arXiv:2601.01744v1 [math.RT] 5 Jan 2026

砖有限斜温和代数是表示有限的

´MONICA GARCIA 和 LEA LAVOUE

Abstract. 我们证明，斜温和代数是砖有限的，当且仅当它是表示有限的，从而推广了 Plamondon 关于温和代数的原始结果

Contents

1. 引言 1 致谢 2 2. 斜温和代数的预备知识 2 2.1. 斜温和代数的不可分解模 4 3. 斜温和代数的极小带及主定理的证明 5 参考文献 11

1. Introduction

砖模，即 Schur 表示，长期以来一直是有限维代数表示论的研究对象，在这一领域中，它们作为简单模的自然推广出现 [Gab62]。近年来，砖模已成为若干领域的核心概念，尤其是在 τ-倾斜理论、挠理论、稳定性条件以及 g-向量扇理论中。如果一个代数至多只有有限多个按同构计的砖模，则称其为砖有限 代数。显然，每个表示有限代数都是砖有限的，但反之一般并不成立，只有在附加的结构性假设下才成立。这促成了大量关于给定代数的砖模分布及其影响的研究。近年来提出的关于砖有限性的基本猜想综述，可见于 [MP25]。

一个有趣的例子是温和代数：在这一类代数中，砖有限性与表示有限性相一致。温和代数是一类著名的字符串代数，由 [AS87]引入。利用其不可分解模的组合分类，Plamondon 证明了在这一情形下，砖有限性蕴含表示有限性 [Pla19]。

斜温和 代数（也称为斜温和代数）是温和代数的一种推广，温和代数最初由 [GdlPn99]引入。

虽然斜温和代数保留了温和代数的许多组合特征，但也展现出新的现象，尤其是特殊顶点的存在以及额外的局部结构。当基域的特征不等于二时，其不可分解模也已在 [CB89]中得到完整分类。与温和代数一样，斜温和代数及其不可分解模也可以通过几何模型来研究 [LFSV22, HZZ23, AB22], ，具体而言，是通过带有轨形的曲面来研究。

在这篇简短的论文中，我们将 Plamondon 的结果推广到斜温和代数。我们的主要结果如下。

主定理 (3.1)。 设 $A \cong \Bbbk Q^{sp}/I^{sp}$ 是域 $\Bbbk$ 上的斜温和代数，且其特征 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$。那么， A 是砖有限的，当且仅当它是表示有限的。

在完成本文期间，我们获悉 Chang、Jin、Schroll 和 Wang 的平行研究 [CJSW25]。在他们论文的第 3 节中，作者研究了一类与本文第 3 节所讨论的斜温和代数密切相关的斜温和代数。他们证明，在基域代数闭这一额外假设下，这些代数是砖无限的，由此在该情形下可得一个类似于定理 3.1 的结果。他们还通过几何模型研究了斜温和代数的 silting 离散性。

Acknowledgements

本研究是 L´ea Lavou´e 的硕士论文 [Lav25b] 的一部分，在 Thomas Br¨ustle 和 Monica Garcia 的指导下完成。我们感谢 Thomas Br¨ustle 在整个项目过程中给予的宝贵建议、随时提供的帮助和友善支持。MG 感谢 Kaveh Mousavand 对极小砖无限斜温和代数提出的建议和想法。作者感谢加拿大数学会提供的经费支持，使他们得以参加该学会在魁北克市举办的 2025 年夏季会议；本研究的部分内容曾以海报形式在会上展示 [Lav25a]。

2. Preliminaries on skew-gentled algebras

斜温和代数这一概念最初由 de la Pe˜na 和 Geiß 在 [GdlPn99] 中提出。它们是温和代数的推广，因为它们是温和代数的斜化版本；详情见 [AB22] 。自问世以来，人们提出了许多等价定义来研究这类代数。本文将交替采用其中两种定义。我们先回顾温和代数的定义。

定义 2.1. 若一个代数 A同构于路径代数 $\Bbbk Q/I$ ，其中 $Q = (Q_1, Q_0)$ 是有限箭图，且 I 是容许理想，并且它们共同满足以下条件，则称其为温和代数。

