arXiv:2601.01752v1 [math.AP] 5 Jan 2026

具有变指数对数非线性和弱阻尼的黏弹性波动方程的能量衰减

QINGQING PENG[1] 和 YIKAN LIU[2], *

Abstract. 本文研究有界区域内具有变指数对数非线性和弱阻尼的黏弹性波动方程解的能量衰减。在对松弛函数 g施加温和条件的基础上，我们建立了一个显式的一般衰减结果。此外，在一般假设 $g'(t) \leq -\zeta(t)G(g(t))$以及适当给定的 ζ 和 G下，我们推导出一种改进现有结果的精细衰减估计。特别地，在进一步的特殊情形$g'(t) \leq -\xi(t)g^q(t)$且 $1 \leq q < 2$下，我们获得了一致的指数衰减率和多项式衰减率，将早期仅限于情形$1 \leq q < \frac{3}{2}$ 的研究加以拓展。

1. 引言

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ 是边界 $\partial\Omega$ 光滑的有界区域。本文研究一类非线性黏弹性波动方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\triangle u(s)\,\mathrm{d}s + u_t = \alpha|u|^{p(x)-2}u\log|u|, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\alpha > 0$ 为常数。这里假设非线性项中的指数 p 满足 s

$$p_1 := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x) > 2, \quad p_2 := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x) < \frac{2(n-1)}{n-2}. \tag{1.2}$$

此外，进一步假设 p 具有对数 Hölder 连续性，即存在常数 $A > 0$，使得对于几乎处处的 x, $y \in \Omega$ 满足 $|x-y| < 1$，有

$$|p(x) - p(y)| \leq -\frac{A}{\log|x-y|}. \tag{1.3}$$

近年来，具有对数非线性的波动方程受到了广泛关注，许多研究探讨了在不存在记忆效应时（即当 $g = 0$）问题 (1.1) 的动力学性质。对数波动方程最初由 Bialynicki-Birula 和 Mycielski 于 $[5, 6]$, 提出，他们证明了一维空间中稳定局域解的存在性

Key words and phrases. 黏弹性波动方程、变指数对数非线性、弱阻尼、指数衰减与多项式衰减。[1]数学与统计学院及湖北省工程建模与科学计算重点实验室，华中科技大学，中国武汉 430074。[2] 数学系，京都大学，日本京都市左京区北白川追分町，邮编 606-8502。

*通讯作者。电子邮箱： liu.yikan.8z@kyoto-u.ac.jp。

。随后，Cazenave 和 Haraux [7] 建立了三维空间中柯西问题的适定性。Bartkowski 和 G´orka [3]研究了一维柯西问题的经典解和弱解，而 G´orka [11] 则通过紧性论证证明了初始数据 $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 对应的弱解具有整体存在性。最近，Di [8] 采用位势井方法，证明了具有对数非线性的波动方程的整体存在性，并通过构造适当的李雅普诺夫泛函，推导出指数衰减或多项式衰减。此外，还证明了不稳定集中的爆破现象。关于具有对数非线性的系统的稳定性和爆破的更多结果，请参阅 [12,18,24–26] 及其中的参考文献。

另一方面，文献中已针对记忆项中的核函数 g 所满足的某些假设，建立了若干衰减与爆破结果。在 [14], 中，作者研究了拟线性黏弹性方程初边值问题的稳定性。在 g满足温和条件时，他们得到了多项式衰减；并进一步在 g满足更一般条件时，研究了多项式衰减和指数衰减。在 [4], 中，作者通过构造适当的李雅普诺夫泛函，在 g满足相应假设的条件下，得出了黏弹性问题的能量衰减结果。此外， [16] 中的作者考察了黏弹性波问题的爆破现象，而 [22] 中的作者分析了具有变指数的黏弹性问题的解的爆破。随后，Liao [17] 讨论了具有变指数和弱阻尼的黏弹性波动方程解的能量衰减率。其他相关研究可参见 [2,13,21,23,27]等文献。

受上述研究的启发，本文研究问题 (1.1) 的稳定性与爆破行为。本文包含三项主要贡献。首先，在证明能量衰减时，我们既不要求初始能量小于势阱深度 d，也不将分析局限于以往涉及对数非线性研究中所要求的稳定集，从而放宽了关键的结构性假设。其次，我们对核 g 施加的条件比早期关于变指数系统的研究中所考虑的条件更为一般。第三，在定理 3.5 中，我们的结果适用于 $1 \le q < 2$，而现有文献仅涵盖 $1 \le q < \frac{3}{2}$ 的情形。事实上，我们的研究拓展并推广了以往的结果，尤其是 [2,14,21,25] 中的结果。

本文的组织结构如下。第 2 节建立解的整体存在性，并给出若干辅助引理。随后，第 3 节和第 4 节致力于问题 (1.1) 的稳定性分析，该分析通过构造适当的李雅普诺夫泛函并应用乘子方法来实现。

2. 预备知识与若干引理

本节将介绍陈述和证明主要结果时所用的一些记号、基本定义、重要引理和函数空间。

全文中， $\|\cdot\|_k$ 表示勒贝格空间 $L^k(\Omega)$在 $1 \le k \le \infty$下的范数，而$(\cdot,\cdot)$表示 $L^2(\Omega)$的内积。为了研究问题(1.1)，我们先回顾Orlicz-Sobolev 型巴拿赫空间 $L^{q(x)}(\Omega)$的定义（见 [9,10]）：

$$L^{p(x)}(\Omega) := \left\{ f : \text{a measurable real-valued function in } \Omega \mid \int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}x < \infty \right\},$$

其中 $p \in L^\infty(\Omega)$ 满足 (1.2)。 $L^{p(x)}(\Omega)$ 的范数定义为

$$\|f\|_{p(x)} := \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \int_\Omega \left| \frac{f}{\lambda} \right|^p \mathrm{d}x \le 1 \right\},$$

容易看出

$$\min\left\{\|f\|_{p(x)}^{p_1},\|f\|_{p(x)}^{p_2}\right\}\le\int_\Omega|f|^p\,\mathrm{d}x\le\max\left\{\|f\|_{p(x)}^{p_1},\|f\|_{p(x)}^{p_2}\right\}. \tag{2.1}$$

下面的引理汇总了函数空间的一些基本性质。

引理 2.1 (见 [1])。 设 k 为满足 $2\le k\le 2_*:=\frac{2n}{n-2}$ 的常数，其中 ~~$n\ge 3$~~。则存在一个仅依赖于 k 的最佳常数，使得

$$\|v\|_k^k\le B_k\|\nabla v\|_2^k,\quad \forall\, v\in H_0^1(\Omega).$$

引理 2.2 (见 [9,10])。 设 $p,q\in C(\overline{\Omega})$ 在 $\overline{\Omega}$ 上满足 $1<p\le q$。则嵌入 $L^{q(x)}(\Omega)\hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ 是连续的，且其算子范数不超过 $|\Omega|+1$。

引理 2.3 (见 [15])。 设 p 满足 (1.2)–(1.3)。则嵌入 $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ 是连续且紧的。

接下来，我们对记忆项中的核函数 g 提出基本假设。

(A1) 函数 $g\in C^1([0,\infty)$；$(0,\infty)$ 是非递增的，并且满足

$$g(0)>0,\quad \ell:=1-\int_0^\infty g(s)\,\mathrm{d}s>0.$$

在下文中，记

$$I(t):=\int_t^\infty g(s)\,\mathrm{d}s,\quad K_\delta(s):=-\frac{g'(s)}{g(s)}+\delta,\quad M(\delta):=\int_0^\infty\frac{g(s)}{K_\delta(s)}\,\mathrm{d}s, \tag{2.2}$$

其中， $\delta\in(0,1)$ 是一个常数。为陈述我们的结果，我们将与问题 (1.1) 相关的能量泛函定义为

$$\begin{aligned}E(t):=&\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)\|\nabla u(t)\|_2^2+\frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t)\\&-\alpha\int_\Omega\frac{|u(t)|^p\log|u(t)|}{p}\,\mathrm{d}x+\alpha\int_\Omega\frac{|u(t)|^p}{p^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中

$$(g\circ\nabla u)(t):=\int_0^t g(t-s)\|\nabla u(t)-\nabla u(s)\|_2^2\,\mathrm{d}s.$$

通过直接对 (2.3) 求导并利用 (1.1)，可以直接验证

$$\begin{aligned}E'(t)&=\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t)-\frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|_2^2-\|u_t(t)\|_2^2\\&\le\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t)-\|u_t(t)\|_2^2\le 0.\end{aligned} \tag{2.4}$$

引理 2.4。 设假设 (A1) 成立， p 满足 (1.2)–(1.3) ，且 $\mu>0$ 是满足 $p_2+\mu<2_*$ 的常数。令 $B_{p_2+\mu}$ 为引理 2.1 中的最佳常数，并定义

$$B:=B_{p_2+\mu}\ell^{-\frac{p_2+\mu}{2}},\quad R(\lambda):=\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{\alpha B}{\mathrm{e}\mu p_1}\lambda^{p_2+\mu},\quad \lambda(t):=\left\{\ell\|\nabla u(t)\|_2^2+(g\circ\nabla u)(t)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

于是有 $E(t)\ge R(\lambda(t))$。

证明。 将区域 Ω 分割为

$$\Omega_1 := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid |v| < 1\}, \quad \Omega_2 := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid |v| \geq 1\}, \tag{2.5}$$

