arXiv:2601.01770v1 [math.FA] 5 Jan 2026

$\mathcal{H}$调和 Bergman 投影的弱型（1,1）估计

Kenan Zhang

Abstract. 本文回顾了单位球上的 Calderon-Zygmund 理论，并推导了 $\mathcal{H}$-调和 Bergman 空间上的投影具有弱型（1,1）有界性。

1. Introduction

对于 $n \geqslant 2$，令 $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ 为单位球，令 $\partial\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$为单位球面，其中 $|x| = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$ 是 $\mathbb{R}^n$上的标准欧几里得范数。双曲球是赋予双曲度量的单位球 $\mathbb{B}_n$

$$ds^2 = \frac{4}{(1-|x|^2)^2}\sum_{i=1}^n dx_i^2.$$

对于 $a \in \mathbb{B}_n$，在 $\mathbb{B}_n$ 中交换 a 与 0 的 M¨obius 变换 φ_a 是 $\mathbb{B}_n$上的如下自映射：

$$\varphi_a(x) = \frac{a|x-a|^2 + (1-|a|^2)(a-x)}{|x-a|^2 + (1-|a|^2)(1-|x|^2)}.$$

关于双曲度量的拉普拉斯算子 Δ_h 是满足以下条件的线性算子：

$$(\Delta_h f)(a) = \Delta(f \circ \varphi_a)(0) \tag{1.1}$$

对所有 $f \in C^2(\mathbb{B}_n)$ 以及每个 $a \in \mathbb{B}_n$。该算子也称为拉普拉斯–贝尔特拉米算子或不变拉普拉斯算子。经过计算，容易证明

$$(\Delta_h f)(a) = (1-|a|^2)^2\Delta f(a) + 2(n-2)(1-|a|^2)\langle a, \nabla f(a)\rangle,$$

其中

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

den分别表示标准欧几里得拉普拉斯算子和梯度算子 .

我们称复值函数 $f \in C^2(\mathbb{B}_n)$ 为 $\mathcal{H}$-调和函数，若 $(\Delta_h f)(x) = 0$ 对所有 $x \in \mathbb{B}_n$均成立。定义在 $\mathbb{B}_n$ 上的 $\mathcal{H}$-调和函数构成的线性空间记为 $\mathcal{H}(\mathbb{B}_n)$。关于 $\mathcal{H}$-调和函数的更多背景知识和基本性质，参见 [29] 和 [27]。

令 ν 为 $\mathbb{B}_n$ 上的勒贝格测度，并将其归一化，使得 $\nu(\mathbb{B}_n) = 1$. 对于 $1 \leqslant p < \infty$， $\mathcal{H}$-调和 Bergman 空间 $\mathcal{B}^p$ 是由下式定义的巴拿赫空间：

$$\mathcal{B}^p = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}_n) : \int_{\mathbb{B}_n} |f(x)|^p d\nu(x) < \infty \right\}.$$

2020 数学主题分类。42B20,31C05,46E22。关键词和短语。投影，$\mathcal{H}$-调和函数。

众所周知，对于每个 $f \mapsto f(x)$，点求值泛函 $x \in \mathbb{B}_n$ 在 $\mathcal{B}^2$ [29]上是有界的。因此，$\mathcal{B}^2$ 是一个再生核希尔伯特空间。我们将再生核记为 $\mathcal{R}(x, \cdot) \in \mathcal{B}^2$。于是，根据再生性质，有

$$f(x) = \int_{\mathbb{B}_n} f(y)\overline{\mathcal{R}(x,y)}d\nu(y), \quad \text{for all } f \in \mathcal{B}^2. \tag{1.2}$$

由于再生核 $\mathcal{R}(\cdot, \cdot)$ 是实值函数，[29], 因此（1.2）中的共轭可以去掉。-Bergman 投影 P: $L^2(\mathbb{B}_n, d\nu) \to \mathcal{B}^2$ 由下式给出

$$(Pf)(x) = \int_{\mathbb{B}_n} f(y)\mathcal{R}(x,y)d\nu(y).$$

容易验证，对于每个 $x \in \mathbb{B}_n$ 以及任意 $f \in L^1(\mathbb{B}_n, d\nu)$，$\mathcal{H}$-Bergman 投影 P 作为可积算子是良定义的。

