q}}^{t_{-q+i}}(t_{-q+i}-s)^q\mathfrak{p}^{(q+1)}(s)\,\mathrm{d}s - q\int_{t_{-q}}^{t_0}(t_0-s)^{q-1}\mathfrak{p}^{(q+1)}(s)\,\mathrm{d}s\right].$$

因此，我们有$\|\vartheta^0\|_{\mathcal{W}'} \leqslant C\tau^q\|\mathfrak{p}^{(q+1)}\|_{L^\infty((-q\tau,\ 0);\mathcal{H}_\mathcal{W})}$.类似地， ϑ^1， ....., ϑ^{q-1}可通过在 t_{-q+1}， ....., t_{-1}处分别进行泰勒展开来估计。综合$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$关于 ξ^q、 ϑ^0、.....、ϑ^q的估计，可得到关于 d^q的估计。此外， d^{q+1}， ....., d^{2q-1} 也可用与$\tilde{}$类似的方法估计， d^q从而证明了（6.9）。□

7. Convergence analysis

继续之前，我们先回顾一下 $n \times n$ 托普利茨矩阵 T_n 的生成函数的概念，以及一个辅助结果——格伦兰德–塞格ő定理；该定理在我们的分析中起着关键作用。

定义 7.1 ([14, 第 13]页；托普利茨矩阵的生成函数)。 考虑$n \times n$ 托普利茨矩阵

$$T_n = (t_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{C}^{n,n}$$

其对角线元素为 t_0，次对角线元素为 t_1，超对角线元素为 t_{-1}，依此类推；而 $(n, 1)$ 和 $(1, n)$ 位置的元素分别为 t_{n-1}和 t_{1-n}，也就是说，元素 $t_{ij} = t_{i-j}, i, j = 1, \ldots, n$沿着 T_n. 的对角线保持恒定。设 $t_{-n+1}, \ldots, t_{n-1}$为三角多项式 g 的傅里叶系数，该多项式的次数不超过 $n-1$，即，

$$t_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x, \quad k = 1-n, \ldots, n-1.$$

那么， $g(x) = \sum_{k=1-n}^{n-1} t_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 称为 T_n的生成函数。

如果生成函数 g 是实值的，那么矩阵 T_n 是厄米矩阵；如果 g 是实值偶函数，那么 T_n 是对称矩阵。

引理 7.1 （[14, 第 13–14]页；Grenander–Szeg˝o 定理）。 设 T_n 为具有生成函数 g的对称托普利茨矩阵。则， $\lambda_{\min}$（T_n）和$\lambda_{\max}$（T_n）分别为 T_n 的最小特征值和最大特征值，并满足以下界

$$g_{\min} \leqslant \lambda_{\min}(T_n) \leqslant \lambda_{\max}(T_n) \leqslant g_{\max},$$

其中， $g_{\min}$ 和 $g_{\max}$ 分别是 g的最小值和最大值。特别地，如果 $g_{\min}$ 为正，则对称矩阵 T_n 是正定的。

7.1. 全隐式格式的收敛性。 本节利用能量技巧推导全隐式格式的误差估计。对于六步、五步和四步格式，我们将分别使用乘子（4.3）、（4.16）和（4.15）。不同于隐式–显式格式，对于全隐式格式，我们也可以选择使用 [20] 或 [7] 作为四步和五步方法的乘子，以及使用 [3] 作为六步方法的乘子。

定理 7.1 (全隐式格式的误差估计)。 设 $p(t_n)$ 为原系统 p 的解 (2.3) 的节点值，且 满足全隐式步 BDF 格式 (3.6)， ， 5， 6。对于精度足够高的初始近似 ， ....., ， 使得

$$\|p(t_j) - p^j\|_{\mathcal{H}_\mathcal{W}} \leqslant C\tau^q, \quad j = 0, \dots, q-1, \tag{7.1}$$

and

$$\tau^{1/2}\|p(t_j) - p^j\|_{\mathcal{W}} \leqslant C\tau^6, \quad j = 3, 4, 5, \tag{7.2}$$

对于六步方法，

$$\tau^{1/2}\|p(t_j) - p^j\|_{\mathcal{W}} \leqslant C\tau^5, \quad j = 3, 4, \tag{7.3}$$

对于五步方法，且

$$\tau^{1/2}\|p(t_3) - p^3\|_{\mathcal{W}} \leqslant C\tau^4 \tag{7.4}$$

对于四步方法，我们有最优阶误差估计

$$\|p(t_n) - p^n\|_{\mathcal{H}_\mathcal{W}} \leqslant C\tau^q, \quad n = q, \dots, N. \tag{7.5}$$

证明。 为具体起见，我们给出六步方法的证明。四步和五步方法的证明思路相同；对于这些数值格式，使用乘子（4.15）和（4.16）。

令 $q = 6$ 和 $e^n := p(t_n) - p^n$ 表示误差。将相容性关系（6.1）乘以 τ并减去数值格式（3.6），然后用 $e^n - \mu_1 e^{n-1} - \mu_2 e^{n-2} - \mu_3 e^{n-3}$进行测试，并采用（4.3）中的乘子，可得

$$\Big((\mathcal{M} + \mathcal{C})\sum_{i=0}^{q} \alpha_i e^{n-q+i}, e^n - \sum_{j=1}^{3} \mu_j e^{n-j}\Big) + \tau B_n = \tau D_n \tag{7.6}$$

with

$$B_n := \Big(\mathcal{B}e^n, e^n - \sum_{j=1}^{3} \mu_j e^{n-j}\Big) \quad \text{and} \quad D_n := \Big(d^n, e^n - \sum_{j=1}^{3} \mu_j e^{n-j}\Big).$$

