超导三能级量子比特链中离散时间量子行走的演示与拓扑边缘态的观测

Kun Zhou*,[1, 2, 3, 4] Jian-Wen Xu*,[1] Qi-Ping Su*,†,[2] Yu Zhang,[1, 3, 4] Xiang-Min Yu,[1, 3, 4] Zhuang Ma,[1] Han-Yu Zhang,[1] Hong-Yi Shi,[1] Wen Zheng,[1, 4] Shuyi Pan,[1] Yihao Kang,[2] Zhiguo Huang,[5] Chui-Ping Yang‡,[2] Shao-Xiong Li§,[1, 3, 4, 6] 和 Yang Yu¶[1, 3, 4, 6, 7]

[1] *National Laboratory of Solid State Microstructures, School of Physics, Nanjing University, Nanjing 210093, China*

[2] *School of Physics, Hangzhou Normal University, Hangzhou, Zhejiang 311121, China*

[3] *Hefei National Laboratory, Hefei 230088, China*

[4] *Shishan Laboratory, Suzhou Campus of Nanjing University, Suzhou 215000, China*

[5] *China Mobile (Suzhou) Software Technology Company Limited, Suzhou, 215163, China*

[6] *Jiangsu Key Laboratory of Quantum Information Science and Technology, Nanjing University, Suzhou 215163, China*

[7] *Synergetic Innovation Center of Quantum Information and Quantum Physics, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China*

（日期：2026年1月6日）

arXiv:2601.01759v1 [quant-ph] 5 Jan 2026

量子行走是通用量子计算和算法研究的多功能工具。然而，超导电路中离散时间量子行走（DTQW）的实现仍受到操作精度、电路深度和连通性等因素的限制。通过使用超导三能级量子比特（三能级系统）提升硬件效率，我们在超导电路中实验实现了可扩展的离散时间量子行走，并观测到量子行走在三能级量子比特链中的弹道扩散。在我们的实现中使用三能级量子比特，可高效地将行走者位置和硬币自由度编码到硬件中。借助基于三能级量子比特的离散时间量子行走的灵活性和内禀对称性，我们成功在链中制备了两种拓扑相。我们首次在超导平台上观测到受粒子-空穴对称性保护、束缚于这两种拓扑相界面处的边缘态。测得的参数依赖关系进一步验证了边缘态的性质。所展示的离散时间量子行走具有可扩展性和门控兼容性，可为超导量子计算和量子模拟提供一种多功能工具。

量子行走（QWs）是量子信息处理研究中的基础模型。作为一种基础算法工具，量子行走已被广泛应用于各种量子算法的设计 [1–3]。尤其是，量子行走具有一些极为重要的特性。例如，量子行走的相干动力学能够显著加速搜索算法 [4–6]。值得注意的是，已有证明表明，量子行走遍历某些特定结构（如随机层次图）的速度比经典算法快指数倍 [7]。此外，量子行走独特的概率分布可用于高效实现玻色子采样协议[8]。另外，量子行走本身即可执行通用量子计算 [9–11]和量子模拟 [12–14]。现有超导系统中的量子行走实验涵盖两种主流模型：连续时间方法和离散时间方法。前者 [15, 16] 通常以类比方式运行，因此无法完全契合基于门的量子计算范式。后者的幺正演化由一次硬币翻转以及随后依赖硬币状态的行走者位移组成，具有更高的可控性，并且能够编码为量子电路中的门序列。然而，基于量子比特的离散时间量子行走 [17] 所需的电路深度和连通性仍然具有挑战性。文献[18, 19]报道的实现仅需要一个充当硬币算符的量子比特和一个腔体对行走者位置进行编码，但也带来了一些可扩展性方面的困难（即高效增加行走步数和行走维度的能力）以及灵活性方面的困难。迄今为止，在超导系统中实现的离散时间量子行走似乎无法在量子电路框架内兼顾可访问性与可扩展性，从而限制了离散时间量子行走的实际应用。

超越两能级系统（量子比特）后，多能级量子系统（多能级量子位）能够带来诸多优势，例如优化多量子比特编码以及电路编译中的量子门分解 [20–26], , 更高效地实现量子算法 [27–30], , 以及在量子纠错方面的固有优势 [31, 32]。这些优势推动了人们对基于量子多能级比特的量子技术的广泛研究，涉及光子学 [33, 34]、中性原子和离子 [35, 36], , 以及超导平台 [30, 37]。尤其是，基于多能级量子位的量子门操作 [30] 和逻辑量子比特构造 [32] , 近年来在超导电路系统中取得了显著进展。在这封信中，我们通过实验展示，三能级量子比特（三能级量子系统）可用于在超导电路系统中实现离散时间量子行走（离散时间量子行走），并提升硬件效率、操作灵活性和可扩展性。我们基于三能级量子比特的离散时间量子行走协议的独特之处在于，它将硬币算符固有地集成于每个行走者位置，无需专用的

硬币量子比特。这种设计大幅简化了电路实现，并提高了系统可控性，尽管超导平台本身存在固有挑战。

我们通过在超导十个三能级量子比特链中实验制备两个不同的拓扑相，展示了基于三能级量子比特的离散时间量子行走的灵活可控性。在两个拓扑相的界面处观测到了拓扑边缘态，验证了理论预测 [38, 39]。此外，通过测量参数依赖关系，进一步确认了所实现的离散时间量子行走中边缘态的存在。值得注意的是，这些边界态的保护机制归因于粒子-空穴对称性（PHS），这与此前报道的机制有本质区别 [18, 40–43]。我们的三能级量子比特协议有望推动量子行走迈向实际应用。

