arXiv:2601.01823v1 [math.DG] 5 Jan 2026

带边界的静态流形上的 Obata 型刚性

HONGYI SHENG 和 KAI-WEI ZHAO

Abstract. 我们研究具有紧边界的简单流形上的静态度量，并证明一个 Obata 型刚性定理。我们找到了新的充分几何条件，在这些条件下，组合曲率映射 $g \mapsto (R_g,\ H_g)$ 是局部满射。因此，我们证明，与无边界流形不同（在无边界流形上，静态性会阻碍可变形性），带边界流形上的标量曲率映射在静态度量处可以是局部满射。

1. Introduction

标量曲率的变形理论是几何分析和广义相对论中的核心课题，尤其涉及理解标量曲率映射与静态度量之间的关系。Fischer 和 Marsden [4] 证明，在闭流形上，标量曲率映射一般是局部满射。后来，Corvino [3]阐明了它与静态度量之间的关系，并证明标量曲率映射在度量 g 处局部满射，当且仅当 g 不是静态的。本文研究边界的存在如何从根本上改变这一局面。

我们首先明确带边情形下静态性的精确定义。尽管文献中出现了多种“带边静态流形”的定义，我们采用以下表述，类似于 [10], 的定义；该表述将内部静态方程与一个特定边界条件结合起来，此边界条件与边界平均曲率的线性化有关。

定义 1.1。设 (M, g) 是一个完备、连通的带边光滑流形。若非平凡函数 $V \in C^\infty(M)$ 满足方程，则称其为静态势函数

$$-(\Delta V)\, g + \operatorname{Hess} V - V \operatorname{Ric} = 0 \quad \text{in } M. \tag{1.1}$$

若度量 g 存在这样的 V，则称其为静态的。此外，若静态势函数 V 满足边界条件，则称其为可容许的

$$V_\nu \hat{g} = Vh \quad \text{on } \partial M, \tag{1.2}$$

其中，V_ν 表示相对于外单位法向量 ν 的法向导数，$\hat{g}$ 是 ∂M上的诱导度量，h 是第二基本形式，由 $h(X,Y) = -\langle \nu, D_X Y\rangle$ 定义，对所有与 ∂M相切的向量场 X, Y 均成立。若 (M, g) 存在可容许的静态势函数，则称其为带边静态流形。

带边界的静态流形具有很强的内在几何约束。如 [9, 10], 所示，存在可容许的静态势函数会对曲率施加显著的刚性约束：

定理 1.2 ([9, 定理 3.3], [10, 注 2.2])。若 (M, g) 是一个带边流形，则 M 的标量曲率为常数，边界 ∂M 是全脐的，且平均曲率在 ∂M上局部为常数。此外，在 ∂M上有 $\mathrm{Ric}_{i\nu} = 0\,(i = 1, \ldots, n-1)$。

为了分析这些流形的变形理论，我们沿用 [9]并定义算子 $L_g^*\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$，如下所示：

$$L_g^* u = -(\Delta u)\, g + \operatorname{Hess} u - u \operatorname{Ric},$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：53C20、53C24、58J32。

以及由 Φ_g^*: $\overline{C^\infty}(M) \longrightarrow \overline{C^\infty}(M) \times C^\infty(\partial M)$

$$\Phi_g^* u = (L_g^* u, u_\nu \hat{g} - uh).$$

回忆一下，映射 $g \mapsto (R_g, H_g)$ 是局部满射，当且仅当 $\ker \Phi_g^* = \{0\}$ [9]。本文主要关注 $\ker \Phi_g^* = \{0\}$ 的情形，尽管 $\ker L_g^* \neq \{0\}$。在这种情况下，尽管 g 是静态的（存在一个属于 L_g^* 核的静态势函数），联合曲率映射 $g \mapsto (R_g, H_g)$ 仍然是局部满射。这凸显了它与无边界情形的一个关键区别：对于带边流形，静态性并不一定会妨碍可变形性。

为了陈述主要的刚性与变形结果，我们将讨论范围限定在连通情形。

定义 1.3。如果 M 且其边界 ∂M 也连通，则称带边流形为单连通 。

我们的第一个主要结果是一个分类定理。设 (M, g) 是一个具有紧边界且存在正静态势函数 V 的简单静态流形。在特定曲率条件下，我们证明 V 满足带 Robin 边界条件的 Obata 型方程。Obata 方程已得到广泛研究（例如参见 [7,11]），而边界项的引入则带来了以下新的刚性分类。