现在，我们考虑算子 $\mathcal{M}$ 关于由双线性形式 c定义的内积的谱分解。这意味着我们考虑一个正交归一基

$\tilde{v}_i = \mathcal{C}^{1/2} v_i \in \mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ 由紧自伴算子的特征函数构成 $\mathcal{C}^{-1/2}\mathcal{M}\mathcal{C}^{-1/2}$，对应的特征值为 $0 \leqslant \lambda_i \leqslant \omega$；参见[13, 定理 6。11]那么，显然有：

$$\mathcal{M} v_i = \lambda_i \mathcal{C} v_i \quad \text{and} \quad (\mathcal{C} v_i, v_j) = \delta_{ij}.$$

$_\infty$取系数 $\varepsilon_i^n := (\mathcal{C} e^n, v_i) \in \mathbb{R}$，则有正交归一展开 $e^n = \sum \varepsilon_i^n v_i{}_{i=1}$以及帕塞瓦尔关系

$$\|e^n\|_c^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\varepsilon_i^n)^2. \tag{7.7}$$

$^\sim$令 $G = (\tilde{g}_{jk}) \in \mathbb{R}^{q,q}$ 为与乘子（$m = 0$）相关的（隐式，且4.3）六步 BDF 方法的正定对称矩阵，并记 $\|\cdot\|_{\widetilde{G}} = (\widetilde{G}\cdot, \cdot)^{1/2}$ 为 $\mathbb{R}^q$上的诱导范数。于是，取 $E_i^n := \big(\varepsilon_i^{n-q+1}, \ldots, \varepsilon_i^n\big)^\top \in \mathbb{R}^q$, 有

$$\|E_i^n\|_{\widetilde{G}}^2 = \sum_{j,k=1}^{q} \tilde{g}_{jk} \varepsilon_i^{n-q+j} \varepsilon_i^{n-q+k},$$

且（7.6）左端的第一项可从下方估计为

$$\begin{aligned}
&\Big((\mathcal{M} + \mathcal{C}) \sum_{\ell=0}^{q} \alpha_\ell e^{n-q+\ell}, e^n - \sum_{j=1}^{3} \mu_j e^{n-j}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + 1) \Big(\sum_{\ell=0}^{q} \alpha_\ell \varepsilon_i^{n-q+\ell} \Big) \Big(\varepsilon_i^n - \sum_{j=1}^{3} \mu_j \varepsilon_i^{n-j} \Big) \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + 1) \big(\|E_i^n\|_{\widetilde{G}}^2 - \|E_i^{n-1}\|_{\widetilde{G}}^2 \big).
\end{aligned}$$

取范数 $\|\cdot\|_\lambda$,

$$\|E^m\|_\lambda^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + 1) \|E_i^m\|_{\widetilde{G}}^2, \tag{7.8}$$

前述估计可写成

$$\Big((\mathcal{M} + \mathcal{C}) \sum_{\ell=0}^{q} \alpha_\ell e^{n-q+\ell}, e^n - \sum_{j=1}^{3} \mu_j e^{n-j}\Big) \geqslant \|E^n\|_\lambda^2 - \|E^{n-1}\|_\lambda^2. \tag{7.9}$$

根据（7.9）、（7.6）可得$\|E^n\|_\lambda^2 - \|E^{n-1}\|_\lambda^2 + \tau B_n \leqslant \tau D_n$. 此处对 n 从$n = q$ 到 $n = m$求和，得到

$$\|E^m\|_\lambda^2 - \|E^{q-1}\|_\lambda^2 + \tau \sum_{n=q}^{m} B_n \leqslant \tau \sum_{n=q}^{m} D_n. \tag{7.10}$$

右端的求和可以利用广义柯西–施瓦茨不等式和带有适当权重的算术–几何平均不等式轻松估计。接下来，我们沿用 [3], 中的方法，重点从下方估计求和式 $B_q + \cdots + B_m$；有

$$\sum_{n=q}^{m} B_n = \sum_{n=q}^{m} \Big(\mathcal{B} e^n, e^n - \sum_{j=1}^{3} \mu_j e^{n-j} \Big). \tag{7.11}$$

首先，受函数 g （4.14）的正性启发，为了利用正性性质（P），我们引入 μ_0 : $= -91/100$，并将（7.11）改写为

$$\sum_{n=q}^{m} B_n = \frac{9}{100}\sum_{n=q}^{m}\|e^n\|_b^2 + J_m \quad \text{with} \quad J_m := -\sum_{j=0}^{3}\mu_j\sum_{i=1}^{m-5}\left(\mathcal{B}e^{5+i}, e^{5+i-j}\right). \tag{7.12}$$