事实上，在 $\mathbb{C}^n$的欧几里得单位球上，不变拉普拉斯算子也可以定义为（1.1）。在复单位球上被不变拉普拉斯算子消去的 $\mathcal{M}$-调和函数空间已得到广泛研究 [1, 12, 21, 24]。然而，实双曲球上的 $\mathcal{H}$-调和函数空间的函数理论却鲜为人知。-调和函数的概念最早由 Jaming 于 1999 [18]引入。在同一篇论文中，他研究了 Hardy空间 $H^p(\mathbb{B}_n)$ $0 < p < \infty$，其元素是属于球面的 Hardy空间 $H^p(\partial\mathbb{B}_n)$ 的广义函数的双曲调和延拓，并获得了这些空间的原子分解。2003 年，Liu 和 Shi 研究了 $\mathcal{H}$-调和函数[20]的不变平均值性质。此外，为全纯函数定义的类似空间也可以为$\mathcal{H}$-调和函数定义，例如 Hardy-Sobolev空间、Lipschitz空间 [13], 以及加权Dirichlet空间 [25]。此外，Stoll 还获得了 Hardy空间的再生核以及不变拉普拉斯算子的径向特征函数 Δ_h [26]。

本文聚焦于 $\mathcal{H}$-调和函数的 Bergman空间。再生核函数空间上的 Bergman 投影在函数空间及其算子的研究中发挥着至关重要的作用。其中，关于P 的一个关键问题是其 Calder´on-Zygmund 理论的研究，该理论包括对所有 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ 的 L^p-有界性。一般而言，相关的正交投影，例如 $\mathbb{B}_n$ 上全纯函数空间和调和函数空间的经典伯格曼投影，均为弱型 (1，1) [9]¨，因此通过插值，在 $L^p(\mathbb{B}_n, d\nu)$ 上对 $1 < p < +\infty$ 有界。事实上，Ureyen [29]证明了，当且仅当 $1 < p < \infty$ 且 $P: L^\infty \to \mathcal{B}$ 有界时，P 在 $L^p(\mathbb{B}_n, d\nu)$ 上有界；其中 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{B}_n$ 上的 $\mathcal{H}$-调和 Bloch 空间，但 $p = 1$ 的情形仍未解决。本文证明了弱型 (1，1) 估计，从而弥补了这一空缺。

定理 1.1. *$\mathcal{H}$-调和 Bergman 投影算子 P 为弱型 (1,1)，即存在一个常数 $C > 0$，与 f 无关，使得对任意 $t > 0$*

$$(Pf)_*(t) \leqslant \frac{C}{t}||f||_{L^1(\mathbb{B}_n, d\nu)}, \qquad \textit{holds for all } f \in L^1(\mathbb{B}_n, d\nu), \tag{1.3}$$

其中 $f_*(t) = \nu(\{x \in \mathbb{B}_n : |f(x)| > t\})$ 是 f的分布函数。

对于区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ （或 $\mathbb{C}^n$），可以看出调和（或全纯）Bergman空间 $\mathcal{B}^2(\Omega)$（或 $\mathcal{B}^2_a(\Omega)$）是再生核希尔伯特空间，其核为 $K_\Omega(x, y)$（或$k_\Omega(z, w)$）。将调和 Bergman 投影记为 P_Ω: $L^2(\Omega) \to \mathcal{B}^2(\Omega)$，并且

$$P_\Omega f(x) = \int_\Omega f(y)K_\Omega(x,y)dy$$

对于 $f \in L^2(\Omega)$（或将全纯 Bergman 投影记为 $P_\Omega : L^2(\Omega) \to \mathcal{B}_a^2(\Omega)$，并且