我们应用索 Sobole夫嵌入定理和引理 2.1，结合 $k = p_2 + \mu$ ，推得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|v|^p \log |v|}{p}\,\mathrm{d}x &= \left(\int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2}\right) \frac{|v|^p \log |v|}{p}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\mathrm{e}\mu p_1}\int_{\Omega_2} |v|^{p_2}|v|^\mu\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{\mathrm{e}\mu p_1}\int_\Omega |v|^{p_2+\mu}\,\mathrm{d}x \leq \frac{B_{p_2+\mu}}{\mathrm{e}\mu p_1}\|\nabla v\|_2^{p_2+\mu}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

这里我们用到了不等式 $x^{-\mu}\log x < (\mathrm{e}\mu)^{-1}$，其中 $x \geq 1$，而 $\mu > 0$ 是定理中所述的常数。然后根据 $E(t)$ 的定义（2.3），将 $v = u(t)$ 代入（2.6）进行估计

$$\begin{aligned}E(t) &\geq \frac{\ell}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t) - \frac{\alpha B_{p_2+\mu}}{\mathrm{e}\mu p_1}\|\nabla u(t)\|_2^{p_2+\mu} + \frac{\alpha}{p_2^2}\int_\Omega |u(t)|^p\,\mathrm{d}x \\ &\geq \frac{1}{2}\left\{\ell\|\nabla u(t)\|_2^2 + (g\circ\nabla u)(t)\right\} - \frac{\alpha B}{\mathrm{e}\mu p_1}\left\{\ell\|\nabla u(t)\|_2^2 + (g\circ\nabla u)(t)\right\}^{\frac{p_2+\mu}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\lambda(t)^2 - \frac{\alpha B}{\mathrm{e}\mu p_1}\lambda(t)^{p_2+\mu} = R(\lambda(t)),\end{aligned}$$

根据 B、 $\lambda(t)$ 和 $R(\lambda)$ 的定义。 □

容易验证， $R(\lambda)$ 在 处取得最大值

$$\lambda_1 := \left(\frac{\mathrm{e}\mu p_1}{\alpha(p_2+\mu)B}\right)^{\frac{1}{p_2+\mu-2}} > 0$$

相应的最大值为

$$E_1 := R(\lambda_1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2+\mu}\right)\lambda_1^2 > 0.$$

引理 2.5 （见 [17,引理 3。4]）。 设假设 (A1) 成立，且 p 满足 (1.2)–(1.3)。设 u 是问题 (1.1)的一个解，其初始数据满足

$$E(0) < E_1, \quad \lambda(0) < \lambda_1.$$

那么存在一个常数 $\lambda_2 \in (0, \lambda_1)$ 使得

$$\lambda(t) = \left\{\ell\|\nabla u(t)\|_2^2 + (g\circ\nabla u)(t)\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_2, \quad \forall\, t \in [0, T_{\max}),$$

其中 $T_{\max}$ 是最大存在时间。

接下来，我们引用问题 (1.1) 解的存在性结果。

命题 2.6 （局部存在性）。 给定 $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 。设假设 (A1)成立，且 p 满足 (1.2)–(1.3)。那么存在 $T > 0$ ，使得问题 (1.1) 在 $[0, T]$上存在唯一的局部弱解 u 。

结合 Faedo-Galerkin 方法、 [8] 中关于对数非线性的证明，以及 [22], 中关于非线性阻尼和记忆项的证明，我们可以证明命题 2.6 中所述的局部存在性。

我们引入一个辅助能量

$$\mathbb{E}(t) := E(t) + \alpha\int_\Omega \frac{|u(t)|^p \log |u(t)|}{p}\,\mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

我们为 $E(t)$ 和 $\mathbb{E}(t)$ 给出额外的估计。

引理 2.7. 在引理 2.5的相同假设下，有

$$\alpha\int_\Omega \frac{|u(t)|^p\log|u(t)|}{p}\,\mathrm{d}x \le \widetilde{C}E(t)\le \widetilde{C}E(0), \tag{2.8}$$

$$\mathbb{E}(t)\le (1+\widetilde{C})E(t)\le (1+\widetilde{C})E(0) \tag{2.9}$$

对于任意 $t\in[0,T_{\max})$，其中

$$\widetilde{C}:=\frac{\frac{2\alpha\lambda_2^{p_2+\mu-2}B}{\mathrm{e}\mu p_1}}{1-\frac{2\alpha\lambda_2^{p_2+\mu-2}B}{\mathrm{e}\mu p_1}}.$$

证明. 由于 (2.8) 和 (2.9) 的后半部分可由 $E(t)$ 的单调性立即得到，因此只需验证各自的前半部分。

利用 (2.6) 和引理 2.5，可得

$$\begin{aligned}\alpha\int_\Omega \frac{|u(t)|^p\log|u(t)|}{p}\,\mathrm{d}x &\le \frac{\alpha B_{p_2+\mu}}{\mathrm{e}\mu p_1}\|\nabla u(t)\|_2^{p_2+\mu}\le \frac{\alpha B}{\mathrm{e}\mu p_1}\left(\ell^{\frac12}\|\nabla u(t)\|_2\right)^{p_2+\mu-2}\ell\|\nabla u(t)\|_2^2\\ &\le \frac{2\alpha\lambda_2^{p_2+\mu-2}B}{\mathrm{e}\mu p_1}\left(E(t)+\alpha\int_\Omega\frac{|u(t)|^p\log|u(t)|}{p}\,\mathrm{d}x\right),\end{aligned}$$

经过简单变形，即可得到 (2.8) 的前半部分。接着，(2.9) 的前半部分可直接由 (2.8) 和 (2.7) 推出。□

注 2.8。 显然，(2.9) 表明，对于所有 $t\in[0,T_{\max})$， $\mathbb{E}(t)$ 一致有界，这意味着解整体存在，即 $T_{\max}=\infty$。同时，对于所有 $t\in[0,\infty)$，我们还有 $0\le E(t)\le E(0)$。

3. Energy decay results

本节旨在陈述关于问题 (1.1) 的整体解能量衰减率的主要结果。第一个结果如下。

定理 3.1。 在引理 2.5 的相同假设下，进一步假设 α 足够小。则存在常数 $C>0$，使得问题 (1.1) 的解的能量 $E(t)$ 满足以下多项式衰减估计

$$\int_0^\infty E(t)\,\mathrm{d}t\le CE(0),\quad E(t)\le CE(0)(1+t)^{-1},\quad t\ge0. \tag{3.1}$$

接下来，假设 $g(t)$ 满足以下附加假设。

(A2) 设 $G\in C^1([0,\infty);[0,\infty))$ 为线性函数，或在 $[0,r]$ $(r\le g(0))$ 上严格递增、严格凸且属于 C^2-类，并满足 $G(0)=G'(0)=0$；且 $\zeta\in C^1([0,\infty);(0,\infty))$ 非递增。函数 $g(t)$ 满足常微分不等式

$$g'(t)\le-\zeta(t)G(g(t)),\quad\forall\,t>0.$$

注3.2（参见 [20]）。如果 G 是定义在 $[0,r]$ 上的严格递增且严格凸的 C^2 函数，并满足$G(0)=G'(0)=0$，那么它存在一个延拓 $\overline{G}$，且具有相同的单调性、凸性和

正则性（在 $[0,\infty$ 上）。例如，如果 $G(r)=a$，$G'(r)=b$ 且 $G''(r)=c$，那么我们可以为 $t>r$ 构造 G，使其满足

$$\overline{G}(t)=\frac{C}{2}t^2+(b-Cr)t+\left(a+\frac{C}{2}r^2-br\right).$$

同时，在这种情况下，G 和 $G(0)=0$ 的凸性可得

$$G(\theta t)\le\theta G(t),\quad \forall\,\theta\in[0,1],\ \forall\,t\in(0,r].$$

根据假设（A2），我们得到以下结果。

定理 3.3. 在定理3.1的相同假设下，进一步假设（A2）成立。则存在常数 k_1、k_2、$t_1>0$，使得问题 (1.1) 的能量满足

$$E(t)\le k_2G_1^{-1}\left(k_1\int_{t_1}^{t}\zeta(s)\,\mathrm{d}s\right)\tag{3.2}$$

对所有 $t\ge t_1$，其中 $G_1(t):=\int_t^r \underline{\frac{1}{sG'(s)}}\,\mathrm{d}s$ 在 $[0,r]$ 上严格递减且为凸函数，并满足$\lim_{t\to0}G_1(t)=\infty$。

为便于理解，我们举例说明上述结果。

例 3.4. 设 $g(t)=a\exp(-t^p)$且 $0<p<1$ and $a>0$ 足够小，使得 g 满足假设 (A1)。则假设（A2）在以下条件下成立：

$$\zeta(t)=1,\quad G(t)=\frac{p^t}{(\ln\frac{a}{t})^{\frac{1}{p}-1}}.$$

直接计算可得

$$G'(t)=\frac{(1-p)+p\ln\frac{a}{t}}{(\ln\frac{a}{t})^{\frac{1}{p}}},\quad G''(t)=\frac{(1-p)(\ln\frac{a}{t}+\frac{1}{p})}{(\ln\frac{a}{t})^{\frac{1}{p+1}}}.$$