我们的下一步是将 J_m 改写成一种形式，以便按照所需方式对其给出下界。为此，我们引入下三角托普利茨矩阵 $L = (\ell_{ij}) \in \mathbb{R}^{m-5,\, m-5}$ 其元素为 $\ell_{i,\, i-j} = -\mu_j,\ j = 0, 1, 2, 3,\ i = j+1, \ldots, m-5$，其余元素均为零。采用这一记号，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{m-5}\ell_{ij}(\mathcal{B}e^{5+i}, e^{5+j}) &= -\sum_{j=0}^{3}\mu_j\sum_{i=j+1}^{m-5}(\mathcal{B}e^{5+i}, e^{5+i-j}) \\ &= J_m + (\mathcal{B}e^6, \mu_1 e^5 + \mu_2 e^4 + \mu_3 e^3) + (\mathcal{B}e^7, \mu_2 e^5 + \mu_3 e^4) + \mu_3(\mathcal{B}e^8, e^5).\end{aligned} \tag{7.13}$$

此时，我们将利用正性性质 (P) 证明 (7.13) 左端的项非负，进而得到 J_m. 的一个合适下界。事实上，对称部分

$$L_s := (L + L^\top)/2$$

矩阵 L 是一个对称的七对角托普利茨矩阵，其生成函数g，见 (4.14)，为正。因此，根据 Grenander–Szeg″o 定理，见引理7.1，托普利茨矩阵 L_s 是正定的。因此，由于

$$(Lx, x) = (L_s x, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{m-5},$$

矩阵 L 也是正定的。因此，(7.13) 左端的表达式非负；于是，(7.13) 给出了 J_m 的下界估计，

$$J_m \geqslant -(\mathcal{B}e^6, \mu_1 e^5 + \mu_2 e^4 + \mu_3 e^3) - (\mathcal{B}e^7, \mu_2 e^5 + \mu_3 e^4) - \mu_3(\mathcal{B}e^8, e^5). \tag{7.14}$$

由 (7.10)、(7.12) 和 (7.14)，可得

$$\begin{aligned}\|E^m\|_\lambda^2 + \frac{9}{100}\tau\sum_{n=q}^{m}\|e^n\|_b^2 &\leqslant \|E^{q-1}\|_\lambda^2 + \tau\sum_{n=q}^{m} D_n \\ &+ \tau(\mathcal{B}e^6, \mu_1 e^5 + \mu_2 e^4 + \mu_3 e^3) + \tau(\mathcal{B}e^7, \mu_2 e^5 + \mu_3 e^4) + \tau\mu_3(\mathcal{B}e^8, e^5).\end{aligned} \tag{7.15}$$

现在，由 (7.8) 和 (7.7)，令 $c_{\widetilde{G}}$和 $C_{\widetilde{G}}$分别为~矩阵 G的最小和最大特征值，可得

$$\|E^m\|_\lambda^2 \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\|E_i^m\|_{\widetilde{G}}^2 \geqslant c_{\widetilde{G}}\sum_{i=1}^{\infty}(\varepsilon_i^m)^2,$$

由此，

$$\|E^m\|_\lambda^2 \geqslant c_{\widetilde{G}}\|e^m\|_c^2, \tag{7.16}$$

并且，类似地，

$$\|E^{q-1}\|_\lambda^2 \leqslant (1+\omega)C_{\widetilde{G}}\sum_{j=0}^{q-1}\|e^j\|_c^2. \tag{7.17}$$

此外，涉及初始近似的项可以通过初等不等式估计，形式如下

$$|(\mathcal{B}e^i, e^j)| \leqslant \delta_1 C_b \|e^i\|_{\mathcal{W}}^2 + \frac{C_b}{4\delta_1}\|e^j\|_{\mathcal{W}}^2, \quad i = 6,7,8, \quad j = 3,4,5, \tag{7.18}$$

当 δ_1 足够小时。利用柯西–施瓦茨不等式和算术–几何平均不等式可估计项 D_n ；我们得到

$$|D_n| \leqslant \frac{1}{\delta_2}\|d^n\|_{\mathcal{W}'}^2 + \delta_2\Big(\|e^n\|_{\mathcal{W}}^2 + \sum_{j=1}^{3}|\mu_j|^2\|e^{n-j}\|_{\mathcal{W}}^2\Big) \tag{7.19}$$

当 δ_2足够小时。

利用（7.16）、（7.17）、（7.18）和（7.19），由（7.15）可推得

$$\|e^m\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}^2 + \tau\sum_{n=6}^{m}\|e^n\|_{\mathcal{W}}^2 \leqslant C\sum_{j=0}^{5}\big(\|e^j\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}^2 + \tau\|e^j\|_{\mathcal{W}}^2\big) + C\tau\sum_{n=6}^{m}\|d^n\|_{\mathcal{W}'}^2, \quad m = 6,\ldots,N.$$

根据（7.1）和（6.6），右端表达式的阶为 $O(\tau^{12})$，于是关于 $q = 6$ 的所述误差估计（7.5）得以推出。□

定理7.2 （ u的误差估计）。 设 $u(t_n)$ 为解 u 在原系统（2.1）中的节点值，且 u^n 满足全隐式格式（3.4）。对于足够精确的初始近似 p^0、……、p^{q-1}，满足（7.1）–（7.4），我们有误差估计

$$\|u(t_n) - u^n\|_{\mathcal{V}} \leqslant C\tau^q, \quad n = q,\ldots,N. \tag{7.20}$$