协议。—离散时间量子行走是一种量子系统，其希尔伯特空间可分解为硬币空间H_c 和行走者位置空间 H_s。对于一维（1D）离散时间量子行走，空间 $H_c \otimes H_s$ 中的任意状态可表示为$|\phi\rangle = \sum_x (a_x |0\rangle + b_x |1\rangle) \otimes |x\rangle$，其中 $x \in \mathbf{Z}$表示行走者的位置，而 $|0\rangle$、 $|1\rangle$ 是硬币算符的两个基态。系统的离散时间步（t）演化 U由两个酉算符构成：位移算符 S 和硬币算符 R。离散时间量子行走的单步演化可表示为

$$|\phi(t+1)\rangle = U|\phi(t)\rangle = SR|\phi(t)\rangle . \tag{1}$$

算符 S 有条件地将行走者从一个位置移至相邻位置：

$$S = |0\rangle\langle 0| \otimes I + \sum_x |1\rangle\langle 1| \otimes |x+1\rangle\langle x| . \tag{2}$$

请注意，上述量子行走是一种紧致单向量子行走。其动力学在数学上等同于传统双向量子行走的动力学，只需将 S的第一项替换为$\sum_x |0\rangle\langle 0| \otimes |x-1\rangle\langle x|$。因此，这两种量子行走可以相互映射 [44, 45] （详细比较和转换方法见补充信息 [46] ）。算符 R 是用于翻转硬币的酉旋转：

$$R = \sum_x R(x) \otimes |x\rangle\langle x| . \tag{3}$$

对于两能级系统中的旋转，不失一般性， $R(x) = \exp[i\theta(x)\sigma_x/2]$，其中 σ_x 是泡利算符的 x 分量， θ 是位置依赖的旋转角。

在超导电路系统中实现离散时间量子行走时，我们首要考虑的是如何使系统架构具备可扩展性，并提高操作效率。我们采用广泛使用的跨音子 [47] 作为基本构件。我们的一维离散时间量子行走系统由一个包含 19 个微波量子比特的一维阵列构成，其中 19 个微波量子比特中有 10 个充当三能级量子比特，另外 9 个微波量子比特充当移位量子比特（SQ）。如图 1a 所示，三能级量子比特与 SQ 交替排列。相邻微波量子比特之间存在电容耦合。为了便于在整个链上执行算符 S 并尽量减少串扰，我们按照图 1d 所示为微波量子比特安排了三角形频率分布。尽管这种直接耦合架构在门保真度和可扩展性等方面存在局限，但足以用于展示我们的协议。虽然本文未采用基于耦合器的架构 [48–51], ，但它同样适用于我们的离散时间量子行走协议，只需对算符 S的实现稍作修改。基于耦合器的架构在抑制杂散相互作用、提高门保真度和增强任务灵活性方面具有优势。此外，由于不再受门速度与高激发态稳定性之间权衡的限制，该架构有望支持更大规模的量子行走（关于我们的离散时间量子行走协议的兼容性和可扩展性，参见补充信息 [46] ）。

在我们的离散时间量子行走实现中，如图 1b 所示，采用三能级量子位使硬币态和特定的行走者位置能够同时编码在单个跨音子三能级量子位上：其基态 $|g\rangle$ 编码未被占据的行走者位置，而两个不同的激发态 $|e\rangle$， $|f\rangle$ 则同时编码行走者当前位置和硬币自由度。与基于量子比特的方案（例如参考文献 [52]）相比，后者需要在每个位置使用两个超导量子比特，以编码行走者占据态（存在或不存在）与硬币态构成的联合希尔伯特空间；我们的实现所需的跨音子更少，因此提高了硬件效率。此外，位置依赖的 R 操作由子空间 $\{|e\rangle, |f\rangle\}$中的 SU(2)门执行，无需像参考文献 [52]那样进行跨音子间相互作用。关于位移算符的实现，可调谐移位量子比特（SQ）按图 1c 所示完成位移操作。当 SQ 被调谐至与相邻三能级量子位的 $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ 跃迁共振时，SWAP 门可将 $|e\rangle$ 的激发移入或移出 SQ，而 $|f\rangle$ 态不会发生位移。连续执行两个 SWAP 门，即可使任意位置的激发 $|e\rangle$ 向前移动一步，从而实现 S 操作。显然，与参考文献 [17] 中的基于量子比特的协议相比，这种方法既简化了算符编译，也降低了物理连接要求。

例如，图1e展示了一个3步离散时间量子行走的量子电路。该电路首先分别通过一个π_{ge}脉冲和 $\{|e\rangle, |f\rangle\}$ 子空间中的一个SU(2)门，对行走者态和硬币态进行初始化。在第 n步演化中，硬币操作由作用于前 n 个三能级量子位的 n个并行SU(2)门组成，而位移操作则由 n 个相应的位移模块构成。读出测量只需提取三能级量子位的激发数，这是一项相对简单的任务。需要注意的是，该协议具有可扩展性——行走规模可以通过简单延长三能级量子比特链的长度来增加，且还可以推广到二维（2D）离散时间量子行走的实现，而无需改变编码方案和算符π_{ge}的实现（有关我们的离散时间量子行走协议的兼容性和可扩展性的讨论，请参阅补充信息 $\{|e\rangle, |f\rangle\}$）。