因此，对于任意 $0<r<a$，G 在 $[0,r]$ 上满足假设（A2）。此外，我们计算得

$$\begin{aligned}G_1(t)&=\int_t^r\frac{1}{sG'(s)}\,\mathrm{d}s=\int_t^r\frac{(\ln\frac{a}{s})^{\frac{1}{p}}}{s(1-p+p\ln\frac{a}{s})}\,\mathrm{d}s=\int_{\ln\frac{a}{r}}^{\ln\frac{a}{t}}\frac{\sigma^{\frac{1}{p}}}{1-p+p\sigma}\,\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{1}{p}\int_{\ln\frac{a}{r}}^{\ln\frac{a}{t}}\sigma^{\frac{1}{p}-1}\left(\frac{\sigma}{\frac{1-p}{p}+\sigma}\right)\mathrm{d}\sigma\le\frac{1}{p}\int_{\ln\frac{a}{r}}^{\ln\frac{a}{t}}\sigma^{\frac{1}{p}-1}\,\mathrm{d}\sigma\le\left(\ln\frac{a}{t}\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

因此，由 (3.2) 可得 $E(t)\le k\exp(-kt^p)$。

最后，我们对 $g(t)$ 添加如下另一个假设。

(A3) 设 $\xi\in C^1([0,\infty);(0,\infty))$ 为非增函数，满足 $\int_0^\infty\xi(s)\,\mathrm{d}s=\infty$，且 $1\le q<2$。函数 $g(t)$ 满足常微分不等式

$$g'(t)\le-\xi(t)g(t)^q,\quad\forall\,t>0.$$

将假设（A2）替换为假设（A3），可得以下结果。

定理 3.5. 在定理3.1的相同假设下，进一步假设(A3)成立。则存在常数 $K>0$ 和 $K'>0$，使得问题 (1.1) 的能量满足

$$E(t)\leq\begin{cases}E(0)\exp\left(1-K\int_0^t\xi(s)\,\mathrm{d}s\right), & q=1,\\ E(0)\left(\dfrac{q}{1+K'(q-1)\int_0^t\xi(s)\,\mathrm{d}s}\right)^{\frac{1}{q-1}}, & 1<q<2.\end{cases}\tag{3.3}$$

定理 3.5 推广了 [2, 21, 25], 中的结果，其中 $g'(t)$ 被假设满足条件 (A3)，且 $\leq p<\frac{3}{2}$；而我们的结果适用于 $1\leq q<2$。此外，衰减率

$$E(t)\leq\begin{cases}K\exp\left(1-\lambda\int_{t_0}^t\xi(s)\,\mathrm{d}s\right), & p=1,\\ K\left(\dfrac{1}{1+\int_{t_0}^t\xi^{2p-1}(s)\,\mathrm{d}s}\right)^{\frac{1}{2p-2}}, & 1<p<\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

在 [21] 中得到的衰减率在这一更广泛的框架下得到了改进。

4. Proof of energy decay results

在本节中，我们用 $C>0$ 表示可能逐行变化的通用常数。

4.1. 定理 3.1 的证明。 接下来，我们先引入若干辅助函数，并相应地准备几个引理。

回顾在 (2.2) 中定义的函数 $I(t)$ 和 $M(\delta)$，并引入

$$I_1(t):=\int_\Omega\int_0^t I(t-s)|\nabla u(s)|^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x,\quad I_2(t):=M(\delta)(\delta I_1(t)+E(t)),\quad \delta>0.$$

Lemm4.1 （见 [14, 引理 2。1]）。 对于 $t\geq0$，上述定义的函数 I_1（t） I_2（t）满足

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_1(t)\leq-\frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t)+2\|\nabla u(t)\|_2^2,\\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_2(t)\leq-\frac{M(\delta)}{2}\int_\Omega\int_0^t K_\delta(t-s)g(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x+2\delta M(\delta)\|\nabla u(t)\|_2^2.\end{aligned}\tag{4.1}$$

此外，我们有

$$\delta M(\delta)\longrightarrow0\quad as\ \delta\to0.\tag{4.2}$$

接下来，我们进一步引入

$$I_3(t):=\int_\Omega u_t(t)u(t)\,\mathrm{d}x,\quad I_4(t):=-\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x.$$

下面两个引理给出了 $I_3(t)$ 和 $I_4(t)$ 的导数的估计。

引理 4.2. 设 $(u_0,u_1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 给定。在与引理 2.5相同的假设下，上文定义的函数 $I_3(t)$ 满足

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_3(t)\leq&-\frac{\ell}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2+\left(1+\frac{B_2}{\ell}\right)\|u_t(t)\|_2^2+\frac{1}{\ell}\int_\Omega\left|\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s)-\nabla u(t))\,\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}x\\&+\alpha\int_\Omega|u(t)|^p\log|u(t)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.3}$$

证明. 通过直接求导并利用 (1.1) 中的控制方程，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_3(t) \le -\ell\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2 + \int_\Omega \nabla u(t)\cdot\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s)-\nabla u(t))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\ -\int_\Omega u_t(t)u(t)\,\mathrm{d}x + \alpha\int_\Omega |u(t)|^p\log|u(t)|\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.4}$$

对于 (4.4) 右端的第三项和第四项，我们应用柯西不等式进行估计

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s)-\nabla u(t))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\ &\le \frac{\ell}{4}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{\ell}\int_\Omega\left|\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s)-\nabla u(t))\,\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}-\int_\Omega u_t(t)u(t)\,\mathrm{d}x &\le \int_\Omega |u_t(t)u(t)|\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega\left(\frac{1}{4\delta}|u_t(t)|^2+\delta|u(t)|^2\right)\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{4\delta}\|u_t(t)\|_2^2 + \delta B_2\|\nabla u(t)\|_2^2,\end{aligned}$$

其中我们在 $k=2$ 的条件下使用了引理 2.1，且 $\delta>0$ 为常数。将上述两个不等式代入 (4.4)，只需选取 $\delta=\frac{\ell}{4B_2}$，即可得到所需的估计 (4.3)。□

引理 4.3. 设 $(u_0,u_1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 给定。在引理 2.5 的相同假设下，上文定义的函数 $I_4(t)$ 满足

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_4(t) \le \delta(1+\alpha\xi_1)\|\nabla u(t)\|_2^2 + c(\delta)\int_\Omega\left|\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}x \\ +\left(\frac{1}{4\delta}+\delta-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{g(0)B_2}{4\delta}(-g'\circ\nabla u)(t),\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中 $\delta>0$ 是一个待定常数，$c(\delta)>0$ 表示一个依赖于 δ 的一般常数，使得 $\lim_{\delta\to0}c(\delta)=\infty$，并且

$$\xi_1 := \frac{B_2}{\mathrm{e}(p_1-2)} + \frac{B_{2(p_2-1+\mu)}}{\mathrm{e}\mu}\left(\frac{2(1+\widetilde{C})E(0)}{\ell}\right)^{p_2-2+\mu}. \tag{4.6}$$

证明。 直接对 $I_4(t)$ 求导，并利用 (1.1) 的控制方程，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_4(t) &= -\int_\Omega u_{tt}\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\ &\quad -\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x - \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\|u_t(t)\|_2^2 \\ &=: \sum_{i=1}^6 I_2^i(t),\end{aligned}$$

其中

$$I_2^1(t) := \int_\Omega\left(1-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)\nabla u(t)\cdot\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x,$$

$$
\begin{aligned}
I_2^2(t) &:= \int_\Omega \left| \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\,\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}x,\\
I_2^3(t) &:= \int_\Omega u_t(t) \left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x,\\
I_2^4(t) &:= -\alpha \int_\Omega |u(t)|^{p-2}u(t)\log|u(t)| \left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x,\\
I_2^5(t) &:= -\int_\Omega u_t(t) \int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x,\\
I_2^6(t) &:= -\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\, \|u_t(t)\|_2^2.
\end{aligned}
$$

现在我们分别估计上述 6 项。对于 $I_2^1(t)$，我们结合 $\delta > 0$ 应用柯西不等式，得到

$$
I_2^1(t) \le \delta \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\delta} \int_\Omega \left| \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\,\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}x. \tag{4.7}
$$

同样，我们估计 $I_2^3(t)$，得到

$$
\begin{aligned}
I_2^3(t) &\le \delta \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,\mathrm{d}s \right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{4\delta}\|u_t(t)\|_2^2\\
&\le B_2\delta \int_\Omega \left| \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\,\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{4\delta}\|u_t(t)\|_2^2,
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

其中我们使用了庞加莱不等式。以同样的方式，我们首先估计 $I_2^5(t)$，得到

$$
I_2^5(t) \le \delta \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\delta} \int_\Omega \left| \int_0^t g'(t-s)|u(t)-u(s)|\,\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}x. \tag{4.9}
$$

根据关于 g的假设 (A1)，我们应用柯西-施瓦茨不等式来处理

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^t g'(t-s)|u(t)-u(s)|\,\mathrm{d}s \right|^2 &\le \int_0^t (-g'(t-s))\,\mathrm{d}s \int_0^t (-g'(t-s))|u(t)-u(s)|^2\,\mathrm{d}s\\
&\le g(0) \int_0^t (-g'(t-s))|u(t)-u(s)|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

然后，我们使用庞加莱不等式，并回顾 $(g\circ\nabla u)(t)$ 的定义，以处理 (4.9) 右端的第二项，得到

$$
\int_\Omega \left| \int_0^t g'(t-s)|u(t)-u(s)|\,\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}x \le g(0) \int_0^t (-g'(t-s))\|u(t)-u(s)\|_2^2\,\mathrm{d}x \le g(0)B_2(-g'\circ\nabla u)(t),
$$

这表明

$$
I_2^5(t) \le \delta\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{g(0)B_2}{4\delta}(-g'\circ\nabla u)(t). \tag{4.10}
$$

