arXiv:2601.01797v1 [math.PR] 5 Jan 2026

概率中的粗理想收敛中 $Ky\ Fan$ 度量的作用

TAMIM AZIZ 和 SANJOY GHOSAL

Abstract. 给定一个概率空间 $(S,\Delta,\mathbb{P})$ 和一个可分度量空间 (U,d)，由集合 $\mathfrak{X}(U)$ 中取值于 U 的随机变量构成的随机变量等价类（关于几乎处处相等）的空间 $\mathfrak{X}^0$ 上的 $Ky\ Fan$度量 $\rho(X,Y)$ 定义为 $\rho(X,Y)=\inf\{\varepsilon>0:\mathbb{P}(d(X,Y)>\varepsilon)\leq\varepsilon\}$. 本文主要介绍概率中的粗理想收敛这一概念，它统一推广了度量空间中序列的理想收敛和随机变量依概率收敛。我们证明，粗理想极限集关于 $Ky\ Fan$ 度量 ρ 是闭且有界的，并且对于某一类理想，它构成 $\mathfrak{X}^0$ 的一个 $F_{\sigma\delta}$ 子集。在此过程中，我们介绍概率中的强粗理想聚点和弱粗理想聚点这两个关键概念。结果表明，概率中的强粗理想聚点集总是闭集，而弱粗理想聚点集在度量空间 $(\mathfrak{X}^0,\rho)$ 中则有条件地闭。最后，我们利用概率中的强粗理想聚点集和粗理想极限集刻画了极大可容许理想。

1. Introduction

在本文中，$(S,\Delta,\mathbb{P})$ 是一个概率空间，(U,d) 是一个可分度量空间，而 $\mathfrak{X}:=\mathfrak{X}(U)$ 是 S 上取值于 U 的随机变量集合。对于每个 $X,Y\in\mathfrak{X}$，我们考虑定义在 $\mathfrak{X}$ 上的 $Ky\ Fan$ 度量 ρ，其定义为 $\rho(X,Y)=\inf\{\varepsilon>0:\ \mathbb{P}(d(X,Y)>\varepsilon)\leq\varepsilon\}$。注意，$(\mathfrak{X}^0,\rho)$ 是一个度量空间，其中 $\mathfrak{X}^0$ 表示 $\mathfrak{X}$ 中随机变量的等价类集合；若两个随机变量几乎处处相等，则认为它们等价。我们之所以将讨论范围限制在可分度量空间 (U,d)，而非考虑任意度量空间，主要是因为度量 d 必须满足可测性。该可测性对于建立 U 的度量结构与 $\mathfrak{X}(U)$ 的度量结构之间的联系至关重要。特别是，d 的可测性使我们能够以定义良好的方式处理概率度量 ρ（更多内容请参阅 [16] ）。

首先回顾本文中发挥重要作用的 $\mathbb{N}$ 上的次测度概念。映射 $\varphi:\mathcal{P}(\mathbb{N})\to[0,\infty]$ 是 $\mathbb{N}$ 上的次测度，若满足：(i) $\varphi(\varnothing)=0$；(ii) 若 $A\subseteq B$，则 $\varphi(A)\leq\varphi(B)$；(iii) 对任意 A、$B\subseteq\mathbb{N}$，有 $\varphi(A\cup B)\leq\varphi(A)+\varphi(B)$；(iv) 对所有 $t\in\mathbb{N}.$，有 $\varphi(\{t\})<\infty$。若次测度 φ 满足 $\varphi(A)=\lim_{t\to\infty}\varphi(A\cap[1,t])$，对所有 $A\subseteq\mathbb{N}.$，则称其为下半连续（简称 lscsm ）。对于 $\mathbb{N}$ 上的每个 lscsm φ，由 φ 生成的穷尽理想 $Exh(\varphi)$ 定义如下：

$$Exh(\varphi)=\{A\subset\mathbb{N}:\lim_{t\to\infty}\varphi(A\setminus\{1,2,...,t\})=0\}.$$

在此阶段，我们考虑一类重要的集合论对象，即“理想”。若一个族 $\mathcal{I}\subset\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 满足以下条件，则称其为 $\mathbb{N}$ 上的理想 [11]：

- $\varnothing\in\mathcal{I}$,
- 如果 A，$B\in\mathcal{I}$那么 $A\cup B\in\mathcal{I}$,
- 若 $A\subset B$ 且 $B\in\mathcal{I}$，则 $A\in\mathcal{I}$。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 40A35；60B10 次要分类号 40G15。

Key words and phrases. $Ky\ Fan$ 度量，概率中的粗理想收敛，概率中的强粗理想聚点，概率中的弱粗理想聚点。

印度西孟加拉邦大吉岭 Raja Rammohunpur 734013，北孟加拉大学数学系。 *E-mail*：tamimaziz99@gmail.com（T. Aziz）；sanjoykumarghosal@nbu.ac.in；sanjoyghosalju@gmail.com（S. Ghosal）。ORCID：https://orcid.org/0009-0004-5727-0121（T. Aziz）；https://orcid.org/0000-0001-8563-1941（S. Ghosal）第一作者的研究由印度科学与工业研究理事会人力资源发展组通过 NET-JRF 资助，资助编号为 09/0285(12636)/2021-EMR-I。

若理想 $\mathcal{I}$ 满足 $\mathcal{I} \neq \varnothing$ 且 $\mathcal{I} \neq \mathbb{N}$，则称其为非平凡理想。我们用 $\mathcal{I}_{fin}$ 表示自然数集 $\mathbb{N}$ 的有限子集构成的理想，用 $\mathcal{I}_\delta = \{A \subseteq \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ 表示自然数集 $\mathbb{N}$ 中自然密度为零的子集构成的理想，其中 δ 表示自然密度 [6, 7, 8, 20, 25]。若对每个 $t \in \mathbb{N}$都有 $\{t\} \in \mathcal{I}$，即 $\mathcal{I} \supseteq \mathcal{I}_{fin}$，则称非平凡理想 $\mathcal{I}$ 是可容许的。此外，若对理想 $\mathcal{I}$ 中的集合序列 $\{A_t\}_{t\in\mathbb{N}}$，存在 $A \in \mathcal{I}$，使得对每个 $t \in \mathbb{N}.$，$A_t \setminus A$ 都是有限集，则称理想 $\mathcal{I}$ 为 P-理想[11]。P-理想的例子包括 $\mathcal{I}_{fin}$和 $\mathcal{I}_\delta$。若存在定义在 $\mathbb{N}$ 上的下半连续次测度 φ，使得 $\mathcal{I} = Exh(\varphi)$（参见 [24]），则称 P-理想 $\mathcal{I}$为解析理想。对于理想 $\mathcal{I}$，我们记作$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{I}\}$，表示 $\mathcal{I}$的对偶滤子。

另一方面，Phu [14, 15] 开始探索序列粗收敛理论，该理论是赋范空间中经典收敛的推广，其中“粗糙度”被视为一个关键因素。他还提出了赋范空间中序列的粗糙极限点集的若干有趣性质，这些性质颇具吸引力，也与本研究密切相关。在继续之前，我们先正式给出序列粗收敛 的概念。

定义1.1。 [14, 页码 199] [15, 式 (1.1)] 设 r 为非负实数。赋范空间 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为粗收敛到 x_*，其粗糙度为 r （简称 r-收敛），记作 $x_n \xrightarrow{r} x_*$，如果

$$\text{for any } \varepsilon > 0, \text{ there exists } n_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq n_\varepsilon \;\Rightarrow\; \|x_n - x_*\| \leq r + \varepsilon.$$

非负实数 r 称为“粗糙度”，集合 $LIM^r x_i = \left\{x_* \in X : \; x_n \xrightarrow{r} x_*\right\}$ 称为序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的 r-极限集

随后，这一概念被推广为粗理想收敛，如下所示 s:

定义1.2。 [4, 13] 赋范空间 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为关于粗糙度 $r \geq 0$ 粗 $\mathcal{I}$-收敛到 x_*（简记为 $r-\mathcal{I}$-收敛），如果

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x_*\| > r + \varepsilon\} \in \mathcal{I} \;\text{ for every }\; \varepsilon > 0.$$

关于粗收敛已有结果的全面综述及相关参考文献，请访问 [1, 2, 3, 12, 17]。

另一方面，随机变量依概率收敛是概率论中的一个核心概念，它表达的是随机变量序列以概率任意接近于1的方式收敛到某个特定随机变量。形式上，

定义 1.3。 [16, 19] 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在样本空间 S上的 U值随机变量序列，若对于任意 $\varepsilon > 0$，$d(X_n,\ Y) > \varepsilon$ 当 $n \to \infty$时趋于 0，则称其依概率收敛于 U值随机变量 Y。