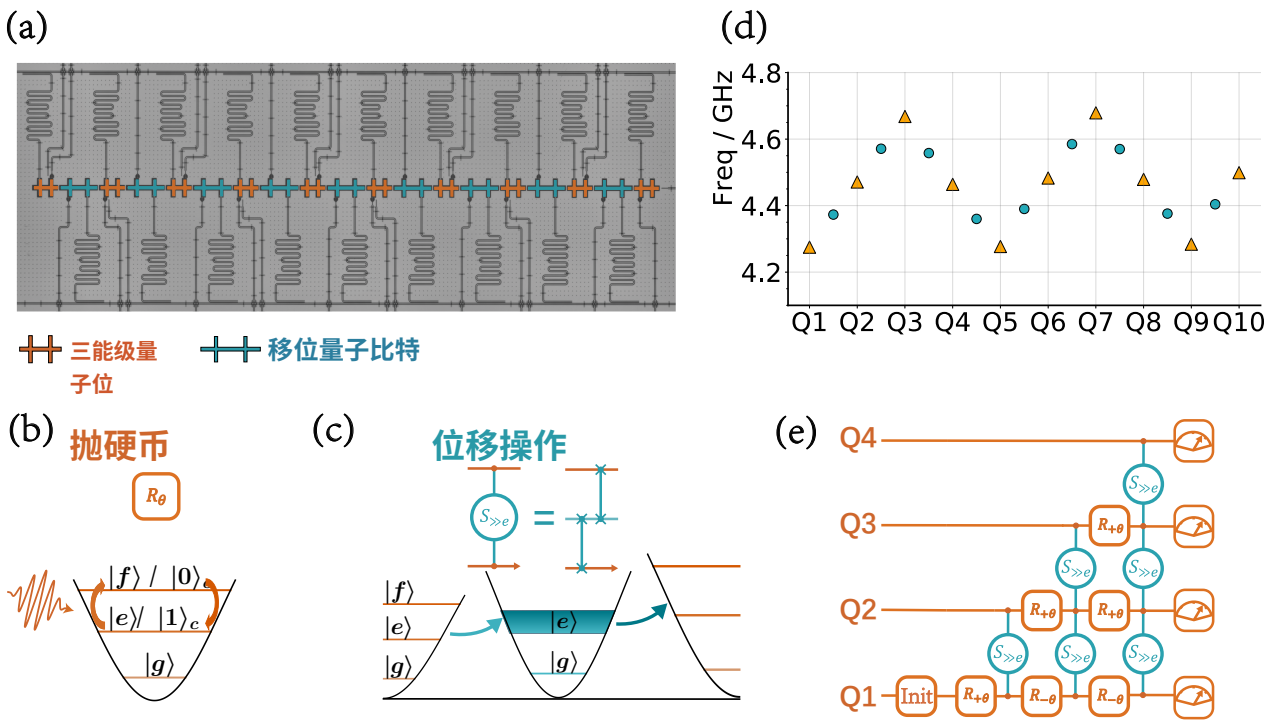

图1：**超导芯片一维链中的离散时间量子行走。a，**19个transmon链的光学显微图。除最左侧三能级量子位仅配备磁通偏置线外，每个三能级量子位均配备独立的XY控制线和磁通偏置线。每个移位量子比特（SQ）均配备一条磁通偏置线。三能级量子位和SQ均通过各自的 $\lambda/4$ 读出谐振器连接至传输线，以进行读出测量。**b，**硬币操作 R_θ。硬币翻转通过三能级量子位 $\{|e\rangle, |f\rangle\}$ 子空间内的SU(2)门执行。下标 θ表示绕赤道面内某一轴的旋转角。**c，**位移操作 $S_{\gg e}$。该操作类似于经典移位寄存器的操作，将 $|e\rangle$ 态向右移动一个位置。该操作通过两次连续的交换操作实现，而交换操作通过对SQ进行频率调谐来执行。SQ的 $|e\rangle$ 态扩展宽度表示频率调谐。**d，**transmon频率的之字形空间分布。 Q_i 标记 i号三能级量子位（橙色三角形），蓝色圆圈表示SQ。**e，**三步离散时间量子行走的有效量子逻辑电路。在行走的第 n步中，对前 n 个三能级量子位同步执行的硬币翻转构成式（3）所述的硬币操作。同样地，同步SWAP对构成式（2）所述的位移操作。

，并且同样可以推广到二维（2D）离散时间量子行走的实现，而无需改变编码方案和算符 [53]的实现（有关我们的离散时间量子行走协议的兼容性和可扩展性的讨论，请参阅补充信息 [46] ）。

结果。—由于离散时间量子行走是研究拓扑相的绝佳平台， [13, 18, 42, 54, 55], 我们生成拓扑边缘态，以检验硬件设计和操作方法的有效性。如前所述，离散时间量子行走通过在链上反复施加 U来实现。 U 中硬币算符的自由度可视为自旋自由度，而行走者的自由度可视为轨道自由度。因此，离散时间量子行走具有自旋轨道耦合，而这正是产生拓扑相的关键；连续时间量子游走则不具有这种耦合。数值研究已表明，离散时间量子行走的参数空间可分为两个彼此分离的区域，从而允许存在两种不同的拓扑相 [38, 39]。拓扑性质源于粒子-空穴对称性，而边缘态成对出现则归因于离散时间量子行走的亚晶格对称性 [38]。我们构造了非均匀离散时间量子行走，具有

$$\theta(x) = \begin{cases} \theta_- < 0 & \text{for } x < 0, \\ \theta_+ \geq 0 & \text{for } x \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