证明。考虑第一方程2.1）与（3.4）之差，可得

$$a(u(t_n) - u^n, v) - d(v, p(t_n) - p^n) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

取测试函数 $v = u(t_n) - u^n$，得到

$$\|u(t_n) - u^n\|_{\mathcal{V}}^2 \leqslant \frac{C_d}{c_a}\|u(t_n) - u^n\|_{\mathcal{V}}\,\|p(t_n) - p^n\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}},$$

由此，$\|u(t_n) - u^n\|_{\mathcal{V}} \leqslant C\|p(t_n) - p^n\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}$. 因此，由（7.20）可得所述估计（7.5）。□

注7.1 （关于初始近似的要求）。 初始近似的精度要求（7.2）、（7.3）和（7.4）实际上并非必要；它们是能量技巧所导致的技术性假设。例如，（7.2）源于（ $\mu_1, \mu_2,$ 以及 μ_3 在（4.3）中的非零分量。

结合傅里叶与谱稳定性技巧，可以在较宽松的初始近似精度假设（7.5）下，以统一的方式对所有BDF方法建立最优阶误差估计（7.1）；参见 [4, 注7.2] 和[6, 注2.1, （2.25）]。关于傅里叶与谱稳定性方法的更多细节，例如参见[5, 1, 2]及其中的参考文献。

此处采用能量技巧，因为它也适用于更有趣的隐式–显式BDF方法。相比之下，傅里叶与谱稳定性方法似乎不适用于这种情况；这是因为时间导数 p_t 在各项中的离散化方式并不相同；离散化其中一部分（即项 $\mathcal{C}p_t$）时使用多项式 $\alpha \in \mathbb{P}_q$ 的系数，而离散化另一部分时则使用多项式 $\tilde{\alpha} \in \mathbb{P}_{2q-1}$ 的系数

其中一部分，即项 $\mathcal{M}p_t$；参见（3.11）左端的第一项和第二项。

7.2. 隐式–显式格式的收敛性。接下来，我们将运用能量技巧推导隐式–显式格式的误差估计。

定理 7.3 （隐式–显式格式的误差估计）。 设 $\mathfrak{p}$（t_n）为时滞系统 $\mathfrak{p}$ 的解 （5.4），且 p^n 满足隐式–显式 q步 BDF 格式 （3.13）， $q = 4$，5，6。 假设 $\omega \leqslant 1/$（$2^q - 1$）。则有

$$\|\mathfrak{p}(t_n) - p^n\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{W}} \leqslant C\tau^{2q} + C\sum_{j=0}^{q-1}\Big(\|\mathfrak{p}(t_j) - p^j\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{W}} + \tau\|\mathfrak{p}(t_j) - p^j\|^2_{\mathcal{W}}\Big),\ n = q, \ldots, N.$$

证明。为明确起见，我们仍将给出 $q = 6$. 的证明

令 $e^n := \mathfrak{p}$（t_n） $- p^n$ 表示误差。将相容性关系（6.2）乘以 τ，再减去数值格式（3.13），然后以 $e^n - \mu_1 e^{n-1} - \mu_2 e^{n-2} - \mu_3 e^{n-3}$作为检验函数，并使用（4.3）中的乘子，得到

$$\Big(\mathcal{C}\sum_{i=0}^{2q}\tilde{\alpha}_i e^{n-2q+i} + \mathcal{M}\sum_{i=0}^{2q-1}\hat{\alpha}_i e^{n-2q+i}, e^n - \sum_{j=1}^{3}\mu_j e^{n-j}\Big) + \tau B_n = \tau\widetilde{D}_n \tag{7.21}$$

$n = q, \ldots, N$, 其中

$$B_n := \Big(\mathcal{B}e^n, e^n - \sum_{j=1}^{3}\mu_j e^{n-j}\Big) \quad \text{and} \quad \widetilde{D}_n := \Big(\tilde{d}^n, e^n - \sum_{j=1}^{3}\mu_j e^{n-j}\Big).$$

令 $G(\lambda_i) = (g_{jk}(\lambda_i)) \in \mathbb{R}^{2q,2q}$ 为与乘子 (4.3) 相关的 $m = \lambda_i$ 下（隐式–显式，含 $m \in [0, 1/63]$）六步 BDF 方法的正定对称矩阵，并记 $\|\cdot\|_{G(\lambda_i)} = (G(\lambda_i)\cdot, \cdot)^{1/2}$ 为 $\mathbb{R}^{2q}$ 上的诱导范数。令 $\widetilde{G} = (\tilde{g}_{jk})$ $\widehat{G} = (\hat{g}_{jk}) \in \mathbb{R}^{2q,2q}$ 分别为与乘子 (4.3) 相关的六步 BDF 方法在极端情形 $m = 0$ 和 $m = 1/63$下的正定对称矩阵。由于 $\tilde{\alpha} + \lambda_i\hat{\alpha} = (1 - \frac{\lambda_i}{\omega^\star})\tilde{\alpha} + \frac{\lambda_i}{\omega^\star}(\tilde{\alpha} + \omega^\star\hat{\alpha})$，显然可得

$$g_{jk}(\lambda_i) = \Big(1 - \frac{\lambda_i}{\omega^\star}\Big)\tilde{g}_{jk} + \frac{\lambda_i}{\omega^\star}\hat{g}_{jk}, \quad \omega^\star = 1/63. \tag{7.22}$$