多年来，人们提出了这一概念的若干推广，尤其是[9, 10, 18, 21, 22, 23], ，它们将经典框架扩展到更一般的情形以及更精细的收敛模式。

现在我们可以给出主要定义，即定义 1.4，它推广了随机变量序列依概率收敛的概念。

定义 1.4。 设 $r \geq 0$ 且 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathfrak{X}$中的一个序列。若 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 关于粗糙度 r粗糙 $\mathcal{I}$ 依概率收敛于 $X_* \in \mathfrak{X}$ （简记为 $r - \mathcal{I}^{\mathbb{P}}$ 收敛），记作 $X_n \xrightarrow[r]{\mathcal{I}^{\mathbb{P}}} X_*$，则称其满足

$$\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, X_*) > r + \varepsilon) > \delta\} \in \mathcal{I} \;\text{ for every }\; \varepsilon, \delta > 0.$$

我们将 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^r X_i = \left\{X_* \in \mathfrak{X} : \; X_n \xrightarrow[r]{\mathcal{I}^{\mathbb{P}}} X_*\right\}$ r-$\mathcal{I}^{\mathbb{P}}$ 极限的全体集合记为 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。

此外，当 $r = 0$ 时，我们称 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 依 $\mathcal{I}$ 概率收敛（简称为 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-收敛）于 $X_* \in \mathfrak{X}$。另外，将理想 $\mathcal{I}$ 替换为 $\mathcal{I}_{fin}$ 和 $\mathcal{I}_\delta$，可分别得到

依概率收敛 [19] 和依概率统计收敛 [9],的概念。

注 1.5. 设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 (U,d) 中的一个序列。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们定义 $X_n\in\mathfrak{X}$，使得 $\mathbb{P}(X_n=x_n)=1$ 且 $\mathbb{P}(X_n\neq x_n)=0$。注意，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，X_n 在 x_n 处具有单点分布。我们称 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 所关联的随机变量序列。

以下结果促使我们研究这一新的概率中的粗理想收敛概念，因为它表明，随机变量依概率粗理想收敛是度量空间中序列粗理想收敛的一种更一般的形式。

命题 1.6. 设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 (U,d) 中的一个序列。若存在 $r\geq 0$，使得 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 以 r-$\mathcal{I}$ 收敛于 $x_*\in U$，则其关联的随机变量序列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $X_n\xrightarrow[r]{\mathcal{I}^{\mathbb{P}}}X_*$，其中 $\mathbb{P}(X_*=x_*)=1$。

证明。假设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 r-$\mathcal{I}$ 收敛于 x_*。令 $\varepsilon>0$ 为任意给定值。因此，我们有

$$A(\varepsilon)=\{n\in\mathbb{N}:d(x_n,x_*)>r+\varepsilon\}\in\mathcal{I}. \tag{1}$$

注意，$\mathbb{P}(A_n)=1$ 且 $\mathbb{P}(A)=1$，其中

$$A_n=\{\omega\in S:X_n(\omega)=x_n\}\ \text{ and }\ A=\{\omega\in S:X_*(\omega)=x_*\}.$$

注意，$\mathbb{N}\setminus A(\varepsilon)\neq\varnothing$，因为 $A(\varepsilon)\in\mathcal{I}$。因此，任取 $n\in\mathbb{N}\setminus A(\varepsilon)$。由等式（1）可得 $\mathbb{P}(d(X_n,\ X_*)\leq r+\varepsilon)=\mathbb{P}(A_n\cap A)=1$。因此，对于任意 $\delta>0$，我们可以写成

$$\{n\in\mathbb{N}:\mathbb{P}(d(X_n,X_*)>r+\varepsilon)>\delta\}\subseteq A(\varepsilon).$$

由此可得 $X_n\xrightarrow{\mathcal{I}^{\mathbb{P}}}X_{*}r$ □

$Ky\ Fan$ 度量 ρ 可度量依概率收敛，这是一条众所周知的常识性结果。这自然引出了一个问题：在理想收敛的框架下，是否也存在相应的推广？以下结果给出了肯定的回答。

命题 1.7. 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是取值于度量空间 (U,d) 中的随机变量序列。那么，$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 依概率 $\mathcal{I}$收敛到 $X\in\mathfrak{X}$，当且仅当它通过 $Ky\ Fan$ 度量 ρ $\mathcal{I}$收敛到 X。

证明。首先假设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 依概率 $\mathcal{I}$收敛到 $X\in\mathfrak{X}$。设给定 $\varepsilon>0$。那么

$$A(\varepsilon)=\{n\in\mathbb{N}:\mathbb{P}(d(X_n,X_*)\geq\varepsilon)>\varepsilon\}\in\mathcal{I}.$$

令 $B(\varepsilon)=\{n\in\mathbb{N}:\ \rho(X_n,X_*)\geq\varepsilon\}$。注意，对任意 $n\notin A(\varepsilon)$，都有$\mathbb{P}(d(X_n,X_*)\geq\varepsilon)\leq\varepsilon$。这保证了 $\rho(X_n,X_*)<\varepsilon$，即 $n\notin B(\varepsilon)$。因此我们得到 $B(\varepsilon)\subseteq A(\varepsilon)$。由于 $A(\varepsilon)\in\mathcal{I}$ 且 $\varepsilon>0$ 是任意的，我们得出 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 通过 ρ $\mathcal{I}$-收敛到 X。

接下来，假设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 通过 ρ收敛到 X，且收敛方式为 $\mathcal{I}$。令 $\varepsilon,\delta>0$，并设 $\rho_n=\rho(X_n,X)$。那么，对于每个 $\eta>0$，都有 $A(\eta):=\{n\in\mathbb{N}:\ \rho_n\geq\eta\}\in\mathcal{I}$。现在任取 $j\in\mathbb{N}\setminus(A(\varepsilon)\cup A(\delta))$（注意，这样的 $j\in\mathbb{N}$ 存在，因为 $A(\varepsilon)\cup A(\delta)\in\mathcal{I}$）。因此，注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(d(X_j,X)>\varepsilon)&\leq\mathbb{P}(d(X_j,X)>\rho_j)\\&\leq\rho_j\ \ \text{(since the infimum value in the definition of } \rho(X_j,X) \text{ is reached)}\\&<\delta.\end{aligned}$$

因此，$\{j\in\mathbb{N}:\mathbb{P}(d(X_j,\ X)>\varepsilon)\geq\delta\}\subseteq A(\varepsilon)\cup A(\delta)$，即 $\{j\in\mathbb{N}:\mathbb{P}(d(X_j,\ X)>\varepsilon)\geq\delta\}\in\mathcal{I}$。由此可推得，$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在概率意义下 $\mathcal{I}$-收敛到 $X\in\mathfrak{X}$。□

接下来，讨论转向本文的核心主题，后续章节安排如下。第2节致力于建立关于集合 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$ 相对于 $Ky\ Fan$ 度量的各种刻画。特别地，我们证明，对于解析P-理想 $\mathcal{I}$，集合 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$ 是$(\mathfrak{X}^0,\ \rho)$中的一个 $F_{\sigma\delta}$ 类Borel集（定理 2.5）。第3节自然引出了粗糙理想极限和概率中的聚点这两个概念。与实数序列的情形不同，这一框架产生了两种不同类型的概率中的聚点，即弱粗糙理想聚点和概率中的强粗理想聚点。本节将全面探讨这三个集合之间的相互关系。特别地，我们证明，概率中的强粗理想聚点集总是闭集，而弱集合在度量空间$(\mathfrak{X}^0,\ \rho)$中仅在某些条件下才是闭集（命题3.11和3.13）。最后，我们证明，当且仅当粗理想极限集与概率中的强粗糙理想聚点集相重合时，容许理想才是极大的（定理 3.15）。

2. Some characterizations of the set $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$ via $Ky\ Fan$ metric

本章节探讨度量空间 $(\mathfrak{X}^o,\ \rho)$ 中极限集 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$ 的性质，并对其结构和拓扑特征进行详细分析。我们的第一个结果表明，$\mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$ 的直径不超过 $2r$。

定理2.1。集合 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$ 在 $(\mathfrak{X}^o,\ \rho)$ 中有界，且 $diam_\rho(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^r X_i) \leq \min\{1, 2r\}$。一般而言，直径界无法进一步缩小。

证明。任取 $X_*,\ Y_* \in \mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$。令 $\varepsilon,\ \delta > 0$。于是我们有

$$A(\varepsilon,\delta) = \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, X_*) \geq r + \frac{\varepsilon}{2}) > \frac{\delta}{2}\} \in \mathcal{I},$$

$$\text{and}\ \ B(\varepsilon,\delta) = \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Y_*) \geq r + \frac{\varepsilon}{2}) > \frac{\delta}{2}\} \in \mathcal{I}.$$

现在任取 $j \in \mathbb{N} \setminus (A(\varepsilon,\ \delta) \cup B(\varepsilon,\ \delta))$。因此，我们可以写成

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(d(X_*, Y_*) \geq 2r + \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(d(X_j, X_*) \geq r + \frac{\varepsilon}{2}) + \mathbb{P}(d(X_j, Y_*) \geq r + \frac{\varepsilon}{2}) \\ &\leq \delta.\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon, \delta > 0$ 是任意选取的，我们得到 $\mathbb{P}(d(X_*, Y_*) \geq 2r) = 0$。因此，我们得到 $\rho(X_*, Y_*) \leq 2r$。由于对于所有 $X, Y \in \mathfrak{X}^o$ 都有 $\rho(X, Y) \leq 1$，我们得出$diam_\rho(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^r X_i) \leq \min\{1, 2r\}$。

