arXiv:2601.01808v1 [math.NA] 5 Jan 2026

核近似的尖锐逆命题：超收敛与饱和

Tizian Wenzel *[1,2]

[1]慕尼黑路德维希-马克西米利安大学数学系（德国慕尼黑）[2]慕尼黑机器学习中心（德国慕尼黑）

2026年1月6日

摘要

本文针对有界Lipschitz区域上使用有限光滑Sobolev核进行的基于核的逼近，建立了尖锐的逆命题和饱和结论。分析重点关注超收敛区域，而相关的直接结论直到最近才得以提出。

由此得到的理论在目标函数的光滑性（以幂空间刻画）与基于核的逼近所能达到的逼近阶之间建立了一一对应关系。通过这种方式，我们将现有结果扩展到超出原生空间区域的范围，并给出了涵盖全部可 admissible 光滑性空间尺度的统一刻画。

1 引言

我们考虑基于核的逼近 [6, 7, 22, 26]，特别是对某个有界区域 Ω $f \in \mathcal{C}$上的连续函数 $\subset \mathrm{R}^d$ 在插值点 $X \subset$Ω处进行插值：

$$s_{f,X}(x_i) = f(x_i) \quad \forall x_i \in X. \tag{1}$$

为此，我们考虑严格正定核 k： Ω×Ω $\to$ R，其对应的再生核希尔伯特空间（RKHS）为 $\mathcal{H}_k$Ω，也称为原生空间。在此框架下，最小范数核插值函数$s_{f,\ X}$ 可写为

$$s_{f,X} = \sum_{j=1}^{|X|} \alpha_j k(\cdot, x_j), \tag{2}$$

其中，依赖于 X 的系数向量 $(\alpha_j)_{j=1}^{|X|}$ 由将式（2）代入式（1）后得到的线性方程组的唯一解确定。如果

*wenzel@math.lmu.de

$f \in \mathcal{H}_k(\Omega)$，则式（1）的核插值函数 $s_{f,\ X}$ 也可以表示为将 f 正交投影到 $V(X)$ 上所得的正交投影 $\Pi_{V(X)}(f)$：$=\operatorname{span}\{k(\cdot,\ x_i)\ x_i \in X\} \subset \mathcal{H}_k(\Omega)$，即

$$s_{f,X} = \Pi_{V(X)}(f). \tag{3}$$

在我们的分析中，我们将关注有限光滑核，其再生核希尔伯特空间的范数等价于光滑性为 $\tau > d/2$ 的索伯列夫空间，即 $\mathcal{H}_k(\Omega) \asymp H^\tau(\Omega)$。这类核在实践中十分常用，因为它们涵盖了广受欢迎的平移不变核情形 $k(x,\ z) = \Phi(x - z)$，对于这类核，傅里叶变换 Φ满足

$$c_\Phi(1 + \|\omega\|_2^2)^{-\tau} \le \hat{\Phi}(\omega) \le C_\Phi(1 + \|\omega\|_2^2)^{-\tau} \tag{4}$$

其中常数为 $c_\Phi,\ C_\Phi > 0$ 和 $\tau > d/2$。特别是，径向基函数（RBF）核，如 Mat´ern 核或 Wendland 核，都满足这一性质。

已有大量研究致力于界定函数 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$（满足一些额外的光滑性假设）与插值函数 $s_{f,\ X}$ 之间的近似误差，例如，[1,14] 使用分布良好的点，[31,32] 使用自适应（贪心）选取的点，或 [11] 使用随机选取的点。

对于这类界，根据函数 f 的光滑性，可以区分两种情形。首先是 逃逸原生空间情形 [14,15],，此时 f 的光滑性低于再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}_k(\Omega)$ 的光滑性，即满足$f \notin \mathcal{H}_k(\Omega)$。在这种情况下，误差界例如可写为

$$\|f - s_{f,X}\|_{L_2(\Omega)} \le C h_X^{\vartheta\tau} \cdot \|f\|_{H^{\vartheta\tau}(\Omega)} \tag{5}$$

对于 $f \in H^{\vartheta\tau}(\Omega)$，其中 $\vartheta \in \left(\frac{d}{2\tau},\ 1\right]$ 使用 Ω 中的准均匀点 $X \subset$。这里，量 h_X 表示填充距离，见式 (11)；$H^{\vartheta\tau}(\Omega)$ 指光滑性为 $\vartheta\tau > d/2$ 的通常索伯列夫空间。

其次是所谓的 超收敛区域 [10,18,19,21],，此时函数 f 相较于 $\mathcal{H}_k(\Omega)$ 具有额外的光滑性，即 f 包含于某些特定子空间中。这些子空间称为再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}_k(\Omega)$ 的 幂空间$\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$（对于 $\vartheta > 1$）[23], ，其精确定义见式 (20)。由此得到的收敛率 [10] 可写为

$$\|f - s_{f,X}\|_{L_2(\Omega)} \le C h_X^{\vartheta\tau} \cdot \|f\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} \tag{6}$$

对于满足 $\vartheta \in [1,2]$ 的函数 $f \in \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$。请注意，对于 $\vartheta \in [0,1]$，范数等价关系$\mathcal{H}_k(\Omega) \asymp H^\tau(\Omega)$ 通过插值直接推出范数等价关系 $\mathcal{H}_\vartheta(\Omega) \asymp H^{\vartheta\tau}(\Omega)$，其中 $\vartheta \in [0,1]$，因此公式（5）实际上与公式（6）具有相同的形式。

最近，也针对脱离原生空间区域的情况，提出了相应的尖锐逆向陈述 [2,28]。这些陈述以公式（5）中的给定收敛速率为出发点，并据此得出被逼近函数的精确光滑性 f。由此建立了光滑性与逼近率之间的一一对应关系。

本文将讨论超收敛区域的尖锐逆命题。这意味着，给定如公式（6）中的逼近率，我们将推断被逼近函数 f 的光滑性，并以幂空间参数 ϑ 来衡量。由于所推导的逆命题同样是尖锐的，前述一一对应关系便从逃逸原生

空间区域扩展到了超收敛区域。通过进一步推导限制最大逼近率的饱和结论，我们得到了以函数光滑性刻画逼近率的完整刻画。为了尽可能保持一般性，我们考虑一般的基于核的近似函数，而不一定是插值函数。表1概述了两个区域中直接结果和逆向结果的相关文献。我们的主要结果具体表述为

定理 1. *[主要结果]* 考虑一个紧致利普希茨区域$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 以及一个连续核 k，使得 $\mathcal{H}_k(\Omega) \asymp H^\tau(\Omega)$ 对某个 $\tau > d/2$成立。考虑 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$以及估计

$$\|f - s_{f,X}\|_{L_2(\Omega)} \leq c_f h_X^\beta, \tag{7}$$

其中$s_{f,X} \in$张成$\{k(\cdot, x) \ x \in X\}$是一个基于核的近似函数。

(i) 若对某个 $\beta \in (0, 2\tau - \frac{d}{2}]$，对于满足定理*4* 的一个点集序列$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$，等式 (7) 成立，则对所有 $\vartheta \in [0, \frac{\beta}{\tau})$，都有 $f \in \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$。

此外，假设定理*12*成立，则有

(ii) 若对某个 $\beta \in [2\tau - \frac{d}{2}, 2]$，对于任意准均匀[1]序列$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$，等式 (7) 成立，则对所有$\vartheta \in [0, \frac{\beta}{\tau})$，都有 $f \in \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$。

(iii) 若对于某个 $\beta > 2\tau$，对任意准均匀[1] 序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$，式 (7) 成立，则 $f = 0$。

	超越原生空间	超收敛
直接结论	$[1, 13, 14, 27]$	$[10, 18, 19, 21]$
逆向陈述	$[2, 20, 28]$	（我们）

表1：概述逃离原生空间和超收敛区域这两种情形下的正向与逆向陈述。

定理 1 给出的这种精确逆向陈述和饱和结论，有助于更好地理解采用有限光滑核的基于核的逼近方法。本文后文将讨论若干潜在应用。

本文结构如下：第 2 节回顾基于核的逼近所需的背景知识，进一步详述正向与逆向陈述，并回顾幂空间。第 3 节介绍并证明若干有助于证明主要结论的预备结果。第 4 节陈述并证明关于超收敛区域的逆向陈述的主要结果，并讨论结果及其证明。最后，第 5 节总结全文并展望未来工作。

2 背景

下面我们回顾若干陈述，它们对于推导新结果是必要的，也有助于从整体背景中理解这些结果。

[1]一致性常数为 $\rho = C_\Omega$ （参见定理 14）

2.1 核近似

我们关注定义在集合 Ω 上的实值严格正定核 k，即 $k:\Omega\times\Omega\to\mathrm{R}$ 是一个对称函数，并且对于任意一组两两不同的点 $X\subset\Omega$ [26]，核矩阵 A_X 都是正定的。为此，核矩阵定义为

$$A_X := (k(x_i,x_j))_{1\le i,j\le |X|}\in\mathbb{R}^{|X|\times|X|}. \tag{8}$$

对于每个严格正定核，都有一个与之唯一关联的函数空间，称为再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}_k(\Omega)$（RKHS），也常称为原生空间。该空间由以下两个性质刻画

$$\begin{aligned} &k(\cdot,x)\in\mathcal{H}_k(\Omega) && \forall x\in\Omega\\ &f(x)=\langle f,k(\cdot,x)\rangle_{\mathcal{H}_k(\Omega)} && \forall x\in\Omega,\ \forall f\in\mathcal{H}_k(\Omega). \end{aligned} \tag{9}$$

第二个性质称为再生性质。

我们主要关注这样的核：其 RKHS $\mathcal{H}_k(\Omega)$ 与索伯列夫空间 $H^\tau(\Omega)$ 的范数等价，且满足 $\tau>d/2$。这意味着这些空间作为集合是相同的，并且范数等价。常用的核中，定义在紧致利普希茨区域上的 Mat´ern 核族或 Wendland 核都具有这一性质。本文的主要结果将针对这类核表述，因此将其归纳为以下假设。

假设 2。设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 为紧致利普希茨区域$\Omega\subset\mathbb{R}^d$，并设 $k:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ 为连续核，满足 $\mathcal{H}_k(\Omega)\asymp H^\tau(\Omega)$，其中某个 $\tau>d/2$。

为供后文使用，我们先指出，利普希茨区域蕴含内部圆锥条件 [11, 引理 1.5]。这一点将在后文加以利用。内部圆锥条件表述如下。

定义 3. 如果存在一个角度 $\alpha\in(0,\ \pi/2)$ 和一个半径 $r>0$，使得对于每个 $x\in\Omega$，都存在一个单位向量 $\xi(x)$，满足圆锥

$$C(x,\xi(x),\alpha,r):=\{x+\lambda y: y\in\mathbb{R}^d,\|y\|_2=1,y^\top\xi(x)\ge\cos(\alpha),\lambda\in[0,r]\} \tag{10}$$

包含于 Ω 中。

为了量化近似误差，需要考虑点集 $X\subset\Omega$ 分布的一些几何量。对于区域 Ω 内给定的点集 $X\subset\Omega$，我们回顾分离距离 q_X 和填充距离 h_X的定义：

$$\begin{aligned} q_X :=& \frac{1}{2}\min_{x_i\ne x_j\in X}\|x_i-x_j\|_2,\\ h_X := h_{X,\Omega} :=& \sup_{x\in\Omega}\min_{x_j\in X}\|x-x_j\|_2. \end{aligned} \tag{11}$$

对于满足内部圆锥条件的有界区域，存在一个常数$c_\Omega>0$，使得该结论成立

$$\frac{h_X}{q_X}\ge c_\Omega \tag{12}$$

对于任意包含至少两个点的集合 $X \subset \Omega$。该结论可由体积比较论证 [26,第 14 节1] 得到。对于相反的界，人们考虑所谓的一致性常数，其定义为

$$\rho_X := \frac{h_X}{q_X}. \tag{13}$$

如果一列集合 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ 的一致性常数是一致有界的，则称该序列为准均匀序列。下文中，我们将考虑这样的点集准均匀序列，并作出如下假设：

假设 4。 设 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ 是由准均匀分布的点集构成的嵌套序列，且填充距离按几何速率衰减，即满足

$$c_0' a^n \le q_{X_n} \le h_{X_n} \le c_0'' a^n \tag{14}$$

对于常数 c_0'、$c_0'' > 0$ 和 $a \in (0,\ 1)$。

标准误差估计通常以 $L_p(\Omega)$ 范数给出，适用于 $1 \le p \le \infty$ [26]；而在本文中，我们关注 $L_2(\Omega)$ 误差估计。对于函数 $f \in \mathcal{H}_k(\Omega)$，核插值函数 $s_{f,\ X}$ 满足以下标准误差估计：

$$\|f - s_{f,X}\|_{L_2(\Omega)} \le C h_X^{\tau} \cdot \|f - s_{f,X}\|_{\mathcal{H}_k(\Omega)} \tag{15}$$

在超收敛区域 [10], 中，其中 f 被包含于 $\mathcal{H}_k(\Omega)$ 的某些特定子空间内，再生核希尔伯特空间残差项 $\|f - s_{f,\ X}\|_{\mathcal{H}_k(\Omega)}$ 正在衰减，并且可以进一步估计。相反，如果 f 不包含于再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}_k(\Omega)$ 中，即所谓的逃逸（原生空间）区域，则收敛速率实际上更低。关于这些区域的详细介绍见第 2.2 节和第 2.3 节。