$$P_\Omega f(z) = \int_\Omega f(z) k_\Omega(z, w) dw$$

对于 $f \in L^2(\Omega)$。）

由于 P_Ω 是 $\mathcal{B}^2(\Omega)$（或 $\mathcal{B}_a^2(\Omega)$）上的正交投影，因此它是 $L^2(\Omega)$上的有界算子。与单位球的情形不同，在单位球上，Bergman 投影对所有 $1 < p < \infty$都是 L^p-有界的；而要确定一般区域 Ω 中使 P_Ω 为 L^p- 有界的 $1 < p_\Omega \leqslant q_\Omega < \infty$ 范围，则是一个非平凡问题。通过插值和对偶性可得，$1/p_\Omega + 1/q_\Omega = 1$。因此，对于给定区域 Ω，Bergman 投影的 L^p-有界性问题归结为确定指数 $p_\Omega \in (1, 2]$ 使得 P_Ω 对所有 $p \in (p_\Omega, p_\Omega')$ 都能连续延拓到 $L^p(\Omega)$），其中 p_Ω' 是 p_Ω的 H¨older 共轭。

对于复平面中的一类区域 $\mathbb{C}$，Solovyov 通过区域边界的几何性质刻画了 Bergman 投影在 $L^p(\Omega)$上的有界性 [22, 23]，而这些性质对于 $p \in (\frac{4}{3}, 4)$会自动满足。对于复平面中的单连通区域 Ω $\mathbb{C}$，Hedenmalm 通过共形映射对某些$p_0 \in [\frac{4}{3}, 2)$ [15]给出了肯定的回答。在这里p_0 与 Ω 无关。Edholm 和 McNeal 将 Hedenmalm 的结果推广到广义 Hartogs 三角形中的某些 p_Ω，这些广义 Hartogs 三角形是 $\mathbb{C}^2$[10, 11]中的伪凸但非光滑区域。具体而言，Chakrabarti 和 Zeytuncu 证明了 $p_\Omega = \frac{4}{3}$ 当 Ω 为经典 Hartogs 三角形时 [8]。对于更高维情形，Bergman 投影的这种连续延拓在 $\mathbb{C}^n$ [2]中的单项式多面体上同样成立。

回想一下，$\mathbb{D}$ 上的经典全纯 Bergman 投影是弱型 (1,1)。我们可以探讨 Bergman 投影 P_Ω 在 $L^{p_\Omega}(\Omega)$ 和 $L^{p_\Omega'}(\Omega)$ 上的表现，其中 p_Ω 是 P_Ω有界范围的端点。Huo-Wick [16]以及 Christopherson- Koenig [5, 6, 7] 的研究表明，对于经典和广义 Hartogs 三角形，P_Ω 在有界性的下端点处不是弱型 (p, p)，而在上端点处则是弱型 (p, p)。全纯 Bergman 投影在单项式多面体下端点处的映射性质甚至更差：无法利用其积分表示 [3, 命题 8.1]将 Bergman 投影延拓到 $L^p(\Omega)$。换句话说，存在一个函数 $f \in L^p($ Ω)，使得该积分不收敛。

当 Ω 是 $\mathbb{R}^3$中的一个穿孔光滑域时，也可以观察到调和 Bergman 投影的类似现象。在这种情况下，Koenig 和 Wang 证明，P_Ω 在 $L^p(\Omega)$上有界，当且仅当$\frac{3}{2} < p < 3$ [19]。对于端点，P_Ω 是弱型 (3，3)，但不是弱型 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$。当 $n \neq 3$时，这一限制便不复存在；也就是说，对于 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^n$中的这类穿孔域，调和 Bergman 投影 P_Ω $n \geqslant 4$总是在 $L^p(\Omega)$上对 $1 < p < \infty$有界。此外，对于 $n = 2$，P_Ω 不是弱型（1，1）；而对于 $n \geqslant 4$，P_Ω 是弱型（1，1）。