接下来，我们考虑理想 $\mathcal{I}_1 = \{A \subset \mathbb{N} :\ \sum_{n\in A} \frac{1}{n} < \infty\}$ 以及由实值随机变量构成的序列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$X_n \in \begin{cases} \{-5, 5\}\ \text{with}\ \mathbb{P}(X_n = -5) = \mathbb{P}(X_n = 5) & \text{if}\ \ n \in \{2^m : m \in \mathbb{N}\}, \\ \{0, 1\}\ \text{with}\ \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}\ \text{and}\ \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n} & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

设 $r \in \mathbb{R}$ 满足 $0 < 2r < 1$。现在我们考虑 $X_*, Y_* \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$，使得

$$\mathbb{P}(X_* = r) = \mathbb{P}(Y_* = -r) = 1.$$

那么，对于任意 $\varepsilon, \delta > 0$，我们有

$$\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(|X_n - X_*| > r + \varepsilon) > \delta\} \subset^* \{2^m : m \in \mathbb{N}\}.$$

因此，$X_* \in \mathcal{I}_1^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$。同样地，我们可以推断出 $Y_* \in \mathcal{I}_1^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$。现在容易观察到 $\rho(X_*, Y_*) = 2r$。随后，$diam_\rho(\mathcal{I}_1^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^r X_i) = 2r$。这一特例表明，直径界无法进一步减小。□

极限集 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$ 的一个基本拓扑性质由以下结果给出。

对于任意两个 $\mathbb{N}$ 的子集 A 和 B，若 $A \setminus B$ 是有限集，则记为 $A \subset^* B$；若 $A \Delta B$ 是有限集，则记为 $A =^* B$。

定理2.2. 集合 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$ 在$(\mathfrak{X}^o, \rho)$中是闭集。

证明。设 $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$ 中的一个序列，且 $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 关于 ρ 收敛到 $X_* \in \mathfrak{X}^o$。由于 ρ 度量化了依概率收敛，对于任意 ε，$\delta > 0$ 存在 $j_{\varepsilon,\ \delta} \in \mathbb{N}$使得

$$\mathbb{P}(d(Y_{j_{\varepsilon,\delta}}, X_*) \geq \frac{\varepsilon}{2}) \leq \frac{\delta}{2}$$

因此，注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(d(X_n, X_*) > r+\varepsilon) &\leq \mathbb{P}(d(X_n, Y_{j_{\varepsilon,\delta}}) > r+\frac{\varepsilon}{2}) + \mathbb{P}(d(Y_{j_{\varepsilon,\delta}}, X_*) > \frac{\varepsilon}{2}) \\ &\leq \mathbb{P}(d(X_n, Y_{j_{\varepsilon,\delta}}) > r+\frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\delta}{2}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\{n\in\mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, X_*) > r+\varepsilon) > \delta\} \subseteq \{n\in\mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Y_{j_{\varepsilon,\delta}}) \geq r+\frac{\varepsilon}{2}) > \frac{\delta}{2}\}.$$

由于 $Y_{j_{\varepsilon,\ \delta}} \in \mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$，我们有 $\{n \in \mathbb{N}\colon\ \mathbb{P}(d(X_n,\ X_*) > r+\varepsilon) > \delta\} \in \mathcal{I}$。因此，$X_* \in \mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$。由此可推得，$\mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$ 是一个闭集。□

在讨论下一个结果之前，我们先记 $\theta_r(X_*) = \{Y \in \mathfrak{X}\colon \mathbb{P}(d(X_*,\ Y) \geq r) = 0)\}$以及 $B_r(X_*) = \{Y \in \mathfrak{X}\colon \rho(X_*,\ Y) \leq r)\}$，其中 $X_* \in \mathfrak{X}$ 和 $r \geq 0$。接下来的定理将严谨地证明，极限集 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$ 介于集合 $\theta_r(X_*)$ 和 $B_r(X_*)$ 之间，从而阐明其在底层度量结构中的精确位置界限。

Theo引理 2.3. 若 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在概率意义下 $\mathcal{I}$-收敛于 $X_* \in \mathfrak{X}$，则对每个 $r \geq 0$,

$$\bar{\theta}_r(X_*) \subseteq \mathcal{I}^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^r X_i \subseteq \bar{B}_r(X_*).$$

证明。假设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在概率意义下 $\mathcal{I}$-收敛于 $X_* \in \mathfrak{X}$。设 $\varepsilon, \delta > 0$ 给定。则有

$$A(\varepsilon,\delta) := \{n\in\mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, X_*) > \varepsilon) > \delta\} \in \mathcal{I}.$$

现在任取 $Y \in \theta_r\ (X_*)$。于是得到 $\mathbb{P}\ (d\ (X_*, Y)\ \geq r)\ = 0$。注意，我们可以写成

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(d(X_n, Y) > r+\varepsilon) &\leq \mathbb{P}(d(X_n, X_*) \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(d(Y, X_*) \geq r) \\ &\leq \mathbb{P}(d(X_n, X_*) \geq \varepsilon).\end{aligned}$$

由此可得 $\{n \in \mathbb{N}\colon\ \mathbb{P}\ (d\ (X_n, Y)\ > r+\varepsilon)\ > \delta\} \subseteq A\ (\varepsilon, \delta)$。由于 $A\ (\varepsilon, \delta)\ \in \mathcal{I}$，我们得出 $Y \in \mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$，即 $\bar{\theta}_r\ (X_*)\ \subseteq \mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$。

接下来，任取 $Y \in \mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$。因此，有

$$A(\varepsilon) := \{n\in\mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Y) > r+\frac{\varepsilon}{2}) > r+\frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{I}.$$

现在，鉴于命题 1.7，我们还可以得到

$$B(\varepsilon) := \{n\in\mathbb{N} : \rho(X_n, X_*) > \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{I}.$$

任取 $j \in \mathbb{N} \setminus (A(\varepsilon) \cup B(\varepsilon))$。由于 $\mathbb{P}(d(X_j, Y)\ > r+\frac{\varepsilon}{2})\ \leq r+\frac{\varepsilon}{2}$，显然$\rho(X_j, Y)\ \leq r+\frac{\varepsilon}{2}$。因此，注意到

$$\begin{aligned}\rho(X_*, Y) &\leq \rho(X_j, X_*) + \rho(X_j, Y) \\ &\leq r+\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意选取的，我们有 $\rho(X_*, Y)\ \leq r$，即 $Y \in B_r(X_*)$。因此得到 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i \subseteq \bar{B}_r(X_*)$。最后，结合前面的结果，我们可以推得 $\bar{\theta}_r(X_*)\ \subseteq \mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i \subseteq \bar{B}_r(X_*)$
. □

现在，我们给出一个例子，以说明前述结果中的集合包含关系可能是严格的，接下来的例子将证实这一断言。

例 2.4. 考虑理想 $\mathcal{I}_\delta = \{A \subset \mathbb{N}: \ \delta(A) = 0\}$。设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列独立同分布随机变量，其中对每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $0 < p < 1$， $X_n \sim Bernoulli(p)$。构造 $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$Y_n = \begin{cases} 2^n \prod_{i=1}^{n} X_i & \text{if } \ n \notin \{m^2 : m \in \mathbb{N}\}, \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

设给定 $\varepsilon > 0$，且 $n \in \mathbb{N} \setminus \{m^2 : \ m \in \mathbb{N}\}$。因此，注意到

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Y_n - 0| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(Y_n = 2^n) \\ &= \mathbb{P}(X_i = 1, \forall i \in [1, n]) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1)...\mathbb{P}(X_n = 1) \\ &= p^n \to 0 \ \text{ as } \ n \to \infty. \end{aligned}$$

因此， $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 依概率收敛于随机变量 $X_* = 0$，且收敛方式为 $\mathcal{I}_\delta$。

现在我们打算证明 $Y_n \xrightarrow[1]{\mathcal{I}_\delta^{\mathbb{P}}} Y_*$，其中 $\mathbb{P}(Y_* = 1) = 1$。注意，对每个$n \in \mathbb{N} \setminus \{m^2 : \ m \in \mathbb{N}\}$，我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Y_n - Y_*| < 1 + \varepsilon) &= \mathbb{P}(-\varepsilon < Y_n < 2 + \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(Y_n = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_i = 0, \ \text{ for some } \ i \in [1, n]) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_i = 1, \forall i \in [1, n]) \\ &= 1 - p^n \\ \Rightarrow \mathbb{P}(|Y_n - Y_*| \geq 1 + \varepsilon) &= p^n \to 0 \ \text{ as } \ n \to \infty. \end{aligned}$$