接下来，我们处理 $I_2^4(t)$。对于 $v \in H_0^1(\Omega)$，我们按照 (2.5) 中的方式将 Ω 分解，并利用关于 p 的假设 (1.2)，得到

$$
\big||v|^{p-2}v\log|v|\big| \le \begin{cases} \big||v|^{p_1-2}v\log|v|\big| & \text{in } \Omega_1,\\ \big||v|^{p_2-2}v\log|v|\big| & \text{in } \Omega_2. \end{cases}
$$

对于 Ω_1，我们利用不等式 $|x^{p_1-2}\log x| < \frac{1}{e(p_1-2)}$，对 $0<x<1$ 进行估计

$$\big||v|^{p-2}v\log|v|\big| \le \frac{|v|}{e(p_1-2)} \quad \text{in } \Omega_1.$$

对于 Ω_2，我们利用不等式 $|x^{-\mu}\log x| < \frac{1}{e\mu}$，其中 $\mu>0$ 足够小，使得 $2(p_2-1+\mu) < \frac{2n}{n-2}$。然后我们可以估计

$$\big||v|^{p-2}v\log|v|\big| \le \frac{|v|^{p_2-1+\mu}}{e\mu} \quad \text{in } \Omega_2.$$

结合上述两种情况，我们得到

$$\big||v|^{p-2}v\log|v|\big| \le \frac{|v|}{e(p_1-2)} + \frac{|v|^{p_2-1+\mu}}{e\mu} \quad \text{in } \Omega.$$

因此，我们将上述估计应用于 $I_2^4(t)$，其中 $v=u(t)$，并再次利用 $\delta>0$ 的柯西不等式，推得

$$\begin{aligned}
I_2^4(t) &\le \int_\Omega \left(\frac{|u(t)|}{e(p_1-2)} + \frac{|u(t)|^{p_2-1+\mu}}{e\mu}\right)\left|\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\right|dx \\
&\le \delta\int_\Omega \left(\frac{|u(t)|^2}{e(p_1-2)} + \frac{|u(t)|^{2(p_2-1+\mu)}}{e\mu}\right)dx \\
&\quad + \frac{1}{4\delta}\left(\frac{1}{e(p_1-2)} + \frac{1}{e\mu}\right)\int_\Omega \left|\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\right|^2 dx \\
&\le \delta\left(\frac{\|u(t)\|_2^2}{e(p_1-2)} + \frac{\|u(t)\|_{2(p_2-1+\mu)}^{2(p_2-1+\mu)}}{e\mu}\right) + \frac{C}{4\delta}\int_\Omega \left|\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\right|^2 dx.
\end{aligned}$$

最后，我们应用引理 2.1，其中 $k=2$ 和 $k=2(p_2-1+\mu)$，从而得到

$$\begin{aligned}
I_2^4(t) \le \delta\left(\frac{B_2}{e(p_1-2)}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{B_{2(p_2-1+\mu)}}{e\mu}\|\nabla u(t)\|_2^{2(p_2-1+\mu)}\right) \\
+ \frac{C}{4\delta}\int_\Omega \left|\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds\right|^2 dx.
\end{aligned}$$

对于 $\|\nabla u(t)\|_2^{2(p_2-1+\mu)}$，我们进一步采用与引理 2.7 相同的论证来估计

$$\|\nabla u(t)\|_2^{2(p_2-1+\mu)} = \|\nabla u(t)\|_2^{2(p_2-2+\mu)}\|\nabla u(t)\|_2^2 \le \left(\frac{2(1+\widetilde{C})E(0)}{\ell}\right)^{p_2-2+\mu}\|\nabla u(t)\|_2^2.$$

于是我们得到

$$I_2^4(t) \le \delta\xi_1\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{C}{4\delta}\int_\Omega \left|\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds\right|^2 dx, \tag{4.11}$$

其中，ξ_1 在 (4.6) 中定义。

综合估计式 (4.7)、(4.8)、(4.10) 和 (4.11)，最终得到 (4.5)。 □

现在，我们已做好充分准备，可以开始证明定理 3.1。首先引入一个辅助函数

$$L(t) := N_1E(t) + I_3(t) + N_2I_4(t),$$

其中 $N_1,\ N_2>0$ 是待定常数。根据 Hölder 不等式和柯西不等式，容易验证 $L(t)\sim E(t)$，即 $L(t)$ 与 $E(t)$ 在能量比较意义下等价。

固定 $t_1>0$ 并令 $g_1:=\int_0^{t_1} g(s)\,\mathrm{d}s>0$。结合（2.4）、（4.3）和（4.5）以及 $\delta=\frac{\ell}{4N_2}\left(\frac{}{1+\alpha\xi_1}\right)$，我们估计对于所有 $t\geq t_1$，均有 $L'(t)$

$$\begin{aligned}L'(t)\leq&-\frac{\ell}{4}\|\nabla u(t)\|_2^2-\left\{N_1-1-\frac{B_2}{\ell}-N_2\left(\frac{1}{4\delta}+\delta-g_1\right)\right\}\|u_t(t)\|_2^2\\&+\left(\frac{N_1}{2}-\frac{g(0)B_2N_2}{4\delta}\right)(g'\circ\nabla u)(t)+\alpha\int_\Omega|u(t)|^p\log|u(t)|\,\mathrm{d}x\\&+\left(\frac{1}{\ell}+c(\delta)N_2\right)\int_\Omega\left|\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

此时，我们可以选取充分大的 $N_1,\ N_2>0$，使得

$$N_3:=N_1-1-\frac{B_2}{\ell}-N_2\left(\frac{1}{4\delta}+\delta-g_1\right)>0,\quad \frac{N_1}{2}-\frac{g(0)B_2N_2}{4\delta}>0.$$

随后，$(g'\circ\nabla u)(t)$ 的负性表明

$$\begin{aligned}L'(t)\leq&-\frac{\ell}{4}\|\nabla u(t)\|_2^2-N_3\|u_t(t)\|_2^2+\alpha\int_\Omega|u(t)|^p\log|u(t)|\,\mathrm{d}x\\&+N_4\int_\Omega\left|\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{4.12}$$

其中 $N_4:=\frac{1}{\ell}+c(\delta)N_2$。回顾（2.2）中 $M(\delta)$ 的定义，我们进一步得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left|\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}x\\\leq&\int_\Omega\int_0^t\frac{g(s)}{K_\delta(s)}\,\mathrm{d}s\int_0^t K_\delta(t-s)g(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\\leq&M(\delta)\int_\Omega\int_0^t K_\delta(t-s)g(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

结合（4.12），这表明

$$\begin{aligned}L'(t)\leq&-\frac{\ell}{4}\|\nabla u(t)\|_2^2-N_3\|u_t(t)\|_2^2+\alpha\int_\Omega|u(t)|^p\log|u(t)|\,\mathrm{d}x\\&+N_4M(\delta)\int_\Omega\int_0^t K_\delta(t-s)g(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.13}$$

接下来，我们进一步引入

$$J(t):=L(t)+\frac{\ell}{32}I_1(t)+2N_4I_2(t).$$

由 (4.1) 和 (4.13) 可知

$$\begin{aligned}J'(t)\leq&-\left(\frac{\ell}{4}-\frac{\ell}{16}-2N_4\delta M(\delta)\right)\|\nabla u(t)\|_2^2-N_3\|u_t(t)\|_2^2-\frac{\ell}{64}(g\circ\nabla u)(t)\\&+\alpha\int_\Omega|u(t)|^p\log|u(t)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于收敛性 (4.2)，我们可以选取足够小的 $\delta>0$，使得 $2N_4\delta M(\delta)=\frac{\ell}{16}$。因此，根据原始能量$E(t)$，我们得到

$$\begin{aligned}J'(t)&\le-\frac{\ell}{8}\|\nabla u(t)\|_2^2-N_3\|u_t(t)\|_2^2-\frac{\ell}{64}(g\circ\nabla u)(t)+\alpha\int_\Omega|u(t)|^p\log|u(t)|\,\mathrm{d}x\\&\le-\varepsilon E(t)-\left(\frac{\ell}{8}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\|\nabla u(t)\|_2^2-\left(N_3-\frac{\varepsilon}{2}\right)\|u_t(t)\|_2^2-\left(\frac{\ell}{64}-\frac{\varepsilon}{2}\right)(g\circ\nabla u)(t)\\&\quad+\alpha\int_\Omega\left(1-\frac{\varepsilon}{p}\right)|u(t)|^p\log|u(t)|\,\mathrm{d}x+\frac{\alpha\varepsilon}{p_1^2}\int_\Omega|u(t)|^p\,\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{4.14}$$

其中 $\varepsilon\in(0,\ p_1)$ 为一个常数。采用与 (2.6) 相同的区域分割论证，我们估计

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left(1-\frac{\varepsilon}{p}\right)|u(t)|^p\log|u(t)|\,\mathrm{d}x&=\left(\int_{\Omega_1}+\int_{\Omega_2}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{p}\right)|u(t)|^p\log|u(t)\,\mathrm{d}x\\&\le\frac{1}{\mathrm{e}\mu}\int_{\Omega_2}\left(1-\frac{\varepsilon}{p}\right)|u(t)|^{p_2}|u(t)|^\mu\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{\mathrm{e}\mu}\int_\Omega|u(t)|^{p_2+\mu}\,\mathrm{d}x\\&\le\frac{B_{p_2+\mu}}{\mathrm{e}\mu}\|\nabla u(t)\|_2^{p_2+\mu}\le\xi_2\|\nabla u(t)\|_2^2,\end{aligned}\tag{4.15}$$