为评估基于核的逼近方法的稳定性，文献中已对式 (8) 的核矩阵 A_X 进行了深入分析 [5, 26, 29]。我们将回顾其最小特征值 $\lambda_{\min}(A_X)$ 的一个稳定性界：根据定理 2，也就是说，对于定义在紧致利普希茨区域上的索博列夫核，存在常数 $c_0 > 0$，使得对任意一组两两不同的点 $X \subset \Omega$，均有 [28, 定理 5]

$$\begin{aligned} &\lambda_{\min}(A_X) \ge c_0 q_X^{2\tau - d}, \\ \Rightarrow \quad &\|A_X^{-1}\|_{2,2} \le c_0^{-1} q_X^{d-2\tau}. \end{aligned} \tag{16}$$

2.2 直接与逆向陈述（逃逸区间）

本小节回顾逃逸区间逃逸区间的直接与逆向陈述。该区间涵盖所有不属于再生核希尔伯特空间的函数。相反，超收敛区间涵盖属于再生核希尔伯特空间中特定子空间的函数，将在第 2.3 节中讨论。

首先，我们回顾一个直接命题，它是 [14,定理 4.2] 的一个特例；根据 [1,定理 4.1]，将 $\lfloor \beta \rfloor > d/2$ 改进为 $\beta > d/2$。

定理 5。 考虑一个满足式 (4) 的径向基函数核 k，其中给定某个 $\tau > d/2$ 以及具有利普希茨边界的有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$。对于满足 $d/2 < \beta \le \tau$ 的某个 β，令$f \in H^{\beta}(\Omega) \supseteq H^{\tau}(\Omega)$。则核插值函数 $s_{f,\ X}$ 满足

$$\|f - s_{f,X}\|_{L_2(\Omega)} \le C h_X^{\beta} \rho_X^{\tau-\beta} \|f\|_{H^{\beta}(\Omega)}.$$

注意到，由于幂空间与Sobolev空间范数等价，该结果也可以用幂空间来表述，参见例如 [28]。这意味着，右侧范数 $\|f\|_{H^\beta(\Omega)}$ 可以替换为等价的幂空间范数 $\|f\|_{\mathcal{H}_{\beta/\tau}(\Omega)}$，如第 2.3 节所述。

定理 5 的直接命题由相应的精确逆命题 [28] 加以补充。这里我们回顾该逆命题的一个略微扩展的版本（假设有所弱化），摘自 [2]。

定理 6 ([2]) 。在定理 *2* 和定理 *4* 的条件下，设 $f \in L_2(\Omega)$，并假设存在一个基于点的逼近函数序列，即 $(s_{f,X_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_k(\Omega)$，满足 $s_{f,X_n} \in \operatorname{span}\{k(\cdot, x)\ x \in X_n\}$，使得

$$\|f - s_{f,X_n}\|_{L_2(\Omega)} \leq c_f h_{X_n}^{\beta} \tag{17}$$

对某些 $c_f > 0$ 和 $\beta \in (0,\ \tau]$ 成立。于是，对所有 $\beta' \in (0,\ \beta)$，都有 $f \in H^{\beta'}(\Omega)$。

我们回顾一下，定理 5 的直接命题及定理 6 中相应的逆命题都是精确的，因此在逃逸区间 [28] 内建立了光滑性与逼近率之间的一一对应。

推导此类逆命题的一个关键工具是伯恩斯坦不等式，它可以用弱范数来界定强范数。定理 6 的证明主要依赖于这样一个伯恩斯坦不等式，该不等式最近在 [24]中推导出，并在 [2, 定理 3.4]中稍作推广。它指出，对于

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \leq C q_X^{-s} \|u\|_{L_2(\Omega)} \tag{18}$$

某个常数 $C = C_{d,\ k,\ \tau,\ \Omega} > 0$，$s \in [0, \tau]$ 以及所有点集 $X \subset \Omega$ 和所有试探函数 $u \in \operatorname{span}\{k(\cdot,\ x)\ x \in X\}$，上述结论均成立。遗憾的是，[24]和 [2] 中的伯恩斯坦不等式都是针对径向基函数核表述的。在定理 9 中，我们证明，这样的伯恩斯坦不等式实际上对定理 2 中定义的任意索博列夫核都成立，也就是说，并不需要假设核是径向的。

2.3 Mercer 定理、幂空间与超收敛

为了引入幂空间并陈述 [10], 中的超收敛结果，我们先介绍核积分算子 [23]：给定一个定义在有界利普希茨区域 $\Omega \subset \mathrm{R}^d$ 上的连续严格正定核 $k : \Omega \times \Omega \to \mathrm{R}$，其对应的核积分算子 $T := T_k :\ L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ 定义如下

$$Tv(x) := \int_\Omega k(x,z) v(z)\ \mathrm{d}z, \qquad v \in L_2(\Omega),\ x \in \Omega.$$

该算子 T 在 $L_2(\Omega)$ 中是自伴且正的，其特征值按序排列为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots > 0$，相应的特征函数为 $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$，它们构成 $L_2(\Omega)$ 的正交归一基（标准正交基）。此外，还有 $\|\varphi_j\|_{\mathcal{H}_k(\Omega)} = 1/\sqrt{\lambda_j}$。

此外，可以证明，将 T 视为算子 $L_2(\Omega) \to \mathcal{H}_k(\Omega)$ 时，它是嵌入算子 $\mathcal{H}_k(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ [26, 命题 10.28]，的伴随，并满足以下重要恒等式：

$$\langle f, Tv\rangle_{\mathcal{H}_k(\Omega)} = \langle f, v\rangle_{L_2(\Omega)} \qquad \forall v \in L_2(\Omega),\ f \in \mathcal{H}_k(\Omega). \tag{19}$$

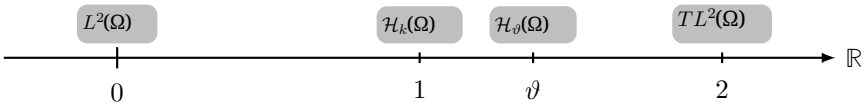

图1：幂空间尺度的示意图，其中包括特殊情形 $L_2(\Omega)$（对应$\vartheta = 0$）、 $\mathcal{H}_k(\Omega)$（对应 $\vartheta = 1$）和 $TL_2(\Omega)$（对应 $\vartheta = 2$）。本文主要考虑超收敛情形，即 $\vartheta \in [1, 2]$。

注意， [10, 例 20] 将这一恒等式推广到了函数 $v \in L_p(\Omega)$， $p \geq 1$，不过对我们而言， $p = 2$ 这一恒等式已经足够。利用标准正交基 $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$，我们可以为 $\vartheta \in [0, \infty)$ 引入幂空间尺度，定义如下:

$$\mathcal{H}_\vartheta(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) \ : \ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\langle f, \varphi_j\rangle_{L_2(\Omega)}|^2}{\lambda_j^\vartheta} < \infty\} = \begin{cases} L_2(\Omega) & \vartheta = 0 \\ \mathcal{H}_k(\Omega) & \vartheta = 1 \\ TL_2(\Omega) & \vartheta = 2 \end{cases} \tag{20}$$

其内积定义为

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_j\rangle_{L_2(\Omega)}\langle g, \varphi_j\rangle_{L_2(\Omega)}}{\lambda_j^\vartheta}. \tag{21}$$

这些空间是完备的，并且对于 ϑ 足够大的情形，这些空间是再生核希尔伯特空间 [23]。对于 $\vartheta = 1$ ，我们得到标准的再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}_k(\Omega)$，即 $\mathcal{H}_{\vartheta=1}(\Omega) = \mathcal{H}_k(\Omega)$。需要注意的是， k 这一索引在 $\mathcal{H}_k(\Omega)$ 中指的是核 k，而索引$\vartheta \geq 0$ 则指一个标量值。空间尺度 $\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$ 在图1中进行了可视化展示，而包含 TL_p空间的更完整图景见 [10]。

对于本文所关注的索博列夫核，即在定理 2的条件下，特征值 λ_j 渐近地按 $j^{-2\tau/d}$ [17]衰减，即存在常数 $c, C > 0$使得

$$cj^{-2\tau/d} \leq \lambda_j \leq Cj^{-2\tau/d}. \tag{22}$$

仍在定理 2的条件下，值得注意的是，对于 $\vartheta > \frac{d}{2\tau} =: \vartheta_{\text{inf}}$，空间 $\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$ 再次成为再生核希尔伯特空间，其再生核由幂核给出

$$k^{(\vartheta)}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\vartheta \varphi_n(x)\varphi_n(z), \tag{23}$$

尤其是， ϑ_{inf} 是可能的 ϑ 值的下界。更多详情请参见例如 [23]。

从历史上看，最初关于超收敛的论述关注的是积分算子 [18, 19, 21]的像 $TL_2(\Omega)$中的函数。最近， [10] 给出了更一般的超收敛论述，特别包括 $\vartheta \in [1, 2]$对应的空间 $\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$。在幂空间这一特定情形下，这些一般的超收敛论述可以通过 H¨older 不等式证明。

$$\left|\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_1(\Omega)}\right| \leq \|f\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} \cdot \|g\|_{\mathcal{H}_{2-\vartheta}(\Omega)}, \tag{24}$$

对于 $f \in \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$ $g \in \mathcal{H}_{2-\vartheta}(\Omega)$， $\vartheta \in [1, 2]$ 以及插值不等式

$$\|f\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)}^{1-\vartheta} \cdot \|f\|_{\mathcal{H}_k(\Omega)}^{\vartheta}, \qquad f \in \mathcal{H}_k(\Omega). \tag{25}$$

公式（24）和公式（25）直接结合即可得出公式（6）中关于[10],的直接表述，为方便起见，我们给出简要证明:

定理 7。 考虑一个核 k ，它满足公式(4) ，其中 $\tau > d/2$ ，且有界利普希茨区域$\Omega \subset \mathbb{R}^d$。考虑 $f \in \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$ ，其中 $\vartheta \in [1,2]$。则有

$$\|f - s_{f,X}\|_{L_2(\Omega)} \leq C h_X^{\vartheta\tau} \cdot \|f\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)}$$

对任意 $X \subset \Omega$，结论均成立。

证明。 我们从公式（15）的标准误差界出发

$$\|f - s_{f,X}\|_{L_2(\Omega)} \leq C h_X^\tau \|f - s_{f,X}\|_{\mathcal{H}_k(\Omega)},$$

并进一步利用公式（24）和公式（25）估计 $\|f - s_{f,\ X}\|_{\mathcal{H}_k(\Omega)}$ 因子。注意，核插值函数可以表示为正交投影，见公式（3）：

$$\begin{aligned}
\|f - s_{f,X}\|^2_{\mathcal{H}_k(\Omega)} &= \langle f, f - s_{f,X}\rangle_{\mathcal{H}_k(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} \cdot \|f - s_{f,X_n}\|_{\mathcal{H}_{2-\vartheta}(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} \cdot \|f - s_{f,X}\|^{\vartheta-1}_{L_2(\Omega)} \cdot \|f - s_{f,X}\|^{2-\vartheta}_{\mathcal{H}_k(\Omega)} \\
\Leftrightarrow \|f - s_{f,X}\|_{\mathcal{H}_k(\Omega)} &\leq \|f\|^{\frac{1}{\vartheta}}_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} \cdot \|f - s_{f,X}\|^{\frac{\vartheta-1}{\vartheta}}_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

将两者结合并重新整理，即得所求结果。 □

幂空间 $\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$ 也可以描述为积分算子在 $L_p(\Omega)$ 空间下像的闭包。为证明主要结果定理 1，我们特别需要以下陈述，该陈述引自 $[10,$ 定理 $29]$

$$\overline{TL_2(\Omega)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)}} = \mathcal{H}_\vartheta(\Omega), \qquad \forall \vartheta \in [0,2]. \tag{26}$$

3 实用性命题

本节将推导一些（技术性的）实用性结果。这些结果本身就很重要，也是证明主要结果的关键。只关注主要命题及其证明的读者，可以先阅读第 4 节，之后再回来。请注意，在下文的证明中，常数可能会逐行变化。

3.1 广义再生性质

证明逆命题定理 1 的一个关键步骤是下面这个定理。我们将其称为广义再生性质，因为它推广了标准再生性质:

命题 8 （广义再生性质）。 在定理 *2* 的条件下，令 $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 使得 $2\vartheta_1 - \vartheta_2 > \frac{d}{2\tau}$。则对所有$x, z \in \Omega$均成立:

$$\langle k^{(\vartheta_1)}(\cdot, x), k^{(\vartheta_1)}(\cdot, z)\rangle_{\mathcal{H}_{\vartheta_2}(\Omega)} = k^{(2\vartheta_1 - \vartheta_2)}(x, z)$$

证明。 这是一个直接的计算，其中的收敛性由$2\vartheta_1 - \vartheta_2 > \frac{d}{2\tau}$保证（参见式 (23)附近的讨论）：

$$\begin{aligned}\langle k^{(\vartheta_1)}(\cdot,x), k^{(\vartheta_1)}(\cdot,z)\rangle_{\mathcal{H}_{\vartheta_2}(\Omega)} &\equiv \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle k^{(\vartheta_1)}(\cdot,x),\varphi_j\rangle_{L_2(\Omega)}\langle k^{(\vartheta_1)}(\cdot,z),\varphi_j\rangle_{L_2(\Omega)}}{\lambda_j^{\vartheta_2}} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{\vartheta_2}} \cdot \lambda_j^{\vartheta_1}\varphi_j(x) \cdot \lambda_j^{\vartheta_1}\varphi_j(z) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\vartheta_1-\vartheta_2} \cdot \varphi_j(x)\varphi_j(z) \\ &\equiv k^{(2\vartheta_1-\vartheta_2)}(x,z).\end{aligned}$$