由于 $\{m^2 : \ m \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{I}$，我们得到 $Y_* \in \mathcal{I}^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^1 Y_i$。现在注意， $Y_* \notin \bar{\theta}_1(X_*)$，因为 $\mathbb{P}(|X_* - Y_*| \geq 1) = 1$。这保证了 $\bar{\theta}_1(X_*) \subsetneq \mathcal{I}_\delta^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^1 Y_i$。

接下来，我们将证明 $Z \notin \mathcal{I}_\delta^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^1 Y_i$，其中 $\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(Z = 2)$。这里，我们选择$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$。于是，对于任意 $n \neq m^2$，我们可以写成

$$\mathbb{P}(|Y_n - Z| > 1 + \varepsilon) = \mathbb{P}(\{(0, 2), (2^n, 0), (2^n, 2)\}) = \frac{3}{4}.$$

这意味着 $Z \notin \mathcal{I}_\delta^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^1 Y_i$。现在显然， $Z \in \bar{B}_1(X_*)$，因为 $\bar{B}_1(X_*) = \mathfrak{X}(\mathbb{R})$。因此， $\mathcal{I}_\delta^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^1 Y_i \subsetneq \bar{B}_1(X_*)$。综上所述，结合前面的结果，我们可以得出 $\bar{\theta}_1(X_*) \subsetneq \mathcal{I}_\delta^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^1 Y_i \subsetneq \bar{B}_1(X_*)$。

本章节最后证明，对于某一类理想，集合$\mathcal{I}^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^r X_i$是度量空间 $(\mathfrak{X}^\circ, \rho)$ 中的 $F_{\sigma\delta}$型Borel集。

定理 2.5. 设 $r \geq 0$ 和 $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathfrak{X}$中的一个随机变量序列。则对于解析的 P理想 $\mathcal{I}$，极限集 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^r X$ 是 $(\mathfrak{X}^\circ, \ \rho)$ 中的 $F_{\sigma\delta}$类 Borel集。

证明。 由于 $\mathcal{I}$是解析的 P理想， $\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N}: \lim_{t\to\infty} \varphi(A \setminus \{1, 2, ..., t\}) = 0\}$，其中某个下半连续次测度 φ 定义在 $\mathbb{N}$ 上（见 [24]）。对于 $k, \ t \in \mathbb{N}$，我们考虑开集

$$\Theta_{t,k} = \left\{ X_* \in \mathfrak{X} : \rho(X_t, X_*) > r + \frac{1}{k} \right\}.$$

由于 $\rho(X_t, X_*)$ 的定义中的下确界可以取到，因此我们可以写成

$$\mathbb{P}(d(X_t, X_*) > \delta) > \delta \Leftrightarrow \rho(X_t, X_*) > \delta, \ \text{ for every } \ \delta > 0.$$

概率中的粗理想收敛的定义保证

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{I}^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^{r}\underline{\mathrm{X}}\\
&=\left\{X_*\in\mathfrak{X}^{\mathrm{o}}:(\forall k\in\mathbb{N})\ \{t\in\mathbb{N}:\mathbb{P}(d(X_t,X_*)>r+\frac{1}{k})>r+\frac{1}{k}\}\in\mathcal{I}\right\}\\
&=\{X_*\in\mathfrak{X}^{\mathrm{o}}:(\forall k\in\mathbb{N})\ \{t\in\mathbb{N}:X_*\in\Theta_{t,k}\}\in\mathcal{I}\}\\
&=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{X_*\in X:\{t\in\mathbb{N}:X_*\in\Theta_{t,k}\}\in\mathcal{I}\}\\
&=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{X_*\in\mathfrak{X}^{\mathrm{o}}:\lim_{t\to\infty}\varphi(\{i\in\mathbb{N}:X_*\in\Theta_{i,k}\}\setminus\{1,2,...,t\})=0\right\}\\
&=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{X_*\in\mathfrak{X}^{\mathrm{o}}:(\forall j\in\mathbb{N})\ (\exists m\in\mathbb{N}):\varphi(\{i\in\mathbb{N}:X_*\in\Theta_{i,k}\}\setminus\{1,2,...,t\})\leq\frac{1}{j}\ (\forall t\geq m)\right\}\\
&=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{t=m}^{\infty}\left\{X_*\in\mathfrak{X}^{\mathrm{o}}:\varphi(\{i\in\mathbb{N}:X_*\in\Theta_{i,k}\}\setminus\{1,2,...,t\})\leq\frac{1}{j}\right\}\qquad(2)
\end{aligned}
$$

对于每个固定的 $t,j\in\mathbb{N}$，我们考虑这一族

$$\mathscr{F}_{t,j}=\{F\subseteq\mathbb{N}\setminus\{1,2,..,t\}:\varphi(F)>\frac{1}{j}\}.$$

注意，对于每个 $F\in\mathscr{F}_{t,j}$，我们有 $\varphi(F)>\frac{1}{j}$。由于 φ 是下半连续的，$\varphi(F)=\lim_{i\to\infty}\varphi(F\cap[1,i])$。于是存在 $i_0\in\mathbb{N}$，使得 $\varphi(F\cap[1,i_0])>\frac{1}{j}$。因此，不失一般性，我们可以假设每个 $F\in\mathscr{F}_{t,j}$ 都是有限的。接着注意到

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{k,j,t}&=\left\{X_*\in\mathfrak{X}^{\mathrm{o}}:\varphi(\{i\in\mathbb{N}:X_*\in\Theta_{i,k}\}\setminus\{1,2,...,t\})\leq\frac{1}{j}\right\}\\
&=\{X_*\in\mathfrak{X}^{\mathrm{o}}:(\forall F\in\mathscr{F}_{t,j})\ (\exists i\in F)\text{ such that }X_*\notin\Theta_{i,k}\}\\
&=\bigcap_{F\in\mathscr{F}_{t,j}}\bigcup_{i\in F}\mathfrak{X}^{\mathrm{o}}\setminus\Theta_{i,k}.
\end{aligned}
$$

由于对于每个 $i,k\in\mathbb{N}$，$\Theta_{i,k}$ 都是开集，并且 F 是有限的，因此 $\mathfrak{A}_{k,j,t}$ 在 $(\mathfrak{X}^{\mathrm{o}},\rho)$ 中是闭集。最后，根据等式 (2)，我们推得 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^{r}\mathrm{X}$ 是 $(\mathfrak{X}^{\mathrm{o}},\rho)$ 的一个 $F_{\sigma\delta}$ 子集。□

3. Rough ideal limit points and rough ideal cluster points in probability

我们从回顾与 $\mathbb{N}$上的理想相关的两个基本概念开始本章节，即$\mathcal{I}$-极限点和 $\mathcal{I}$-聚点；它们是将这些思想推广到概率框架时不可或缺的工具。

定义 3.1. [11, 定义 4.1] 设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是度量空间(U,d)中的一个序列。

(i) 若存在 $A\notin\mathcal{I}$ 使得 $\lim_{n\in A}x_n=y$，则称元素 $y\in U$ 为 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的 $\mathcal{I}$-极限点。

(ii) 若元素 $y\in U$ 满足下列条件，则称其为 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的 $\mathcal{I}$-聚点:

$$\{n\in\mathbb{N}:d(x_n,y)<\varepsilon\}\notin\mathcal{I}\ \text{ for each }\ \varepsilon>0.$$

注 3.2. 考虑注 1.5 中所述的概率框架，其中$\mathbb{P}(Y=y)=1$ 且对每个 $n\in\mathbb{N}$都有 $\mathbb{P}(X_n=x_n)=1$。那么，注意到

（a）在 $\mathcal{I}$-极限点的框架下，由定义 3.1(i) 可知

$$\lim_{n\in A}\mathbb{P}(d(X_n,Y)<\varepsilon)=1\quad\text{for some }A\notin\mathcal{I}.\qquad(3)$$

注意，公式（3）表明，若存在集合 $A \notin \mathcal{I}$，使得子序列 $\{X_n\}_{n\in A}$ 依概率收敛于 Y，则任意随机变量 $Y \in \mathfrak{X}$ 都可以被视为序列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathfrak{X}$ 中的一个依概率 $\mathcal{I}$-极限点。

(b) 随后，在 $\mathcal{I}$-聚点的语境下，根据定义 3.1(ii)，我们有

$$\begin{aligned} &\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Y) < \varepsilon) = 1\} \notin \mathcal{I} \\ \Rightarrow\ &\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Y) < \varepsilon) > 1 - \delta\} \notin \mathcal{I} \ \text{ for every } \ \delta > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

注意到，公式（4）表明，如果对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个集合 $B \subseteq \mathbb{N}$，满足 $B \notin \mathcal{I}$，使得对每个 $n \in B$，事件的概率

$$\Omega_Y(\varepsilon) := \{\omega \in S : d(X_n(\omega), Y(\omega)) < \varepsilon\}$$

可以任意接近 1。

这两个观察自然引导我们为随机变量的任意序列定义 $\mathcal{I}$-极限点和概率中的 $\mathcal{I}$-聚点的概念。尽管基于依概率收敛的直觉可能使我们认为上述两个概念等价，但事实未必如此（见例 3.4）。