2. A dyadic decomposition of the unit ball $\mathbb{B}_n$

经典的 Calder´on-Zygmund 分解在 $\mathbb{R}^n$ 上的构造依赖于 $\mathbb{R}^n$中的二进制系统，这是证明奇异积分弱型（1,1）有界性的有用工具。类似地，为了估计 P，我们需要单位球 $\mathbb{B}_n$的一个二进制系统。一族集合

$$\mathscr{D} = \{Q_{k,i} \subset \mathbb{B}_n : 1 \leqslant k < \infty, 1 \leqslant i \leqslant M(k)\}$$

称为 $\mathbb{B}_n$ 上的二进制系统，如果

(i) 对于每个整数 $k \geqslant 1$，$\{Q_{k,i}\}_{i=1}^{M(k)}$ 是 $\mathbb{B}_n$ 的不交覆盖，即，

- $\mathbb{B}_n = \bigcup_{i=1}^{M(k)} Q_{k,i}$ and
- for all $1 \leqslant i \neq j \leqslant M(k), Q_{k,i} \cap Q_{k,j} = \emptyset$.

(ii) 如果 $1 \leqslant k \leqslant l$，则或者 $Q_{l,\ j} \subset Q_{k,\ i}$，或者 $Q_{k,\ i} \cap Q_{l,\ j} = \emptyset$。

令 $\rho(x, y) = |x - y|$ 为欧几里得度量。对于 $x \in \mathbb{B}_n$，$r > 0$，记

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{B}_n : |x - y| < r\}.$$

如果存在一个点集，我们称二进制系统 $\mathscr{D}$ 与正数常数组 $(\eta, \kappa_0, \kappa_1)$ 相关

$$\mathcal{P} = \{x_{k,i} \in \mathbb{B}_n : 1 \leqslant k < \infty, 1 \leqslant i \leqslant M(k)\}$$

使得

$$B(x_{k,i}, \kappa_0 \eta^k) \subset Q_{k,i} \subset B(x_{k,i}, \kappa_1 \eta^k)$$

对每个 $k \geqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant M(k)$ 都成立。在此，$x_{k,i}$ 称为立方体 $Q_{k,i}$ 的立方体中心。对每个 k 和 i，将 $B(x_{k,i}, \kappa_1 \eta^k)$ 记作 $B(Q_{k,i})$。根据 Hyt¨onen 和 Kairema 的结果（[17, 定理 4.1]），我们得到度量空间 $(\mathbb{B}_n, \rho)$ 上的如下结果：

定理 2.1。 在$(\mathbb{B}_n, \rho)$上存在一个与三元组 $(1/96, 1/12, 4)$ 相关的二进制系统 $\mathscr{D}$。

注 2.1。 我们注意到，对于每个$Q_{k,i}$，存在一个集合族 $\{Q_{k+1,j}\}$，使得

$$Q_{k,i} = \bigcup_j Q_{k+1,j},$$

且每个这样的立方体 $Q_{k+1,\ j}$ 都称为 $Q_{k,\ i}$. 的子立方体。此外，存在一个常数$C_1 > 0$ 满足

$$\nu(Q_{k,i}) \leqslant C_1 \nu(Q_{k+1,j})$$

对于每个立方体 $Q_{k,\ i} \in \mathscr{D}$ 及其子立方体 $Q_{k+1,\ j}$。

现在我们介绍与二进制系统 $\mathscr{D}$相关的 $\mathbb{B}_n$ 上的 Calder´on-Zygmund 分解。

引理 2.2。 对于 $f \in L^1(\mathbb{B}_n, d\nu)$ 和 $t > 0$，存在 $\mathbb{B}_n$ 的一个分解，使得

(i) $\mathbb{B}_n = F \cup \Omega$，其中 $F \cap \Omega = \emptyset$; ***(ii)*** $|f(x)| \leqslant t$ 在 F 几乎处处成立；***(iii)*** Ω 可以表示为定理 $\mathscr{D}$*2.1*中的二进制系统 G 中的两两不交立方体之并，其中存在这样一族立方体