在离散时间量子行走中，具有 $x < 0$ 和 $x \geq 0$ 的区域对应于两个不同的拓扑相。在这两个

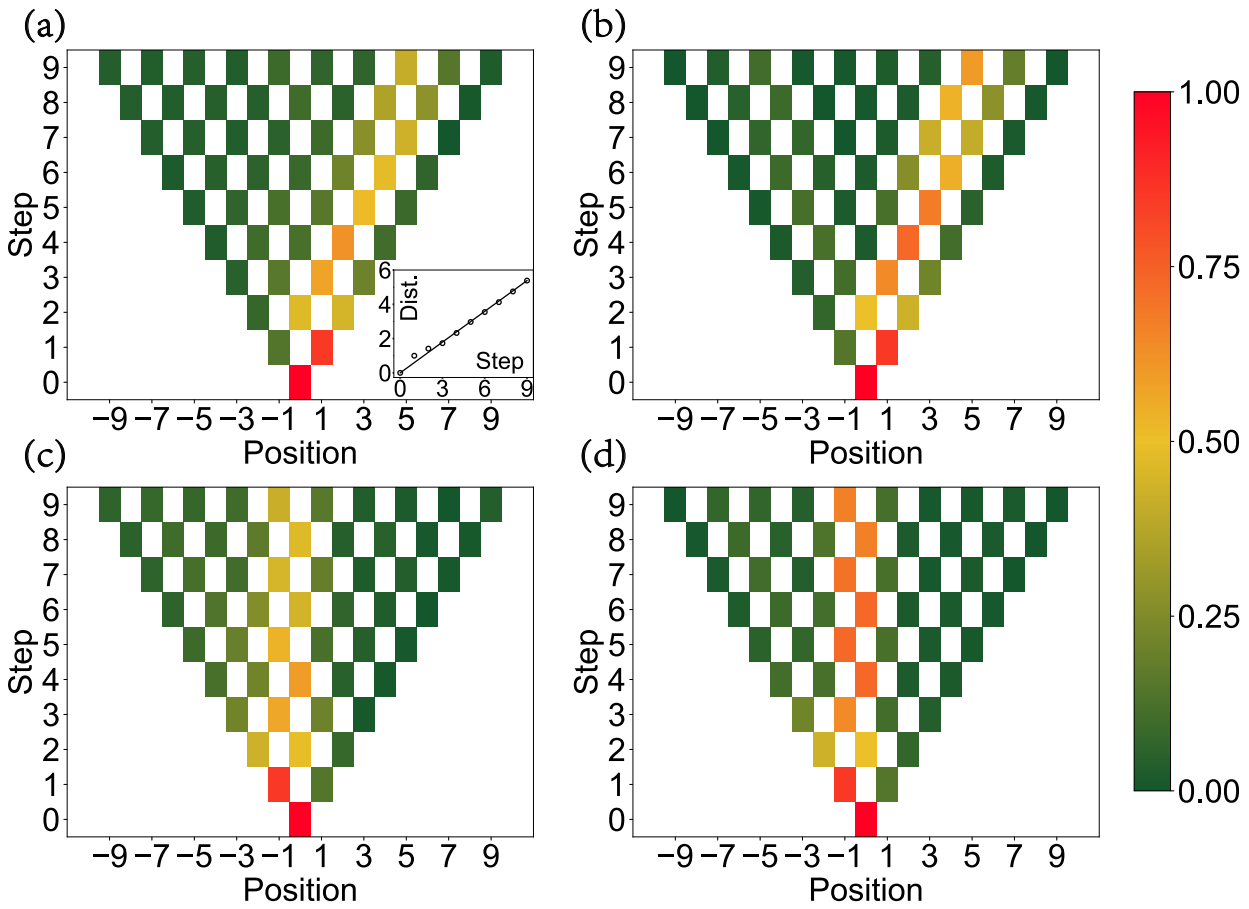

图 2：**边缘态和非边缘态的离散时间量子行走结果。a,** 使用 $\theta_{\pm} = \pm\pi/4$ 、初态为 $|\phi^0_{co}\rangle$ 时测得的离散时间量子行走激发分布。插图显示了扩散距离 $D(t) = \sqrt{\sum_x x^2 p(x,\ t)}$ 随行走步数的变化，其中 $p(x,\ t)$ 是位置 x 处的布居（等同于概率）。**b,** 不考虑门误差时， $\theta_{\pm} = \pm\pi/4$ 、初态为 $|\phi^0_{co}\rangle$ 的计算结果。**c,** 使用 $\theta_{\pm} = \pm\pi/4$ 、初态为 $|\phi^0_{ce}\rangle$ 时测得的离散时间量子行走激发分布。**d,** 不考虑门误差时，$\theta_{\pm} = \pm\pi/4$ 、初态为 $|\phi^0_{ce}\rangle$ 的计算结果。

拓扑相的界面处，存在两个边缘态：

$$|\phi_e\rangle = \frac{1}{N}\sum_x e^{i\omega x}\,|x\rangle \otimes (a_x\,|1\rangle + ib_x\,|0\rangle), \qquad (5)$$

其中， $\omega = 0$ 和 π 分别对应两个边缘态；$a_x = [(1-\sin\theta(x))/\cos\theta(x)]^x$；$b_x = [(1-\sin\theta(x))/\cos\theta(x)]^{x+1}$；归一化常数为 $N = (1/\sin\theta_+ - 1/\sin\theta_-)^{1/2}$。

所获得的离散时间量子行走结果对初始硬币态十分敏感。图 2a 展示了采用 $\theta_{\pm} = \pm\pi/4$ 以及初态：$|\phi^0_{co}\rangle = |x=0\rangle \otimes [i(\sqrt{2}-1)\,|1\rangle + |0\rangle]/\sqrt{4-2\sqrt{2}}$时测得的离散时间量子行走分布。为便于比较，紧凑单向行走数据被转换为传统双向行走数据（原始数据和转换方法请参见补充信息 [46]）。由于$|\phi^0_{co}\rangle$ 与边缘态$|\phi_e\rangle$正交，行走者在图 2a 中表现出典型的量子行走行为：离散时间量子行走的分布从初始位置向右侧呈弹道式扩散。扩散距离与行走步数成正比 t，如图 2a 插图所示，这与经典随机行走的扩散距离成正比于 $\sqrt{t}$形成鲜明对比。图 2b 展示了在相同 $\theta_{\pm}$ 数值和相同初态下的理论计算结果。显然，实验结果的整体图样与计算得到的分布图样一致。两者振幅的差异主要源于门操作的非保真度。我们通过计算相似度 [12, 14] $Sim(t) = [\sum_x \sqrt{p_{\text{theor}}(x,\ t)p_{\text{expt}}(x,\ t)}]^2$,来估算实验结果与理论计算的一致性，其中 $p_{\text{theor}}(x,\ t)$和 $p_{\text{expt}}(x,\ t)$分别表示第 t步时位置 x 处的理论和实验布居密度。对于我们的 9 步离散时间量子行走， $Sim(9) \sim 84.5\%$。对于初态 $|\phi^0_{ce}\rangle =$