– 任一顶点 $v \in Q_0$ 至多是两条箭的源点（分别地，目标点）。– 对任一箭 $\alpha \in Q_1$，至多存在一条箭 β 和一条箭 γ，使得 $\beta\alpha \notin I$ 和 $\alpha\gamma \notin I$。– 对任一箭 $\alpha' \in Q_1$，至多存在一条箭 β' 和一条箭 γ'，使得 $\beta'\alpha' \in I$ 和 $\alpha'\gamma' \in I$。

以下斜温和代数的定义引自 [AB22]。

定义 2.2。若代数 A 满足 $A \cong \Bbbk Q^{sp}/I^{sp}$，则称其为斜温和代数，其中 $Q^{sp} = (Q_0^{sp}, Q_1^{sp})$ 是一个有限箭图，I^{sp} 是一个理想，且它们共同满足以下条件：

(1) $S_p \subseteq Q_0$ 是特殊顶点的子集，使得对于每个 $i \in S_p$，都存在一个特殊环 ε_i。(2) $Q_0^{sp} = Q_0$，$Q_1^{sp} = Q_1 \sqcup \{\varepsilon_i \mid i \in S_p\}$。(3) $I^{sp} = I \sqcup \{\varepsilon_i^2 - e_i \mid i \in S_p\}$，其中 I 是由长度为二的路径生成的理想。(4) $\Bbbk Q^{sp}/\langle I \sqcup \{\varepsilon_i^2 \mid i \in S_p\}\rangle$ 是温和代数。

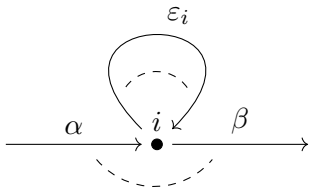


FIGURE 1. 斜温和代数中特殊顶点周围极大构型的局部图 i

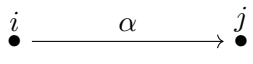
按照 [Gei26] 的做法，斜温和代数的定义可以用其关联的极化箭图来重新表述。斜温和代数的不可分解模最初正是在这一背景下由 Crawley-Boevey 于 [CB89] 中进行分类的。为求清晰简洁，我们不再给出极化箭图的完整定义。读者可在 [Gei26 第 2、3 节以及 5]中找到更多细节。

就我们的目的而言，回顾斜温和代数˜　　˜如何用箭图 Q 和容许理想 I 来描述，也很有用（注意，I^{sp} 不是容许的，因为它不包含在由 $\Bbbk Q^{sp}$的所有长度为二的路径生成的双边理想中）。设 $Q^{sp} = (Q_0^{sp}, Q_1^{sp})$如定义 2.2 所述。对于任意 $i \in Q_0^{sp}$，若满足 $i \in S_p$，则令 $S(i) = \{+, -\}$；否则令 $S(i) = \{o\}$。斜温和代数 $\Bbbk Q^{sp}/I^{sp}$ 同构于˜　˜代数 $\Bbbk Q/I$，其中：

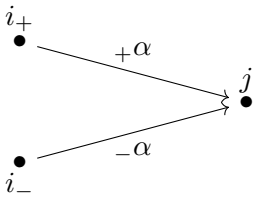
$$\tilde{Q}_0 = \{i_\rho \mid i \in Q_0^{sp} \text{ and } \rho \in S(i)\}$$
$$\tilde{Q}_1 = \{{}_\tau\alpha_\sigma \mid \alpha \in Q_1, \tau \in S(t(\alpha)),\ \sigma \in S(s(\alpha))\}$$
$$s({}_\tau\alpha_\sigma) = (s(\alpha), \sigma) \quad t({}_\tau\alpha_\sigma) = (t(\alpha), \tau).$$

˜换言之，箭图 Q 是通过复制每个特殊顶点$i \in S_p$，并将每个特殊环替换为至多含 2 个箭的族˜而得到的（示例见图 2）。此外，理想 I 由 I给出的关系诱导，同时考虑箭的复制。具体而言，有：

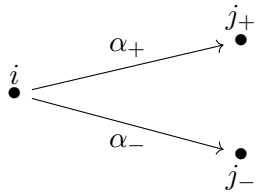
$$\tilde{I} = \left\langle \bigcup_{\alpha\beta\in I} \left\{ \sum_{\sigma\in S(t(\beta))} {}_\tau\alpha_\sigma\ {}_\sigma\beta_\rho \mid \tau \in S(t(\alpha)) \quad \rho \in S(s(\beta)) \right\} \right\rangle.$$