□

注意，核 $k^{(\vartheta_1)}(\cdot,x)$ 仅在 $\vartheta_1 \geq \frac{d}{2\tau}$ 时有定义；不过，只要满足 $2\vartheta_1 - \vartheta_2 > \frac{d}{2\tau}$，左侧的表达式对更大的 ϑ_1, ϑ_2 取值也有意义。对于 $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 1$，可由式 (9) 重新得到标准再生性质，即 $\langle k(\cdot,x)\ k(\cdot,z)\rangle_{\mathcal{H}_k(\Omega)} = k(x,z)$。此外，注意到定理 8 之所以成立，是因为根据 [23, 定理 5.3]，我们有

$$\begin{aligned} k(\cdot,x) \in \mathcal{H}_\vartheta(\Omega) \quad \forall x \in \Omega \quad &\Leftrightarrow \quad k^{(2-\vartheta)} \text{ is well defined} \\ &\Leftrightarrow \quad \vartheta \in \left[0, 2 - \frac{d}{2\tau}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

定理 8 的陈述并非关键依赖于定理 2；事实上，只要 Mercer 定理适用，它就成立。

3.2 伯恩斯坦不等式

在本小节中，我们首先对逃逸原生空间情形中的一个伯恩斯坦不等式稍作推广：文献 [2, 24] 中关于该情形的伯恩斯坦不等式实际上仅针对径向基函数核给出并证明。通过仔细检查相关文献中的证明，我们发现该伯恩斯坦不等式实际上对非径向核也成立。其次，我们将该逃逸原生空间情形下的伯恩斯坦不等式推广到超收敛区域。这意味着我们关注的是以较弱范数来控制 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)}$ 范数。为此，我们陈述并证明使用 $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ 范数的最基本形式，并指出，通过应用插值理论，将其推广到左侧使用其他中间范数的情形是直接的。

命题 9 （逃逸区间中的伯恩斯坦不等式）。 *在定理 2 的条件下，设 $\vartheta \in [0,1]$。则存在常数 $C = C_{d,k,\tau,\Omega} > 0$，使得以下伯恩斯坦逆不等式成立*

$$\|u\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} \asymp \|u\|_{H^{\vartheta\tau}(\Omega)} \leq C q_X^{-\vartheta\tau} \|u\|_{L_2(\Omega)} \tag{28}$$

对所有点集 $X \subset \Omega$ 以及所有试探函数 $u \in \operatorname{span}\{k(\cdot,x)\ x \in X\}$。

定理 9 的证明只是仔细核查文献中给出的证明，并不需要任何新的重要思路。因此，我们在 A.1 节给出证明。

命题 10（超收敛区域中的伯恩斯坦不等式）。 在定理 *2* 的条件下，设 $\vartheta \in [1, 2 - \frac{d}{2\tau})$。那么存在常数 $C = C_{d,k,\tau,\Omega} > 0$，使得下列伯恩斯坦逆不等式成立

$$\|u\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} \leq C q_X^{-\vartheta\tau} \|u\|_{L_2(\Omega)} \tag{29}$$

对于所有点集 $X \subset \Omega$ 以及所有试探函数 $u \in \operatorname{span}\{k(\cdot, x)\ x \in X\}$。

证明。 考虑 $u = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j k(\cdot,\ x_j)$。利用定理 8 中的广义再生性质，我们得到

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} &= \sum_{i,j=1}^{M} \alpha_i \alpha_j \langle k(\cdot, x_i), k(\cdot, x_j)\rangle_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{M} \alpha_i \alpha_j k^{(2-\vartheta)}(x_i, x_j) \\ &=: \alpha^\top A^{(2-\vartheta)} \alpha.\end{aligned}$$

这里，我们引入了 $A^{(2-\vartheta)}$，表示使用核 $k^{(2-\vartheta)}$的核矩阵。接下来代入 $A^{1/2}A^{-1/2}$，其中 A表示使用核 k的核矩阵:

$$\begin{aligned}&= \alpha^\top A^{1/2} A^{-1/2} A^{(2-\vartheta)} A^{-1/2} A^{1/2} \alpha \\ &\leq \|A^{1/2}\alpha\|^2 \cdot \|A^{-1/2} A^{(2-\vartheta)} A^{-1/2}\|_{2,2} \\ &\leq (\alpha^\top A \alpha) \cdot \lambda_{\max}(A^{-1/2} A^{(2-\vartheta)} A^{-1/2}) \\ &= \|u\|^2_{\mathcal{H}_k(\Omega)} \cdot \max_{0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^n} \frac{\alpha^\top A^{-1/2} A^{(2-\vartheta')} A^{-1/2} \alpha}{\alpha^\top \alpha} \\ &= \|u\|^2_{\mathcal{H}_k(\Omega)} \cdot \max_{0 \neq \beta \in \mathbb{R}^n} \frac{\beta^\top A^{(2-\vartheta')} \beta}{\beta^\top A \beta}.\end{aligned}$$

对于第一个因子，我们可以直接应用伯恩斯坦不等式（公式（28）），得到上界 $\left(C q_X^{-\tau} \|u\|_{L_2(\Omega)}\right)^2$。对于第二个因子，我们利用谱对齐结果 [29, 推论 4。6], 得到上界 $C q_X^{(1-\vartheta)2\tau}$。化简该表达式即可得到所需结果。

□

注意到，定理 10 将定理 9 自然地推广到了超收敛范数，而由于公式 (27)，限制条件 $\vartheta < 2 - \frac{d}{2\tau}$ 是必要的。两条结论结合起来，为完整范围 $\vartheta \in [0, 2 - \frac{d}{2\tau})$ 内的情形给出了伯恩斯坦不等式，我们将其表述为以下定理:

定理 11 (伯恩斯坦不等式)。 在定理 *2* 的条件下，设 $\vartheta \in [0, 2 - \frac{d}{2\tau})$。那么存在常数 $C = C_{d,k,\tau,\Omega} > 0$，使得下列伯恩斯坦逆不等式成立

$$\|u\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} \leq C q_X^{-\vartheta\tau} \|u\|_{L_2(\Omega)} \tag{30}$$

对所有点集 $X \subset \Omega$ 以及所有试探函数 $u \in \operatorname{span}\{k(\cdot, x)\ x \in X\}$。

3.3 密度函数的构造

在本小节中，我们给出密度函数 v_n 的构造，使得 Tv_n逼近目标函数 f。我们首先说明采用这一方法的动机，然后给出精确定义并推导其必要性质。

3.3.1 动机

第 3.3 节的动机是为在范围 $\vartheta \in (2 - \frac{d}{2\tau},\ 2]$ 内证明主要结果的证明方法奠定数学基础。在此范围内，根据公式 (27)，有 $k(\cdot,\ x) \notin \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$，因此不能再像情况 $\vartheta \in (0,\ 2 - \frac{d}{2\tau})$ 那样依赖相同的证明策略，后者使用 $s_{f,\ X_n} = \sum_{j=1}^{|X_n|} \alpha_j k(\cdot,\ x_j)$ 作为试探函数。

因此，我们的想法是利用 $\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$的刻画，即将$\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)}$ 作为 $TL_2(\Omega)$的范数闭包，见式（26）。因此，本小节将介绍密度函数的构造（v_n）$_{n\in\mathbb{N}} \subset L_2(\Omega)$，使得 $Tv_n \to f$。这些密度函数 v_n将基于$s_{f,Z} = \sum_{j=1}^{|Z|} \alpha_j k(\cdot, z_j)$的系数 α_j 来定义；反过来看，系数（α_j）$_{j=1}^{|Z|}$ 构成了对密度函数的离散化。其动机如下：

$$k(\cdot, x) = \lim_{\varepsilon\to 0} T\delta_{x,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega k(\cdot, z)\delta_{x,\varepsilon}(z)\ \mathrm{d}z, \tag{31}$$

其中（$\delta_{x,\varepsilon}$）$_{\varepsilon>0}$ 是 $\varepsilon \to 0$的狄拉克δ函数的一个逼近。我们尤其会用到$\delta_{x,\varepsilon}$（z）$= \frac{1}{\varepsilon^d} \cdot \mathbb{1}_{x+[0,\varepsilon]^d}$（$z$），它可以将区域Ω优雅地分解，并利用小立方体对其进行逼近。

3.3.2 关于基于核的逼近方法的假设

为了尽可能地适用于一般情形，我们对基于核的逼近方法引入如下假设：

假设12。 设 k：Ω ×Ω $\to \mathbb{R}$ 是紧致利普希茨区域 Ω $\subset \mathbb{R}^d$上的连续严格正定核。我们考虑一种基于点的核逼近方法，即对于任意两两不同的 $X \subset \Omega$，我们得到一个近似函数

$$s_{f,X} =: \sum_{x_i\in X} \alpha_{f,X;x_i} k(\cdot, x_i)$$

其系数为 $(\alpha_{f,X;x_i})_{i=1,\ldots,|X|} \subset \mathbb{R}^{|X|}$。对于任意 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$，我们假设系数 $(\alpha_{f,X;x_i})_{i=1,\ldots,|X|}$ 关于 X 连续变化。

接下来我们将看到，该假设经常能够得到满足，例如对于核插值或正则化核插值。

命题13。 设 k：Ω × Ω $\to \mathbb{R}$ 是紧致利普希茨区域 Ω $\subset \mathbb{R}^d$上的连续严格正定核。那么，核插值和正则化核插值都满足定理*12*。

证明。 对于任意一组两两不同的 $X \subset \Omega$，核插值和正则化核插值的系数 α_X :=($\alpha_{f,\ X;x_i}$)$_{i=1,\ \ldots,\ |X|} \in \mathbb{R}^{|X|}$ 由线性方程组的解确定

$$\begin{aligned} &(A_X + \lambda\mathbb{1})\alpha_X = f(X), \\ \Leftrightarrow\quad &\alpha_X = (A_X + \lambda\mathbb{1})^{-1} f(X). \end{aligned}$$

这里， A_X是式（8）中定义的核矩阵，且 $f(X) := (f(x_i))_{i=1,\ldots,|X|} \in \mathbb{R}^{|X|}$。此外，对于核插值有 $\lambda = 0$，对于正则化核插值有 $\lambda > 0$。

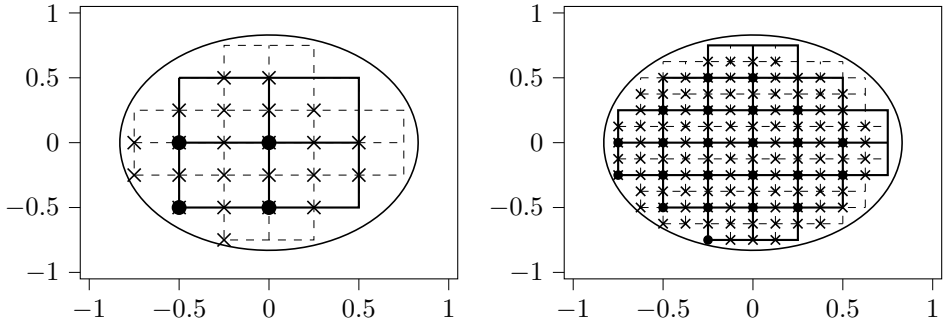

图2：借助$Z_n + [0, 2^{-n}]^d$从内部对 Ω 进行逼近的可视化示例。在此例中，Ω 是一个半径为 0.83 的圆，并展示了 $n = 1$ （左）和 $n = 2$ （右）对应的 Z_n （实心点）与 Z_{n+1} （叉号）。

由于假设核 k 在 $\Omega \times \Omega$ 上连续，且 f 在 Ω 上连续，因此 $X \mapsto (k(X, X) + \lambda)^{-1}$和 $X \mapsto f(X)$均连续。由此可知，$X \mapsto \alpha_X$ 是连续的。

□

定理12使我们能够为一般的基于核的逼近方法（不局限于核插值）开发后续工具。

3.3.3 密度函数的定义

为了对核积分算子 T的积分进行有意义的离散化，我们将在此考虑由网格与区域 Ω 的交集构成的中心点集合 X 。具体而言，对于 $n \in \mathbb{N}$，我们定义

$$Z_n := \{z \in 2^{-n}\mathbb{Z}^d \mid z + [0, 2^{-n}]^d \subset \Omega\}, \tag{32}$$

请注意，根据定义，对于所有 $b \in [0, 2^{-n}]^d$，都有 $Z_n + b \in \Omega$；此外，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有$Z_n \subseteq Z_{n+1} \subset \Omega$。我们使用 Z 而非 X，以便将这些基于网格的集合与可能分散分布的集合区分开来。由此可立即得出

$$Z_n + [0, 2^{-n}]^d \subset Z_{n+1} + [0, 2^{-(n+1)}]^d \subset \Omega.$$

有限元文献中也研究了此类构造，例如 Whitney分解。如果 Ω 是 Jordan可测的——利普希茨区域正是如此——那么这种逼近将从内部填充 Ω，见图2。

作为第一个技术性陈述，我们刻画了对于任意 $b \in [0, 2^{-n}]^d$ 的$Z_n + b$ 的填充距离和分离距离。本质上，我们证明了集合序列 $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$是准均匀的，即满足定理 4。该陈述本身可能以类似形式为文献所知，但我们未能找到相关出处。因此，我们给出了一个简明的几何证明，并在图3中对证明思路进行了可视化。