定理 1.4（Obata 型刚性）。设 (M, g) 是一个具有紧边界且存在正静态势函数 V 的简单静态流形。若 (M, g) 是非紧致的，我们还假设满足衰减条件 (2.4)。设标量曲率 R 和平均曲率H 满足

$$-\frac{n}{n-1}H^2 \leq R \leq -H^2.$$

则 V 满足带 *Robin* 边界条件的 *Obata* 型方程。此外，(M, g) 等距于以下流形之一：

I. 具有全测地边界的里奇平坦流形；*II.* 非紧扭曲积 $M \cong (-\infty, 0] \times \Sigma$，其度量为 $g = dt^2 + e^{\frac{2Ht}{n-1}} g_\Sigma$，其中 (Σ, g_Σ) 是一个维数为 $n-1$ 的紧致 *Ricci* 平坦流形。

我们称 (M, g) 为 *Obata* 型，如果它与上述情形之一等距。

基于这一分类，我们建立了标量曲率可变形性的充分几何条件，这些条件要求掌握无穷远处静态势函数的粗略信息。这构成了我们的第二个主要结果。

定理 1.5。设 (M, g) 是一个完备、连通的带边光滑流形，并假设 g 是静态的，且具有正静态势。若满足以下任一条件，则映射 $g \mapsto (R_g, H_g)$ 是局部满射：

1. 平均曲率 H 不是局部常数；*2.* 边界 ∂M 不是全脐的；*3.* (M, g) 是一个具有紧边界且非 *Obata* 型的简单流形；若其非紧致，则满足衰减条件 (2.4)；并且其标量曲率满足

$$-\frac{n}{n-1}H^2 \leq R \leq -H^2.$$

注 1.6。Corvino [3] 证明，对于无边流形，标量曲率映射在 g 处是局部满射，当且仅当 g 不是静态的。作为定理 1.5 的推论，我们证明，对于带边流形，即使 g 是静态的，只要满足定理 1.5 中的几何条件，标量曲率映射仍可能是局部满射。

本文其余部分安排如下。第 2 节中，我们为具有紧边界的单连通静态流形建立一个关键不等式，由此得到 Obata 型刚性定理。作为应用，我们证明定理 1.5。第 3 节中，我们介绍

广义相对论中不属于 Obata 型且其曲率映射 $g \mapsto (R_g,\ H_g)$ 局部满射的静态流形例子。

Acknowledgments

我们感谢 Lan-Hsuan Huang 富有助益的讨论。这项工作始于作者们在 2024 年秋季学期访问位于加利福尼亚州伯克利的 Simons Laufer 数学科学研究所（前身为 MSRI）期间。我们感谢该研究所的热情接待与支持。

2. Obata-type rigidity theorem

本节首先介绍一些预备性观察。

对方程 (1.1) 和 (1.2) 两边取迹，可得

$$\begin{cases} \Delta V + \dfrac{R}{n-1} V = 0 & \text{in } M, \\ V_\nu - \dfrac{H}{n-1} V = 0 & \text{on } \partial M. \end{cases} \tag{2.1}$$

因此，方程组 (1.1)–(1.2) 等价于

$$\begin{cases} \operatorname{Hess} V = \left(\operatorname{Ric} - \dfrac{R}{n-1} g \right) V & \text{in } M, \\ V_\nu = \dfrac{H}{n-1} V & \text{on } \partial M. \end{cases} \tag{2.2}$$

回顾一下，在具有紧边界的简单静态流形上，∂M 的平均曲率 H是常数。因此，我们可以将 H 延拓为整个 M上的常值函数。

接下来，我们推导一个适用于这类流形的有用不等式。

命题 2.1. 设(M, g) 为一个带边界的紧致简单静态流形，并存在静态势函数 $V > 0$。则

$$\int_M V^{-1} \left| \operatorname{Hess} V + \frac{R + H^2}{n-1} V g \right|^2 d\mu_g = \frac{R + H^2}{n-1} \left(R + \frac{n}{n-1} H^2 \right) \int_M V \, d\mu_g.$$

证明. 在 M 上定义一个对称的 (0,2)-张量 S 如下：

$$S \triangleq \operatorname{Ric} + \frac{H^2}{n-1} g.$$

由 (2.2) 可得

$$VS = \operatorname{Hess} V + \frac{R + H^2}{n-1} V g.$$

利用第二 Bianchi 恒等式以及标量曲率 R 为常数这一性质（定理 1.2），我们得到 S 是无散的：

$$\operatorname{div} S = \operatorname{div} \operatorname{Ric} = \frac{1}{2} DR = 0.$$