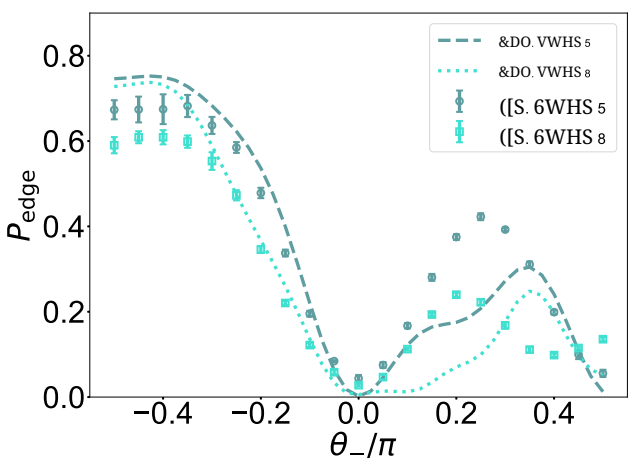

图 3：在初态位于 $|\phi^0_{ce}\rangle$、固定 $\theta_+ = \pi/4$ 并改变 θ_-的情况下，$x = 0$ 附近的布居（P_{edge}），分别对应 5 步（灰蓝色）和 8 步（青色）离散时间量子行走。符号表示实验数据（圆形表示 5 步离散时间量子行走；方形表示 8 步离散时间量子行走），曲线表示理论计算（虚线表示 5 步离散时间量子行走；点线表示 8 步离散时间量子行走）。误差棒表示七次重复实验的标准差。

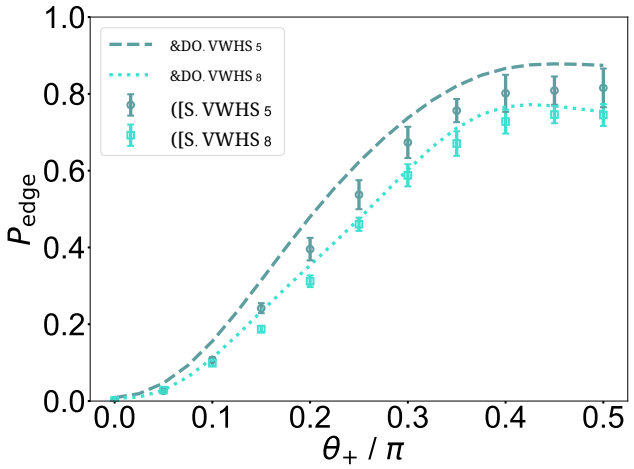

图 4：在初态位于 $|\phi^0_{ce}\rangle$、固定关系 $\theta_+ = -\theta_-$并改变 θ_+ 的情况下，$x = 0$ 附近的布居（P_{edge}），分别对应 5 步（灰蓝色）和 8 步（青色）离散时间量子行走。符号表示实验数据（空心圆表示 5 步离散时间量子行走；空心方形表示 8 步离散时间量子行走），曲线表示理论计算（虚线表示 5 步离散时间量子行走；点线表示 8 步离散时间量子行走）。数值模拟证实，$\theta_+ < 0$ 相对于 $\theta_+ > 0$呈对称性，因此未予展示。误差棒表示七次重复实验的标准差

$|x = 0\rangle \otimes [|1\rangle + \bar{i}(\sqrt{2}-1)\,|0\rangle]/\sqrt{4-\bar{2}}\sqrt{2}$，其中 $\theta_\pm = \pm\pi/4$，它近似等于两个边缘态的均匀叠加 $\sqrt{2}/2($ $|\phi_e^{\omega=0}\rangle + |\phi_e^{\omega=\pi}\rangle$)，离散时间量子行走的实验和计算分布分别如图 2c 和图 2d 所示。同样，理论计算与实验结果相符，得到 $Sim(9) \sim 87.2\%$。由于 $|\phi^0_{ce}\rangle$ 与边缘态 $|\phi_e\rangle$ 显著重叠，得到的离散时间量子行走分布集中在界面 $x = 0$ 附近，并不会随行走步数增加而扩散。值得注意的是，该分布在 $x = -1$ 和 $x = 0$之间来回反弹。这是因为在偶数步时，两个边缘态（初态 $|\phi^0_{ce}\rangle$的主要分量）获得零相对相位，并在 $x = 0$处发生相长干涉；而在奇数步时，它们获得 π 相位移，并在 $x = -1$处发生相长干涉。观测到的界面处局域现象以及在两个位置之间的往返振荡，强烈表明我们的门控离散时间量子行走中产生了拓扑边缘态。

为进一步确认离散时间量子行走中的拓扑边缘态，我们考察相同初态 $|\phi^0_{ce}\rangle$下不同的 $\theta_\pm$ 条件。我们保持 θ_+ 固定为 $\pi/4$，并将 θ_- 从负值改为正值。由于拓扑边缘态仅存在于两个不同拓扑相之间的界面处，从图3可以清楚地看出，$\theta_- < 0$ 在界面处的概率大于 $\theta_- > 0$。这一观察结果与边缘态在界面处具有更高占据概率的结论一致。为了进行定量比