然而，公式（4）中的表述并未完全刻画概率中所有形式的 $\mathcal{I}$-聚点。特别是，它排除了 $a_Y < \mathbb{P}(\Omega_Y(\varepsilon)) < b_Y$ 的情形，其中$0 < a_Y$， $b_Y < 1$ 仅取决于 Y。例如，考虑 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在$\mathfrak{X}(\mathbb{R})$ 中的序列，使得

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = n) \ \text{ for each } \ n \in \mathbb{N}.$$

任取 $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$，使得 $P(Y = 0) = \frac{1}{2} = P(Y = 1)$。进一步，假设对每个$n \in \mathbb{N}$，联合概率满足

$$\mathbb{P}(X_n = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(X_n = n, Y = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0, Y = 1) = \mathbb{P}(X_n = n, Y = 1).$$

那么，对于任意容许理想 $\mathcal{I}$，可得

$$\mathbb{N} \setminus \{\text{finite set}\} = \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(|X_n - Y| < \varepsilon) = \frac{1}{4}\} \notin \mathcal{I} \ \text{ for every } \ 0 < \varepsilon < 1.$$

这一局限促使我们引入概率中两种更精细的 $\mathcal{I}$-聚点概念。现在我们可以为随机变量序列定义概率中的粗糙 $\mathcal{I}$-极限点和粗糙 $\mathcal{I}$-聚点。

定义 3.3。 设 $r \geq 0$、 $\mathcal{I}$ 是 $\mathbb{N}$上的理想，且 $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是取值于 $\mathfrak{X}$的随机变量序列。

(a) 若存在 $A \notin \mathcal{I}$ 使得.....，则称随机变量 $Y \in \mathfrak{X}$ 是 X 在概率意义下的粗糙 $\mathcal{I}$-极限点，其粗糙度为 r （简称 $r - \mathcal{I}^{\mathbb{P}}$ 极限点）。

$$\lim_{n\in A} \mathbb{P}(d(X_n, Y) \geq r + \varepsilon) = 0 \ \text{ for every } \ \varepsilon > 0.$$

我们将 $\Lambda_X^r(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$记为 X 在概率意义下的 $r - \mathcal{I}^{\mathbb{P}}$ 极限点集。

(b1) 如果满足以下条件，则称随机变量 $Y \in \mathfrak{X}$ 为 X 在概率意义下的强粗糙 $\mathcal{I}$-聚点，其粗糙度为 r （简称 $r^s - \mathcal{I}^{\mathbb{P}}$ 聚点）：

$$\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Y) < r + \varepsilon) > 1 - \delta\} \notin \mathcal{I} \ \text{ for every } \ \varepsilon, \delta > 0.$$

我们将 $\Gamma_X^{r^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 表示为 X 依概率的 $r^s - \mathcal{I}^{\mathbb{P}}$ 聚点集。

(b2) 若存在一个固定的 $\delta_* = \delta_*(Y) > 0$，则称随机变量 $Y \in \mathfrak{X}$ 为 X 在概率意义下的弱粗糙 $\mathcal{I}$-聚点，其粗糙度为 r （简称 $r^w - \mathcal{I}^{\mathbb{P}}$ 聚点）。

$$\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Y) < r + \varepsilon) > \delta_*\} \notin \mathcal{I} \ \text{ for every } \ \varepsilon > 0.$$

正实数 $\delta_*(Y)$ 表示关于序列 X 的 Y 粗聚点常数 $r^w - \mathcal{I}^{\mathbb{P}}$。我们将 $\Gamma_X^{r^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 记作 X 在概率意义下的 $r^w - \mathcal{I}^{\mathbb{P}}$ 聚点集合。

注意，对于每个容许理想 $\mathcal{I}$，以下包含关系成立：

$$\Lambda_X^r(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) \subseteq \Gamma_X^{rs}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) \subseteq \Gamma_X^{rw}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}).$$

事实上，正如后续例子所示，这些包含关系可能是严格的，这也证实了这一断言。

例 3.4. 考虑容许理想 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\delta$。对每个 $j \in \mathbb{N}$，我们令 $A_j = \{2^{j-1}(2k+1) : k \in \mathbb{N}\}$。注意，$\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 构成了 $\mathbb{N}$ 的一个划分，并且对任意 $j \in \mathbb{N}$，都有 $A_j \notin \mathcal{I}$，因为 $\delta(A_j) = \frac{1}{2^j} > 0$。现在，我们在 $\mathfrak{X}(\mathbb{R})$中定义 $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 如下：

$$P(X_n = \frac{1}{j}) = 1 - \frac{1}{n^2} \text{ and } P(X_n = \frac{1}{j+1}) = \frac{1}{n^2} \text{ if } n \in A_j.$$

令 $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$，使得 $\mathbb{P}(Y_j = \frac{1}{j}) = 1$。注意，对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - Y_j| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n \neq \frac{1}{j}) = \frac{1}{n^2} \text{ if } n \in A_j.$$

这确保了对每个 $j \in \mathbb{N}$，$Y_j \in \Lambda_X^0(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。注意，对每个 $j \in \mathbb{N}$和$Y_j \xrightarrow{\rho} Z$，都有 $Y_j \in \Gamma_X^{0s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$, 其中 $\mathbb{P}(Z = 0) = 1$。由于 $\Gamma_X^{0s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$在（$\mathfrak{X}^\circ(\mathbb{R})$ ρ）中是闭集（见命题 3.11），因此我们有 $Z \in \Gamma_X^{0s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。

现在我们旨在证明 $Z \notin \Lambda_X^0(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。任取 $j \in \mathbb{N}$。反设存在 $A \notin \mathcal{I}$，使得 $\lim_{n\in A} \mathbb{P}(|X_n - Z| \geq \frac{1}{j}) = 0$。注意到

$$\begin{aligned} A &= \{k \in A : \mathbb{P}(|X_k - Z| \geq \frac{1}{j}) = 1\} \cup \{k \in A : \mathbb{P}(|X_k - Z| < \frac{1}{j}) = 1\} \\ &\subseteq \{k \in A : \mathbb{P}(|X_k - Z| \geq \frac{1}{j}) = 1\} \cup \{k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(|X_k - Z| < \frac{1}{j}) = 1\} \\ &= \{\text{finite set}\} \cup \bigcup_{n=j+1}^{\infty} A_n. \end{aligned}$$

随后，我们得到

$$0 \leq \bar{\delta}(A) \leq \sum_{n=j+1}^{\infty} \bar{\delta}(A_n) \leq \frac{1}{2^j} < \frac{1}{j}.$$

由于 $j \in \mathbb{N}$ 是任意选取的，我们有 $\delta(A) = 0$，即 $A \in \mathcal{I}$——这与假设矛盾。因此可以得出结论：$Z \in \Gamma_X^{0s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) \setminus \Lambda_X^0(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。

注 3.1. 例 3.4 还表明，对于 $\mathfrak{X}$ 中的一个序列 X，一般而言，集合 $\Lambda_X^r(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 在 $(\mathfrak{X}^\circ, \rho)$ 中并非闭集。

显然，当序列 X 的每个元素都具有退化（单点）分布时，恒有等式 $\Gamma_X^{rs}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) = \Gamma_X^{rw}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。下面给出一个该等式不成立的例子。

例 3.5. 首先，考虑一个关于 $\mathbb{N}$ 的容许理想 $\mathcal{I}$，然后固定一个满足$A \notin \mathcal{I}$的 $A \subset \mathbb{N}$。接下来，我们定义 $\mathfrak{X}(\mathbb{R})$中的一个序列 $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 如下：

$$X_n \in \begin{cases} \{-2, 1\} \text{ with } \mathbb{P}(X_n = -2) = \frac{n^2-1}{2n^2} \text{ and } \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{n^2+1}{2n^2} & \text{if } n \in A, \\ \{-1, n^2\} \text{ with } \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{n} \text{ and } \mathbb{P}(X_n = n^2) = 1 - \frac{1}{n} & \text{if } n \notin A. \end{cases}$$

设 $0 < \varepsilon < 1$ 任意，$r = 1$ 且 $Y \sim Bernoulli(\frac{1}{2})$，即 $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 1)$。于是，注意到

$$\lim_{n\in A} \mathbb{P}(|X_n - Y| < r + \varepsilon) = \lim_{n\in A} \mathbb{P}(Y - r - \varepsilon < X_n < Y + r + \varepsilon) = \frac{1}{2}.$$

因此，我们有

$$A \subset^* \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(|X_n - Y| < r + \varepsilon) = \frac{1}{2}\}.$$

因此，我们得到 $\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(|X_n - Y| < r + \varepsilon) = \frac{1}{2}\} \notin \mathcal{I}$。还要注意，$\lim_{n \in \mathbb{N} \setminus A} \mathbb{P}(|X_n - Y| < r + \varepsilon) = 0$。由于 $\mathcal{I}$ 是可容许的，我们得到

$$\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(|X_n - Y| < r + \varepsilon) > 1 - \delta\} \in \mathcal{I} \text{ whenever } 0 < \delta < \frac{1}{3}.$$

这确保了 $Y \in \Gamma_X^{r^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) \setminus \Gamma_X^{r^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。