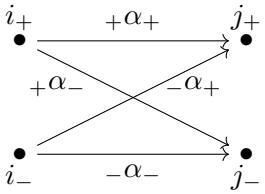
i和 j 普通顶点



i特殊和 j 普通顶点



i普通和 j 特殊顶点



i和 j 特殊顶点

˜FIGURE 2. 与箭 $\alpha : i \to j \in Q_1^{sp}$ 相关的不同构型 Q 。
为简化记号，我们省略与非特殊顶点相关的o指标。

2.1. 斜温和代数的不可分解模。回顾一下，与温和情形一样，斜温和代数A 的不可分解模由其字符串和带中的一个子集分类，具体而言，是那些可容许的字符串和带，我们将其记为 Adm(Q^{sp})（见 [Gei26，定义 3.2]）。由于精确定义用到了相关极化箭图的概念，此处略去。不过我们回顾一下，可容许字符串 $\omega = w_1 \cdots w_n$关于Q^{sp} 若且唯若 $t(w_1) \in S_p$，则称其类型为（r，s）$\in \{u, p\}^2$，其中 $r = p$

且 w_1 不是特殊环，并且 $s = p$ 若且唯若 $s(w_n) \in S_p$ 且 w_n 不是特殊环。

对于每个 $x \in \mathrm{Adm}(Q^{sp})$，都存在一个与之对应的有限维代数 A_x，如下面的表格所示。每个代数 A_x 都配有一个自同构 ι，我们也将其列出。

x的类型	A_x	ι的自同构
$(u,\ u)$	$\Bbbk$	Id
$(u,\ p)$	$\Bbbk[T]/\langle T^2-1\rangle$	Id
$(p,\ u)$	$\Bbbk[T]/\langle T^2-1\rangle$	Id
$(p,\ p)$	$\frac{\Bbbk\langle T,\ S\rangle}{\langle T^2-1, S^2-1\rangle}$	$\iota(T)=S$ $\iota(S)=T$
band	$\Bbbk[T, T^{-1}]$	$\iota(T) = T^{-1}$

TABLE 1. 与可容许串或带 $x \in \mathrm{Adm}(Q^{sp})$ 类型相关的代数 A_x。

对于每个 A_x，记 $\mathrm{ind}(A_x)$ 为 A_x 上不可分解模的同构类集合。设 $\Bbbk$ 为一个域，且 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$。对于给定的斜温和代数 $\Bbbk Q^{sp}/I^{sp}$，定义

$$\mathrm{Adm}^{(\Bbbk)}(Q^{sp}) := \{(x, X) \mid x \in \mathrm{Adm}(Q^{sp}) \text{ and } X \in \mathrm{ind}(A_x)\}.$$

定理 2.3。 [CB89, BTCB24] 设 $A = \Bbbk Q^{sp}/I^{sp}$ 是域 $\Bbbk$ 上的斜温和代数，且 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$。则存在一个满射

$$\mathrm{Adm}^{(\Bbbk)}(Q^{sp}) \to \mathrm{ind}(A)$$

该满射将任意 $(x,\ X) \in \mathrm{Adm}^{(\Bbbk)}(Q^{sp})$ 关联到一个模 $M_x(X)$，使得$M_x(X) \cong M_{x'}(X')$ 当且仅当 $(x',\ X') = (x^{-1},\ X^{\iota})$；或者，当 x 是一个带时，若x' 是 x 的旋转，则 $X = X'$。

3. MINIMAL BANDS FOR SKEW-GENTLE ALGEBRAS AND PROOF OF THE MAIN THEOREM

我们的目标是证明以下定理，它将 [Pla19, Theo- rem 1.1] 推广到斜温和代数。首先回顾一下，砖模 是指其自同态环为除环的模，也就是说，它的所有非零自同态都是可逆的。我们将证明如下结论。

定理 3.1. 设 $A \cong \Bbbk Q^{sp}/I^{sp}$ 是定义在域 $\Bbbk$ 上的斜温和代数，且 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$。那么， A 是砖有限的，当且仅当它是表示有限的。

与温和情形一样，很容易看出，表示有限是砖有限的充分条件，因为砖是不可分解模。我们将证明这也是一个充分条件。

引理 3.2。对于任意表示类型为无限型的斜温和代数 $A = \Bbbk Q^{sp}/I^{sp}$ ，温和箭图 (Q^{sp}, I') 中存在一个带，其中$I' = \langle I \cup \{\varepsilon_i^2 \mid i \in S_p\}\rangle$ 的含义同定义 2.2 (4)。