较，我们通过考虑门保真度和三能级量子比特寿命导致的平均误差，对结果进行了数值计算（具体参数和误差分析见补充信息 [46] ）。与计算结果相比，实验数据在 $\theta_- > 0$ 区域的波动较大，而在 $\theta_- < 0$区域的波动相对较小。这一结果可归因于 $\theta_- < 0$区域的边缘态受到拓扑保护，使系统对实验误差更加稳健；而在 $\theta_- > 0$区域则不存在拓扑保护。

改变 $\theta_\pm$ 可以调节边缘态的局域性。因此，边缘态与初态$|\phi^0_{ce}\rangle$的重叠是可控的。我们保持 $\theta_+ = -\theta_- > 0$不变，并改变 θ_+的值。当 θ_+ 从 0 变为 $\pi/2$时，边缘态在 $\theta_+ = 0$时的局域性最弱，并连续过渡到 $\theta_+ = \pi/2$时的完全局域态。重叠概率 $P_0 = \sum_\omega \langle\phi_e(\omega)|\phi^0_{ce}\rangle$ $=[2$ $\tan\theta_+(1 - \sin\theta_+)/\cos\theta_+]^2$ 在 $x = 0$附近受到保护，可揭示边缘态的局域性。在图 4 中，观测到的 θ_+ 对 P_0 的依赖关系与理论预测一致；理论计算已纳入量子门操作误差和三能级量子比特有限寿命带来的影响。

结论。——利用超导三能级量子比特链，我们成功实现了基于量子三能级系统的离散时间量子游走

协议，并观察到了量子行走特征性的弹道式扩散。三能级量子比特编码支持依赖位置的硬币操作。借助这一能力，我们生成了受限于离散时间量子行走中两种不同拓扑相之间界面处的边缘态。所观察到的 $\theta_{\pm}$ 依赖性和边缘态的局域性均证实了理论预测。

我们的工作解决了在超导电路架构中实现可扩展离散时间量子行走的一项长期实验挑战，增强了超导处理器执行量子算法和模拟的能力。离散时间量子行走的实现可通过扩展三能级量子比特链实现规模扩展，并可轻松拓展至二维超导量子比特网络。我们的实验首次展示了通过离散时间量子行走实现粒子-空穴对称性保护的边缘态，拓展了超导平台构造拓扑保护量子态的能力。这项工作也为未来研究离散时间量子行走以及探索人工构建的高维系统中的量子效应开辟了新途径。

致谢。——本工作得到量子科学与技术创新计划（项目编号：2021ZD0301702）、国家自然科学基金委员会（项目编号：12074179和U21A20436）、中国国家重点研发计划（项目编号：2024YFA1408900）、江苏省自然科学基金（项目编号：BE2021015-1和BK20232002）、山东省自然科学基金（项目编号：ZR2023LZH002）以及南京大学-中国移动通信集团有限公司联合研究院的部分资助。

* 这些作者对本研究的贡献相同。
† 通讯作者：sqp@hznu.edu.cn。
‡ 通讯作者：yangcp@hznu.edu.cn。§ 通讯作者：shaoxiong.li@nju.edu.cn。
¶ 通讯作者：yuyang@nju.edu.cn。

[1] N. Shenvi、J. Kempe 和 K. B. Whaley，量子随机游走搜索算法，《物理评论A》**67**，052307（2003）。[2] Y.-C. Jeong、C. Di Franco、H.-T. Lim、M. S. Kim 和 Y.-H. Kim，延迟选择量子行走的实验实现，《自然-通讯》**4**，2471（2013年）。[3] Z.-Y. Shi、H. Tang、Z. Feng、Y. Wang、Z.-M. Li、J. Gao、Y.-J. Chang、T.-Y. Wang、J.-P. Dou、Z.-Y. Zhang、Z.-Q. Jiao、W.-H. Zhou 和 X.-M. Jin，在光子芯片上实现粘合树的量子快速命中，《光学》**7**，613（2020）。[4] X. Qiang、Y. Wang、S. Xue、R. Ge、L. Chen、Y. Liu、A. Huang、X. Fu、P. Xu、T. Yi、F. Xu、M. Deng、J. B. Wang、J. D. A. Meinecke、*et al.*，在硅基光子量子游走处理器上实现基于图论的量子算法，《科学进展》**7**，eabb8375（2021年）。