其中

$$\xi_2:=\frac{B_{p_2+\mu}}{\mathrm{e}\mu}\left(\frac{2(1+\widetilde{C})E(0)}{\ell}\right)^{\frac{p_2+\mu-2}{2}}$$

并且 $\mu>0$ 是一个充分小的常数，使得 $p_2+\mu<2_*=\frac{2n}{n-2}$。另 ——

一方面，根据引理 2.3，存在一个常数 $B_{p(x)}>0$，使得

$$\|v\|_{p(x)}\le B_{p(x)}\|\nabla v\|_2,\quad\forall\,v\in H_0^1(\Omega).$$

因此，利用 (2.1)，我们以与上文类似的方式处理 (4.14) 中的最后一项，得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega|u(t)|^p\,\mathrm{d}x&\le\max\left\{\|u(t)\|_{p(x)}^{p_1},\|u(t)\|_{p(x)}^{p_2}\right\}\le\max\left\{B_{p(x)}^{p_1}||\nabla u(t)\|_2^{p_1},B_{p(x)}^{p_2}||\nabla u(t)\|_2^{p_2}\right\}\\&\le\xi_3\|\nabla u(t)\|_2^2,\end{aligned}\tag{4.16}$$

其中

$$\xi_3:=\max\left\{B_{p(x)}^{p_1}\left(\frac{2(1+\widetilde{C})E(0)}{\ell}\right)^{\frac{p_1-2}{2}},B_{p(x)}^{p_2}\left(\frac{2(1+\widetilde{C})E(0)}{\ell}\right)^{\frac{p_2-2}{2}}\right\}.$$

将 (4.15) 和 (4.16) 代入 (4.14)，可得

$$J'(t)\le-\varepsilon E(t)-\left(\frac{\ell}{8}-\frac{\varepsilon}{2}-\alpha\xi_2-\frac{\alpha\varepsilon\xi_3}{p_1^2}\right)\|\nabla u(t)\|_2^2-\left(N_3-\frac{\varepsilon}{2}\right)\|u_t(t)\|_2^2-\left(\frac{\ell}{64}-\frac{\varepsilon}{2}\right)(g\circ\nabla u)(t).$$

选取 ε 和 α 充分小，使得

$$\frac{\ell}{8}-\frac{\varepsilon}{2}-\alpha\xi_2-\frac{\alpha\varepsilon\xi_3}{p_1^2}>0,\quad N_3-\frac{\varepsilon}{2}>0,\quad\frac{\ell}{64}-\frac{\varepsilon}{2}>0,$$

我们最终得出

$$J'(t)\le-\varepsilon E(t).$$

由于对所有 $t \geq 0$， $J(t) \geq 0$，且 $J(t_0) \leq CE(0)$，我们对任意 $\tau > t_0$ 在 $[t_0, \tau)$ 上对上述不等式进行积分，得到

$$\int_{t_0}^{\tau} E(t)\,\mathrm{d}t \leq CE(0).$$

经过 $\tau \to \infty$ 得到 (3.1) 中的第一个估计。该估计与 $E'(t) \leq 0$ 一起推出 (3.1) 中的第二个估计。定理 3.1 的证明至此完成。

4.2. **定理 3.3 的证明**。 定理 3.3 的证明依赖于以下关键引理。

引理4.4 （见 [23, 方程（44）]）。 设假设 (A1)–(A2) 成立。则对所有 $t > 0$，有

$$(g \circ \nabla u)(t) \leq \frac{1}{c}\overline{G}^{-1}\left(\frac{c(-g' \circ \nabla u)(t)}{\zeta(t)}\right),$$

其中 $c \in$ （0,1） 是一个充分小的常数， G 和 ζ 在 (A2) 中定义，且 G 是 G 的严格递增且严格凸的延拓。

现在我们可以开始证明定理 3.3。根据柯西-施瓦茨不等式和假设(A1)，首先得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))\,\mathrm{d}s\right|^2 \mathrm{d}x &\leq \int_\Omega \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s \int_0^t g(t-s)|\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\ &\leq (1-\ell)(g \circ \nabla u)(t),\end{aligned}$$

结合(4.13)–(4.16)，可知

$$L'(t) \leq -\varepsilon E(t) + C(g \circ \nabla u)(t).$$

根据引理4.4，我们推得

$$L'(t) \leq -\varepsilon E(t) + C\overline{G}^{-1}\left(\frac{c(-g' \circ \nabla u)(t)}{\zeta(t)}\right).$$

接下来，定义

$$F(t) := \overline{G}'\left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)}\right) L(t)$$

其中 $\varepsilon_1 \in$ 是一个常数$(0, r)$，我们立即得到 $F(t) \sim E(t)$。注意到 $G''(t) \geq 0$和 $E'(t) \leq 0$，可得

$$\begin{aligned}F'(t) &= \overline{G}'\left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)}\right) L'(t) + \varepsilon_1 \frac{E'(t)}{E(0)}\overline{G}''\left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)}\right) L(t) \\ &\leq -\varepsilon E(t)\overline{G}'\left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)}\right) + C\overline{G}'\left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)}\right)\overline{G}^{-1}\left(\frac{c(-g' \circ \nabla u)(t)}{\zeta(t)}\right). \qquad (4.17)\end{aligned}$$

设G^*是 G 在杨意义下的凸共轭，即

$$\overline{G}^*(s) := s(\overline{G}')^{-1}(s) - (\overline{G} \circ (\overline{G}')^{-1})(s), \quad s \in (0, \overline{G}'(r)]. \qquad (4.18)$$

众所周知， G^* 满足广义杨不等式

$$AB \leq \overline{G}^*(A) + \overline{G}(B), \quad \forall\, A \in (0, \overline{G}'(r)],\ \forall\, B \in (0, r].$$

因此，取

$$A = \overline{G}'\left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)}\right), \quad B = \overline{G}^{-1}\left(\frac{c(-g' \circ \nabla u)(t)}{\zeta(t)}\right)$$

上述不等式，并利用（4.18），我们可以进一步将（4.17）估计为

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -\varepsilon E(t)\overline{G}'\left(\varepsilon_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)+C\overline{G}^*\left(\overline{G}'\left(\varepsilon_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)\right)+C\frac{(-g'\circ\nabla u)(t)}{\zeta(t)} \\ &\leq -\varepsilon E(t)\overline{G}'\left(\varepsilon_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)+C\varepsilon_1\frac{E(t)}{E(0)}\overline{G}'\left(\varepsilon_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)+C\frac{(-g'\circ\nabla u)(t)}{\zeta(t)}. \end{aligned}$$

将上述不等式两边乘以 $\zeta(t)$，并利用以下事实

$$(-g'\circ\nabla u)(t)\leq -CE'(t),\quad \varepsilon_1\frac{E(t)}{E(0)}<r,\quad \overline{G}'\left(\varepsilon_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)=G'\left(\varepsilon_1\frac{E(t)}{E(0)}\right),$$

我们推得

$$\begin{aligned} \zeta(t)F'(t) &\leq -\varepsilon\zeta(t)E(t)\overline{G}'\left(\varepsilon_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)+C\varepsilon_1\zeta(t)\frac{E(t)}{E(0)}\overline{G}'\left(\varepsilon_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)+C(-g'\circ\nabla u)(t) \\ &\leq -(\varepsilon E(0)-C\varepsilon_1)\zeta(t)\frac{E(t)}{E(0)}G'\left(\varepsilon_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)-CE'(t). \end{aligned} \tag{4.19}$$

接下来，我们进一步引入 $F_1(t):=\zeta(t)F(t)+CE(t)$。由此容易看出 $F_1(t)\sim E(t)$，即存在常数 β_1, $\beta_2>0$ 使得

$$\beta_1F_1(t)\leq E(t)\leq\beta_2F_1(t). \tag{4.20}$$

选取 $\varepsilon_1>0$ 充分小，使得 $\beta_3:=\varepsilon E(0)-C\varepsilon_1>0$，对 $F_1(t)$ 求导并利用 (4.19)，可得

$$F_1'(t)\leq -\beta_3\zeta(t)\frac{E(t)}{E(0)}G'\left(\varepsilon_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)=-\beta_3\zeta(t)G_2\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right), \tag{4.21}$$

其中我们令 $G_2(t):=tG'(\varepsilon_1t)$。由于 $G_2'(t)=G'(\varepsilon_1t)+\varepsilon_1tG''(\varepsilon_1t)$，由 G 在 $(0,r]$ 上的严格单调性和严格凸性可知，$G_2(t)>0$ 且 $G_2'(t)>0$ 对所有 $t\in(0,1]$均成立。因此，进一步定义 $F_2(t):=\frac{\beta_1F_1(t)}{E(0)}$，可知 $F_2(t)\sim E(t)$，结合 (4.20) 和 (4.21) 得

$$F_2'(t)\leq -k_1\zeta(t)G_2\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right)\leq -k_1\zeta(t)G_2\left(\frac{\beta_1F_1(t)}{E(0)}\right)=-k_1\zeta(t)G_2(F_2(t)),$$