$$\Omega = \bigcup_{Q \in G} Q.$$

并且对于每个 $Q \in G$，有

$$t < \frac{1}{\nu(Q)} \int_Q |f(x)| d\nu(x) < C_1 t.$$

这里， C_1 是备注2.1中的常数，且与 f 和 t无关。

证明见 [28, §1, 3。2] 或 [14,§5。3]。

3. The proof of Theorem 1.1

对于一个 固定 $f \in L^1(\mathbb{B}_n,\ d\nu)$ 后，不等式（1.3）对所有 $t \leqslant ||f||_{L^1(\mathbb{B}_n,\ d\nu)}$ sinc 都成立 e

$$(Pf)_*(t) = \nu(\{x \in \mathbb{B}_n : |(Pf)(x)| > t\}) \leqslant 1 \leqslant \frac{||f||_{L^1(\mathbb{B}_n,d\nu)}}{t}.$$

因此，只需考虑 $t \geqslant ||f||_{L^1(\mathbb{B}_n,d\nu)}$.

固定 $f \in L^1(\mathbb{B}_n, d\nu)$，我们根据引理 f 将其分解为一个“好”函数 g 和一个“坏”函数 b 。令 2.2。

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in F, \\ \dfrac{1}{\nu(Q_j)} \displaystyle\int_{Q_j} f(x)d\nu(x) & x \in Q_j \subset \Omega. \end{cases}$$

于是，根据引理 g，2.2有界。定义 $b(x) = f(x) - g(x)$。于是

$$\{x \in \mathbb{B}_n : |Pf(x)| > t\} \subset \{x \in \mathbb{B}_n : |Pg(x)| > \frac{t}{2}\} \cup \{x \in \mathbb{B}_n : |Pb(x)| > \frac{t}{2}\}.$$

只需证明

$$(Pg)_*(t) \leqslant \frac{C}{t}||f||_{L^1(\mathbb{B}_n,d\nu)} \quad \text{and} \quad (Pb)_*(t) \leqslant \frac{C}{t}||f||_{L^1(\mathbb{B}_n,d\nu)}.$$

Pg的估计：

根据引理2.2，我们有

$$\begin{aligned} ||g||^2_{L^2(\mathbb{B}_n,d\nu)} &= \int_F |g(x)|^2 d\nu(x) + \int_\Omega |g(x)|^2 d\nu(x) \\ &\leqslant t\int_F |f(x)|d\nu + \sum_{Q\in G}\int_\Omega \left|\frac{1}{\nu(Q)}\int_Q f(x)d\nu(x)\right|^2 \chi_Q(x)d\nu(x) \\ &\leqslant t||f||_{L^1(\mathbb{B}_n,d\nu)} + C_1 t\sum_{Q\in G}\int_Q |f(x)|\, d\nu(x) \\ &\leqslant t||f||_{L^1(\mathbb{B}_n,d\nu)} + C_1 t\int_\Omega |f(x)|d\nu(x) \\ &\leqslant (C_1+1)t||f||_{L^1(\mathbb{B}_n,d\nu)} \end{aligned}$$

由于 P 在 $L^2(\mathbb{B}_n,\ d\nu)$ 上有界，P 是弱型 (2,2) 的。因此，我们有

$$(Pg)_*(t) \leqslant \frac{1}{t^2}\int_{\mathbb{B}_n} |g(x)|^2 d\nu(x) \leqslant \frac{(C_1+1)}{t}||f||_{L^1(\mathbb{B}_n,d\nu)}.$$

Pb的估计：

为了估计函数Pb的分布，需要用到 [29] 中的以下定理。

定理 3.1。存在一个常数 $C_2 > 0$，它仅依赖于 n，使得对所有$x,\ y \in \mathbb{B}_n$,

(i) $|\mathcal{R}(x,y)| \leqslant \frac{C_2}{[x,y]^n}$,

(ii) $|\nabla_x \mathcal{R}(x,y)| \leqslant \frac{C_2}{[x,y]^{n+1}}$.