于是，令 $\mathcal{E}_i^n := \big(\varepsilon_i^{n-2q+1}, \ldots, \varepsilon_i^n\big)^\top \in \mathbb{R}^{2q}$，我们有

$$\|\mathcal{E}_i^n\|^2_{G(\lambda_i)} = \sum_{j,k=1}^{2q} g_{jk}(\lambda_i)\varepsilon_i^{n-2q+j}\varepsilon_i^{n-2q+k},$$

且左侧的第一项（7.21）可用以下形式给出下界估计

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathcal{C}\sum_{\ell=0}^{2q}\tilde{\alpha}_\ell e^{n-2q+\ell} + \mathcal{M}\sum_{\ell=0}^{2q-1}\hat{\alpha}_\ell e^{n-2q+\ell}, e^n - \sum_{j=1}^{3}\mu_j e^{n-j}\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{\ell=0}^{2q}(\tilde{\alpha}_\ell + \lambda_i\hat{\alpha}_\ell)\,\varepsilon_i^{n-2q+\ell}\Big)\Big(\varepsilon_i^n - \sum_{j=1}^{3}\mu_j\varepsilon_i^{n-j}\Big)\\
&\geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\|\mathcal{E}_i^n\|^2_{G(\lambda_i)} - \|\mathcal{E}_i^{n-1}\|^2_{G(\lambda_i)}\Big).
\end{aligned}$$

取范数 $\|\cdot\|_\lambda$，

$$\|\mathcal{E}^m\|_\lambda^2=\sum_{i=1}^{\infty}\|\mathcal{E}_i^m\|_{G(\lambda_i)}^2,$$

前面的估计和（7.21）给出

$$\|\mathcal{E}^n\|_\lambda^2-\|\mathcal{E}^{n-1}\|_\lambda^2+\tau B_n\leqslant\tau\widetilde{D}_n.$$

对 n 从 $n=q$ 到 $n=m$ 求和，得到

$$\|\mathcal{E}^m\|_\lambda^2+\tau\sum_{n=q}^{m}B_n\leqslant\|\mathcal{E}^{q-1}\|_\lambda^2+\tau\sum_{n=q}^{m}\widetilde{D}_n. \tag{7.23}$$

由（7.23）、（7.12）和（7.14），我们得到

$$\begin{aligned}\|\mathcal{E}^m\|_\lambda^2+\frac{9}{100}\tau\sum_{n=q}^{m}\|e^n\|_b^2\leqslant\|\mathcal{E}^{q-1}\|_\lambda^2+\tau\sum_{n=q}^{m}\widetilde{D}_n+\tau(\mathcal{B}e^6,\mu_1e^5+\mu_2e^4+\mu_3e^3)\\+\tau(\mathcal{B}e^7,\mu_2e^5+\mu_3e^4)+\tau\mu_3(\mathcal{B}e^8,e^5).\end{aligned}$$

令（$c_{G(\lambda_i)}$ $C_{G(\lambda_i)}$）、（$c_{\widetilde{G}}$，$C_{\widetilde{G}}$）和（$c_{\widehat{G}}$，$C_{\widehat{G}}$分别表示所有矩阵~ ^的最小和最大特征值 G（λ_i） G，以及 G。根据Weyl定理，[14, 定理1。4]，以及（7.22），我们有

$$c_{G(\lambda_i)}\geqslant\Big(1-\frac{\lambda_i}{\omega^\star}\Big)c_{\widetilde{G}}+\frac{\lambda_i}{\omega^\star}c_{\widehat{G}}=:c_{\lambda_i},\quad C_{G(\lambda_i)}\leqslant\Big(1-\frac{\lambda_i}{\omega^\star}\Big)C_{\widetilde{G}}+\frac{\lambda_i}{\omega^\star}C_{\widehat{G}}=:C_{\lambda_i}.$$

N现在，令 $c_\star:=$最小值$_{\lambda_i\in[0,\omega^\star]}c_{\lambda_i}$和 $C_\star:=$最大值$_{\lambda_i\in[0,\omega^\star]}C_{\lambda_i}$，利用（7.7），我们得到

$$\|\mathcal{E}^m\|_\lambda^2\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}c_{G(\lambda_i)}\,(\varepsilon_i^m)^2\geqslant\min_{\lambda_i\in[0,\omega^\star]}c_{\lambda_i}\sum_{i=1}^{\infty}(\varepsilon_i^m)^2=c_\star\,\|e^m\|_c^2,$$

$$\|\mathcal{E}^{q-1}\|_\lambda^2\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}C_{G(\lambda_i)}\sum_{j=-q}^{q-1}(\varepsilon_i^j)^2\leqslant\max_{\lambda_i\in[0,\omega^\star]}C_{\lambda_i}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=-q}^{q-1}(\varepsilon_i^j)^2=C_\star\sum_{j=0}^{q-1}\|e^j\|_c^2.$$