其中 $k_1:=\frac{\beta_1\beta_3}{E(0)}$。因此，对两边在 $(t_1,t]$ 上积分可得

$$\int_{\varepsilon_1F_2(t)}^{\varepsilon_1F_2(t_1)}\frac{1}{\tau G'(\tau)}\,\mathrm{d}\tau=\int_{t_1}^{t}-\frac{F_2'(s)}{G_2(F_2(s))}\,\mathrm{d}s\geq k_1\int_{t_1}^{t}\zeta(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中我们通过 $\tau=F_2(s)$ 进行了变量代换。最后，我们得到

$$F_2(t)\leq\frac{1}{\varepsilon_1}G_1^{-1}\left(k_1\int_{t_1}^{t}\zeta(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

其中 $G_1(t):=\int_t^r\frac{1}{sG'(s)}\mathrm{d}s$，并且我们利用了 G_1 在 $(0,r]$ 上严格递减这一事实。由等价关系 $F_2(t)\sim E(t)$，最终得到 (3.2)，从而完成了定理 3.3 的证明。

4.3. **定理 3.5 的证明**。与上一节类似，我们首先为定理 3.5 的证明准备一个关键引理。

引理 4.5 （见 [19]）。设 E： $[0,\infty)$ $\longrightarrow$ （0, ∞） 为一个非递增函数，且 ϕ： $[0,\infty)$ $\longrightarrow$ $[0,\infty)$ 为一个严格递增的 C^1 函数，使得

$$\phi(0)=0,\quad \lim_{t\to\infty}\phi(t)=\infty.$$

假设存在常数 $\sigma\geq 0$ 和 $\omega>0$ 使得

$$\int_t^\infty \phi'(s)E(s)^{1+\sigma}\,\mathrm{d}s\leq \frac{1}{\omega}E(0)^\sigma E(t).$$

则对于 E（t），以下衰减估计成立。

（1）若 $\sigma=0$，则对于所有 $t\geq 0$， E（t） $\leq E$（0)e$^{1-\omega\phi(t)}$。（2）若 $\sigma>0$，则对于所有 $t\geq 0$， E（t） $\leq E$（0）$(1+\sigma\omega\phi$（t）$)^{\frac{1}{\sigma}}$。

现在，我们基于上述引理证明定理 3.5。

固定某些 $T>0$ 后，我们将 (1.1) 中的控制方程乘以 $\xi(t)E(t)^{q-1}u(t)$，并在 $\Omega\times(\tau,\ T)$ 上积分，其中取某些 $\tau\in(0,\ T)$，得到

$$\begin{aligned}&\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega u_{tt}(t)u(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega u_t(t)u(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\|\nabla u(t)\|_2^2\,\mathrm{d}t-\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\=&\,\alpha\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega |u(t)|^p\log|u(t)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{4.22}$$

其中不难看出

$$\begin{aligned}&\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\=&\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s)-\nabla u(t))\cdot\nabla u(t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\|\nabla u(t)\|_2^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

然后将上述恒等式代入 (4.22)，并重新整理，得到

$$\begin{aligned}&\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\left(1-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)\|\nabla u(t)\|_2^2\,\mathrm{d}t\\=&-\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u_t(t)u(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\|u_t(t)\|_2^2\,\mathrm{d}t\\&+\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s)-\nabla u(t))\cdot\nabla u(t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&-\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega u_t(t)u(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\alpha\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega |u(t)|^p\log|u(t)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

The接下来，我们依据 (2.3) 中 $E(t)$ 的定义，并利用上述恒等式进行计算

$$\begin{aligned}2\int_\tau^T \xi(t)E(t)^q\,\mathrm{d}t = \int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\left\{\|u_t(t)\|_2^2 + \left(1-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 + (g\circ\nabla u)(t)\right.\\ \left. - 2\alpha\int_\Omega \frac{|u(t)|^p\log|u(t)|}{p}\,\mathrm{d}x + 2\alpha\int_\Omega \frac{|u(t)|^p}{p^2}\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}t\\ = \sum_{i=1}^7 J_i(\tau),\end{aligned} \tag{4.23}$$

其中

$$\begin{aligned}J_1(\tau) &:= 2\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\|u_t(t)\|_2^2\,\mathrm{d}t,\\ J_2(\tau) &:= -\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega u_t(t)u(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\\ J_3(\tau) &:= -\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u_t(t)u(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\\ J_4(\tau) &:= \int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}(g\circ\nabla u)(t)\,\mathrm{d}t,\\ J_5(\tau) &:= \int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s)-\nabla u(t))\cdot\nabla u(t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\\ J_6(\tau) &:= \alpha\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega\left(1-\frac{2}{p}\right)|u(t)|^p\log|u(t)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\\ J_7(\tau) &:= 2\alpha\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega \frac{|u(t)|^p}{p^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

接下来，我们估计上述 7 项中的每一项。

步骤 1 我们首先估计 $J_1(\tau)$ 和 $J_2(\tau)$。由于 (2.4) 蕴含 $\|u_t(t)\|_2^2 \le -E'(t)$，由 $\xi(t)$ 和 $E(t)$ 的单调性可立即得出

$$\begin{aligned}J_1(\tau) &\le -2\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}E'(t)\,\mathrm{d}t \le 2\xi(0)\left[\frac{E(t)^q}{q}\right]_{t=T}^{t=\tau}\\ &\le \frac{2\xi(0)}{q}E(\tau)^q \le \frac{2\xi(0)E(0)^{q-1}}{q}E(\tau).\end{aligned} \tag{4.24}$$

对于 $J_2(\tau)$，我们利用 $\delta\in(0,\ 1)$ 上的柯西不等式以及上述不等式，推得

$$\begin{aligned}J_2(\tau) &\le \int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega\left(\frac{1}{4\delta}|u_t(t)|^2+\delta|u(t)|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \frac{1}{8\delta}J_1(\tau) + \delta\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\|u(t)\|_2^2\,\mathrm{d}t\\ &\le \frac{\xi(0)E(0)^{q-1}}{4\delta q}E(\tau) + \delta B_2\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\|\nabla u(t)\|_2^2\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中我们再次使用了庞加莱不等式。为处理上式中的最后一项，我们回顾 $\mathbb{E}(t)$的定义 (2.7)，并应用引理 2.7 对其进行估计

$$\frac{\ell}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 \le \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 \le \mathbb{E}(t) \le (1+\widetilde{C})E(t). \tag{4.25}$$

因此可得

$$J_2(t) \le \frac{\xi(0)E(0)^{q-1}}{4\delta q}E(\tau) + \frac{2\delta B_2(1+\widetilde{C})}{\ell}\int_\tau^T \xi(t)E(t)^q \,\mathrm{d}t. \tag{4.26}$$

步骤 2 接下来，我们处理 $J_3(\tau)$。对 $\xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega u_t(t)u(t)\,\mathrm{d}x$ 求导后，我们将 $J_3(\tau) = J_3^1(\tau) + J_3^2(\tau) + J_3^3(\tau)$ 除以

$$\begin{aligned}
J_3^1(\tau) &:= -\int_\tau^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega u_t(t)u(t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t,\\
J_3^2(\tau) &:= (q-1)\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-2}E'(t)\int_\Omega u_t(t)u(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad (q>1),\\
J_3^3(\tau) &:= \int_\tau^T \xi'(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega u_t(t)u(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

对于 $J_3^1(\tau)$，我们再次利用 $\xi(t)$ $E(t)$ 的单调性和庞加莱不等式，推得

$$\begin{aligned}
J_3^1(\tau) &= \left[\xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega u_t(t)u(t)\,\mathrm{d}x\right]_{t=T}^{t=\tau} \le \xi(0)E(0)^{q-1}\int_\Omega (|u_t(\tau)u(\tau)| + |u_t(T)u(T)|)\,\mathrm{d}x\\
&\le \frac{\xi(0)E(0)^{q-1}}{2}\left(\|u_t(\tau)\|_2^2 + \|u(\tau)\|_2^2 + \|u_t(T)\|_2^2 + \|u(T)\|_2^2\right)\mathrm{d}x\\
&\le \frac{\xi(0)E(0)^{q-1}}{2}\left\{\|u_t(\tau)\|_2^2 + \|u_t(T)\|_2^2 + B_2\left(\|\nabla u(\tau)\|_2^2 + \|\nabla u(T)\|_2^2\right)\right\}.
\end{aligned}$$

与 (4.25) 的论证类似，可得

$$\|u_t(t)\|_2^2 \le 2(1+\widetilde{C})E(t), \quad \|\nabla u(t)\|_2^2 \le \frac{2(1+\widetilde{C})}{\ell}E(t), \quad \forall\, t \ge 0,$$

因此

$$J_3^1(\tau) \le 2(1+\widetilde{C})\left(1+\frac{B_2}{\ell}\right)\xi(0)E(0)^{q-1}E(\tau). \tag{4.27}$$

以类似的方式，我们估计 $J_3^2(t)$，得到

$$\begin{aligned}
J_3^2(\tau) &\le -(q-1)\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-2}E'(t)\int_\Omega |u_t(t)u(t)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\le -\frac{q-1}{2}\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-2}E'(t)\left(\|u_t(t)\|_2^2 + B_2\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\mathrm{d}t\\
&\le -(q-1)(1+\widetilde{C})\left(1+\frac{B_2}{\ell}\right)\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}E'(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由式 (4.24) 中得到的 $\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}E'(t)\,\mathrm{d}t$ 的估计，我们立即得到

$$\begin{aligned}
J_3^2(\tau) &\le \frac{(q-1)(1+\widetilde{C})\xi(0)E(0)^{q-1}}{q}\left(1+\frac{B_2}{\ell}\right)E(\tau)\\
&\le (1+\widetilde{C})\xi(0)E(0)^{q-1}\left(1+\frac{B_2}{\ell}\right)E(\tau).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