这里，$[x,y]^2 = |x-y|^2 + (1-|y|^2)(1-|x|^2)$ 以及 ∇_x 表示关于变量 x的梯度算子。

$_\infty$我们将 G 中的立方体记为 $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$。然后 $\Omega = \bigcup Q_j$。对于 $Q_j \in G$，令 $b_j(x) = _{j=1}^\infty b(x)\chi_{Q_j}(x)$。则 $b(x) = \sum b_j(x)$以及$_{j=1}$

$$\int_{Q_j} b(x)d\nu(x) = 0.$$

对每个 j，令 y_j 为立方体 Q_j的立方体中心。于是有

$$\begin{aligned}|(Pb_j)(x)| &= \left|\int_{Q_j} \mathcal{R}(x,y)b(y)d\nu(y)\right| \\ &= \left|\int_{Q_j} (\mathcal{R}(x,y) - \mathcal{R}(x,y_j))b(y)d\nu(y)\right| \\ &\leqslant \int_{Q_j} |\mathcal{R}(x,y) - \mathcal{R}(x,y_j)||b(y)|d\nu(y)\end{aligned}$$

回顾 $B(Q_j)$ 这一概念，它是在第2节开头的讨论中引入的。设$B_j = 2B(Q_j)$ 和 $\Omega' = \bigcup B_j$。根据 $B(Q_j)$ 的定义和引理 2.2，存在一个$_j$常数 C_3，与 f 和 t 无关，使得

$$\nu(\Omega') \leqslant \sum_{j=1}^\infty \nu(B_j) \leqslant C_3 \sum_{j=1}^\infty \nu(Q_j) \leqslant \frac{C_3}{t}\sum_{j=1}^\infty \int_{Q_j} |f(x)|d\nu(x) \leqslant \frac{C_3}{t}||f||_{L^1(\mathbb{B}_n,d\nu)}.$$

于是有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_n\backslash\Omega'} |(Pb)(x)|d\nu(x) &\leqslant \sum_{j=1}^\infty \int_{\mathbb{B}_n\backslash B_j} |(Pb_j)(x)|d\nu(x) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^\infty \int_{Q_j} |b(y)| \int_{\mathbb{B}_n\backslash B_j} |\mathcal{R}(x,y) - \mathcal{R}(x,y_j)|d\nu(x)d\nu(y)\end{aligned} \tag{3.4}$$

断言 3.1。 存在一个常数 C_4，仅依赖于 n，使得

$$\int_{\mathbb{B}_n\backslash B_j} |\mathcal{R}(x,y) - \mathcal{R}(x,y_j)|d\nu(x) \leqslant C_4$$

对每个 $j \in \mathbb{N}$。

证明。 由中值定理和定理3.1，存在一点 $\bar{y_j}$，位于连接 y_j 和 y 的线段上，使得

$$|\mathcal{R}(x,y) - \mathcal{R}(x,y_j)| = |\nabla_y \mathcal{R}(x,\bar{y_j})||y - y_j| \leqslant \frac{C_2}{[x,\bar{y_j}]^{n+1}}|y - y_j|.$$

Then

$$\int_{\mathbb{B}_n\backslash B_j} |\mathcal{R}(x,y) - \mathcal{R}(x,y_j)|d\nu(x) \leqslant \int_{\mathbb{B}_n\backslash B_j} \frac{C_2}{[x,\bar{y_j}]^{n+1}}|y - y_j|d\nu(x).$$

注意到 $x \in \mathbb{B}_n\backslash B_j$ 和 $\bar{y_j} \in Q_j$，我们有

$$|x - y_j| \geqslant 2|y_j - \bar{y_j}|.$$

由于

$$[x,\bar{y_j}]^2=|x-\bar{y_j}|^2+(1-|\bar{y_j}|^2)(1-|x|^2),$$

我们有

$$[x,\bar{y_j}]\geqslant|x-\bar{y_j}|\geqslant|x-y_j|-|y_j-\bar{y_j}|\geqslant\frac{1}{2}|x-y_j|.$$