证明。如上一节所述，A 的不可分解模可通过可容许串和带进行分类。注意，定理 2.3 表明，给定的 $x \in$Adm(Q^{sp}) 只有在 x 是一个容许带，或者 x 是类型为 (p, p) 的可容许串时，才会产生一个无限的不可分解模族。在后一种情况下，根据定义， $s(x)$ 和 $t(x)$ 是特殊顶点，因此 $x^{-1}\varepsilon_{t(x)}x\ \varepsilon_{s(x)}$ 是 (Q^{sp}, I') 中的一个带。

因此，若 A 是无限表示型，则要么 (Q^{sp}, I') 含有一个带，要么 A 必须有无穷多个可容许串，这尤其意味着 (Q^{sp}, I') 有无穷多个字符串。特别地，在后一种情况下，$\Bbbk Q^{sp}/I'$ 是一个无限型温和代数，因此，如 [BR 87] 所示，它也有一个带。□

与 [Pla19]，中一样，我们将使用以下引理，把定理 3.1 的证明归约为一系列极小情形。

引理 3.3。 [DIR$^+$19，定理 5.12(d)], [DIJ19，定理 1。4] 若 A 是砖有限代数，且 J 是 A 的一个理想，则 A/J 是砖有限的。

引理 3.4。 [Pla19，引理 4。1] 设 A 是一个斜温和无限表示型代数。与 A 相关的箭图 (Q^{sp}, I') 有一个极小带 b ，满足：

(1) 带 b 不会两次经过同一个顶点，但 b的起点和终点除外。(2) 或者，带 b 具有 $b = b'\omega b''\omega^{-1}$的形式，其中：(a) b' 和 b'' 是字符串，满足 $s(b') = t(b')$ 和 $s(b'') = t(b'')$。(b) b'^2 和 b''^2 不是字符串。(c) ω 可以是平凡的。(d) 三个字符串 b'、b'' 和 ω 均不会两次经过同一个顶点，但 b' 和 b'' 的起点和终点除外。尤其是，后者是 b 中仅有的可能特殊顶点。(e) 三个字符串b'、 b''、 ω 之间唯一可能的公共顶点是它们的起点和终点。

证明。这个引理是将 [Pla19，引理 4.1] 应用于斜温和代数情形下的 Q^{sp} 所得。相同的证明仍然适用，因为根据定义， $\Bbbk Q^{sp}/I'$ 是温和的。□

我们将根据箭图 Q^{sp} 中极小带 b 的类型（1 或 2），讨论为 J 定义的代数 A/J 。在两种情形下， J 均为由箭和顶点构成的、 b 不经过的理想。

情形1。 b **属于类型 (1)** 在这种情形下，代数 A/J 同构于 Q 的路径代数，其中 Q 的无向图如下：

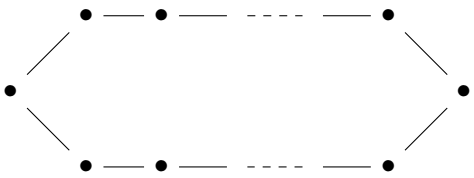


FIGURE 3. 类型为 A_m 的箭图，适用于 $m \geq 1$。

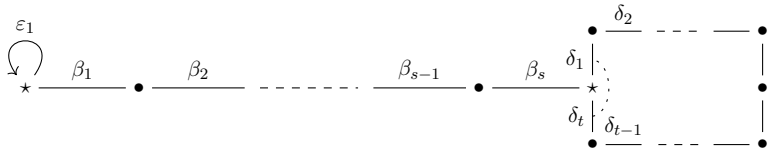
在这种情况下，众所周知，这个箭图的路径代数是砖无限的。证明见 [ASS06] ，此情形也见于 [Pla19，例3.1]。

情形2. b **属于类型 (2)** 在这种情况下，代数 A/J 同构于以下三个箭图之一所给出的斜温和代数，具体取决于我们用星号标记的顶点 $s(b') = t(b')$ 和 $s(b'') = t(b'')$ 是否为特殊顶点：