命题14。 设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个利普希茨区域。那么存在 $n_0 \in \mathbb{N}$和常数 $c_\Omega, C_\Omega > 0$，使得对于所有 $n \geq n_0$，任意$b \in [0, 2^{-n}]^d$ 对应的点集 $Z_n + b$ 都满足以下一致性界：

$$c_\Omega 2^{-n} = c_\Omega q_{Z_n+b} \leq h_{Z_n+b} \leq C_\Omega q_{Z_n+b} = C_\Omega 2^{-n}.$$

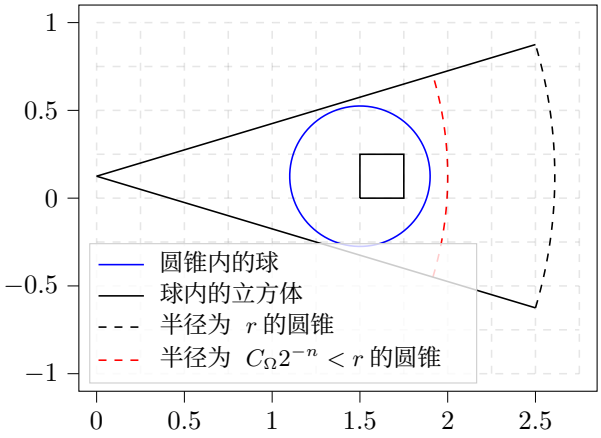

图 3：定理 14 证明的示意图：对于任意 $x \in \Omega$，圆锥条件给出一个球，因此区域内存在一个立方体，且该立方体距离点 x不太远。

证明。 由于 Ω 是一个利普希茨区域，因此满足内部圆锥条件 [11, 引理 1.5]。设 r 和 α 分别为该圆锥条件的半径和角度。我们定义 $C_\Omega := 2\sqrt{d} \cdot \frac{1+\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)} > 1$，并将 $n_0 \in \mathbb{N}$ 定义为满足 $C_\Omega 2^{-n_0} < r$的最小整数。

我们首先给出填充距离的上界，其定义为 $h_{Z_n} := \sup_{x\in\Omega} \min_{z\in Z_n} \|x - z\|_2$。因此，设 $x \in \Omega$。由于内部圆锥条件，我们有一个位于 Ω 内的圆锥 $C(x, \xi(x), \alpha, r)$，即

$$C(x, \xi(x), \alpha, r) \subset \Omega.$$

对于 $n \geq n_0$，我们考虑较小的圆锥 $C(x, \xi(x), \alpha, C_\Omega 2^{-n})$。根据 n_0的定义，对于 $n \geq n_0$，我们有 $C_\Omega 2^{-n} \leq C_\Omega 2^{-n_0} < r$，即

$$C(x, \xi(x), \alpha, C_\Omega 2^{-n}) \subset C(x, \xi(x), \alpha, r).$$

根据 [11, 引理 1.1]，，该圆锥内存在一个半径为 $\frac{\sin(\alpha)}{1+\sin(\alpha)} C_\Omega 2^{-n}$ 的球，其球心位于某个 $\tilde{x} \in C(x, \xi(x), \alpha, C_\Omega 2^{-n})$，即

$$B_{2\sqrt{d}2^{-n}}(\tilde{x}) \subset C(x, \xi(x), \alpha, C_\Omega 2^{-n}).$$

现在我们证明，在这个球 $B_{2\sqrt{d}2^{-n}}(\tilde{x})$ 内，存在一个立方体 $z + [0, 2^{-n}]^d$，其中某个 $z \in \mathbb{Z}_n$：$\tilde{x}$ 到 $2^{-n}\mathbb{Z}^d$ 的距离至多为 $\frac{1}{2}\sqrt{d} \cdot 2^{-n}$，而边长为 2^{-n} 的立方体的直径为 $\sqrt{d}2^{-n}$。由于该球的半径为$2\sqrt{d}2^{-n} > \frac{1}{2}\sqrt{d}2^{-n} + \sqrt{d}2^{-n}$，因此存在一个 $z \in 2^{-n}\mathbb{Z}^d$，使得 $z + [0, 2^{-n}]^d$包含在该球内，即

$$z + [0, 2^{-n}]^d \subset B_{2\sqrt{d}2^{-n}}(\tilde{x}) \subset \Omega \qquad \text{for } z \in 2^{-n}\mathbb{Z}^d.$$

由于该立方体完全包含于 Ω 中，因此有 $z \in Z_n$。现在，我们终于可以估计对于任意 $b \in [0, 2^{-n}]^d$，x 到 $Z_n + b$ 的距离：由于 $x \in C(x, \xi(x), \alpha, C_\Omega 2^{-n})$ 以及 $z + [0, 2^{-n}]^d \subset C(x, \xi(x), \alpha, C_\Omega 2^{-n})$，我们有 $\operatorname{dist}(x, Z_n + b) \leq C_\Omega 2^{-n}$，从而$h_{Z_n+b} \leq C_\Omega 2^{-n}$。

现在我们给出一个关于分离距离的估计：由于对于任意$n \in \mathbf{N}$，都有 $Z_n \subset 2^{-n}\mathbf{Z}^d$，我们立即得到 $q_{Z_n} = 2^{-n}$，从而对于任意 $n \in \mathbf{N}$，有 $q_{Z_n+b} = 2^{-n}$。

结合两个估计，我们得到一致性界 $\frac{h_{Z_n+b}}{q_{Z_n+b}} \leq C_\Omega \Leftrightarrow h_{Z_n+b} \leq C_\Omega q_{Z_n+b}$，适用于任意 $b \in [0, 2^{-n}]^d$。

剩余的界 $c_\Omega q_{Z_n+b} \leq h_{Z_n+b}$ 与集合 $Z_n + b$ 无关；事实上，通过体积比较论证，它对任意点集 $X \subset \Omega$ 都成立，见式 (12)。

□

接下来，给定一个连续函数 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$，我们根据基于核的近似函数的系数 $(\alpha_j)_j$ 定义一个分段连续密度函数 $D_{Z_n}(f) : \Omega \to \mathbf{R}$：由于 Z_n 是 $2^{-n}\mathbf{Z}^d$ 的子集，因此 $x \in Z_n + [0, 2^{-n})^d \subset \Omega$ 存在唯一分解，表示为

$$x = z(x) + b(x), \qquad z(x) \in Z_n,\ b(x) \in [0, 2^{-n})^d. \tag{33}$$

定义 15。考虑 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ 以及式(34)中的给定基于核的逼近方案，例如基于核的插值。

- 对于 $x \in \Omega \setminus (Z_n + [0, 2^{-n}))^d$，我们设 $D_{Z_n}(f)(x) := 0$。
- 对于 $x \in Z_n + [0, 2^{-n})^d \subset \Omega$，我们考虑式 (33)的唯一分解 $x = z(x) + b(x)$，并考虑基于中心点 $Z_n + b(x)$ 对 f 的核近似函数 $s_{f,\ Z_n+b(x)}$，

$$s_{f,Z_n+b(x)} =: \sum_{x_i \in Z_n+b} \alpha_{f,Z_n+b(x);x_i} k(\cdot, x_i). \tag{34}$$

然后我们通过以下方式定义 $D_{Z_n}(f)$

$$D_{Z_n}(f)(x) := 2^{nd} \cdot \alpha_{f,Z_n+b(x);x} \tag{35}$$

该定义是良定义的，因为对于给定的 $n \in \mathbf{N}$，存在唯一的$b(x) \in [0, 2^{-n})^d$ 以及唯一的 $z \in 2^{-n}\mathbf{Z}^d$，使得 $x = b(x) + z$，参见式（33）。请注意，该定义并未说明核近似函数 $s_{f,\ X}$ 的具体形式：它不依赖于其是否为基于核的插值函数，因此也适用于例如正则化的基于核的近似或核伽辽金方法。图4展示了通过核插值获得的函数 $D_{Z_n}(f)$，其中 $n \in \{3, 4, 5\}$。

3.3.4 密度函数的性质

接下来，我们将推导所构造的密度函数$D_{Z_n}(f)$和$TD_{Z_n}(f)$的若干必要性质。首先需要证明，所构造的密度函数$D_{Z_n}(f)$是分段连续的。当式（34）的系数$\alpha_{f,Z_n+b(x);x_i}$以连续的方式依赖于 $b(x)$时，即在定理12的条件下，结论成立。

命题 16. 设 $k : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ 是定义在紧致利普希茨区域$\Omega \subset \mathbb{R}^d$上的连续严格正定核。考虑一种满足定理*12*的基于核的逼近方法。

给定 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$，可得密度函数 $D_{Z_n}(f)$ 在$z + (0, 2^{-n})^d$ 上对任意 $z \in 2^{-n}\mathbb{Z}^d$ 均为连续函数。此外，$D_{Z_n}(f)|_{z+(0,2^{-n})^d}$ 可连续延拓至 $z + [0, 2^{-n}]^d$。

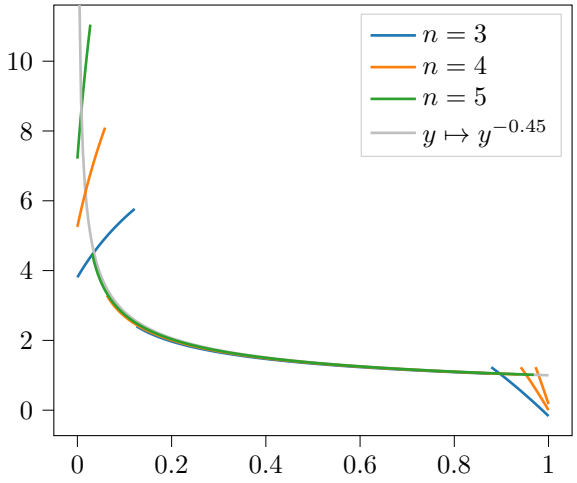

图4：通过核插值获得的密度函数 $D_{Z_n}(f)$ 的可视化，其中 Ω 上的 $n \in \{3,4,5\}$ 由 $f = Tv$ 给出，且 f 满足 $v(z) = z^{-0.45} \in L_2(\Omega)$。可以清楚地观察到这些函数具有分段连续的性质。本例使用了 Wendland 核 $k(x, z) = \max(1 - |x - z|, 0)$。

证明。对于 $z \in 2^{-n}\mathbb{Z}^d \setminus Z_n$，密度函数 $D_{Z_n}(f)$ 定义为零，因此是连续的。对于 $z \in Z_n \subset \Omega$，函数值由式 (35) 得出。由于假设基于核的逼近方法满足定理12，系数 $(\alpha_{f,Z_n+b(x);x_i})_{i=1,\dots,|Z_n+b(x)|}$ 关于 $Z_n + b(x)$ 连续，因此也关于 $b(x)$ 连续，其中 $b(x) \in (0, 2^{-n})^d$。回忆一下，当且仅当$z + [0, 2^{-n}]^d \subset \Omega$ 时，$z \in Z_n$ 成立。因此，系数向量 $(\alpha_{f,Z_n+b(x);x_i})_{i=1,\dots,|Z_n+b(x)|}$（作为 $b(x)$ 中的函数）可连续延拓至 $z + [0, 2^{-n}]^d$。 □

根据前一个命题，我们可以立即得出 $D_{Z_n}(f)$ 有界，因此 $D_{Z_n}(f) \in L_2(\Omega)$。所以 $TD_{Z_n}(f) \in TL_2(\Omega) \subset C(\Omega)$。

接下来，我们要证明 $TD_{Z_n}(f)$ 在 $L_2(\Omega)$ 中收敛到 f，其中 $n \to \infty$。甚至可以对这一结论进行量化：

命题17。给定 $f \in C(\Omega)$，假设其满足

$$\|f - s_{f,X}\|_{L_2(\Omega)} \leq C h_X^\beta$$

对于某个 $\beta > 0$ 以及所有准均匀的 $X \subset \Omega$，均有

$$\|f - TD_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)} \leq C 2^{-n\beta}.$$

请注意，收敛速率 $2^{-n\beta}$ 与 h_X^β 给出的速率相匹配，但其表达方式是基于 Z_n的离散化层级 n。本质上，$s_{f,X}$的假设逼近速率可延续至 $TD_{Z_n}(f)$，且速率没有任何损失。

证明。 为了表明$\|f - s_{f,X}\|_{L_2(\Omega)}$上的收敛速率基本上也适用于 $\|f - TD_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)}$，我们利用公式（31）以及.....的分段连续性

$TD_{Z_n}(f)$，这使得我们可以借助黎曼和对 $L_2(\Omega)$ 积分进行离散化。我们有：

$$\|f - TD_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_\Omega |f(x) - TD_{Z_n}(f)(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

我们根据 $D_{Z_n}(f)$ 的定义进行计算

$$\begin{aligned}
TD_{Z_n}(f) &= \int_\Omega k(\cdot, y) D_{Z_n}(f)(z) \, \mathrm{d}z \\
&= \int_{Z_n + [0,2^{-n}]^d} k(\cdot, z) D_{Z_n}(f)(z) \, \mathrm{d}z \\
&= \sum_{z \in Z_n} \int_{z+[0,2^{-n}]^d} k(\cdot, z) D_{Z_n}(f)(z) \, \mathrm{d}z \\
&= \sum_{z \in Z_n} \lim_{N\to\infty} \frac{2^{-nd}}{N^d} \cdot \sum_{b \in \frac{2^{-n}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} k(\cdot, z+b) 2^{nd} \alpha_{f, Z_n + b; z+b}.
\end{aligned}$$

在最后一步中，利用网格点 b in $2^{-n}[0,1]^d$ 上的黎曼逼近，将积分替换为其极限。由于定理 16 保证了分段连续性，因此这是可行的。对求和进行一些化简和重排后，得到