定义 3.6. 若满足 $\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X_n = Y_n) = 1\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$，则称两个随机变量序列 X 和 Y 为 $\mathcal{I}$-几乎必然（简记为 $\mathcal{I}$ a.s.）。

以下结果保证，若 X 和 Y 为 $\mathcal{I}$ a.s.，则它们各自的粗糙$\mathcal{I}$-极限点集与粗糙 $\mathcal{I}$-聚点集相同。

命题 3.7. 若 X和 Y是 $\mathcal{I}$a.s.的自然数集中的序列，则对每个 $r \geq 0$，有 $\Lambda_X^r(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) = \Lambda_Y^r(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$，$\Gamma_X^{r^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) = \Gamma_Y^{r^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$，且 $\Gamma_X^{r^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) = \Gamma_Y^{r^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。

证明。假设 $\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X_n = Y_n) < 1\} \in \mathcal{I}$，并选取一个 $\xi \in \Lambda_X^r(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。令 $\varepsilon > 0$ 为任意元素。于是存在 $A \notin \mathcal{I}$，使得

$$\lim_{n \in A} \mathbb{P}(d(X_n, \xi) \geq r + \frac{\varepsilon}{2}) = 0.$$

注意到

$$\{n \in A : \mathbb{P}(X_n = Y_n) < 1\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X_n = Y_n) < 1\}.$$

因此，$A' = \{n \in A : \mathbb{P}(X_n = Y_n) = 1\} \notin \mathcal{I}$，当 $A \notin \mathcal{I}$ 时。我们要证明 $\lim_{n \in A'} \mathbb{P}(d(Y_n, \xi) \geq r + \frac{\varepsilon}{2}) = 0$。这由以下不等式得出：对每个 $n \in A'$，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(d(Y_n, \xi) \geq r + \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(d(X_n, \xi) \geq r + \frac{\varepsilon}{2}) + \mathbb{P}(d(Y_n, X_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}) \\ &= \mathbb{P}(d(X_n, \xi) \geq r + \frac{\varepsilon}{2}) + \mathbb{P}(X_n \neq Y_n) = \mathbb{P}(d(X_n, \xi) \geq r + \frac{\varepsilon}{2}).\end{aligned}$$

这确保 $\Lambda_X^r(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) \subseteq \Lambda_Y^r(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。反之，交换 X 和 Y，可得$\Lambda_Y^r(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) \subseteq \Lambda_X^r(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。因此，我们得到 $\Lambda_X^r(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) = \Lambda_Y^r(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。

接下来，假设 $\zeta \in \Gamma_X^{r^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。那么对于每个 ε，$\delta > 0$，我们有

$$B = \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, \zeta) < r + \frac{\varepsilon}{2}) > 1 - \delta\} \notin \mathcal{I}.$$

注意到 $B' = \{n \in B : \mathbb{P}(X_n = Y_n) = 1\} \notin \mathcal{I}$。那么，对于所有 $n \in B'$，我们将得到

$$\mathbb{P}(d(Y_n, \zeta) > r + \varepsilon) \leq \mathbb{P}(d(X_n, \zeta) > r + \frac{\varepsilon}{2}).$$

随后，

$$\{n \in B' : \mathbb{P}(d(X_n, \zeta) < r + \frac{\varepsilon}{2}) > 1 - \delta\} \subseteq \{n \in B' : \mathbb{P}(d(Y_n, \zeta) < r + \varepsilon) > 1 - \delta\}.$$

注意到 $\{n \in B' : \mathbb{P}(d(X_n, \zeta) < r + \frac{\varepsilon}{2}) > 1 - \delta\} \notin \mathcal{I}$，因为 $B \setminus B' \in \mathcal{I}$。因此，我们得到 $\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(Y_n, \zeta) < r + \varepsilon) > 1 - \delta\} \notin \mathcal{I}$，即 $\zeta \in \Gamma_Y(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。因此，$\Gamma_X(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) \subseteq \Gamma_Y(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。最后，利用对称性，我们得出 $\Gamma_X^{r^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) = \Gamma_Y^{r^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。

断言 $\Gamma_X^{r^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) = \Gamma_Y^{r^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 可以通过类似论证得到证明。 □

在特定条件下，后续结果保证对于所有正值的 r，集合$\Gamma_X^{r^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 非空。在继续之前，我们先给出一个重要引理。

For each $A \subseteq \mathbb{N}$, $\bar{\delta}(A) = \limsup_{n \to \infty} \frac{|A \cap \{1, 2, ..., n\}|}{n}$ is the upper natural density of A.

引理 3.8. 对于 $Y \in \mathfrak{X}$，设 $\varepsilon_Y, \delta_Y > 0$ 满足 $\{n \in \mathbb{N}: \mathbb{P}(d(X_n, Y) < \varepsilon_Y) > \delta_Y\} \in \mathcal{I}$，其中 X 是 $\mathfrak{X}$中的一个序列。那么，对于每个$0 < \varepsilon_* \leq \varepsilon_Y$和 $\delta_Y \leq \delta_*$，均有 $\{n \in \mathbb{N}: \mathbb{P}(d(X_n, Y) < \varepsilon_*) > \delta_*\} \in \mathcal{I}$。

证明。 证明由以下事实推出：对于所有 $A \subseteq B$，只要 $B \in \mathcal{I}$，就有 $A \in \mathcal{I}$。 □

命题3.9。 设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个理想，且 X 是来自 $\mathfrak{X}$ 的元素序列。若 $\mathfrak{B}$ 是 $(\mathfrak{X}^0, \rho)$ 中的一个紧集，满足 $\{n \in \mathbb{N}: X_n \in \mathfrak{B}\} \notin \mathcal{I}$，则对任意 $r > 0$， $\Gamma_X^{r_*^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) \neq \varnothing$。

证明。 反设，对于某个 $r_* > 0$， $\Gamma_X^{r_*^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) = \varnothing$。那么，对于每个 $Y \in \mathfrak{B}$，存在 $\varepsilon_Y > 0$ 和 $\delta_Y > 0$，使得

$$\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Y) < r_* + \varepsilon_Y) > 1 - \delta_Y\} \in \mathcal{I}. \tag{5}$$

令 $\varepsilon_* = \inf_{Y \in \mathfrak{B}} \varepsilon_Y$。注意，不失一般性，可假设对每个 $Y \in \mathfrak{B}$，都有 $0 < \delta_Y < r_*$。显然，$\{B_\rho(Y, \delta_Y) : Y \in \mathfrak{B}\}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的一个开覆盖，其中

$$B_\rho(X, r) = \{Y \in \mathfrak{X}^0 : \rho(X, Y) < r\}.$$

由于 $\mathfrak{B}$ 在 $(\mathfrak{X}^0, \rho)$ 中是紧致的，存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$\mathfrak{B} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_\rho(Y_i, \delta_{Y_i}).$$

由此，我们得到

$$\{n \in \mathbb{N} : X_n \in \mathfrak{B}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \{n \in \mathbb{N} : X_n \in B_\rho(Y_i, \delta_{Y_i})\}. \tag{6}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\text{if } X_n \in B_\rho(Y_i, \delta_{Y_i}) \text{ for some } i \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \mathbb{P}(d(X_n, Y_i) > \alpha) \leq \alpha \text{ and } \alpha < \delta_{Y_i}, \text{ where } \alpha = \rho(X_n, Y_i) \\
&\Rightarrow \mathbb{P}(d(X_n, Y_i) \leq \alpha) > 1 - \alpha \text{ and } \alpha < \delta_{Y_i} \\
&\Rightarrow \mathbb{P}(d(X_n, Y_i) < \delta_{Y_i}) > 1 - \delta_{Y_i}.
\end{aligned} \tag{7}$$

由于对每个 $i \in \mathbb{N}$ 都有 $\delta_{Y_i} < r_* + \varepsilon_{Y_i}$，根据引理 3.8、式（6）和式（7），我们得到

$$\{n \in \mathbb{N} : X_n \in \mathfrak{B}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Y_i) < \delta_{Y_i}) > 1 - \delta_{Y_i}\} \in \mathcal{I},$$

– ，这就产生了矛盾。因此，我们可以得出结论：对于任意 $r >$， $\Gamma_X^{r_*^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) \neq \varnothing$ 0. □

注意，对任意 $X \in \mathfrak{X}$，我们已经有 $\Gamma_X^{r_*^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) \subseteq \Gamma_X^{r_*^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。因此，只要满足命题3.9的条件，对于任意 $r > 0$，都有 $\Gamma_X^{r_*^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) \neq \varnothing$。于是，一个自然的问题是：能否放宽这些条件，同时仍确保 $\Gamma_X^{r_*^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 非空? 在下一个结果中，我们将证明，命题3.9中使用的紧致性假设实际上可以替换为更弱的全有界性条件。

命题 3.10。 设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个理想，且 X 是一个取值于 $\mathfrak{X}$ 的序列。若 $\mathfrak{B}$ 是 $(\mathfrak{X}^0, \rho)$ 中的全有界集，满足 $\{n \in \mathbb{N}: X_n \in \mathfrak{B}\} \notin \mathcal{I}$，则对于任意 $r > 0$， $\Gamma_X^{r_*^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) \neq \varnothing$。