请注意，e^{-q}，…，e^{-1}不会出现在上述 $\mathcal{E}^{q-1}$ 估计中，因为它们为零；见（5.5）。

~此外，涉及初始近似以及 D_n 的项可像定理 7.1 的证明中那样进行估计。证明完毕。□

定理 7.4 （u 的误差估计）。设 u（t_n）为时滞系统 u （5.1）解的节点值，并且 u^n 满足隐式–显式 q步 BDF 格式 （3.8）， $q=4$，5，6。假设 $\omega\leqslant1/(2^q-1)$。那么，我们有误差估计

$$\|\mathfrak{u}(t_n)-u^n\|_{\mathcal{V}}^2\leqslant C\tau^{2q}+C\sum_{j=0}^{q-1}\Big(\|\mathfrak{p}(t_j)-p^j\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}^2+\tau\|\mathfrak{p}(t_j)-p^j\|_{\mathcal{W}}^2\Big),\quad n=q,\dots,N.$$

*Pro*由此得出。用式（3.8）的第一方程减去式（5.1）的第一方程，得到 s

$$a(\mathfrak{u}(t_n)-u^n,v)-d(v,\hat{\mathfrak{p}}(t_n)-\hat{p}^n)=0\quad\forall v\in\mathcal{V}.$$

对于测试函数 $v=\mathfrak{u}(t_n)-u^n$，可得

$$\|\mathfrak{u}(t_n)-u^n\|_{\mathcal{V}}^2\leqslant\frac{C_d}{c_a}\|\mathfrak{u}(t_n)-u^n\|_{\mathcal{V}}\|\hat{\mathfrak{p}}(t_n)-\hat{p}^n\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}},$$

由此可知

$$\|\mathfrak{u}(t_n) - u^n\|_{\mathcal{V}} \leqslant C\|\hat{\mathfrak{p}}(t_n) - \hat{p}^n\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}} \leqslant C\sum_{j=0}^{q-1}\gamma_j\|\mathfrak{p}(t_{n-q+j}) - p^{n-q+j}\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}.$$

因此，所述估计可由定理 7.3立即得出。 □

结合命题 5.1 以及定理7.3和7.4，我们得到这些隐式–显式格式的误差估计。

定理 7.5 （隐式–显式格式的误差估计）。设 $p(t_n)$ 为原系统 p 的解(2.3) 的节点值，且 p^n 满足隐式–显式 q步 BDF 格式(3.13)， $q = 4,\ 5,\ 6$。假设 $\omega \leqslant 1/(2^q - 1)$。那么，对于足够精确的初始近似 p^0，……， p^{q-1}，

$$\|p(t_j) - p^j\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}} + \tau^{1/2}\|p(t_j) - p^j\|_{\mathcal{W}} \leqslant C\tau^q, \quad j = 0, \ldots, q-1,$$

我们有最优阶误差估计

$$\|u(t_n) - u^n\|_{\mathcal{V}} + \|p(t_n) - p^n\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}} \leqslant C\tau^q, \quad n = q, \ldots, N.$$

8. Numerical results

在本节中，我们给出数值例子，以展示定理 7.5 所述的收敛性结果，并强调施加弱耦合条件的必要性。

8.1. 孔隙弹性示例。 为简洁起见，我们对（1.1）采用隐式–显式和全隐式六步 BDF 格式，其中 $\Omega = (-1, 1)^2, T = 1$，并施加齐次狄利克雷边界条件。

我们通过数值计算验证了包括收敛阶在内的理论结果。空间离散采用切比雪夫–高斯–洛巴托点上的谱配置法。为了检验时间误差，我们固定 $N_x = N_y = 20$；由于谱配置法具有指数收敛性，空间误差可以忽略；例如参见 [21, 定理 4.4,§4.5.2]。

示例 8.1. 这里，初值和强迫项的选取使得方程（1.1）的精确解为

$$u(x, y, t) = (t^7 + 1)\begin{pmatrix}(\cos(\pi x) + 1)\sin(\pi y)\\ \sin(\pi x)\,(\cos(\pi y) + 1)\end{pmatrix}, \quad p(x, y, t) = (t^7 + 1)\sin(\pi x)\sin(\pi y).$$

孔隙弹性参数选取为 $\eta = 0.3,\ \mu = 0.3,\ \lambda = 0.3,\ M = 0.1,\ \kappa = 0.05$；此时，耦合强度 $\omega = 0.015 < 1/63$ 满足定理 7.5中的条件。表 8.1 给出了误差及相应的收敛阶。

接下来，选取孔隙弹性参数 $\eta = 0.6,\ \mu = 0.6,\ \lambda = 0.6,\ M = 0.1,\ \kappa =$0.05；此时，耦合强度为 $\omega = 0.03 > 1/63$，因此不满足定理 7.5中的条件。表中给出了误差及相应的收敛阶8.2。