(i) $s(b') = t(b')$ 和 $s(b'') = t(b'')$ 均为非特殊顶点：



(ii) $s(b') = t(b')$ 和 $s(b'') = t(b'')$ 之间的一个顶点是特殊顶点，另一个是非特殊顶点：

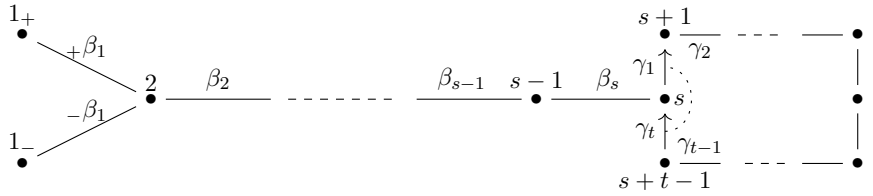


(iii) $s(b') = t(b')$ 和 $s(b'') = t(b'')$ 都是特殊的：



情形 (i) 已在 [Pla19]中处理。这是一个拥有无穷砖族的温和代数，这些砖在 [Pla19 的命题 3.3] 中有所描述。对于情形 (ii) 和 (iii)，我们将使用它们通过第2节中引入的箭图 Q 及容许理想 I 的实现。由引理 3.4 (2.b) 可知，除与 ω 相邻的顶点外，没有顶点是特殊的，但是

对于与 b 和 b'相邻的顶点也是如此。对于情形 (ii)，当所涉及的顶点˜中只有一个是特殊顶点时，相应的箭图 Q如下：



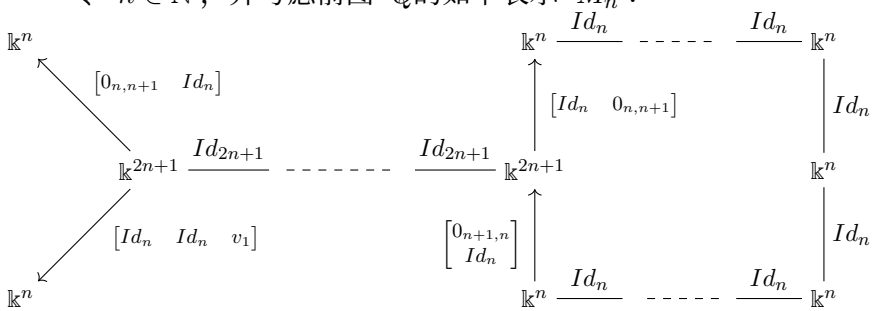
˜FIGURE 4. 与情形 b (ii) 相关的 Q 箭图。箭 $-\beta_1$ 和 $+\beta_1$ 的方向与 β_1一致。

注 3.5. 若 $t = 1$，则有 γ_1 是一个满足${\gamma_1}^2 = 0$的非特殊环，并且必有 $s \geq 0$。

˜**命题 3.6.** 图 4 中箭图 Q 所给出的斜温和代数具有一个无穷砖族。

˜证明。 设 Q 为图 4 中的箭图。我们只证明 β_1 指向特殊顶点的情形。对于另一种情形，无穷砖族将由如下表示给出：与 $-\beta_1$ 和 $+\beta_1$ 相关的线性映射是本文所定义映射的转置。

˜令 $n \in \mathbb{N}$，并考虑箭图 Q的如下表示 M_n：



其中 v_1 是 $\Bbbk^n$ 的标准基向量，且其第一项为 1。我们将证明 $\mathrm{End}(M_n) \cong \Bbbk$，这意味着 M_n 是一个砖模。设 $g \in \mathrm{End}(M_n) \subseteq \prod_{i \in \tilde{Q}_0} \mathrm{Mat}_{d_i \times d_i}(\Bbbk)$。我们记

$$g = (\underbrace{g_{1_+}, g_{1_-}}_{\varepsilon_1}, \underbrace{g_2, \ldots, g_s}_{\omega}, \underbrace{g_{s+1}, \ldots, g_{s+t-1}}_{b''}),$$

其中 g_{1_+} 和 g_{1_-} 表示分裂顶点 1_+ 和 1_- 处向量空间的自同态； $g_2, \ldots, g_s$ 表示与 ω 中各顶点相关联的自同态；而 $g_{s+1}, \ldots, g_{s+t-1}$ 表示与字符串 $\gamma_2 \cdots \gamma_{t-1}$ 相关联的自同态。