证明。 反之，假设对于某个 $r_* > 0$， $\Gamma_X^{r_*^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) = \varnothing$。那么，对于每个 $Y \in \mathfrak{B}$，存在 $\varepsilon_Y > 0$ 使得

$$\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Y) < r_* + \varepsilon_Y) > \delta\} \in \mathcal{I} \text{ for every } \delta > 0.$$

令 $\varepsilon_* = \inf_{Y \in \mathfrak{B}} \varepsilon_Y$。那么，根据引理 3.8，我们得到

$$\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Y) < r_* + \varepsilon_*) > \delta\} \in \mathcal{I} \text{ for every } \delta > 0. \tag{8}$$

由于 $\mathfrak{B}$ 在 $(\mathfrak{X}^0,\ \rho)$ 中全有界，因此存在 $Y_1,\ Y_2,\ .....,\ Y_m \in \mathfrak{X}^0$，使得

$$\mathfrak{B} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_\rho(Y_i, r_* + \varepsilon_*)$$

$$\Rightarrow \{n \in \mathbb{N} : X_n \in \mathfrak{B}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \{n \in \mathbb{N} : X_n \in B_\rho(Y_i, r_* + \varepsilon_*)\}$$

$$\Rightarrow \{n \in \mathbb{N} : X_n \in \mathfrak{B}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Y_i) < r_* + \varepsilon_*) > 1 - (r_* + \varepsilon_*)\} \in \mathcal{I} \text{ (by Eq (8))}$$

– which is a contradiction. Thus we can infer that $\Gamma^{rw}_{\underline{X}}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) \neq \varnothing$ for any $r > 0$. □

接下来的两个结果讨论度量空间 $(\mathfrak{X}^o, \rho)$ 中集合 $\Gamma^{rs}_X(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 和 $\Gamma^{rw}_X(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 的闭性。事实证明，$\Gamma^{rs}_X(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 总是闭集，而 $\Gamma^{rw}_X(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 仅在满足条件时才是闭集。

命题 3.11. 设 $r \geq 0$ 和 $\mathcal{I}$ 是 $\mathbb{N}$上的一个容许理想。那么，对于任意 X 属于$\mathfrak{X}$，集合 $\Gamma^{rs}_X(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$在 $(\mathfrak{X}^o, \rho)$中是闭集。

证明. 任取 $\varepsilon, \delta > 0$。假设 $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是$\Gamma^{rs}_X(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$中的一个序列，且满足$Y_n \xrightarrow{\rho} Z$。由于 ρ 可度量依概率收敛，存在一个自然数 n_0 使得

$$\mathbb{P}(d(Y_{n_0}, Z) \geq \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\delta}{2}.$$

由于 $Y_{n_0} \in \Gamma^{rs}_X(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$，我们得到

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2}) > 1 - \frac{\delta}{2}\} \notin \mathcal{I}$$

现在任取 $n \in A(\varepsilon)$，则

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(d(X_n, Z) \geq r + \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n_0}) \geq r + \frac{\varepsilon}{2}) + \mathbb{P}(d(Y_{n_0}, Z) \geq \frac{\varepsilon}{2}) \\
&\leq \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n_0}) \geq r + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\delta}{2} \\
\Rightarrow \mathbb{P}(d(X_n, Z) < r + \varepsilon) &> \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2}) - \frac{\delta}{2} > 1 - \delta.
\end{aligned}$$

这确保了 $\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Z) < r + \varepsilon) > 1 - \delta\} \supseteq A(\varepsilon)$。由于 $A(\varepsilon) \notin \mathcal{I}$，我们有$\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Z) < r + \varepsilon) > 1 - \delta\} \notin \mathcal{I}$，即 $Z \in \Gamma^{rs}_X(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。因此，我们可以得出结论：$\Gamma^{rs}_X(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 在 $(\mathfrak{X}^o, \rho)$ 中是闭集。□

一般而言，对于给定的序列 X 属于 $\mathfrak{X}$，集合 $\Gamma^{rw}_X(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 在 $(\mathfrak{X}^o, \rho)$ 中并非闭集。下面举例说明这一点。

例 3.12. 考虑 $\mathbb{N}$ 上的一个容许理想 $\mathcal{I}$，并固定任意一个 $A \notin \mathcal{I}$。令 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为∞一个正实数序列，使得 $a_n > a_{n+1}$ 对每个 $\mathbb{N}$ 均成立，且 $\sum_{n=1} a_n = 1$。接下来，考虑如下定义的序列 $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$X_n \in \begin{cases} \{a_1, a_2, ..., a_k, ...\} \text{ with } \mathbb{P}(X_n = a_k) = a_k \text{ for all } k \in \mathbb{N} & \text{if } n \in A \\ \{-n^3, n^2\} \text{ with } \mathbb{P}(X_n = -n^3) = \frac{1}{3} \text{ and } \mathbb{P}(X_n = n^2) = \frac{2}{3} & \text{if } n \notin A. \end{cases}$$

设 $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathfrak{X}(\mathbb{R})$ 中的一个序列，使得

$$\mathbb{P}(Y_k = a_k) = 1 \text{ for each } k \in \mathbb{N}.$$

我们旨在证明，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $Y_k \in \Gamma_X^{0^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。设 $\varepsilon > 0$ 为任意值。于是，对于每个 $n \in A$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_n - Y_k| < \varepsilon) &= \mathbb{P}(Y_k - \varepsilon < X_n < Y_k + \varepsilon)\\ &\geq \mathbb{P}(X_n = a_k) = a_k.\end{aligned}$$

这确保了 $A \subseteq \{n \in \mathbb{N}: \ \mathbb{P}(|X_n - Y_k| < \varepsilon) \geq \delta_*(Y_k)\}$，其中 $\delta_*(Y_k) = a_k$。现在，很容易看出 $Y_n \xrightarrow{\rho} Z$，其中 $\mathbb{P}(Z = 0) = 1$。

要证明 $\Gamma_X^{0^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 不是闭集，只需证明 $Z \notin \Gamma_X^{0^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，存在 $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq n_\varepsilon$，都有 $0 < a_n < \varepsilon$。因此，

$$\mathbb{P}(|X_n - Z| < \varepsilon) = \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} a_n \to 0 \ \text{ as } \ \varepsilon \to 0.$$

因此，我们可以得出结论：$\Gamma_X^{0^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 在 $(\mathfrak{X}^\circ(\mathbb{R})\ \rho)$ 中不是闭集。

注意，在例 3.12 中，我们有 $\inf\{\delta_*(Y): \ Y \in \Gamma_X^{0^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})\} = 0$。现在，我们对 $\Gamma_X^{r^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 施加一个限制，以确保其闭性。

命题3.13。若 X 属于 $\mathfrak{X}$ 且满足 $\inf\{\delta_*(Y): \ Y \in \Gamma_X^{r^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})\} > 0$，则 $\Gamma_X^{r^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 是 $(\mathfrak{X}^\circ, \rho)$ 中的闭集。

证明。假设 $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\Gamma_X^{r^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 中的一个序列，满足 $Y_n \xrightarrow{\rho} Z$。那么，根据给定假设，有 $\ell = \inf\{\delta_*(Y_n): \ n \in \mathbb{N}\} > 0$。令 $0 < \varepsilon < \frac{\ell}{2}$。由于 ρ 度量依概率收敛，因此存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\mathbb{P}(d(Y_{n_0}, Z) \geq \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $Y_{n_0} \in \Gamma_X^{r^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$，我们有 $\{n \in \mathbb{N}: \ \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2}) > \delta_*(Y_{n_0})\} \notin \mathcal{I}$。因此，我们可以写成

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2}) > \ell\} \notin \mathcal{I}.$$

任取 $n \in A(\varepsilon)$。然后，注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(d(X_n, Z) \geq r + \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n_0}) \geq r + \frac{\varepsilon}{2}) + \mathbb{P}(d(Y_{n_0}, Z) \geq \frac{\varepsilon}{2})\\ &\leq \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n_0}) \geq r + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2}\\ \Rightarrow \mathbb{P}(d(X_n, Z) < r + \varepsilon) &> \mathbb{P}(d(X_n, Y_{n_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2}) - \frac{\varepsilon}{2} > \ell - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\ell}{2}.\end{aligned}$$

这意味着 $\{n \in \mathbb{N}: \ \mathbb{P}(d(X_n, \ Z) < r + \varepsilon) > \frac{\ell}{2}\} \supseteq A(\varepsilon)$。由于 $A(\varepsilon) \notin \mathcal{I}$，我们推得 $\{n \in \mathbb{N}: \ \mathbb{P}(d(X_n, \ Z) < r + \varepsilon) > \frac{\ell}{2}\} \notin \mathcal{I}$，即 $Z \in \Gamma_X^{r^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。因此，$\Gamma_X^{r^w}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 在 $(\mathfrak{X}^\circ, \ \rho)$ 中是闭集。□