因此我们有

$$\operatorname{div} \left(S(DV, \cdot) \right) = \operatorname{div} S \cdot DV + \langle \operatorname{Hess} V, S \rangle = \langle \operatorname{Hess} V, S \rangle .$$

因此，

$$\begin{aligned} V^{-1} \left| \operatorname{Hess} V + \frac{R + H^2}{n-1} V g \right|^2 &= \langle VS, S \rangle \\ &= \langle \operatorname{Hess} V, S \rangle + \frac{R + H^2}{n-1} V \langle g, S \rangle \\ &= \operatorname{div} \left(S(DV, \cdot) \right) + \frac{R + H^2}{n-1} \left(R + \frac{nH^2}{n-1} \right) V. \end{aligned} \tag{2.3}$$

对 M 积分并应用散度定理，得到：

$$\int_M V^{-1}\left|\operatorname{Hess} V+\frac{R+H^2}{n-1}Vg\right|^2 d\mu_g=\int_{\partial M}S(DV,\nu)d\sigma_g+\frac{R+H^2}{n-1}\left(R+\frac{nH^2}{n-1}\right)\int_M V d\mu_g.$$

为完成证明，我们必须证明边界积分为零：

$$\int_{\partial M}S(DV,\nu)d\sigma_g=0.$$

我们在 ∂M 上选取一个局部正交规范标架 $\{e_1,\ldots,e_{n-1},\nu\}$，其中 ν 是外向单位法向量。在 ∂M 上，已知对于 $i=1,\ldots,n-1$，$\mathrm{Ric}_{i\nu}=0$。因此，$S(DV,\nu)$ 变为：

$$\begin{aligned}S\left(DV,\nu\right)&=\left(\mathrm{Ric}+\frac{H^2}{n-1}g\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}V_i e_i+V_\nu\nu,\nu\right)\\&=\left(R_{\nu\nu}+\frac{H^2}{n-1}\right)V_\nu\\&=\left(R_{\nu\nu}+\frac{H^2}{n-1}\right)\frac{H}{n-1}V.\end{aligned}$$

另一方面，由 (2.1)、(2.2) 和高斯方程，我们在 ∂M 上得到：

$$\begin{aligned}0&=\Delta V+\frac{R}{n-1}V\\&=\Delta_{\partial M}V+HV_\nu+V_{\nu\nu}+\frac{R}{n-1}V\\&=\Delta_{\partial M}V+\left(\frac{H^2}{n-1}+R_{\nu\nu}\right)V.\end{aligned}$$

将这个最终方程在边界 ∂M 上积分，得到

$$0=\int_{\partial M}\left(\frac{H^2}{n-1}+R_{\nu\nu}\right)V d\sigma_g.$$

因此，

$$\int_{\partial M}S(DV,\nu)d\sigma_g=\frac{H}{n-1}\int_{\partial M}\left(R_{\nu\nu}+\frac{H^2}{n-1}\right)V d\sigma_g=0.$$

□

在满足适当的衰减条件下，前述结果可推广至非紧情形。

命题 2.2（推广至非紧流形）。设（M、g）为具有紧边界的非紧致、单连通静态流形，并且存在静态势函数 $V>0$。假设沿着 M的紧耗尽 $\{B_r\}$ 满足以下衰减条件：

$$\liminf_{r\to\infty}\int_{\partial B_r}S(DV,\nu)d\sigma_g=\liminf_{r\to\infty}\int_{\partial B_r}\left(\mathrm{Ric}+\frac{H^2}{n-1}g\right)(DV,\nu)d\sigma_g\le 0. \tag{2.4}$$

则以下不等式成立：

$$\int_M V^{-1}\left|\operatorname{Hess} V+\frac{R+H^2}{n-1}Vg\right|^2 d\mu_g\le\frac{R+H^2}{n-1}\left(R+\frac{n}{n-1}H^2\right)\int_M V d\mu_g. \tag{2.5}$$