对于 $J_3^3(\tau)$，我们重复相同的论证并进行分部积分，得到

$$\begin{aligned} J_3^3(\tau) &\le \frac{1}{2}\int_\tau^T \xi'(t)E(t)^{q-1}\left(\|u_t(t)\|_2^2 + B_2\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\mathrm{d}t \le -(1+\widetilde{C})\left(1+\frac{B_2}{\ell}\right)\int_\tau^T \xi'(t)E(t)^q\,\mathrm{d}t \\ &= (1+\widetilde{C})\left(1+\frac{B_2}{\ell}\right)\left\{\left[\xi(t)E(t)^q\right]_{t=T}^{t=\tau} + q\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}E'(t)\,\mathrm{d}t\right\} \\ &\le (1+\widetilde{C})\left(1+\frac{B_2}{\ell}\right)\xi(0)E(0)^{q-1}E(\tau). \end{aligned} \tag{4.29}$$

因此，将 (4.27)–(4.29) 相加可得

$$J_3(\tau) \le 4(1+\widetilde{C})\left(1+\frac{B_2}{\ell}\right)\xi(0)E(0)^{q-1}E(\tau). \tag{4.30}$$

步骤 3 为研究 $J_4(\tau)$ 和 $J_5(\tau)$，我们将估计分为两种情形，即 $q=1$和 $1<q<2$。

情形1 对于 $q=1$，假设 (A3) 化为 $g'(t) \le -\xi(t)g(t)$。由于 (2.4) 给出 $(-g'\circ\nabla u)(t) \le -2E'(t)$，$\xi(t)$ 的单调性表明

$$\begin{aligned} J_4(\tau) &\le \int_\tau^T\int_0^t \xi(t-s)g(t-s)\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|_2^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t \le \int_\tau^T (-g'\circ\nabla u)(t)\,\mathrm{d}t \\ &\le -2\int_\tau^T E'(t)\,\mathrm{d}t \le 2E(\tau). \end{aligned} \tag{4.31}$$

对于 $J_5(\tau)$，我们对 $\varepsilon>0$ 应用柯西不等式，并利用 (4.25) 和 (4.31) 得到

$$\begin{aligned} J_5(\tau) &\le \frac{\varepsilon}{2}\int_\tau^T \xi(t)\int_0^t g(t-s)\|\nabla u(t)\|_2^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\tau^T\int_0^t \xi(t-s)g(t-s)\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|_2^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &\le \frac{\varepsilon(1+\widetilde{C})(1-\ell)}{\ell}\int_\tau^T \xi(t)E(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\varepsilon}E(\tau) \le \varepsilon(1+\widetilde{C})\int_\tau^T \xi(t)E(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\varepsilon}E(\tau). \end{aligned} \tag{4.32}$$

情形2 现在考虑 $1<q<2$ 的情形。对 q 和$q^*=\frac{q}{q-1}$ 应用 H¨older 不等式后，我们利用 (4.25)和 (3.1) 推得

$$\begin{aligned} (g\circ\nabla u)(t) &= \int_0^t \|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|_2^{\frac{2(q-1)}{q}} g(t-s)\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|_2^{\frac{2}{q}}\,\mathrm{d}s \\ &\le \left(\int_0^t \|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|_2^2\,\mathrm{d}s\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^t g(t-s)^q\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|_2^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le \left(2\int_0^t \left(\|\nabla u(t)\|_2^2+\|\nabla u(s)\|_2^2\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}(g^q\circ\nabla u)(t)^{\frac{1}{q}} \\ &\le C\left(\int_0^t (E(t)+E(s))\,\mathrm{d}s\right)^{1-\frac{1}{q}}(g^q\circ\nabla u)(t)^{\frac{1}{q}} \le CE(0)^{1-\frac{1}{q}}(g^q\circ\nabla u)(t)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

然后，我们应用杨氏不等式并取 $\epsilon>0$，估计 $J_4(\tau)$，得到

$$J_4(\tau) \le CE(0)^{1-\frac{1}{q}}\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}(g^q\circ\nabla u)(t)^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}t$$

$$= CE(0)^{1-\frac{1}{q}} \int_\tau^T (\xi(t)E(t)^q)^{\frac{q-1}{q}} (\xi(t)(g^q \circ \nabla u)(t))^{\frac{1}{q}} \,\mathrm{d}t$$
$$\leq CE(0)^{1-\frac{1}{q}} \epsilon \int_\tau^T \xi(t)E(t)^q \,\mathrm{d}t + C(\epsilon) \int_\tau^T \xi(t)(g^q \circ \nabla u)(t) \,\mathrm{d}t.$$

对于上式中的最后一项，我们利用假设 (A3)，并采用与式 (4.31) 相同的论证，推得

$$\int_\tau^T \xi(t)(g^q \circ \nabla u)(t) \,\mathrm{d}t \leq \int_\tau^T \int_0^t \xi(t-s) g(t-s)^q \|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|_2^2 \,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$
$$\leq \int_\tau^T (-g' \circ \nabla u)(t) \,\mathrm{d}t \leq -2 \int_\tau^T E'(t) \,\mathrm{d}t \leq 2E(\tau),$$

因此

$$J_4(\tau) \leq C\epsilon E(0)^{1-\frac{1}{q}} \int_\tau^T \xi(t)E(t)^q \,\mathrm{d}t + C(\epsilon)E(\tau). \tag{4.33}$$

对于 $J_5(\tau)$，我们仿照 (4.32) 中的估计，并利用 (4.33) 推导得

$$\begin{aligned} J_5(\tau) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1} \int_0^t g(t-s)\|\nabla u(t)\|_2^2 \,\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \frac{1}{2\varepsilon} \int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}(g \circ \nabla u)(t) \,\mathrm{d}t \\ &\leq \varepsilon(1+\widetilde{C}) \int_\tau^T \xi(t)E(t)^q \,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\varepsilon} J_4(\tau) \\ &\leq \varepsilon(1+\widetilde{C}) \int_\tau^T \xi(t)E(t)^q \,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\varepsilon} \left\{ C\epsilon E(0)^{1-\frac{1}{q}} \int_\tau^T \xi(t)E(t)^q \,\mathrm{d}t + C(\epsilon)E(\tau) \right\} \\ &\leq \varepsilon \left(1 + \widetilde{C} + CE(0)^{1-\frac{1}{q}}\right) \int_\tau^T \xi(t)E(t)^q + C(\varepsilon)E(\tau), \end{aligned} \tag{4.34}$$

其中在最后一个不等式中我们取了 $\epsilon = \varepsilon^2$ 。

步骤 4 现在还需处理两个非线性项 $J_6(\tau)$ 和 $J_7(\tau)$。首先，我们再次利用 (2.5)–(2.6) 中的相同论证来估计

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(1 - \frac{2}{p}\right) |u(t)|^p \log|u(t)| \,\mathrm{d}x &\leq \int_{\{|u(t)|\geq 1\}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) |u(t)|^p \log|u(t)| \,\mathrm{d}x \\ &\leq \left(1 - \frac{2}{p_2}\right) \int_{\{|u(t)|\geq 1\}} |u(t)|^{p_2} \log|u(t)| \,\mathrm{d}t \\ &\leq \left(1 - \frac{2}{p_2}\right) \frac{1}{\mathrm{e}\mu} \int_\Omega |u(t)|^{p_2+\mu} \,\mathrm{d}x \leq \frac{(p_2-2)B_{p_2+\mu}}{\mathrm{e}\mu p_2} \|\nabla u(t)\|_2^{p_2+\mu}, \end{aligned}$$

其中 $\mu > 0$ 满足 $p_2 + \mu < 2_*$。由 (4.25) 可得

$$\begin{aligned} J_6(\tau) &\leq \alpha \frac{(p_2-2)B_{p_2+\mu}}{\mathrm{e}\mu p_2} \int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1} \|\nabla u(t)\|_2^{p_2+\mu} \,\mathrm{d}x \\ &\leq \alpha \frac{(p_2-2)B_{p_2+\mu}}{\mathrm{e}\mu p_2} \left(\frac{2(1+\widetilde{C})}{\ell}\right)^{\frac{p_2+\mu}{2}} \int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q+\frac{p_2+\mu-2}{2}} \,\mathrm{d}t \leq \alpha\xi_4 \int_\tau^T \xi(t)E(t)^q \,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{4.35}$$

其中

$$\xi_4 := \frac{(p_2-2)B_{p_2+\mu}}{\mathrm{e}\mu p_2}\left(\frac{2(1+\widetilde{C})}{\ell}\right)^{\frac{p_2+\mu}{2}} E(0)^{\frac{p_2+\mu-2}{2}}.$$

最后，对于 $J_7(\tau)$，我们利用估计式 (4.16) 推导得出

$$\begin{aligned} J_7(\tau) &\le \frac{2\alpha}{p_1^2}\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\int_\Omega |u(t)|^p \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \frac{2\alpha\xi_3}{p_1^2}\int_\tau^T \xi(t)E(t)^{q-1}\|\nabla u(t)\|_2^2 \,\mathrm{d}t \\ &\le \frac{4\alpha(1+\widetilde{C})\xi_3}{p_1^2\ell}\int_\tau^T \xi(t)E(t)^q \,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.36}$$