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \cdot \sum_{b \in \frac{2^{-n}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} \sum_{z \in Z_n} k(\cdot, z+b) \alpha_{f, Z_n + b; z+b} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \cdot \sum_{b \in \frac{2^{-n}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} s_{f, Z_n + b}.
\end{aligned}$$

因此，我们最终可以估计：

$$\begin{aligned}
\|f - TD_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)} &= \left\| f - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \cdot \sum_{b \in \frac{2^{-n}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} s_{f, Z_n + b} \right\|_{L_2(\Omega)} \\
&\le \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \sum_{b \in \frac{2^{-n}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} \|f - s_{f, Z_n + b}\|_{L_2(\Omega)} \\
&\le \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \sum_{b \in \frac{2^{-n}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} C h_{Z_n + b}^\beta.
\end{aligned}$$

根据定理 14，任意 $b \in [0, 2^{-n}]^d$ 的填充距离 h_{Z_n+b} 都可以界定为 $C_\Omega 2^{-n}$，因此最终结论立即成立。 □

接下来，为了证明某些空间中的柯西序列性质（参见定理 1 的证明），我们需要精确界定 $\|D_{Z_n} f - D_{Z_{n+1}} f\|_{L_2(\Omega)}$。为此，我们需要以下关于系数向量范数 $(\alpha_j)_{j=1}^{|X|}$ 的实用性命题。该命题是 [28, 命题 6] 与定理 9 的基本组合：

命题 18. 设 $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^{|X|} \in \mathbb{R}^{|X|}$ 为 $s_X = \sum_{j=1}^{|X|} \alpha_j k(\cdot, x_j)$ 的系数向量，且 $X := \{x_1, ..., x_{|X|}\}$。则有

$$\|\alpha\|_{\ell_2} \leq C q_X^{d/2-2\tau} \|s_X\|_{L_2(\Omega)}. \tag{36}$$

证明。 我们计算

$$\begin{aligned}\|\alpha\|_{\ell_2}^2 &= \alpha^\top A_X^{1/2} A_X^{-1} A_X^{1/2} \alpha \leq \|A_X^{-1}\|_{2,2} \cdot \alpha^\top A_X \alpha \\ &\leq \|A_X^{-1}\|_{2,2} \cdot \|s_X\|_{\mathcal{H}_k(\Omega)}^2 \\ &\leq C q_X^{d-2\tau} q_X^{-2\tau} \|s_X\|_{L_2(\Omega)}^2,\end{aligned}$$

其中最后一步用到了式 (16) 和式 (28)。 □

请注意，式 (36) 这类使用 ℓ_p 和 L_p 范数的不等式已在 [25,定理 5.3], 中讨论并推导，但使用的是 $L_p(\mathbb{R}^d)$ 而非 $L_p(\Omega)$。因此，定理 18 为 $p = 2$的情形提供了这些不等式的局部化版本。

有了这个命题，我们可以证明关于 $D_{Z_n}(f)$ 的以下 $L_2(\Omega)$ 界。请注意，对于 $\beta < 2\tau$，上界会随着 n增大。

命题 19。 设 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$，并假设其成立

$$\|f - s_{f,X}\|_{L_2(\Omega)} \leq C h_X^\beta \tag{37}$$

对某个 $\beta > 0$ 成立，且对所有准均匀的 $X \subset \Omega$均成立。则有

$$\|D_{Z_n} f\|_{L_2(\Omega)} \leq C 2^{-n(\beta-2\tau)}.$$

证明。 首先，我们希望估计 $\alpha_{f,Z_n+b} \in \mathbb{R}^{|Z_n|}$ 的系数向量 $s_{f,Z_n+b} \equiv \sum_{x_i \in Z_n+b} \alpha_{f,Z_n+b;x_i} k(\cdot, x_i)$ 的范数，其中 $b \in [0, 2^{-n}]^d$ 为任意值，参见公式 (34)：对于 $b \in [0, 2^{-n}]^d$，我们使用满足 $Z_n + b + b' \in Z_n + [0, 2^{-n}]^d \subset \Omega$ 的 $b' \in \{-2^{-(n+1)}, 2^{-(n+1)}\}^d \in \mathbb{R}^d$。于是有

$$\begin{aligned}\|s_{f,Z_n+b} - s_{f,Z_n+b+b'}\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|s_{f,Z_n+b} - f\|_{L_2(\Omega)} + \|f - s_{f,Z_n+b+b'}\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq C h_{Z_n+b}^\beta + C h_{Z_n+b+b'}^\beta \\ &\leq C 2^{-n\beta},\end{aligned}$$

其中，最后一步使用定理 14 对填充距离进行了估计。由于 Z_n+b 和 Z_n+b+b' 不相交，$s_{f,Z_n+b} - s_{f,Z_n+b+b'}$ 的系数向量的范数平方等于 s_{f,Z_n+b} 的系数向量范数平方与 $s_{f,Z_n+b+b'}$ 的系数向量范数平方之和，即为 $\|\alpha_{f,Z_n+b}\|_{\ell_2}^2 + \|\alpha_{f,Z_n+b+b'}\|_{\ell_2}^2$。因此，根据定理 18，我们得到

$$\begin{aligned}\|\alpha_{f,Z_n+b}\|_{\ell_2}^2 + \|\alpha_{f,Z_n+b+b'}\|_{\ell_2}^2 &\leq C^2 q_{(Z_n+b)\cup(Z_n+b+b')}^{d-4\tau} \|s_{f,Z_n+b} - s_{f,Z_n+b+b'}\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &\leq C 2^{-(n+1)(d-4\tau)} 2^{-2n\beta} \\ &\leq C 2^{-nd-2n(\beta-2\tau)},\end{aligned}$$

尤其是

$$\|\alpha_{f,Z_n+b}\|_{\ell_2}^2 \leq C 2^{-nd-2n(\beta-2\tau)}. \tag{38}$$

利用这个对任意 $b \in [0, 2^{-n}]^d$ 都成立的界，我们可以给出 $\|D_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)}$ 的上界。为此，我们先对任意 $b \in [0, 2^{-n}]^d$ 给出上界：

$$\begin{aligned}\|D_{Z_n}(f)\|_{\ell_2(Z_n+b)}^2 &:= \sum_{z\in Z_n+b} |D_{Z_n}(f)(z)|^2 \\ &= \sum_{z\in Z_n+b} |2^{nd}\alpha_{f,Z_n+b;z}|^2 \\ &= 2^{2nd}\cdot\|\alpha_{f,Z_n+b}\|_{\ell_2}^2 \\ &\le C2^{nd-2n(\beta-2\tau)}.\end{aligned}$$

根据定理 16 的分段连续性，我们可以通过黎曼和来近似积分 $\|D_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)}$：

$$\begin{aligned}\|D_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega |D_{Z_n}(f)(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{z\in Z_n}\int_{z+[0,2^{-n}]^d} |D_{Z_n}(f)(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{z\in Z_n}\lim_{N\to\infty}\frac{2^{-nd}}{N^d}\sum_{b\in\frac{2^{-n}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} |D_{Z_n}(f)(z+b)|^2 \\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{2^{-nd}}{N^d}\sum_{b\in\frac{2^{-n}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d}\sum_{z\in Z_n} |D_{Z_n}(f)(z+b)|^2 \\ &\le \lim_{N\to\infty}\frac{2^{-nd}}{N^d}\sum_{b\in\frac{2^{-n}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} C2^{nd-2n(\beta-2\tau)} \\ &= C2^{-2n(\beta-2\tau)}.\end{aligned}$$

□

注意，定理 19 立即推出以下界

$$\|D_{Z_n}f - D_{Z_{n+1}}f\|_{L_2(\Omega)} \le C2^{n(2\tau-\beta)}$$

由三角不等式可得。

4 核逼近的尖锐逆向陈述与饱和

本节陈述并证明第 4.1 节中的主要结果，并在随后第 4.2 节中进行讨论。

4.1 主要结果

我们重述主定理，简要阐述证明策略，然后给出完整证明：

定理 1. *[主要结果]* 考虑一个紧致利普希茨区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 以及一个连续核 k，满足 $\mathcal{H}_k(\Omega) \asymp H^\tau(\Omega)$，其中某个 $\tau > d/2$。考虑 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$以及估计

$$\|f - s_{f,X}\|_{L_2(\Omega)} \leq c_f h_X^\beta, \tag{7}$$

其中 $s_{f,\ X} \in \mathrm{span}\{k(\cdot, x)\ x \in X\}$ 是一个基于核的近似函数。

(i) 若对某个 $\beta \in (0,\ 2\tau - \frac{d}{2}]$ 存在一个满足定理 *4* 的点集序列$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$，式 (7) 成立，则对所有 $\vartheta \in [0, \frac{\beta}{\tau})$，$f \in \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$。

此外，假设定理*12*成立，则有

(ii) 若对某个 $\beta \in [2\tau - \frac{d}{2}, 2]$ 任意准均匀[2]序列$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$，式 (7) 成立，则对所有 $\vartheta \in [0, \frac{\beta}{\tau})$，$f \in \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$。

(iii) 若对某个 $\beta > 2\tau$ 任意准均匀[2] 序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$，式 (7) 成立，则 $f = 0$。

在给出证明之前，我们先简要阐述证明策略：情形$\beta \in (0, \tau]$ 已在 [28] 中讨论，并在 [2], 中得到改进；由于假设略有变化，这里再次处理该情形。证明时，考虑满足定理 4 的序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 所对应的近似函数序列 $(s_{f,X_n})_{n\in\mathbb{N}}$。利用定理 9 中的伯恩斯坦不等式，可以证明对于任意 $\vartheta' < \frac{\beta}{\tau}$，该序列在$\mathcal{H}_{\vartheta'}(\Omega)$中是柯西序列。随后通过标准论证即可完成证明。对于新的情形 $\beta \in (\tau, 2\tau - \frac{d}{2})$，可以考虑相同的序列 $(s_{f,\ X_n})_{n\in\mathbb{N}}$，因为根据公式 (27)，当 $\vartheta < 2 - \frac{d}{2\tau}$ 时，实际上 $k(\cdot, x) \in \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$。利用定理 10 中新提出的超收敛伯恩斯坦不等式，相同的证明策略仍然适用。另一个新的情形 $\beta \in (2\tau - \frac{d}{2}, 2\tau]$ 则更具挑战性，因为 $k(\cdot, x) \notin \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$，所以之前的证明策略不再适用。因此，我们的思路是利用公式 (26)，改为采用 $TL_2(\Omega)$中的近似函数。此类密度函数 $(D_{Z_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ 的构造已在第 3.3 节中推导并讨论，其依据是这样的想法：$k(\cdot, x)$可以通过$T\delta_{x,\varepsilon} = \int_\Omega k(\cdot, z)\delta_{x,\varepsilon}(z)\,\mathrm{d}z$进行逼近，其中$\delta_{x,\varepsilon}$ 是 $\varepsilon \to 0$的狄拉克δ函数的一个近似。对于最后一种情形 $\beta > 2\tau$，再次考虑密度函数序列 $(D_{Z_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$，并证明$D_{Z_n}(f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$，进而推出 $f = 0$。

定理 *1* 的证明。 根据 ϑ的取值范围，我们分三种情况讨论：**第一种情况：** 对于 $\beta \in (0,\ 2\tau - \frac{d}{2}]$，我们采用与 [2, 20, 28],相同的构造性思路，因为根据公式 (27)，对于 $\vartheta \in \left(0,\ 2 - \frac{d}{2\tau}\right)$，有 $k(\cdot,\ x) \in \mathcal{H}_\vartheta$。因此，我们将公式 (30) 应用于 $s_{f,\ X_{n+1}} - s_{f,\ X_n}$:

$$\|s_{f,X_{n+1}} - s_{f,X_n}\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} \leq C q_{X_{n+1}}^{-\vartheta\tau} \|s_{f,X_{n+1}} - s_{f,X_n}\|_{L_2(\Omega)}.$$

代入 $-f + f$ 后，根据假设公式 (7)，我们可以估计 $\|s_{f,\ X_{n+1}} - s_{f,\ X_n}\|_{L_2(\Omega)}$，随后根据关于点序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的假设，按定理 4 中的表述估计填充距离:

$$\begin{aligned}
\|s_{f,X_{n+1}} - s_{f,X_n}\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} &\leq C q_{X_{n+1}}^{-\vartheta\tau} \left(c_f h_{X_{n+1}}^\beta + c_f h_{X_n}^\beta\right) \\
&\leq C a^{-(n+1)\vartheta\tau} a^{n\beta} \\
&\leq C a^{n(\beta - \vartheta\tau)}.
\end{aligned}$$

[2], 一致性常数为 $\rho = C_\Omega$ （见定理 14）

对于 $\beta - \vartheta\tau > 0$，指数为正，因此我们可以证明 $(s_{f,\ X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 实际上是一个柯西序列：令 $n > m \geq m_0$：

$$\begin{aligned}\|s_{f,X_n} - s_{f,X_m}\|_{\mathcal{H}_{\vartheta'}(\Omega)} &= \left\|\sum_{\ell=m}^{n-1} s_{f,X_{\ell+1}} - s_{f,X_\ell}\right\|_{\mathcal{H}_{\vartheta'}(\Omega)} \\ &\leq \sum_{\ell=m}^{n-1} \|s_{f,X_{\ell+1}} - s_{f,X_\ell}\|_{\mathcal{H}_{\vartheta'}(\Omega)} \\ &\leq \sum_{\ell=m}^{\infty} a^{\ell(\beta-\vartheta\tau)} \leq \frac{a^{m_0(\beta-\vartheta\tau)}}{1-a^{\beta-\vartheta\tau}} \overset{m_0\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