因此,

$$\int_{\mathbb{B}_n\setminus B_j}\frac{|y-y_j|}{[x,\bar{y_j}]^{n+1}}d\nu(x)\leqslant 2^{n+1}\int_{|x-y_j|\geqslant 2|y-y_j|}\frac{|y-y_j|}{|x-y_j|^{n+1}}d\nu(x)\leqslant C_4$$

对于某个常数 $C_4=C_4(n)$。至此，命题的证明完成。 □

由（3.4）和命题 3.1，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_n\setminus\Omega'}|(Pb)(x)|d\nu(x)&\leqslant C_4\sum_{j=1}^{\infty}\int_{Q_j}|b(y)|d\nu(y)\\&=C_4\int_{\Omega}|b(y)|d\nu(y).\end{aligned}\tag{3.5}$$

由于 $|b(y)|=|f(y)-g(y)|\leqslant|f(y)|+|g(y)|\leqslant|f(y)|+C_1t$，我们有

$$\int_{\Omega}|b(y)|d\nu(y)\leqslant\int_{\Omega}|f(y)|d\nu(y)+C_1t\nu(\Omega).$$

由引理 2.2，我们有

$$\nu(\Omega)=\sum_{j=1}^{\infty}\nu(Q_j)\leqslant\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{Q_j}|f(x)|d\nu(x)\leqslant\frac{1}{t}||f||_{L^1(\mathbb{B}_n,d\nu)}.$$

因此,

$$\int_{\mathbb{B}_n\setminus\Omega'}|(Pb)(x)|d\nu(x)\leqslant C_4\int_{\Omega}|b(y)|d\nu(y)\leqslant C_4(1+C_1)||f||_{L^1(\mathbb{B}_n,d\nu)}.$$

此外,

$$(Pb)_*(t)\leqslant\nu\big((\mathbb{B}_n\setminus\Omega')\cap\{|(Pb)(x)|>t\}\big)+\nu(\Omega')\leqslant\frac{C_4(1+C_1)+C_3}{t}||f||_{L^1(\mathbb{B}_n,d\nu)}.$$

这就完成了定理 1.1的证明。

4. 致谢

我衷心感谢 Zipeng Wang 的指导和宝贵讨论。我也要感谢审稿人认真审阅稿件并提出宝贵意见，这些意见极大地丰富了本文的背景和上下文。

本文是在作者访问重庆大学期间完成的。作者衷心感谢重庆大学数学系和数学中心提供的经费支持。特别感谢 Yi Wang 和 Fugang Yan 的热情接待。

本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号12231005）和国家重点研发计划（2024YFA1013400）的资助。