这个不等式也适用于两边非负函数的积分均发散至 $+\infty$ 的情形。

证明。我们从局部恒等式 (2.3) 开始。在 B_r 上积分（对 $r \gg 1$ 而言），并应用散度定理，得到：

$$\begin{aligned}\int_{B_r} V^{-1}\left|\operatorname{Hess} V+\frac{R+H^2}{n-1}Vg\right|^2 d\mu_g &= \int_{\partial M} S(DV,\nu)d\sigma_g+\int_{\partial B_r} S(DV,\nu)d\sigma_g \\ &\quad+\frac{R+H^2}{n-1}\left(R+\frac{nH^2}{n-1}\right)\int_{B_r} V d\mu_g \\ &= \int_{\partial B_r} S(DV,\nu)d\sigma_g+\frac{R+H^2}{n-1}\left(R+\frac{nH^2}{n-1}\right)\int_{B_r} V d\mu_g.\end{aligned}$$

令 $r\to\infty$ 趋于极限下确界，并利用衰减条件 (2.4)，根据单调收敛定理，我们得到：

$$\begin{aligned}&\int_M V^{-1}\left|\operatorname{Hess} V+\frac{R+H^2}{n-1}Vg\right|^2 d\mu_g \\ =&\liminf_{r\to\infty}\int_{\partial B_r} S(DV,\nu)d\sigma_g+\frac{R+H^2}{n-1}\left(R+\frac{nH^2}{n-1}\right)\int_M V d\mu_g \\ \le&\frac{R+H^2}{n-1}\left(R+\frac{n}{n-1}H^2\right)\int_M V d\mu_g.\end{aligned}$$

□

注意到 (2.5) 的左端非负，该不等式表明，若右端非正，则两端必为零。由此得到以下刚性结论。

推论 2.3. 设 (M,g) 是一个具有紧边界并且存在正静态势 V 的简单静态流形。若 (M,g) 是非紧致的，我们还额外假设衰减条件 (2.4)。设

$$(R+H^2)\left(R+\frac{n}{n-1}H^2\right)\le 0. \tag{2.6}$$

则 V 满足以下带 *Robin* 边界条件的 *Obata* 型方程 *(*$VS=0$*)*：

$$\begin{cases}\operatorname{Hess} V+\dfrac{R+H^2}{n-1}Vg=0 & in\ M,\\ V_\nu-\dfrac{H}{n-1}V=0 & on\ \partial M.\end{cases} \tag{2.7}$$

因此，(M,g) 是爱因斯坦流形。

在这些假设下，我们必然有

$$(R+H^2)\left(R+\frac{n}{n-1}H^2\right)=0. \tag{2.8}$$

我们分别考察由（2.8）产生的两种可能性。

定理 2.4。设 $R=-H^2$。则 $(M,\ g)$ 是一个具有全测地边界的里奇平坦流形，且 V 是正常数。

证明。若 $R=-H^2$，则（2.7）中的内部方程化为 $\operatorname{Hess} V=0$。因此，根据（1.1），我们得到 $\mathrm{Ric}=0$，进而推出 $R=H=0$。于是，系统（2.7）变为：

$$\begin{cases}\operatorname{Hess} V=0 & \text{in } M,\\ V_\nu=0 & \text{on } \partial M.\end{cases} \tag{2.9}$$

由此可知，向量场 DV 是平行的。此外，边界条件表明，DV 处处与法向量 ν正交；因此，DV 与边界 ∂M相切。

由于 DV 是平行的，其积分曲线 $\gamma(t)$ 是对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均有定义的测地线。沿着这些测地线，函数 V 是线性的：

$$V(\gamma(t)) = ct + V(\gamma(0)),$$

其中 $c = |DV|^2$ 是一个常数。

然而，由于 $V > 0$ 处处成立，斜率 c 必须为零。这意味着 $|DV|^2 = 0$，因此 V 必须是一个正常数。因此，这种情形不会为 M 提供额外的几何信息。□

现在我们转向第二种情形，即 $R = -\frac{n}{n-1}H^2 < 0$。为方便起见，定义 $\lambda \triangleq \frac{H}{n-1} \neq 0$。在这种情况下，系统 (2.7) 化简为：

$$\begin{cases} \operatorname{Hess} V = \lambda^2 V g & \text{in } M, \\ V_\nu = \lambda V & \text{on } \partial M. \end{cases} \tag{2.10}$$

此外，$\mathrm{Ric} = -(n-1)\lambda^2 g$。

定理 2.5。 假设 $R = -\frac{n}{n-1}H^2 < 0$。那么 M 是非紧致的，并且等距于以下扭曲积

$$M \cong (-\infty, 0] \times \Sigma$$

配备度量

$$g = dt^2 + e^{2\lambda t} g_\Sigma,$$

其中：

- 边界 ∂M 与切片 $\{0\} \times \Sigma$ 等同；
- (Σ, g_Σ) 是一个维数为 $n-1$ 的紧致里奇平坦流形；
- 静态势函数由 $V(t, x) = V_0 e^{\lambda t}$ 给出，其中 V_0 是某个正常数。