[5]S. Chakraborty、L. Novo、A. Ambainis 和 Y. Omar，几乎对所有图而言，量子游走的空间搜索都是最优的，《物理评论快报》**116**，100501（2016年）。[6] S. Apers、S. Chakraborty、L. Novo 和 J. Roland，连续时间量子游走的空间搜索实现二次加速，《物理评论快报》**129**，160502（2022年）。[7] S. Balasubramanian、T. Li 和 A. W. Harrow，随机层次图上的量子游走实现指数级加速，《数学物理通讯》**406**，209（2025年）。[8] G. Muraleedharan、A. Miyake 和 I. H. Deutsch，一维晶格上玻色随机游走者采样中的量子计算优势，《新物理学杂志》**21**，055003（2019年）。[9] A. M. Childs，通过量子游走实现通用计算，《物理评论快报》**102**，180501（2009年）。[10] M. S. Underwood 和 D. L. Feder，通过不连续量子游走实现通用量子计算，《物理评论A》**82**，042304（2010年）。[11] A. M. Childs、D. Gosset 和 Z. Webb，通过多粒子量子游走实现通用计算，《科学》**339**，791（2013年），https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.1229957。[12] A. Crespi、R. Osellame、R. Ramponi、V. Giovannetti、R. Fazio、L. Sansoni、F. De Nicola、F. Sciarrino 和 P. Mataloni，集成量子游走中纠缠光子的安德森局域化，《自然·光子学》**7**，322（2013年）。[13] X. Zhan、L. Xiao、Z. Bian、K. Wang、X. Qiu、B. C. Sanders、W. Yi 和 P. Xue，探测非幺正离散时间量子游走中的拓扑不变量，《物理评论快报》**119**，130501（2017年）。[14] A. Peruzzo、M. Lobino、J. C. Matthews、N. Matsuda、A. Politi、K. Poulios、X. Q. Zhou、Y. Lahini、N. Ismail、K. Wrhoff、Y. Bromberg、Y. Silberberg、M. G. Thompson 和 O. B. JL，关联光子的量子游走，《科学》**329**，1500（2010年）。[15] Z. Yan、Y.-R. Zhang、M. Gong、Y. Wu、Y. Zheng、S. Li、C. Wang、F. Liang、J. Lin、Y. Xu、C. Guo、L. Sun、C.-Z. Peng、K. Xia、H. Deng、*et al.*，使用12量子比特超导处理器实现强关联量子游走，《科学》**364**，753（2019年），https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.aaw1611。[16] M. Gong、S. Wang、C. Zha、M.-C. Chen、H.-L. Huang、Y. Wu、Q. Zhu、Y. Zhao、S. Li、S. Guo、H. Qian、Y. Ye、F. Chen、C. Ying、J. Yu、*et al.*，可编程二维62量子比特超导处理器上的量子游走，《科学》**372**，948（2021年），https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.abg7812。[17] B. L. Douglas 和 J. B. Wang，量子游走的高效量子电路实现，《物理评论A》**79**，052335（2009年）。[18] E. Flurin、V. V. Ramasesh、S. Hacohen-Gourgy、L. S. Martin、N. Y. Yao 和 I. Siddiqi，利用超导电路中的量子游走观测拓扑不变量，《物理评论 X》**7**，031023（2017年）。[19] V. V. Ramasesh、E. Flurin、M. Rudner、I. Siddiqi 和 N. Y. Yao，布洛赫振荡量子游走对拓扑不变量的直接探测，《物理评论快报》**118**，130501（2017年）。[20] S. Cao、M. Bakr、G. Campanaro、S. D. Fasciati、J. Wills、D. Lall、B. Shteynas、V. Chidambaram、I. Rungger 和 P. Leek，利用四能级跨蒙量子多能级系统模拟两个量子比特，以用于变分量子算法，《量子科学与技术》