由于 g 是表示之间的映射，因此必须满足以下关系：

$$\begin{bmatrix} 0_{n,n+1} & Id_n \end{bmatrix} g_2 = g_{1_+} \begin{bmatrix} 0_{n,n+1} & Id_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} Id_n & Id_n & v_1 \end{bmatrix} g_2 = g_{1_-} \begin{bmatrix} Id_n & Id_n & v_1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$g_2 = \cdots = g_s \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} Id_n & 0_{n,n+1} \end{bmatrix} g_s = g_{s+1} \begin{bmatrix} Id_n & 0_{n,n+1} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} 0_{n+1,n} \\ Id_n \end{bmatrix} g_{s+t-1} = g_s \begin{bmatrix} 0_{n+1,n} \\ Id_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$g_{s+1} = \cdots = g_{s+t-1} \tag{6}$$

令

$$(\beta_{i,j})_{1\le i,j\le n} = g_{1_+}, \qquad (\gamma_{i,j})_{1\le i,j\le n} = g_{1_-},$$
$$(\delta_{i,j})_{1\le i,j\le 2n+1} = g_2 = \cdots = g_s, \quad \text{and}$$
$$(\alpha_{i,j})_{1\le i,j\le n} = g_{s+1} = \cdots = g_{s+t-1}.$$

根据关系 (4)，我们有 $(\delta_{i,j})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le 2n+1} = \begin{bmatrix} g_{s+1} & 0_{n,n+1} \end{bmatrix}$，即：

$$\begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \dots & \delta_{1,n} & \delta_{1,n+1} & \dots & \delta_{1,2n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n,1} & \dots & \delta_{n,n} & \delta_{n,n+1} & \dots & \delta_{n,2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

这意味着，对于所有 $1 \le i, j \le n$，都有 $\alpha_{i,j} = \delta_{i,j}$；对于所有 $1 \le i \le n$ 和 $n+1 \le j \le 2n+1$，都有 $\delta_{i,j} = 0$。

接着我们考察关系 (5)，它意味着 $\begin{bmatrix} 0_{n+1\ n} \\ g_{s+t-1} \end{bmatrix} = (\delta_{i,j})_{\substack{1\le i\le 2n+1 \\ n+2\le j\le 2n+1}}$，或者：

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{1,n+2} & \dots & \delta_{1,2n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{n,n+2} & \dots & \delta_{n,2n+1} \\ \delta_{n+1,n+2} & \dots & \delta_{n+1,2n+1} \\ \delta_{n+2,n+2} & \dots & \delta_{n+2,2n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{2n+1,n+2} & \dots & \delta_{2n+1,2n+1} \end{bmatrix}.$$

我们得到，对于所有 $1 \le i \le n+1$ 和 $n+2 \le j \le 2n+1$，都有 $\delta_{i,j} = 0$；并且对于所有 $1 \le i, j \le n$，都有 $\alpha_{i,j} = \delta_{i+n+1,j+n+1}$。根据前面的关系，我们得到

$$g_s = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_{n+1,1} & \dots & \delta_{n+1,n} & \delta_{n+1,n+1} & 0 & \dots & 0 \\ \delta_{n+2,1} & \dots & \delta_{n+2,n} & \delta_{n+2,n+1} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{2n+1,1} & \dots & \delta_{2n+1,n} & \delta_{2n+1,n+1} & \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix}.$$

现在，利用关系 (1)，我们还有 $(\delta_{i,j})_{\substack{n+2\leq i\leq 2n+1\\ 1\leq j\leq 2n+1}} = \begin{bmatrix} 0_{n,n+1} & g_{1_+} \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \delta_{n+2,1} & \dots & \delta_{n+2,n} & \delta_{n+2,n+1} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{2n+1,1} & \dots & \delta_{2n+1,n} & \delta_{2n+1,n+1} & \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_{1,1} & \dots & \beta_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_{n,1} & \dots & \beta_{n,n} \end{bmatrix},$$