这些高阶格式的一个显著优势是，计算成本几乎与一阶格式相同，却能大幅提高精度。[8], 表 8.1 和8.2 表明，全隐式格式（3.4）不需要任何类型的耦合条件。隐式–显式格式（3.8）在耦合条件 $\omega = 0.015 < 1/63$下达到六阶精度；反之，当 $\omega = 0.03 > 1/63$ 时，该数值格式发散，

TABLE 8.1. 误差和收敛阶（ $\omega < 1/63$.）

隐式–显式六步格式				
τ	$\|u\ (T)\ - u^N\|_{\mathcal{V}}$	Rate	$\|p\ (T)\ - p^N\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}$	Rate
1/50	1.2218e-07		4.9606e-08	
1/100	1.9896e-09	5.9404	7.4826e-10	6.0508
1/150	1.7700e-10	5.9673	6.4951e-11	6.0279
1/200	3.1689e-11	5.9795	1.1535e-11	6.0076
全隐式六步格式				
τ	$\|u(T)\ - u^N\|_{\mathcal{V}}$	Rate	$\|p(T)\ - p^N\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}$	Rate
1/50	1.7802e-08		4.6881e-08	
1/100	2.6747e-10	6.0565	7.0436e-10	6.0566
1/150	2.3181e-11	6.0318	6.1035e-11	6.0322
1/200	4.1175e-12	6.0070	1.0825e-11	6.0120

TABLE 8.2. 误差和收敛阶， $\omega > 1/63$.

隐式–显式六步格式				
τ	$\|u(T)\ - u^N\|_{\mathcal{V}}$	Rate	$\|p\ (T)\ - p^N\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}$	Rate
1/50	1.1579e-07		4.0664e-08	
1/100	5.8366e-09	4.3103	5.6018e-10	6.1817
1/150	1.8496e-08	−2.8446	1.0504e-09	−1.5505
1/200	1.1540e-07	−6.3642	6.6737e-09	−6.4272
全隐式六步格式				
τ	$\|u(T)\ - u^N\|_{\mathcal{V}}$	Rate	$\|p\ (T)\ - p^N\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}}}$	Rate
1/50	1.3567e-08		3.5731e-08	
1/100	2.0384e-10	6.0565	5.3684e-10	6.0566
1/150	1.7666e-11	6.0319	4.6520e-11	6.0321
1/200	3.1537e-12	5.9894	8.2743e-12	6.0022

这与定理 7.5中的结果一致。下一小节将进一步探讨弱耦合条件的尖锐性。

8.2. 弱耦合条件的尖锐性。 接下来，我们给出一个数值例子，旨在验证引理中所述的弱耦合条件要求3.1。为此，我们考虑如下符合 (2.1) 的测试问题，其中$\mathcal{V} = \mathcal{H}_{\mathcal{V}} = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{W} = \mathcal{H}_{\mathcal{W}} = \mathbb{R}^1$，且双线性形式指定如下 [9]:

$$a(u,v) = v^\top Au, \quad d(v,p) = \sqrt{\omega} p^\top Dv, \quad c(p,q) = q^\top Cp, \quad b(p,q) = q^\top Bp$$

其中矩阵为

$$A := \frac{1}{2-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D := \frac{1}{\sqrt{13(2-\sqrt{2})}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := 1, \quad B := 1.$$

前因子 A 的选取使得最小特征值 c_a 的 A等于 $\mathbf{1}$。此外，给定 $c_c = 1$ 以及 d 的连续性常数为 $C_d = \sqrt{\omega}$时，满足（3.14）。在这种情况下， $DA^{-1}D^\top = 1$ 和 $\mathcal{M} = \omega\mathcal{C}$。

随后，我们采用不同的时间步长 τ 和变化的耦合系数 ω，考察隐式–显式数值格式（3.8）。误差在终止时间 $T = 1$处进行评估。我们选取以下精确解：

$$u(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \quad p(t) = (2t)^7 + 1.$$

相应结果如图8.1所示；可以看到，稳定性临界值大约为 $1/63 \approx 0.015873$，满足引理3.1中所述的弱耦合条件，并表明耦合条件几乎是尖锐的。