9，035003（2024年）。[21] E. Kiktenko、A. Fedorov、A. Strakhov 和 V. Man’ko，使用超导多能级量子电路实现单个量子位版本的 Deutsch 算法，《物理快报A》379，1409（2015年）。[22] E. O. Kiktenko、A. K. Fedorov、O. V. Man’ko 和 V. I. Man’ko，将多能级超导电路作为双量子比特系统：操作、态制备与熵不等式，《物理评论A》91，042312（2015年）。[23] T. C. Ralph、K. J. Resch 和 A. Gilchrist，利用多能级量子位高效实现 Toffoli 门，《物理评论A》75，022313（2007年）。[24] A. Fedorov、L. Steffen、M. Baur、M. P. da Silva 和 A. Wallraff，利用超导电路实现 Toffoli 门，《自然》481，170（2012年）。[25] E. O. Kiktenko、A. S. Nikolaeva、P. Xu、G. V. Shlyapnikov 和 A. K. Fedorov，利用图上的多能级量子位实现可扩展量子计算，《物理评论A》101，022304（2020年）。[26] M. S. Blok、V. V. Ramasesh、T. Schuster、K. O’Brien、J. M. Kreikebaum、D. Dahlen、A. Morvan、B. Yoshida、N. Y. Yao 和 I. Siddiqi，超导三能级量子位处理器上的量子信息扰乱，《物理评论 X》11，021010（2021年）。[27] E. O. Kiktenko、A. S. Nikolaeva 和 A. K. Fedorov，专题综述：用于分解多量子比特门和实现量子算法的多能级量子位，《现代物理评论》97，021003（2025年）。[28] S. S. Ivanov、H. S. Tonchev 和 N. V. Vitanov，利用多能级量子位高效实现量子搜索，《物理评论A》85，062321（2012年）。[29] A. Bocharov、M. Roetteler 和 K. M. Svore，利用三能级量子比特进行因数分解：在三进制和亚辛量子架构上实现 Shor 算法，《物理评论A》96，012306（2017年）。[30] P. Liu、R. Wang、J.-N. Zhang、Y. Zhang、X. Cai、H. Xu、Z. Li、J. Han、X. Li、G. Xue、W. Liu、L. You、Y. Jin 和 H. Yu，在超导 transmon 多能级量子位中执行 SU(d) 操作及初步算法，用于 $d = 3$ 和 $d = 4$，《物理评论 X》13，021028（2023年）。[31] E. T. Campbell，在 d能级系统中增强容错量子计算，《物理评论快报》113，230501（2014年）。[32] B. L. Brock、S. Singh、A. Eickbusch、V. V. Sivak、A. Z. Ding、L. Frunzio、S. M. Girvin 和 M. H. Devoret，实现超越盈亏平衡点的多能级量子位量子纠错，《自然》641，612（2025年）。[33] Y. Chi、J. Huang、Z. Zhang、J. Mao、Z. Zhou、X. Chen、C. Zhai、J. Bao、T. Dai、H. Yuan、M. Zhang、D. Dai、B. Tang、Y. Yang、Z. Li、 $et\ al.$，可编程多能级量子位量子处理器，《自然-通讯》13，1166（2022年）。[34] J. Bao、Z. Fu、T. Pramanik、J. Mao、Y. Chi、Y. Cao、C. Zhai、Y. Mao、T. Dai、X. Chen、X. Jia、L. Zhao、Y. Zheng、B. Tang、Z. Li、$et\ al.$，超大规模集成量子图光子学，《自然·光子学》17，573（2023年）。[35] M. Ringbauer、M. Meth、L. Postler、R. Stricker、R. Blatt、P. Schindler 和 T. Monz，基于囚禁离子的通用多能级量子位处理器，《自然·物理》18，1053（2022年）。[36] D. Gonz´alez-Cuadra、T. V. Zache、J. Carrasco、B. Kraus 和 P. Zoller，利用里德堡平台上的多能级量子位高效实现非阿贝尔规范理论的量子模拟，《物理评论快报》129，160501（2022年）。[37] N. Goss、S. Ferracin、A. Hashim、A. Carignan-Dugas、J. M. Kreikebaum、R. K. Naik、D. I. Santiago 和 I. Siddiqi，扩展超导三能级量子位处理器的计算能力，《npj量子信息》**10**，101（2024年）。[38] J. K. Asb´oth，一维量子行走中的对称性、拓扑相与束缚态，《物理评论B》**86**，195414（2012年）。[39] A. Grudka、M. Karczewski、P. Kurzy´nski、J. W´ojcik 和 A. W´ojcik，量子行走中的拓扑不变量，《物理评论A》**107**，032201（2023年）。[40] T. Nitsche、T. Geib、C. Stahl、L. Lorz、C. Cedzich、S. Barkhofen、R. F. Werner 和 C. Silberhorn，分步量子行走中拓扑保护边缘态的本征值测量，《新物理学杂志》**21**，043031（2019年）。[41] L. Xiao、X. Zhan、Z. H. Bian、K. K. Wang、X. Zhang、X. P. Wang、J. Li、K. Mochizuki、D. Kim、N. Kawakami、W. Yi、H. Obuse、B. C. Sanders 和 P. Xue，宇称时间对称量子行走中的拓扑边缘态观测，《自然·物理》**13**，1117（2017年）。[42] C. Chen、X. Ding、J. Qin、Y. He、Y.-H. Luo、M.-C. Chen、C. Liu、X.-L. Wang、W.-J. Zhang、H. Li、L.-X. You、Z. Wang、D.-W. Wang、B. C. Sanders、C.-Y. Lu、$et\ al.$，光子二维量子行走中拓扑保护边缘态的观测，《物理评论快报》**121**，100502（2018年）。[43] T. Kitagawa、M. S. Rudner、E. Berg 和 E. Demler，利用量子行走探索拓扑相，《物理评论A》**82**，033429（2010年）。[44] M. Montero，单向量子行走：演化与退出时间，《物理评论A》**88**，012333（2013年）。[45] L. Innocenti、H. Majury、T. Giordani、N. Spagnolo、F. Sciarrino、M. Paternostro 和 A. Ferraro，利用一维离散时间量子行走进行量子态工程，《物理评论A》**96**，062326（2017年）。[46]请参阅补充材料：https://doi.org/[THIS-DOI] ，其中包含附加数据、实验与模拟方法以及扩展讨论的补充信息，并包括文献56-60。[47] J. Koch、T. M. Yu、J. Gambetta、A. A. Houck、D. I. Schuster、J. Majer、A. Blais、M. H. Devoret、S. M. Girvin 和 R. J. Schoelkopf，由库珀对盒推导出的电荷不敏感量子比特设计，《物理评论A》**76**，042319（2007年）。[48] F. Yan、P. Krantz、Y. Sung、M. Kjaergaard、D. L. Camp{v?}bell、T. P. Orlando、S. Gustavsson 和 W. D. Oliver，实现高保真度双量子比特门的可调耦合方案，《物理评论应用》**10**，054062（2018年）。[49] J. Stehlik、D. M. Zajac、D. L. Underwood、T. Phung、J. Blair、S. Carnevale、D. Klaus、G. A. Keefe、A. Carniol、M. Kumph、M. Steffen 和 O. E. Dial，固定频率跨音子超导量子比特的可调耦合架构，《物理评论快报》**127**，080505（2021年）。[50] E. A. Sete、A. Q. Chen、R. Manenti、S. Kulshreshtha 和 S. Poletto，用于可扩展量子计算架构的浮置可调耦合器，《物理评论应用》**15**，064063（2021年）。[51] F. Marxer、A. Veps¨al¨ainen、S. W. Jolin、J. Tuorila、A. Landra、C. Ockeloen-Korppi、W. Liu、O. Ahonen、A. Auer、L. Belzane、V. Bergholm、C. F. Chan、K. W. Chan、T. Hiltunen、J. Hotari、 $et\ al.$，CZ门保真度高于99.8%的长距离跨音子耦合器，PRX Quantum **4**，010314（2023年）。[52] J. Ghosh，利用超导

量子比特在一维晶格上的量子行走模拟安德森局域化，《物理评论A》**89**，022309（2014年）。[53] C. Di Franco、M. Mc Gettrick 和 T. Busch，利用单量子比特硬币模拟二维Grover行走的概率分布，《物理评论快报》**106**，080502（2011年）。[54] K. Wang、T. Li、L. Xiao、Y. Han、W. Yi 和 P. Xue，《物理评论快报》**127**，270602（2021年），在量子动力学中探测非布洛赫拓扑不变量。[55] D. Xie、T.-S. Deng、T. Xiao、W. Gou、T. Chen、W. Yi 和 B. Yan，利用玻色–爱因斯坦凝聚体在动量空间中的拓扑量子行走，《物理评论快报》**124**，050502（2020年）。