这意味着，对于所有 $n+2 \leq i \leq 2n+1$ 和 $1 \leq j \leq n+1$，均有 $\delta_{i,j} = 0$，且 $g_{1_+} = g_{s+1}$。最后，由 (2) 可得 $\begin{bmatrix} Id_n & Id_n & v_1 \end{bmatrix} g_2 = g_{1_-} \begin{bmatrix} Id_n & Id_n & v_1 \end{bmatrix}$，从而得到如下结果:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1}+\delta_{n+1,1} & \cdots & \alpha_{1,n}+\delta_{n+1,n} & \delta_{n+1,n+1} & \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{n,n} \\ \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,n} & 0 & \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ & & & & \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} & 0 & \alpha_{n-1,1} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{1,1} & \cdots & \gamma_{1,n} & \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \cdots & \gamma_{1,n} & \gamma_{1,1} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \cdots & \gamma_{2,n} & \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \cdots & \gamma_{2,n} & \gamma_{2,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n,1} & \gamma_{n,2} & \cdots & \gamma_{n,n} & \gamma_{n,1} & \gamma_{n,2} & \cdots & \gamma_{n,n} & \gamma_{n,1} \end{bmatrix}.$$

根据灰色区域给出的关系，我们得到 $\gamma_{i,1} = 0$ 对于所有$2 \leq i \leq n$。特别地，我们有 $\alpha_{i,1} = \gamma_{i,1} = 0$ 对于所有 $2 \leq i \leq n$，这可由绿色区域的第一列推出。但根据绿色区域和黄色区域共同给出的关系，我们得到 $\alpha_{i,j} = \alpha_{i-1,j-1}$ 对于所有$2 \leq i, j \leq n$；因此可以得出 $\alpha_{i,j} = 0$ 对于所有 $1 \leq j < i \leq n$。我们还有 $\gamma_{i,1} = \alpha_{i-1,n}$ 对于所有 $2 \leq i \leq n$，由蓝色区域给出的关系可知，这意味着 $\alpha_{i-1,n} = 0$。结合 $\alpha_{i,j} = \alpha_{i-1,j-1}$ 对于所有 $2 \leq i, j \leq n$这一事实，我们可以得出 $\alpha_{i,j} = 0$ 对于所有 $1 \leq i < j \leq n$。

此外，由橙色区域给出的关系可知，对于所有 $2 \leq i \leq n$，都有 $\alpha_{n,i-1} = \gamma_{1,i}$。我们还有，对于所有 $1 \leq i \leq n$，都有 $\gamma_{1,i} = \alpha_{1,i} + \delta_{n+1,i}$，但我们已经知道，对于这些 $2 \leq i \leq n$，$\gamma_{1,i} = \alpha_{1,i} = 0$，因此对于所有$2 \leq i \leq n$，$\delta_{n+1,i} = 0$。最后，粉色区域意味着 $\alpha_{n,n} = \gamma_{1,1} = \alpha_{1,1} + \delta_{n+1,1}$ 以及 $\gamma_{1,1} = \delta_{n+1,n+1}$。但正如我们所见，$\alpha_{n,n} = \alpha_{1,1}$；这意味着对于所有 $1 \leq i \leq n$，$\alpha_{i,i} = \gamma_{i,i} = \delta_{n+1,n+1}$，并且对于所有 $1 \leq i \leq n$，$\delta_{n+1,i} = 0$。我们得出结论，$g_{1_+} = g_{1_-} = g_{s+1} = \cdots = g_{s+t-1} = k \cdot Id_n$，且 $g_2 = \cdots = g_s = k \cdot Id_{2n+1}$ 对于某个 $k \in \Bbbk$，这意味着 $\mathrm{End}(M_n) \cong \Bbbk$。□

唯一剩下的情况是两个顶点都是特殊的。在这种情况下，必须有 $s \geq 1$, 因为同一个顶点上不可能有两个特殊环。对应的箭图 Q如下。

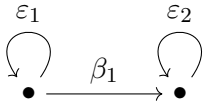


FIGURE 5. 与情形2相关的箭图 Q（iii）。

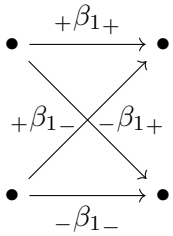
命题3.7。 图5中的箭图 Q 具有一个无穷砖族。

证明。 当 $s > 1$ 时，箭图 Q 是 D_{s+2} 型，已知其为砖-无限。事实上，这是一个经典结果：由于 D_{s+2} 是遗传温和代数，其预投射分支含有无穷多个不可分解模，且这些模都是砖 [ARS95]。若 $s = 1$, 箭图 Q^{sp} 和对应的箭图 Q 如下：