由于 $a \in (0,\ 1)$ 和 $\beta - \vartheta\tau > 0 \Leftrightarrow \vartheta < \frac{\beta}{\tau}$。由于 $\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$ 是一个完备空间，我们得到唯一极限元素 $f \in \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$。最后，通过加上 $0 = s_{f,\ X_n} - s_{f,\ X_n}$，我们可以很容易地证明 f 与 f 重合：

$$\begin{aligned}\|f - \tilde{f}\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|f - s_{f,X_n}\|_{L_2(\Omega)} + \|\tilde{f} - s_{f,X_n}\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq c_f h_{X_n}^{\mu} + C_{\mathcal{H}_{\vartheta'}(\Omega)\hookrightarrow L_2(\Omega)}\|\tilde{f} - s_{f,X_n}\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

因此，我们有 $f = f$ 属于 $L_2(\Omega)$，也就是说，f 可以被看作 f 的一个特定代表元，从而我们证明了对于任意 $\vartheta < \frac{\beta}{\tau}$，$f \in \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$。

第二种情况： 对于 $\beta \in (2\tau - \frac{d}{2},\ \tau]$：我们考虑按第 3.3 节定义的密度函数序列 $(D_{Z_n} f)_{n\in\mathbb{N}}$。我们希望证明，对于某个 $\vartheta \in (2 - \frac{d}{2\tau},\ 2)$，$(TD_{Z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$ 中的柯西序列。为此，我们考虑对于某个$\vartheta \in (2 - \frac{d}{2\tau},\ 2)$

$$\begin{aligned}\|TD_{Z_{n+1}}f - TD_{Z_n}f\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left|\langle T(D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f)), \varphi_j\rangle_{L_2(\Omega)}\right|^2}{\lambda_j^\vartheta} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2-\vartheta}\left|\langle D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f), \varphi_j\rangle_{L_2(\Omega)}\right|^2, \quad (39)\end{aligned}$$

其中我们用到了 $T\colon L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ 是自伴的，且 $T\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$。注意，$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\langle D_{Z_{n+1}}f - D_{Z_n}f,\ \varphi_j\rangle_{L_2(\Omega)}\right|^2 = \|D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)}^2$，根据定理17，我们对其在 n 中只有一个递增的上界。因此，我们的思路是通过 $\lambda_j^{2-\vartheta}$ 抵消这一增长；$\lambda_j^{2-\vartheta}$ 是一个衰减项（在 j 中）。我们将公式（39）的求和拆成两部分：小指标部分（直到 $F(n)$，具体值待定）和大指标部分（超过该值）：

- j **大指标**：我们利用 $\lambda_{F(n)+1}^{2-\vartheta}$ 较小这一点：

$$\begin{aligned}&\sum_{j=F(n)+1}^{\infty} \lambda_j^{2-\vartheta}\left|\langle D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f), \varphi_j\rangle_{L_2(\Omega)}\right|^2 \\ &\leq \lambda_{F(n)}^{2-\vartheta} \cdot \|D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &\leq \lambda_{F(n)}^{2-\vartheta} \cdot \left(\|D_{Z_{n+1}}(f)\|_{L_2(\Omega)} + \|D_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)}\right)^2 \\ &\leq C\lambda_{F(n)}^{2-\vartheta} \cdot 2^{2n(2\tau-\beta)}.\end{aligned}$$

在最后一步中，利用定理17对 $L_2(\Omega)$-范数进行了界定。

- j **小**：在这种情况下，我们采用了 A.2节中给出的冗长但直接的估计，该估计表明其成立

$$\sum_{j=1}^{F(n)} \lambda_j^{2-\vartheta} \left|\langle D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f), \varphi_j\rangle_{L_2(\Omega)}\right|^2 \leq C\lambda_{F(n)}^{-\vartheta} 2^{-2n\beta}.$$

鉴于公式（39），并给定 j small 和 j big 的估计，我们可以结合这两个估计，随后选择 $F(n)$ 的优化值：

$$\|TD_{Z_{n+1}}f - TD_{Z_n}f\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)}^2 \leq C\lambda_{F(n)}^{2-\vartheta} \cdot 2^{n(4\tau-2\beta)} + C\lambda_{F(n)}^{-\vartheta} 2^{-2n\beta}.$$

该表达式可在 $\lambda = \lambda_{F(n)}$ 中取最小值：

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda^{2-\vartheta}2^{n(4\tau-2\beta)} + \lambda^{-\vartheta}\cdot 2^{-2n\beta}) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow\ &(2-\vartheta)\lambda^{1-\vartheta}2^{n(4\tau-2\beta)} - \vartheta\lambda^{-\vartheta-1}2^{-2n\beta} \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_{F(n)} = \sqrt{\frac{\vartheta}{2-\vartheta}}\cdot 2^{-2n\tau}. \end{aligned}$$

由于索博列夫核的特征值 λ_j 满足 $\lambda_j \asymp j^{-2\tau/d}$ （见公式（22）），我们选取 $F(n) = 2^{nd}$，使得 $\lambda_{F(n)} \asymp 2^{-2\tau n}$。利用对 $\lambda_{F(n)}$ 的这一界，我们继续进行如下推导

$$\begin{aligned} \|TD_{X_{n+1}}f - TD_{X_n}f\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)}^2 &\leq C\left(\lambda_{F(n)}^{2-\vartheta}\cdot 2^{n(4\tau-2\beta)} + \lambda_{F(n)}^{-\vartheta}\cdot 2^{-2n\beta}\right) \\ &\leq C\left(2^{-2n\tau\cdot(2-\vartheta)}2^{n(4\tau-2\beta)} + 2^{2n\tau\vartheta}2^{-2n\beta}\right) \\ &\leq C2^{2n(\tau\vartheta-\beta)} \\ \Rightarrow \|TD_{X_{n+1}}f - TD_{X_n}f\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} &\leq \sqrt{C}2^{n(\tau\vartheta-\beta)}. \end{aligned}$$

对于 $\vartheta < \frac{\beta}{\tau}$，指数为负。借助这一估计，我们可以证明 $(TD_{X_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$ 中的柯西序列，其中 $\vartheta < \frac{\beta}{\tau}$：令 $n > m \geq m_0$：

$$\begin{aligned} \|TD_{X_n}(f) - TD_{X_m}(f)\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} &= \left\|\sum_{\ell=m}^{n-1} TD_{X_{\ell+1}}(f) - TD_{X_\ell}(f)\right\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} \\ &\leq \sum_{\ell=m}^{n-1} \left\|TD_{X_{\ell+1}}(f) - TD_{X_\ell}(f)\right\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} \\ &\leq \sum_{\ell=m}^{n-1} \sqrt{C}2^{n(\tau\vartheta-\beta)} \\ &\leq \sqrt{C}\frac{2^{m_0(\tau\vartheta-\beta)}}{1-2^{\tau\vartheta-\beta}} \stackrel{m_0\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

由于 $\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$ 是一个完备空间，且 $(TD_{X_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$ 中的一个柯西序列，因此存在唯一的极限元素 $\tilde{f} \in \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$。最后，根据定理17和前面的计算，$f$ 与 $\tilde{f}$ 在 Ω 上作为 $L_2(\Omega)$ 的元素相同：

$$\begin{aligned} \|f - \tilde{f}\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|f - TD_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)} + \|\tilde{f} - TD_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq C2^{-n\beta} + C_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)\hookrightarrow L_2(\Omega)}\|\tilde{f} - TD_{Z_n}(f)\|_{\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

˜因此， f 可以视为 f 的一个特定代表元，由此我们证明了对于所有 $\vartheta < \frac{\beta}{\tau}$，$f \in \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$。 −

第三种情况：对于 $\beta > 2\tau$，我们再次考虑密度函数序列 $(D_{Z_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$。利用定理 19，我们得到

$$\|D_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)} \le C2^{-n(\beta-2\tau)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

由 $\beta > 2\tau$ 可知。由于 T 是一个有界算子，我们还有

$$\|TD_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

另一方面，根据定理17，我们有 $\|f - TD_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$。因此我们得到

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} \le \|f - TD_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)} + \|TD_{Z_n}(f)\|_{L_2(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

即 $f = 0$。 □

接下来，我们首先给出定理 1 的一个直接推论，该推论利用 $L_p(\Omega)$、$2 \le p \le \infty$ 给出了一个饱和结果：

推论 20。设 Ω 是一个紧致利普希茨区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$，且有一个连续核 k 满足 $\mathcal{H}_k(\Omega) \asymp H^\tau(\Omega)$，其中某个 $\tau > d/2$。考虑 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ 以及估计式

$$\|f - s_{f,X}\|_{L_p(\Omega)} \le c_f h_X^\beta, \tag{40}$$

对于某个 $p \in [2,\infty]$，其中 $s_{f,X} \in \operatorname{span}\{k(\cdot, x)\ x \in X\}$ 是满足定理*12*的基于核的近似函数。

如果对于任意准均匀序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$，存在某个 $\beta > 2\tau$ 使公式 (40) 成立，那么 $f = 0$。

证明。由于 $\Omega \subset \mathrm{R}^d$ 有界，H¨older 不等式给出不等式 $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)} \le |\Omega|^{1/2-1/p} \cdot \|\cdot\|_{L_\infty(\Omega)}$。因此，公式 (40) 推出公式 (7)，由此定理 1 得到所需结果 $f = 0$。

□

因此，对于任意 $2 \le p \le \infty$，收敛速率都饱和于 2τ。请注意，这改进并推广了此前已知的薄板样条饱和结果 [20, 定理 7。1]。

在主要结果定理 1 中，$\beta \in [0, 2\tau - d/2)$ 和 $\beta \in [2\tau - d/2, 2]$ 两种情形的假设略有不同。在第一种情形中，假设单个准均匀点序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ 的衰减率；而在第二种情形中，假设任意准均匀点集都满足某个衰减率。假设上的这种差异源于这样一个事实：$k(\cdot, x) \in \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$ 当且仅当 $\vartheta \in [0, 2 - \frac{d}{2\tau})$，见公式 (27)：考虑 $f := k(\cdot, x_0)$，若点 x_0 包含在嵌套序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 中的 $X_n, n \ge n_0$ 内，则对所有 $n \ge n_0$，都有 $s_{f,X_n} = f$。因此，逼近误差 $\|f - s_{f,X_n}\|_{L_2(\Omega)}$ 将为零，也就是说，可以达到任意高的逼近率。这个例子很容易推广到其他情形，例如 x_0 实际上从未包含在任何 X_n 中，但距离 $\operatorname{dist}(x_0, X_n)$ 以某种（较快的）速率衰减。

然而，这既不意味着对于超出 $2 - \frac{d}{2\tau}$ 的 ϑ 有 $f \in \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$（根据公式 (27)），也不意味着 $f = 0$（饱和）。因此，定理 1 中假设的差异——针对某个特定序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$，还是针对任意拟均匀点集——至关重要。

4.2 主要结果的讨论

主要结果定理 1 给出了有限光滑Sobolev核的一个逆命题，重点关注超收敛区域（对于 $\beta \in [\tau, 2\tau]$），从而补充了近期推导出的相应直接结论 [10]。此外，文献中关于逃逸原生空间情形的逆向陈述（对于 $\beta \in (0, \tau]$）也得到了一些改进：要么放宽了对点分布的假设 [28]，要么扩展了适用核的类别 [2]。此外，还推导出了新的饱和结论，这些结论自然地给出了收敛速率的上限，从而回应了 [3,第 10] 章中提出的一项重要研究方向。

关于逆向（超收敛）结论，有两个关键特点：首先，也是最重要的一点，它建立了光滑性（以幂空间参数 ϑ 衡量）与逼近速率 β 之间的一一对应关系，从而将先前已在逃逸原生空间情形 [28] 中确立的一一对应关系扩展到了超收敛情形：对于 $\vartheta \in (0, 2\tau]$，任何连续的 $f \in \mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$ 都可以通过核插值逼近，其收敛速率（关于填充距离）为 $h^{\vartheta\beta}$。而且，如果函数 f 可以通过核插值以 $h^{\vartheta\beta}$ 的收敛速率逼近，则可以得出结论：对于所有 $\vartheta' < \vartheta$，都有 $f \in \mathcal{H}_{\vartheta'}(\Omega)$。我们将在后续工作 [30] 中探讨这种一一对应关系对于 RBF 核“最优形状参数”这一棘手选择问题的启示和应用。其次，该结果表明，对于 $\vartheta \in [1, 2]$，幂空间 $\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$ 是预期会出现超收敛的正确空间。这一点很重要，因为此前关于超收敛的文献 $[10, 16, 19, 21]$ 只能证明某些满足特定嵌入条件的子空间存在超收敛。然而，这些不同刻画之间的关系仍不清楚。现在，逆向结果定理 1 表明，这些特定子空间总是某个幂空间 $\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$ 的子空间。