回顾一下，若理想 $\mathcal{I}$ on $\mathbb{N}$ 满足：对于任何满足 $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{J} \subseteq \mathbb{N}$的理想 $\mathcal{J}$ on $\mathbb{N}$，必有 $\mathcal{J} = \mathcal{I}$ 或 $\mathcal{J} = \mathbb{N}$，则称其为极大理想。本文将用到以下关于极大理想的事实。

引理 3.14。 [11, 引理 5.1] 设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个极大可容许理想。则对于每个$A \subset \mathbb{N}$，必有 $A \in \mathcal{I}$或 $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{I}$。

现在我们可以给出一个关键结果，即定理 3.15，该定理用 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i$和 $\Gamma_X^{r^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$刻画了极大可容许理想。

定理 3.15. 假设 $(\mathfrak{X}^0, \rho)$ 至少有两个不同元素，且 $\mathcal{I}$ 是容许理想。那么，当且仅当对每个 $r \geq 0$ 和每个属于 $\mathfrak{X}$ 的 X， $\mathcal{I}$ 都满足 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}$-$LIM^r X_i = \Gamma_X^{r^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 时， $\mathcal{I}$ 是极大的。

证明. 假设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的极大可容许理想。任取 $\varepsilon, \delta > 0$ 。取任意 $r \geq 0$ 和任意一个取值于 $\mathfrak{X}$ 的序列 X 。那么，对每个 $X_* \in \mathcal{I}^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^r X_i$，有

$$\begin{aligned}
&\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, X_*) \geq r + \varepsilon) > \delta\} \in \mathcal{I} \\
\Rightarrow\ &\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, X_*) \geq r + \varepsilon) \leq \delta\} \notin \mathcal{I} \ \ (\text{since } \mathcal{I} \text{ is non-trivial}) \\
\Rightarrow\ &\{n \in \mathbb{N} : 1 - \mathbb{P}(d(X_n, X_*) < r + \varepsilon) \leq \delta\} \notin \mathcal{I} \\
\Rightarrow\ &\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, X_*) < r + \varepsilon) \geq 1 - \delta\} \notin \mathcal{I}.
\end{aligned}$$

这确保了 $X_* \in \Gamma_X^{r^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$，即 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^r X_i \subseteq \Gamma_X^{r^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。

另一方面，任取 $Y \in \Gamma_X^{r^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。注意到

$$\begin{aligned}
&\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, X_*) < r + \varepsilon) \geq 1 - \delta\} \notin \mathcal{I} \\
\Rightarrow\ &\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, X_*) < r + \varepsilon) < 1 - \delta\} \in \mathcal{I} \ \ (\text{since } \mathcal{I} \text{ is admissible and maximal}) \\
\Rightarrow\ &\{n \in \mathbb{N} : 1 - \mathbb{P}(d(X_n, X_*) \geq r + \varepsilon) < 1 - \delta\} \in \mathcal{I} \\
\Rightarrow\ &\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, X_*) \geq r + \varepsilon) > \delta\} \in \mathcal{I}.
\end{aligned}$$

因此，我们得到 $Y \in \mathcal{I}^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^r X_i$，即 $\Gamma_X^{r^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}}) \subseteq \mathcal{I}^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^r X_i$。由此可推得 $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^r X_i = \Gamma_X^{r^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。

反之，假设对于每个 $r \geq 0$ 以及 $\mathfrak{X}$ 中的每个 X， $\mathcal{I}^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^r X_i = \Gamma_X^{r^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$ 均成立。反设 $\mathcal{I}$ 不是极大的。则存在 $A \subset \mathbb{N}$ ，使得 either $A, \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{I}$ 或者 $A, \mathbb{N} \setminus A \notin \mathcal{I}$。由于 $\mathcal{I}$ 是非平凡的，我们必有 $A, \mathbb{N} \setminus A \notin \mathcal{I}$。根据给定假设，存在 $Y, Z \in \mathfrak{X}^0$ ，使得 $\alpha = \rho(Y, Z) > 0$。由于 $\rho(Y, Z) =$ 的定义中的下确界 $\{\varepsilon > 0 \colon \mathbb{P}(d(Y, Z) > \varepsilon) \leq \varepsilon\}$ 可以取到，因此我们有

$$\mathbb{P}(d(Y, Z) > \alpha) \leq \alpha.$$

我们固定任意一个 $0 < \beta < \alpha$。现在，任取满足 $\beta + \varepsilon < \alpha$ 的 $\varepsilon > 0$ 。那么，我们将有 e

$$\mathbb{P}(d(Y, Z) > \beta + \varepsilon) > \beta + \varepsilon \ \ (\text{using the minimality of } \alpha).$$

我们定义 X 在 $\mathfrak{X}$ 中如下:

$$X_n = \begin{cases} Y & \text{if } \ n \in A, \\ Z & \text{if } \ n \in \mathbb{N} \setminus A. \end{cases}$$

于是，注意到

$$A \subseteq \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Y) < \beta + \varepsilon) > 1 - \delta\} \notin \mathcal{I} \ \text{ for every } \ \delta > 0,$$

即， $Y \in \Gamma_X^{\beta^s}(\mathcal{I}^{\mathbb{P}})$。此外，注意到

$$\mathbb{N} \setminus A \subseteq \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(d(X_n, Y) > \beta + \varepsilon) > \beta + \varepsilon\} \notin \mathcal{I},$$

即， $Y \notin \mathcal{I}^{\mathbb{P}}\text{-}LIM^{\beta} X_i$ -，这就产生了矛盾。因此我们推得 $\mathcal{I}$ 是极大的。 □

References

[1]S. Aytar，实序列的粗糙极限集与核，数值函数分析与优化**29** (3-4) (2008) 283–290. [2] S. Aytar，粗糙统计收敛，数值函数分析与优化**29** (3-4) (2008) 291–303.[3] S. Aytar，粗糙统计聚点，Filomat**31**(16) (2017) 5295–5304.[4] E. D¨undar，C. C¸akan，粗 $\mathcal{I}$-收敛，Demonstr. Math. **47** (3) (2014), 638–651.[5] E. D¨undar，重序列的粗 $\mathcal{I}_2$-收敛，数值函数分析与优化**37**(4) (2016), 480-491.[6] H. Fast，关于统计收敛，Colloq. Math.**2** (3-4) (1951) 241–244.[7] J. A. Fridy，关于统计收敛，Analysis **5**(4) (1985) 301–314.[8] J. A. Fridy，统计极限点，Proc. Am. Math. Soc. **118**(4) (1993) 1187–1192.

[9] S. Ghosal，随机变量序列的统计收敛与极限定理，Appl. Math. 58 (4) (2013) 423–437.[10] B. B. Jena，S. K. Paikray，H. Dutta，通过延迟 Ces`aro 均值研究随机变量序列统计收敛的若干新概念，J. Math. Anal. Appl. 487 (1) (2020) 123950.[11] P. Kostyrko，T. ˇSal´at，W. Wilczy´nski，$\mathcal{I}$-收敛，Real Anal. Exchange 26 (2000) 669–685.[12]M. C. List´an-Garc´ıa，利用粗收敛刻画各方向的一致严格凸性，数值函数分析与优化 22 (11) (2011) 1166–1174.[13] S. Pal，D. Chandra，S. Dutta，粗理想收敛，Hacet. J. Math. Stat. 42 (2) (2013), 633-640.[14] H. X. Phu，赋范线性空间中的粗收敛，数值函数分析与优化 22 (1-2) (2001) 199-222.[15]H. X. Phu，无限维赋范空间中的粗收敛，数值函数分析与优化 24 (3-4) (2003) 285-301.[16] S. T. Rachev，L. B. Klebanov，S. V. Stoyanov，F. J. Fabozzi，概率论与数理统计中的距离方法，第10卷，Springer，(2013).[17] S. K. A. Rahaman，M. Mursaleen，L-模糊赋范空间中差分序列的粗延迟统计收敛，J. Math. Anal. Appl. 530 (2) (2024) 127684.[18] S. C. Rambaud，关于随机变量序列几乎处处一致收敛与完全收敛的注记，随机学，83 (3) (2011) 215–221.[19] S. Resnick，概率之路，Springer Science & Business Media，2003.[20] T. ˇSal´at，关于实数统计收敛序列，Math. Slovaca 30 (2) (1980) 139-150.[21] C. S¸en¸cimen，随机函数序列的依概率统计收敛，理论概率论杂志 26 (1) (2013) 94–106.[22] C. S¸en¸cimen，S. Pehlivan，概率度量空间中的强统计收敛，Stoch. Anal. Appl. 26 (3) (2008) 651–664.[23] C. S¸en¸cimen，S. Pehlivan，关于随机函数的穷尽族及若干类型的收敛，随机学 88 (2) (2016) 285–299.[24] S. Solecki，解析理想，Bull. Symb. Log. 2 (1996) 339–348.[25] H. Steinhaus，关于通常收敛与渐近收敛，Colloq. Math. 2 (1) (1951) 73-74.