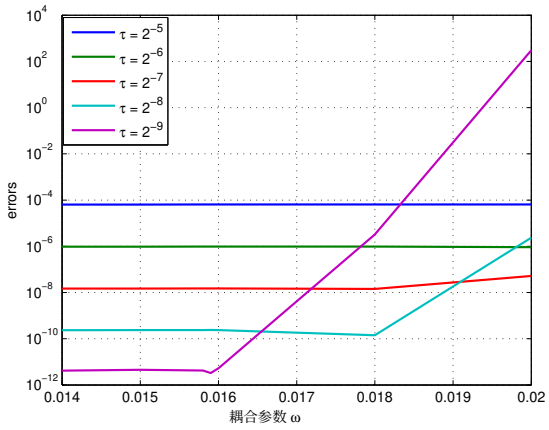

FIGURE 8.1. 不同耦合参数 ω 和不同时间步长 τ下六阶隐式–显式方法的误差。

REFERENCES

1. G. Akrivis, 《非线性抛物型方程的隐式–显式多步方法》, Math. Comp. 82 (2013) 45–68。DOI 10.1090/S0025-5718-2012-02628-7。MR2983015 2. G. Akrivis, 《非线性抛物型方程隐式及隐式–显式多步方法的稳定性》, IMA数值分析杂志 38 (2018) 1768–1796。DOI 10.1093/imanum/drx057。MR3867382 3. G. Akrivis, M. H. Chen, F. Yu 和 Z. Zhou, 《六步 BDF 方法的能量技巧》, 《SIAM 数值分析杂志》59 (2021) 2449–2472。DOI 10.1137/21M1392656。MR4316580 4. G. Akrivis 和 M. Crouzeix, 《非线性抛物型方程的线性隐式方法》, Math. Comp. 73 (2004) 613–635。DOI 10.1090/S0025-5718-03-01573-4。MR2031397 5. G. Akrivis, M. Crouzeix 和 Ch. Makridakis, 《拟线性抛物型方程的隐式–显式多步方法》, 《数值数学》82 (1999) 521–541。DOI 10.1007/s002110050429。MR1701828 6. G. Akrivis, O. Karakashian 和 F. Karakatsani, 《非线性演化方程的线性隐式方法》, 《数值数学》94 (2003) 403–418。DOI 10.1007/s00211-002-0432-y。MR1981162 7. G. Akrivis 和 E. Katsoprinakis, 《后向差分公式：抛物型方程的新乘子与稳定性性质》, Math. Comp. 85 (2016) 2195–2216。DOI 10.1090/mcom3055。MR3511279 8. R. Altmann, R. Maier 和 B. Unger, 《弱耦合椭圆-抛物问题的半显式离散格式》, Math. Comp. 90 (2021) 1089–1118。DOI 10.1090/mcom/3608。MR4232218 9. R. Altmann, R. Maier 和 B. Unger, 《弱耦合孔隙弹性的二阶半显式积分》, BIT Numer. Math. 64 (2024) 20。DOI 10.1007/s10543-024-01021-0。MR4728769 10. R. Altmann, A. Mujahid 和 B. Unger, 《椭圆-抛物问题的解耦多步格式》, arXiv.2407.18594v2 arXiv.2407.18594。11. C. Baiocchi 和 M. Crouzeix, 《A稳定性与G稳定性的等价性》, 《应用数值数学》5 (1989) 19–22。DOI 10.1016/0168-9274(89)90020-2。MR979543

12. M. A. Biot, 《三维固结的一般理论》, 《应用物理杂志》12 (1941) 155–164。DOI 10.1063/1.1712886。13. H. Brezis。《泛函分析、Sobolev空间与偏微分方程》。Springer，纽约、伦敦，2011年。DOI 10.1007/978-0-387-70914-7。MR2759829 14. R. H. Chan 和 X. Q. Jin, 《Toeplitz迭代求解器导论》, SIAM，宾夕法尼亚州费城，2007。DOI 10.1137/1.9780898718850。MR2376196 15. G. Dahlquist, 《G-稳定性等价于A稳定性》, BIT 18 (1978) 384–401。DOI 10.1007/BF01932018。MR520750 16. E. Eliseussen, M. E. Rognes 和 T. B. Thompson, 《多网络孔隙弹性的后验误差估计与自适应性》, ESAIM数学建模与数值分析 57 (2023) 1921–1952。DOI 10.1051/m2an/2023033。MR4609868 17. A. Ern 和 S. Meunier, 《耦合椭圆-抛物型问题Euler-Galerkin近似的后验误差分析》, ESAIM数学建模与数值分析 43 (2009) 353–375。DOI 10.1051/m2an:2008048。MR2512500 18. E. Hairer 和 G. Wanner, 《常微分方程求解 II：刚性问题与微分-代数问题》, 2nd 修订版，Springer出版社，柏林、海德堡，计算数学丛书第14卷，2010年。DOI 10.1007/978-3-642-05221-7。MR2657217 19. C. Lubich, D. Mansour 和 C. Venkataraman, 《演化曲面上抛物型微分方程的后向差分时间离散》, IMA数值分析杂志 33 (2013) 1365–1385。DOI 10.1093/imanum/drs044。MR3119720 20. O. Nevanlinna 和 F. Odeh, 《线性多步法的乘子技巧》, 数值泛函分析与优化 3 (1981) 377–423。DOI 10.1080/01630568108816097。MR636736 21. J. Shen, T. Tang 和 L. Wang, 《谱方法：算法、分析与应用》, Springer出版社，柏林，2011年。DOI 10.1007/978-3-540-71041-7。MR1311481 22. R. E. Showalter, 《孔隙弹性介质中的扩散》, 《数学分析与应用杂志》251 (2000) 310–340。DOI 10.1006/jmaa.2000.7048。MR1790411

Department of Computer Science and Engineering, University of Ioannina, 451 10 Ioannina, Greece, and Institute of Applied and Computational Mathematics, FORTH, 700 13Heraklion, Crete, Greece电子邮箱：akrivis@ cse.uoi.gr

School of Mathematics and Statistics, Gansu Key Laboratory of Applied Mathematics and Complex Systems, Lanzhou University, Lanzhou 730000, P.R. China电子邮箱：chenmh@ lzu.edu.cn

Institute for Math & AI, Wuhan University, Wuhan 430072, P.R. China电子邮箱地址： yufan24@whu.edu.cn