接下来，我们讨论主要结果定理 1 的假设：关于所关注集合 Ω 是一个利普希茨区域的假设相当常见，而关于核是索博列夫核的假设则涵盖了许多实际应用中的核，包括 Wendland 核和 Mat´ern 核。关于点集的假设——即采用单个准均匀点的嵌套序列，还是任意准均匀点集——我们已在定理 1 下方作了大部分讨论。除了假设 $L_2(\Omega)$ 范数中的衰减率外，也可以考虑某种 $\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$ 范数（光滑度尺度）、某种 $L_p(\Omega)$ 范数（可积性尺度），或两者的组合。对于第一种选择，只需结合主要结果定理 1 与定理 11 中给出的伯恩斯坦不等式，即可轻松实现。第二种选择，以及由此得到的第三种选择，在 $p \in [2, \infty]$ 范围内是可行的，这归因于嵌入关系 $L_p(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$（例如参见定理 20）以及相应直接结论 $[27]$ 的存在。$p \in [1, 2]$ 范围则更具挑战性。尽管如此，$[25, \text{定理 } 5.3]$ 中建立的 $\ell_p - L_p$ 伯恩斯坦不等式（以及球面上的类似结果 $[12]$ ）可能有助于将本文对 $p = 2$ 给出的分析推广到更一般的情形，从而补全 $TL_p(\Omega)$ 空间的完整图景，如 $[10, \text{图 } 2]$ 所示。我们指出，对于 $p \in [1, 2]$，可能需要采用 Besov 空间，而非希尔伯特型幂空间。

最后，我们谈谈近似函数 $s_{f,X}$ 的作用：我们有意将主要结果定理 1 表述为适用于一般的基于点的逼近函数 $s_{f,X} \in$

span$\{k(\cdot,x)\ x\in X\}$（部分情况下假设满足定理12的温和条件），而非仅关注核插值函数。这样，所得结果不仅适用于核插值，也适用于其他逼近方案，例如正则化插值、最小二乘逼近或核伽辽金方法。请注意，相应的直接结论目前尚不可得，因为 [10] 中的直接超收敛结论明确依赖于投影的使用（例如参见 [10, 定理 6]）。

流形上的正向与逆向陈述在球面上也已有充分研究，例如， [8] 给出了超收敛区域内的直接结论。然而，相应的逆向陈述以及饱和结论似乎尚付阙如。我们预计，定理 1 的证明方法也可以推广到 Ω 为球面或更一般的流形的情形。对于球面这一特殊情形，由于没有边界，且球基函数可以显式获得，分析甚至可能更加简单。

最后，我们注意到主要结果定理 1 与此前已确立的正向和逆向陈述可以推出以下结论：对于 $\vartheta\in[0,2]$，使用良好分布的点 $X_n\subset\Omega$ 对 $f\in\mathcal{H}_\vartheta(\Omega)$ 进行基于核的逼近 $s_{f,\ X_n}$，其逼近速率与使用 Mercer 特征函数进行逼近相同。对于 $\vartheta>2$，由于定理 1 和定理 20 所确立的饱和现象，基于核的逼近 $s_{f,\ X_n}$ 已无法达到使用特征函数进行逼近的速率。令 $V_n:=\text{span}\{\varphi_j, j=1,...,n\}$，并回顾使用特征函数的经典误差估计

$$\|f-\Pi_{V_n}(f)\|^2_{L_2(\Omega)}=\sum_{j=N+1}^{\infty}\lambda_j^\vartheta\cdot\frac{|\langle f,\varphi_j\rangle_{L_2(\Omega)}|^2}{\lambda_j^\vartheta}\le\lambda_{N+1}^\vartheta\cdot\|f\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

由于 $\lambda_N\asymp N^{-2\tau/d}$ （见公式（22））以及针对分布良好的 $X\subset\Omega$ 的 $h_X\asymp|X|^{-1/d}$，其误差率与使用基于核的近似函数时相同，见公式（5）和公式（6）。然而，使用 Mercer 特征函数得到的这一逼近率不受 $\vartheta\le2$ 的限制；而基于核的逼近则受限于此，这是定理 1 和定理 20 中饱和结果所致。另一方面，基于核的逼近实际上是可计算的，而 Mercer 特征函数通常是未知的。

5 结论

本文证明了使用有限光滑核进行基于核的逼近时的精确逆结论和饱和结论，重点关注超收敛区域。因此，本分析补充了近期为超收敛区域推导出的直接结论。为此，我们推导了一系列重要的辅助结论，例如广义再生性质和超收敛伯恩斯坦不等式，并提出并分析了一种密度函数构造。结合针对逃逸原生空间情形的直接结论和逆结论，我们完整刻画了收敛率，揭示了收敛率与光滑性（以幂空间衡量）之间的一一对应关系。

未来的研究中，我们将探讨已确立的一一对应关系所带来的启示及其应用。特别是，我们将从理论角度探讨最优形状参数这一重要问题 [30]。

致谢：作者谨此感谢 Daniel Winkle 和 Gabriele Santin 提供的宝贵讨论。

参考文献

[1] R. Arcang´eli、M. C. L´opez de Silanes 和 J. J. Torrens。Sobolev空间中函数界的推广及其在（m, s）样条插值与平滑中的应用。《数值数学》，107(2):181–211，2007。[2] S. Avesani、F. Marchetti、L. Ling 和 T. Wenzel。基于尖锐正向与逆向陈述的局部光滑性分析Sobolev算法（SALSA）。*arXiv*预印本 *arXiv:2512.17377*，2025。[3] M. D. Buhmann。径向基函数：理论与实现。应用与计算数学剑桥专著丛书。剑桥大学出版社，2003。[4] C. De Boor、R. A. DeVore 和 A. Ron。由 $L_2(\mathrm{R}^d)$的平移不变子空间进行逼近。《美国数学学会会刊》，341(2):787–806，1994。[5] B. Diederichs 和 A. Iske。径向基函数插值矩阵条件数的改进估计。逼近理论杂志，238:38–51，2019。[6] G. E. Fasshauer。使用*MATLAB*的无网格逼近方法，第6卷。World Scientific，2007。[7] G. E. Fasshauer 和 M. J. McCourt。使用*MATLAB*的基于核的逼近方法，第19卷。World Scientific Publishing Company，2015。[8] E. Fuselier 和 G. B. Wright。利用限制正定核在嵌入子流形上进行散乱数据插值：Sobolev误差估计。《*SIAM*数值分析杂志》，50(3):1753–1776，2012。[9] M. Haas、D. Holzm¨uller、U. Luxburg 和 I. Steinwart。注意尖峰：固定维度下核与神经网络的良性过拟合。载于 A. Oh、T. Nau-mann、A. Globerson、K. Saenko、M. Hardt 和 S. Levine（编），《神经信息处理系统进展》，第36卷，第20763–20826页。Curran Associates, Inc.，2023。[10] T. Karvonen、G. Santin 和 T. Wenzel。基于核的逼近的一般超收敛。*arXiv*预印本 *arXiv:2505.11435*，2025。[11] D. Krieg 和 M. Sonnleitner。随机点是逼近Sobolev函数的最优选择。《*IMA*数值分析杂志》，44(3):1346–1371，2024。[12] H. Mhaskar、F. Narcowich、J. Prestin 和 J. Ward。 L^p 伯恩斯坦估计与球基函数逼近。《计算数学》，79(271):1647–1679，2010。

[13] F. Narcowich、J. Ward 和 H. Wendland。具有散乱零点的函数的Sobolev界及其在径向基函数曲面拟合中的应用。《计算数学》，74(250):743–763，2005。[14] F. Narcowich、J. Ward 和 H. Wendland。利用径向基函数进行散乱数据插值的Sobolev误差估计与伯恩斯坦不等式。构造性逼近，24(2):175–186，2006。[15] F. J. Narcowich 和 J. D. Ward。在R^d上的散乱数据插值：径向基函数与带限函数的误差估计。*SIAM*数学分析杂志，36(1):284–300，2004。[16] G. Santin、T. Karvonen 和 B. Haasdonk。再生核希尔伯特空间中线性泛函的基于采样的逼近。*BIT*数值数学，62(1):279–310，2022。[17] G. Santin 和 R. Schaback。基于核的空间中特征函数的逼近。计算数学进展，42:973–993，2016。[18] R. Schaback。利用径向基函数进行散乱数据插值的改进误差界。《计算数学》，68(225):201–216，1999。[19] R. Schaback。基于核的插值的超收敛。逼近理论杂志，235:1 – 19，2018。[20] R. Schaback 和 H. Wendland。径向基函数插值的逆定理与饱和定理。《计算数学》，71(238):669–681，2002。[21] I. Sloan 和 V. Kaarnioja。速率加倍：正交投影误差界的改进及其在插值中的应用。*BIT*数值数学，65，2025。[22] I. Steinwart 和 A. Christmann。支持向量机。Springer科学与商业媒体，2008。[23] I. Steinwart 和 C. Scovel。一般区域上的Mercer定理：测度、核与再生核希尔伯特空间之间的相互作用。构造性逼近，35:363–417，2012。[24] Z. Sun 和 L. Ling。有界区域与黎曼流形上基于核的逼近的逆不等式。*arXiv*预印本 *arXiv:2508.05376*，2025。[25] J. P. Ward。 L^p R^d 上 RBF 逼近的伯恩斯坦不等式与逆定理。逼近理论杂志，164(12):1577–1593，2012。[26] H. Wendland。散乱数据逼近，应用与计算数学剑桥专著丛书第17卷。剑桥大学出版社，剑桥，2005。[27] H. Wendland 和 C. Rieger。近似插值及其在选择平滑参数中的应用。《数值数学》，101(4):729–748，2005。[28] T. Wenzel。核插值的尖锐逆命题。《计算数学》，2025。

[29] T. Wenzel 和 A. Iske. 核矩阵的谱对齐及其应用。*arXiv* 预印本 *arXiv:2409.04263*，第 *2* 版，2025 年。最终版本已获《SIAM 矩阵分析与应用杂志》接收发表。[30] T. Wenzel 和 G. Santin. 关于核逼近的最优形状参数：尖锐的正向与逆向陈述。即将于 2026 年发表。[31] T. Wenzel、G. Santin 和 B. Haasdonk. 一类新颖的稳定化贪心核近似算法：收敛性、稳定性与均匀点分布。逼近理论杂志，262:105508，2021 年。[32] T. Wenzel、G. Santin 和 B. Haasdonk. 目标数据依赖型贪心核算法分析： f-、 $f\cdot P$-和 f/P-贪心算法的收敛率。构造性逼近，57(1):45–74，2023 年。

A 外包计算

A.1 逃逸情形下的伯恩斯坦不等式

定理 *9* 的证明。 证明的关键在于注意到， [24, 引理 4。1] 实际上对任意 $u \in H^m(\Omega)$ 都成立，并且只要该核的再生核希尔伯特空间与 $H^\tau(\Omega)$ 范数等价， [24, 引理 4。3] 就成立，因为我们利用了 u 在 X中f_σ 插值这一事实。详情如下：

我们首先注意到， [24, 引理 4。1] 实际上对任意 $u \in H^m(\Omega)$ 都成立，即该引理尚未涉及任何核。接下来我们观察到， [24, 引理 4。3] 对任意索博列夫核同样成立，也就是说，对于任意 $\alpha \in (d/2, \tau]$ 存在一个常数 $C > 0$，使其成立

$$\|u\|_{H^\tau(\Omega)} \leq C q_X^{-\tau+\alpha} \|u\|_{H^\alpha(\Omega)} \tag{41}$$

对于任意试探函数 $u \in \operatorname{span}\{k(\cdot, x)\ x \in X\}$：事实上，将 [24, 引理 4。1]应用于 $u \in \operatorname{span}\{k(\cdot, x)\ x \in X\} \subset \mathcal{H}_k(\Omega) \asymp H^\tau(\Omega) \subseteq H^\alpha(\Omega)$，可得到一个带限函数 $f_{\sigma,u,\alpha,\Omega} \in \mathcal{B}_\sigma$，其中某个 $\sigma \asymp q_X^{-1}$ 满足

$$\begin{aligned} u|_X &= f_{\sigma,u,\alpha,\Omega}|_X, \\ \|f_{\sigma,u,\alpha,\Omega}\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{\alpha,\tau,\Omega} \|u\|_{H^\alpha(\Omega)}, \\ \|u - f_{\sigma,u,\alpha,\Omega}\|_{H^\alpha(\Omega)} &\leq C'_{\alpha,m,\Omega} q_X^{\tau-\alpha} \|u\|_{H^m(\Omega)}, \end{aligned}$$

且任意 $f_\sigma \in \mathcal{B}_\sigma$ 都满足伯恩斯坦不等式

$$\|f_\sigma\|_{H^\tau(\Omega)} \leq 2^{(\tau-\beta)/2} \max\{1, \sigma^{\tau-\beta}\} \|f_\sigma\|_{H^\beta(\mathbb{R}^d)}.$$

因此，注意到 $u = s_{f_{\sigma,\ u,\ \alpha,\ \Omega,\ X}}$，我们可以进行估计。

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^\tau(\Omega)} &\leq \|u - f_{\sigma,u,\alpha,\Omega}\|_{H^\tau(\Omega)} + \|f_{\sigma,u,\alpha,\Omega}\|_{H^\tau(\Omega)} \\ &= \|s_{f_{\sigma,u,\alpha,\Omega},X} - f_\sigma\|_{H^\tau(\Omega)} + \|f_\sigma\|_{H^\tau(\Omega)} \\ &\leq C \|f_{\sigma,u,\alpha,\Omega}\|_{H^\tau(\Omega)}. \end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们使用了 $s_{f_{\sigma,\ u,\ \alpha,\ \Omega,\ X}}$ 是将 $f_{\sigma,\ u,\ \alpha,\ \Omega}$正交投影到 $\operatorname{span}\{k(\cdot, x)\ x \in X\} \subset \mathcal{H}_k(\Omega) \asymp H^\tau(\Omega)$ 上的正交投影。利用上述由 [24, 得出的不等式