此时，我们可以完成定理 3.5 的证明。

情形1 对于 $q=1$，我们将 (4.24)、(4.26)、(4.30)–(4.32)、(4.35) 和 (4.36) 代入 (4.23)，从而得到

$$\begin{aligned} 2\int_\tau^T \xi(t)E(t)\,\mathrm{d}t \le{}& \left\{2+\frac{1}{\varepsilon}+\left(2+4(1+\widetilde{C})\left(1+\frac{B_2}{\ell}\right)+\frac{1}{4\delta}\right)\xi(0)\right\}E(\tau) \\ &+\left\{(1+\widetilde{C})\left(\varepsilon+\frac{2\delta B_2}{\ell}\right)+\alpha\left(\xi_4+\frac{4(1+\widetilde{C})\xi_3}{p_1^2\ell}\right)\right\}\int_\tau^T \xi(t)E(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.37}$$

因此，若 $\alpha>0$ 足够小，使得

$$\alpha < \left(\xi_4+\frac{4(1+\widetilde{C})\xi_3}{p_1^2\ell}\right)^{-1}, \tag{4.38}$$

那么我们可以适当选取足够小的 ε，$\delta>0$，使得

$$(1+\widetilde{C})\left(\varepsilon+\frac{2\delta B_2}{\ell}\right)+\alpha\left(\xi_4+\frac{4(1+\widetilde{C})\xi_3}{p_1^2\ell}\right)=1.$$

因此，我们可以将 (4.37) 重新整理为

$$\int_\tau^T \xi(t)E(t)\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{K}E(\tau), \quad K := \left\{2+\frac{1}{\varepsilon}+\left(2+4(1+\widetilde{C})\left(1+\frac{B_2}{\ell}\right)+\frac{1}{4\delta}\right)\xi(0)\right\}^{-1}.$$

由于 $T>0$ 是任意选取的，我们令 $T\to\infty$，得到

$$\int_\tau^\infty \xi(t)E(t)\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{K}E(\tau).$$

最后，在引理 4.5 中令 $\phi(t)=\int_0^t \xi(s)\,\mathrm{d}s$、$\sigma=0$ 和 $\omega=K$，即可得到 (3.3) 中的第一个不等式。

情形2 对于 $1<q<2$，我们按照上文相同的方法，将 (4.24)、(4.26)、(4.30) 和 (4.33)–(4.36) 代入 (4.23)，从而得到

$$\begin{aligned} 2\int_\tau^T \xi(t)E(t)^q\,\mathrm{d}t \le{}& \left\{C(\varepsilon)+\xi(0)E(0)^{q-1}\left(\frac{2}{q}+\frac{1}{4\delta q}+4(1+\widetilde{C})\left(1+\frac{B_2}{\ell}\right)\right)\right\}E(\tau) \\ &+\left\{\frac{2\delta B_2(1+\widetilde{C})}{\ell}+C\varepsilon^2E(0)^{1-\frac{1}{q}}+\varepsilon\left(1+\widetilde{C}+CE(0)^{1-\frac{1}{q}}\right)\right. \end{aligned}$$

$$+\alpha\left(\xi_4+\frac{4(1+\widetilde{C})\xi_3}{p_1^2\ell}\right)\Bigg\}\int_\tau^T \xi(t)E(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4.39}$$

其中我们在 (4.33) 中令 $\epsilon=\varepsilon^2$。因此，如果 $\alpha>0$ 满足与上文相同的条件 (4.38)，我们仍可适当地选取 ε，$\delta>0$，使得

$$\frac{2\delta B_2(1+\widetilde{C})}{\ell}+C\varepsilon^2E(0)^{1-\frac{1}{q}}+\varepsilon\left(1+\widetilde{C}+CE(0)^{1-\frac{1}{q}}\right)+\alpha\left(\xi_4+\frac{4(1+\widetilde{C})\xi_3}{p_1^2\ell}\right)=1.$$

于是，我们可以将 (4.39) 改写为

$$\int_\tau^T \xi(t)E(t)^q\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{K'}E(0)^{q-1}E(\tau),$$

其中

$$K':=\left\{C(\varepsilon)+\xi(0)E(0)^{q-1}\left(\frac{2}{q}+\frac{1}{4\delta q}+4(1+\widetilde{C})\left(1+\frac{B_2}{\ell}\right)\right)\right\}^{-1}.$$

因此，令 $T\to\infty$ 可得

$$\int_\tau^\infty \xi(t)E(t)^q\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{K'}E(0)^{q-1}E(\tau).$$

其中。由此，应用引理 4.5，并取 $\phi(t)=\int_0^t\xi(s)\mathrm{d}s$、$\sigma=q-1$ 和 $\omega=K'$，可得 (3.3) 中的第二个不等式。

定理 3.5 的证明至此完成。

Acknowledgements

第二作者获得日本学术振兴会科研补助金（项目编号：JP22K13954、JP23KK0049）和广东省基础与应用基础研究基金（项目编号：2025A1515012248）的资助。

References

[1] R.A. Adams, J.F. Fournier，《索伯列夫空间》（第2版），学术出版社，纽约，2003。[2] A.M. Al-Mahdi, M.M. Al-Gharabli，具有非线性阻尼的无限记忆黏弹性问题的新型一般衰减结果，《边值问题》，2019 (2019) 140。[3] K. Bartkowski, P. G´orka，具有对数非线性的单维克莱因–戈尔登方程，《物理学杂志 A》41 (35) (2008) 355–201。[4] F. Belhannache, M.M. Algharabli, S.A. Messaoud，具有非线性阻尼和非常一般的松弛函数的黏弹性方程的渐近稳定性，《动力系统与控制杂志》26 (1) (2020) 45–67。[5] I. Bialynicki-Birula, J. Mycielski，具有对数非线性的波动方程，《波兰科学院通报》Cl 23 (4) (1975) 461–466。

[6] 100 12 1976 62 93 I.

[7] ´ 2 1 1980 21 Bialynicki-Birula, J. Mycielski，非线性波动力学，《物理学年鉴》( ) ( ) – T. Cazenave¡ A. Haraux，具有对数非线性的演化方程，( ) ( ) –51。[8] H. Di, Y. Shang, Z. Song，一类具有对数非线性的强阻尼半线性波动方程的初边值问题，《非线性分析：现实世界应用》51 (2020) 102968。[9] X. Fan, D. Zhao，关于空间 $L^{p(x)}(\Omega)$ 和 $W^{k,\,p(x)}(\Omega)$，《数学分析与应用杂志》263 (2) (2001) 424–446。[10] X.-L. Fan, Q.-H. Zhang，$p(x)$-拉普拉斯狄利克雷问题解的存在性，《非线性分析》52 (8) (2003) 1843–1852。[11] P. G´orka，对数克莱因–戈尔登方程，《波兰物理学报 B》40 (2009) 59–66。[12] T.G. Ha, S.-H. Park，具有强阻尼和对数非线性的黏弹性波动方程的爆破现象，《微分方程进展》2020 (2020) 235。[13] N. Irkil, E. Pi¸skin, P. Agarwal，具有对数非线性的基尔霍夫型黏弹性波动方程组解的整体存在性与衰减，《数学方法与应用科学》45 (5) (2022) 2921–3948。

[14] K.-P. Jin, L. Jin, T.-J. Xiao，拟线性黏弹性方程初边值问题的稳定性，《电子微分方程杂志》2020 (80) (2020) 1–15。[15] D. Lars, P. Harjulehto, P. H¨ast¨o, M. Ruˇziˇcka，《变指数勒贝格空间与索博列夫空间》，施普林格，柏林，2011。[16] F. Li, Q. Gao，具有记忆项的非线性彼得罗夫斯基型方程解的爆破，《应用数学与计算》274 (2016) 383–392。[17] M. Liao, B. Guo, X. Zhu，具有变指数和弱阻尼的黏弹性波动方程解的能量衰减率，arXiv:2011.11185v1 (2020)。[18] M. Kafini, S. Messaoudi，带时滞的对数非线性波动方程解的局部存在性与爆破，《应用分析》99 (3) (2020) 530–547。[19] P. Martinez，一种获得耗散系统衰减率估计的新方法，《ESAIM：控制、优化与变分法》4 (1999) 419–444。[20] M.I. Mustafa，黏弹性波动方程的最优衰减率，《数学方法与应用科学》41 (1) (2018) 192–204。[21] S.A. Messaoudi, W. Al-Khulaifi，拟线性黏弹性方程的一般衰减与最优衰减，《应用数学快报》66 (2017) 16–22。[22] S.-H. Park, J.-R. Kang，具有变指数的黏弹性波动方程解的爆破，《数学方法与应用科学》42 (6) (2019) 2083–2097。[23] Q. Peng, Y. Liu，具有非线性阻尼和多项式非线性的黏弹性方程的能量衰减，《应用分析》104 (18) (2025) 3497–3518。[24] Q. Peng, Y. Liu，具有摩擦阻尼和对数非线性项的无限记忆波动方程的指数稳定性，《非线性分析：现实世界应用》88 (2026) 104470。[25] Q. Peng, Z. Zhang，具有对数非线性和声学边界条件的无限记忆波动方程的稳定化与爆破，《系统科学与复杂性》 37 4 2024 1368 1391 ( ) ( ) – Q. Peng, Z. Zhang，[26] 一类具有对数非线性的弱阻尼基尔霍夫板方程的稳定化与爆破，《印度纯粹与应用数学杂志》56 (2025) 711–727。[27] Y. Ueda, R. Duan, S. Kawashima，具有非对称松弛的对称双曲系统的衰减结构及其应用，《数学分析档案》205 (2012) 239–266。