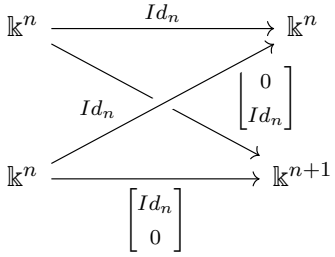
Q^{sp} ：



$\widetilde{Q}$ ：



在此情形下，简单计算可得，以下表示M_n 给出了一个无穷砖族：



□

REFERENCES

[AB22] Claire Amiot 和 Thomas Br¨ustle。利用轨形研究斜温和代数之间的导出等价。*Doc. Math.*，27:933–982，2022。[ARS95] Maurice Auslander、Idun Reiten 和 Sverre O. Smalø。*Representation Theory of Artin Algebras*，*Cambridge Studies in Advanced Mathematics*，第36卷。剑桥大学出版社，1995。

[AS87] Ibrahim Assem 和 Andrzej Skowro´nski。A 型的迭代倾斜代数。 $\tilde{\mathrm{A}}_n$。*Math. Z.*, 195(2):269–290，1987。[ASS06] Ibrahim Assem、Daniel Simson 和 Andrzej Skowro´nski。*Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1* 65 *London Mathematical Society Student Texts* 2006 ，第 卷。

剑桥大学出版社，剑桥，。表示论方法。[BR87] M. C. R. Butler 和 Claus Michael Ringel。中间项较少的 Auslander-Reiten 序列及其在字符串代数中的应用。 *Comm. Algebra*, 15(1- 2):145–179，1987。[BTCB24] Raphael Bennett-Tennenhaus 和 William Crawley-Boevey。半线性部族代数。 *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*，129(4):论文编号 e12637，58，2024。[CB89] W. W. Crawley-Boevey。函子滤过。II. 部族与 Gel'fand 问题。 *J. London Math. Soc. (2)*，40(1):9–30，1989。[CJSW25] Wen Chang、Haibo Jin、Sibylle Schroll 和 Qi Wang。分次（斜）温和代数的 τ-倾斜有限性与 silting 离散性。 *arXiv preprint*，2025。[DIJ19] Laurent Demonet、Osamu Iyama 和 Gustavo Jasso。 τ-倾斜有限代数、砖模与 g-向量。 *International Mathematics Research Notices*，第 852–892 页，2019。[DIR+19] Laurent Demonet、Osamu Iyama、Nathan Reading、Idun Reiten 和 Hugh Thomas。挠类的格论。 *Memoirs of the American Mathematical Society* 256 1239 +99 2019 ，( ):vi，。

[Gab62] Pierre Gabriel。阿贝尔范畴。 *Bull. Soc. Math. France*，: – 。[GdlPn99] Christof Geiß 和 Jos´e Antonio de la Pe˜na。部族的 Auslander-Reiten 分支。 *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)*，5(2):307–326，1999。[Gei26] Christof Geiß。关于斜化温和代数的同态与一般 τ-正则分支。 *J. Algebra*，688:527–586，2026。[HZZ23] Ping He、Yu Zhou 和 Bin Zhu。斜温和代数模范畴的几何模型。 *Math. Z.*，304(1):论文编号 18，41，2023。[Lav25a] L´ea Lavou´e。斜温和代数的砖有限性与表示有限性等价。于 2025 年 CMS 夏季会议的 AARMS–CMS 学生海报会议上展示的海报，2025年6月。会议：AARMS– CMS 学生海报会议。[Lav25b] L´ea Lavou´e。关于斜化温和代数的砖有限性——将温和代数砖有限与表示有限特征的等价性推广至温和代数。硕士论文，2025年6月。[LFSV22] Daniel Labardini-Fragoso、Sibylle Schroll 和 Yadira Valdivieso。斜温和代数与轨形的导出范畴。 *Glasg. Math. J.*，64 674，2022 3 649( ): – 。[MP25] Kaveh Mousavand 和 Charles Paquette。有限维代数的砖模（Schur 表示）。 *arXiv preprint arXiv:2508.11789*，2025。[Pla19] Pierre-Guy Plamondon。 τ-倾斜有限温和代数是表示有限的。*Pacific J. Math.*，302(2):709–716，2019。

LACIM, UQAM-Université Laval, Montréal, Canada
Email address: garcia gallegos.monica del rocio@uqam.ca

UVSQ, Université Paris-Saclay, Versailles, France
Email address: lea.lavoue@ens.uvsq.fr