引理 4.1], 我们可以进一步估计

$$\begin{aligned}\|f_{\sigma,u,\alpha,\Omega}\|_{H^\tau(\Omega)} \le \|f_{\sigma,u,\alpha,\Omega}\|_{H^\tau(\mathbb{R}^d)} &\le 2^{(\tau-\beta)/2}\max\{1,\sigma^{\tau-\beta}\}\|f_{\sigma,u,\alpha,\Omega}\|_{H^\beta(\mathbb{R}^d)}\\ &\le 2^{(\tau-\beta)/2}\max\{1,\sigma^{\tau-\beta}\}\|f_{\sigma,u,\alpha,\Omega}\|_{H^\beta(\Omega)}\\ &\le Cq_X^{-\tau+\beta}\|f_{\sigma,u,\alpha,\Omega}\|_{H^\beta(\Omega)},\end{aligned}$$

从而得到公式 (41)。
我们继续利用加利亚多–尼伦伯格插值不等式估计公式 (41) 右端的范数 $\|u\|_{H^\alpha(\Omega)}$，得到 $\|u\|_{H^\alpha(\Omega)} \le C\|u\|_{L_2}^{1-\alpha/\tau}{}_{(\Omega)}\ \|u\|_{H^\tau}^{\alpha/\tau}{}_{(\Omega)}$。重新整理各项可得

$$\|u\|_{H^\tau(\Omega)} \le Cq_X^{-\tau}\|u\|_{L_2(\Omega)}.$$

再利用加利亚多–尼伦伯格插值不等式，如定理 3.4] 所示，可得最终结果：

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^{\vartheta\tau}(\Omega)} &\le C\|u\|_{L_2(\Omega)}^{1-\vartheta}\|u\|_{H^\tau(\Omega)}^{\vartheta}\\ &\le C\|u\|_{L_2(\Omega)}^{1-\vartheta}\left(Cq_X^{-\tau}\|u\|_{L_2(\Omega)}\right)^{\vartheta}\\ &= Cq_X^{-\vartheta\tau}\|u\|_{L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

□

和式的估计

命题 21. 在定理 *1* 的条件下，有

$$\sum_{j=1}^{F(n)}\lambda_j^{2-\vartheta}\left|\langle D_{Z_{n+1}}(f)-D_{Z_n}(f),\varphi_j\rangle_{L_2(\Omega)}\right|^2 \le C\lambda_{F(n)}^{-\vartheta}2^{-2n\beta}.$$

证明. 我们从基本计算开始，利用第 3.3 节中引入的 D_{Z_n} 的定义：

$$\begin{aligned}&\left|\langle D_{Z_{n+1}}(f)-D_{Z_n}(f),\varphi_j\rangle_{L_2(\Omega)}\right|\\ &=\left|\int_\Omega (D_{Z_{n+1}}(f)-D_{Z_n}(f))(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

注意到，根据定义， $D_{Z_n}(f)$ 和 $D_{Z_{n+1}}(f)$ 在 $\Omega\setminus\left(Z_{n+1}+[0,2^{-(n+1)}]^d\right)$ 上均为零，因此我们可以将积分范围限制为 $Z_{n+1}+[0,2^{-(n+1)}]^d$。接下来我们写作

$$\begin{aligned}&\left|\langle D_{Z_{n+1}}(f)-D_{Z_n}(f),\varphi_j\rangle_{L_2(\Omega)}\right|\\ &=\Big|\sum_{z\in Z_{n+1}}\int_{z+[0,2^{-(n+1)}]^d}(D_{Z_{n+1}}(f)-D_{Z_n}(f))(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\Big|\sum_{z\in Z_{n+1}}\int_{[0,2^{-(n+1)}]^d}(D_{Z_{n+1}}(f)-D_{Z_n}(f))(z+b)\langle k(\cdot,z+b),\varphi_j\rangle_{\mathcal{H}_k(\Omega)}\,\mathrm{d}b\Big|\\ &=\frac{1}{\lambda_j}\cdot\Big|\sum_{z\in Z_{n+1}}\int_{[0,2^{-(n+1)}]^d}\left\langle(D_{Z_{n+1}}(f)-D_{Z_n}(f))(z+b)k(\cdot,z+b),\varphi_j\right\rangle_{L_2(\Omega)}\Big|.\end{aligned}$$

在倒数第二步中，我们利用了再生性质；在最后一步中，我们利用了 $\varphi_j = \frac{1}{\lambda_j} T\varphi_j$，随后使用了公式（19）。接下来，我们将积分写成黎曼和的极限，得到

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda_j} \cdot \Big| \sum_{z \in Z_{n+1}} \lim_{N\to\infty} \frac{2^{-(n+1)d}}{N^d} \sum_{b \in \frac{2^{-(n+1)}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} \big\langle (D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f))(z+b)k(\cdot, z+b), \varphi_j \big\rangle_{L_2(\Omega)} \Big| \\
&= \frac{1}{\lambda_j} \cdot \Big| \lim_{N\to\infty} \frac{2^{-(n+1)d}}{N^d} \sum_{b \in \frac{2^{-(n+1)}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} \left\langle \sum_{z \in Z_n} (D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f))(z+b)k(\cdot, z+b), \varphi_j \right\rangle_{L_2(\Omega)} \Big| \\
&\le \frac{1}{\lambda_j} \lim_{N\to\infty} \frac{2^{-(n+1)d}}{N^d} \sum_{b \in \frac{2^{-(n+1)}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} \Big| \left\langle \sum_{z \in Z_n} (D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f))(z+b)k(\cdot, z+b), \varphi_j \right\rangle_{L_2(\Omega)} \Big|.
\end{aligned}
$$

由此，利用柯西-施瓦茨不等式，我们得出

$$
\begin{aligned}
&\big|\langle D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f), \varphi_j \rangle_{L_2(\Omega)}\big|^2 \\
&\le \frac{1}{\lambda_j^2} \lim_{N\to\infty} \frac{2^{-2(n+1)d}}{N^{2d}} \left(\sum_{b \in \frac{2^{-(n+1)}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} \Big| \left\langle \sum_{z \in Z_{n+1}} (D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f))(z+b)k(\cdot, z+b), \varphi_j \right\rangle_{L_2(\Omega)} \Big| \right)^2 \\
&= \frac{1}{\lambda_j^2} \lim_{N\to\infty} \frac{2^{-2(n+1)d}}{N^{2d}} \left(\sum_{b \in \frac{2^{-(n+1)}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} 1^2 \right) \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{b \in \frac{2^{-(n+1)}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} \Big| \left\langle \sum_{z \in Z_{n+1}} (D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f))(z+b)k(\cdot, z+b), \varphi_j \right\rangle_{L_2(\Omega)} \Big|^2 \right) \\
&= \frac{1}{\lambda_j^2} \lim_{N\to\infty} \frac{2^{-2(n+1)d}}{N^d} \sum_{b \in \frac{2^{-(n+1)}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} \left| \left\langle \sum_{z \in Z_{n+1}} (D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f))(z+b)k(\cdot, z+b), \varphi_j \right\rangle_{L_2(\Omega)} \right|^2 \\
&\le \frac{1}{\lambda_j^2} \lim_{N\to\infty} \frac{2^{-2(n+1)d}}{N^d} \sum_{b \in \frac{2^{-(n+1)}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} \left| \left\langle \sum_{z \in Z_{n+1}} (D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f))(z+b)k(\cdot, z+b), \varphi_j \right\rangle_{L_2(\Omega)} \right|^2.
\end{aligned}
$$

因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{F(n)} \lambda_j^{2-\vartheta} \left|\langle D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f), \varphi_j\rangle_{L_2(\Omega)}\right|^2 \\
&\le \sum_{j=1}^{F(n)} \lambda_j^{-\vartheta} \lim_{N\to\infty} \frac{2^{-2(n+1)d}}{N^d} \sum_{b\in \frac{2^{-(n+1)}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} \left| \left\langle \sum_{z\in Z_{n+1}} (D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f))(z+b)k(\cdot, z+b), \varphi_j \right\rangle_{L_2(\Omega)} \right|^2 \\
&\le \lambda_{F(n)}^{-\vartheta} \lim_{N\to\infty} \frac{2^{-2(n+1)d}}{N^d} \sum_{b\in \frac{2^{-(n+1)}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} \sum_{j=1}^{F(n)} \left| \left\langle \sum_{z\in Z_{n+1}} (D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f))(z+b)k(\cdot, z+b), \varphi_j \right\rangle_{L_2(\Omega)} \right|^2 \\
&\le \lambda_{F(n)}^{-\vartheta} \lim_{N\to\infty} \frac{2^{-2(n+1)d}}{N^d} \sum_{b\in \frac{2^{-(n+1)}}{N}\{0,\dots,N-1\}^d} \left\| \sum_{z\in Z_{n+1}} (D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f))(z+b)k(\cdot, z+b) \right\|_{L_2(\Omega)}^2
\end{aligned}
$$

$\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$范数可以通过代入 $D_{Z_{n+1}}(f)$ 和 $D_{Z_n}(f)$ 的定义来估计：

$$
\begin{aligned}
&\left\| \sum_{z\in Z_{n+1}} (D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f))(z+b)k(\cdot, z+b) \right\|_{L_2(\Omega)} \\
&= \left\| \sum_{z\in Z_{n+1}} D_{Z_{n+1}}(f)(z+b)k(\cdot, z+b) - D_{Z_n}(f)(z+b)k(\cdot, z+b) \right\|_{L_2(\Omega)} \\
&= \left\| \sum_{z\in Z_{n+1}} D_{Z_{n+1}}(f)(z+b)k(\cdot, z+b) - \sum_{b_i\in B_{n+1}} \sum_{z\in Z_n} D_{Z_n}(f)(z+b_i+b)k(\cdot, z+b_i+b) \right\|_{L_2(\Omega)} \\
&= \left\| \sum_{z\in Z_{n+1}} 2^{(n+1)d}\alpha_{f, Z_{n+1}+b; z+b}k(\cdot, z+b) - \sum_{b_i\in B_{n+1}} \sum_{z\in Z_n} 2^{nd}\alpha_{f, Z_n+b_i+b; z+b_i+b}k(\cdot, z+b_i+b) \right\|_{L_2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{nd} \left\| \sum_{z \in Z_{n+1}} 2^d \alpha_{f, Z_{n+1}+b; z+b} k(\cdot, z+b) - \sum_{b_i \in B_{n+1}} \sum_{z \in Z_n} \alpha_{f, Z_n + b_i + b; z + b_i + b} k(\cdot, z + b_i + b) \right\|_{L_2(\Omega)} \\
&= 2^{nd} \left\| \sum_{b_i \in B_{n+1}} \sum_{z \in Z_{n+1}} \alpha_{f, Z_{n+1}+b; z+b} k(\cdot, z+b) - \sum_{b_i \in B_{n+1}} \sum_{z \in Z_n} \alpha_{f, Z_n + b_i + b; z + b_i + b} k(\cdot, z + b_i + b) \right\|_{L_2(\Omega)} \\
&= 2^{nd} \left\| \sum_{b_i \in B_{n+1}} \left(\sum_{z \in Z_{n+1}} \alpha_{f, Z_{n+1}+b; z+b} k(\cdot, z+b) - \sum_{z \in Z_n} \alpha_{f, Z_n + b_i + b; z + b_i + b} k(\cdot, z + b_i + b) \right) \right\|_{L_2(\Omega)} \\
&= 2^{nd} \left\| \sum_{b_i \in B_{n+1}} \left(s_{f, Z_{n+1}+b} - s_{f, Z_n + b_i + b} \right) \right\|_{L_2(\Omega)} \\
&= 2^{nd} \sum_{b_i \in B_{n+1}} \left\| s_{f, Z_{n+1}+b} - s_{f, Z_n + b_i + b} \right\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq 2^{nd} \sum_{b_i \in B_{n+1}} \left(\left\| s_{f, Z_{n+1}+b} - f \right\|_{L_2(\Omega)} + \left\| f - s_{f, Z_n + b_i + b} \right\|_{L_2(\Omega)} \right).
\end{aligned}
$$

对于此表达式，最后可以应用公式 (7) 给出的收敛速率以及定理 14 中关于填充距离的估计，将其界定为

$$
\begin{aligned}
&\leq 2^{nd} \sum_{b_i \in B_{n+1}} \left(c_f h^{\beta}_{Z_{n+1}+b} + c_f h^{\beta}_{Z_n + b_i + b} \right) \\
&\leq 2^{nd} \sum_{b_i \in B_{n+1}} \left(c_f C_\Omega^{\beta} 2^{-(n+1)\beta} + c_f C_\Omega^{\beta} 2^{-n\beta} \right) \\
&\leq 2 c_f C_\Omega^{\beta} 2^d \cdot 2^{nd} 2^{-n\beta}.
\end{aligned}
$$

将此估计代入上述计算，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{F(n)} \lambda_j^{2-\vartheta} \left| \langle D_{Z_{n+1}}(f) - D_{Z_n}(f), \varphi_j \rangle_{L_2(\Omega)} \right|^2 \\
&\leq \lambda_{F(n)}^{-\vartheta} \lim_{N \to \infty} \frac{2^{-2(n+1)d}}{N^d} \sum_{b \in \frac{2^{-(n+1)}}{N} \{0, \ldots, N-1\}^d} C 2^{2nd} 2^{-2n\beta} \\
&\leq C \lambda_{F(n)}^{-\vartheta} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^d} \sum_{b \in \frac{2^{-(n+1)}}{N} \{0, \ldots, N-1\}^d} 2^{-2n\beta} \\
&= C \lambda_{F(n)}^{-\vartheta} 2^{-2n\beta}.
\end{aligned}
$$

□