References

[1] P. Ahern、J. Bruna、C. Cascante，单位球中广义 M-调和函数的 H^p理论，《印第安纳大学数学杂志》，45(1996)，第1期，103-135页。[2] C. Bender、D. Chakrabarti、L. Edholm、M. Mainkar，商域上 Bergman 投影的 L^p正则性，《加拿大数学杂志》，74(2022)，第3期，732-772页。[3] D. Chakrabarti、L. Edholm，Reinhardt域的 L^p-Bergman空间上的投影，《数学进展》，451(2024)，论文编号109790，共46页。[4] D. Chakrabarti、Z. Huo，某些奇异域上的 Bergman 投影的限制型估计，《几何分析杂志》，35(2025)，第10期，论文编号302，共36页。[5] A. Christopherson、K. Koenig，有理Hartogs三角形上 Bergman 投影的弱型正则性，《美国数学会会刊》，151(2023)，第4期，1643-1653页。[6] A. Christopherson、K. Koenig， $\mathbb{C}^3$中广义 Hartogs 三角形上 Bergman 投影的弱型正则性，《复变函数与椭圆方程》，69(2024)，第10期，1723-1738页。[7]A. Christopherson、K. Koenig，一类 n维 Hartogs 三角形上 Bergman 投影的端点行为，《复分析与算子理论》，18(2024)，第9期，论文编号180，共9页。[8] D. Chakrabarti、Y. E. Zeytuncu，Hartogs三角形上 Bergman 投影的 L^p 映射性质，《美国数学会会刊》，144(2016)，第4期，1643-1653页。[9] Y. Deng、L. Huang、T. Zhao、D. Zheng，Bergman 投影与 Bergman空间，《算子理论杂志》，46(2001)，第1期，3-24页。[10] L. D. Edholm、J. D. McNeal，胖Hartogs三角形上的 Bergman 投影： L^p 有界性，《美国数学会会刊》，144(2016)，第5期，2185-2196页。[11] L. D. Edholm、J. D. McNeal，Bergman子空间与子核：退化 L^p 映射与零点，《几何分析杂志》，27(2017)，第4期，2658-2683页。[12] M. Engliˇs 和 E. Youssfi，球上的 M-调和再生核，《泛函分析杂志》，286(2024)，第1期，论文编号110187。[13] S. Grellier、P. Jaming，实双曲球上的调和函数。II. Hardy-Sobolev与Lipschitz空间，《数学通讯》，268(2004)，50-73页。[14] L. Grafakos，《经典傅里叶分析》，《数学研究生教材》第249卷，第3版，Springer，纽约，2014年。[15] H. Hedenmalm，单连通域上 Bergman空间的对偶，《数学分析杂志》，88 (2002)，311-335页。[16] Z. Huo、D. B. Wick，多圆盘与Hartogs三角形上 Bergman 投影的弱型估计，《伦敦数学会会刊》，52(2020)，第5期，891-906页。[17] T. Hyt¨onen 和 A. Kairema，倍增度量空间中的二进立方体系统，《数学讨论》，126(2012)，第1期，1-33页。[18] P. Jaming，实双曲球上的调和函数。I. Hardy空间的边界值与原子分解，《数学讨论》，80(1999)，第1期，63-82页。[19] K. Koenig、Y. Wang，穿孔域上的调和Bergman理论，《几何分析杂志》，31(2021)，第7期，7410-7435页。[20] C. Liu、J. Shi， $\mathbb{R}^n$单位球中的不变平均值性质与 $\mathcal{M}$-调和性，《数学学报（英文版）》，19(2003)，第1期，187-200页。[21] W. Rudin， $\mathbb{C}^n$单位球中的函数论，《数学科学基础丛书》第241卷，Springer，纽约，1980年。[22] A. A. Solov'ev，与解析函数和调和函数空间相关的积分算子的 L^p 估计。（俄文），《苏联科学院通报》，240(1978)，第6期，1301-1304页。[23] A. A. Solov'ev，与解析函数和调和函数空间相关的积分算子的 L^p 估计。（俄文），《西伯利亚数学杂志》，26(1985)，第3期，168-191、226页。[24] M. Stoll， $\mathbb{C}^n$单位球中的不变位势理论，《伦敦数学会讲义系列》第199卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994年。[25] M. Stoll，实双曲球上调和函数的加权Dirichlet空间，《复变函数与椭圆方程》，57(2012)，第1期，63-89页。[26] M. Stoll， $\mathcal{H}^2$ 的再生核与双曲拉普拉斯算子的径向特征函数，《斯堪的纳维亚数学》，124(2012)，第1期，81-101页。

[27] M. Stoll, 《双曲球上的调和与次调和函数理论》, 《伦敦数学学会讲义系列》, 第431卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2016年。[28] E. M. Stein, 《函数的奇异积分与可微性》, 普林斯顿数学系列, 第30卷, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 1970年。.[29] A.E. Ureyen, $\mathcal{H}$-调和 Bergman 投影在实双曲球上, 《数学分析及其应用杂志》, 519（2023年）, 126802。

Kenan Zhang, School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai, 200433, China电子邮箱地址：knzhang21@m.fudan.edu.cn