此外，若 (M, g) 具有常截面曲率，则 Σ 必为平坦。在这种情况下，M 与一个双曲尖 *cusp* 等距。

证明。 定义函数 $Q \triangleq |DV|^2 - \lambda^2 V^2$。回想一下，对于任意向量场 $X \in TM$，

$$D_X |DV|^2 = 2g(D_X DV, DV) = 2 \operatorname{Hess} V(DV, X).$$

结合这一恒等式与 (2.10) 中的内部方程，我们计算 Q 的导数：

$$\begin{aligned} D_X Q &= 2 \operatorname{Hess} V(DV, X) - 2\lambda^2 V D_X V \\ &= 2\lambda^2 V g(DV, X) - 2\lambda^2 V g(DV, X) = 0. \end{aligned}$$

这意味着 $Q \equiv C$ 在 M 上为常数。在边界 ∂M 上计算 Q，并利用边界条件 $V_\nu = \lambda V$，得到：

$$C = |DV|^2 - \lambda^2 V^2 = |DV|^2 - V_\nu^2 = |\nabla V|^2 \geq 0. \tag{2.11}$$

我们断言 $C = 0$。反设 $C > 0$。由上式可得 $|\nabla V|^2 = C > 0$，因此 ∇V 在 ∂M 上处处不为零。由于 ∂M 是完备的，对任意点 $p \in \partial M$，都存在向量场 $-\nabla V$ 的一条积分曲线 $\gamma(s) : \mathbb{R} \to \partial M$，其起点为 $p = \gamma(0)$。沿着这条曲线，有：

$$V(\gamma(s)) = V(\gamma(0)) + \int_0^s \frac{d}{d\tau} V(\gamma(\tau))\, d\tau = V(p) - \int_0^s |\nabla V(\gamma(\tau))|^2 d\tau = V(p) - sC.$$

由于 $C > 0$，当 s 足够大时，$V(\gamma(s))$ 会变为负值。这与假设 $V > 0$ 矛盾。因此，必有 $C = 0$。

因此，$\nabla V = 0$，这意味着 $V \equiv V_0 > 0$ 在边界∂M上为常数。此外，在内部 M，条件 $Q = 0$ 意味着：

$$|DV| = |\lambda| V. \tag{2.12}$$

定义函数 $f \triangleq \log V$。于是 (2.12) 推出 $|Df| = |\lambda|$。由于 f的梯度范数为常数，其积分曲线是测地线。具体而言，由于 $V_\nu = \lambda V > 0$（假设

$\lambda > 0$ 在边界上不失一般性），Df 指向外侧。令 t 为从 ∂M出发的有符号距离函数，其取向使得在 ∂M处，Dt 与外法向量 ν重合。由于 $|Df|$为常数，且在边界上 Df与 ν成比例，因此 f的水平集与 t的水平集重合。于是，M 在拓扑上分解为 $(-\infty,\ 0] \times \Sigma$（其中$\Sigma \cong \partial M$），且度量分解为

$$g = dt^2 + g_t,$$

其中 g_t 是切片 $\{t\} \times \Sigma$上的诱导度量。关系 $|Df| = |\lambda|$ 意味着$\partial_t f = \lambda$，因此 $f(t) = \log V_0 + \lambda t$。因此，

$$V(t) = V_0 e^{\lambda t}.$$

现在我们来确定度量 g_t。利用 (2.10) 中的 Hessian条件以及 $Dt = \partial_t$这一事实，度量的演化方程为：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g_t(X,Y) &= \mathcal{L}_{D_t} g(X,Y) = 2\,\mathrm{Hess}\, t(X,Y) \\
&= 2g\left(D_X Dt, Y\right) \\
&= 2g\left(D_X\left(\frac{DV}{\lambda V}\right), Y\right) \\
&= \frac{2}{\lambda V} g\left(D_X DV, Y\right) \\
&= \frac{2}{\lambda V}\,\mathrm{Hess}\, V(X,Y) \\
&= 2\lambda g(X,Y) = 2\lambda g_t(X,Y),
\end{aligned}$$

其中 X, Y 与 Σ相切。对该常微分方程积分可得 $g_t = e^{2\lambda t} g_{\Sigma}$。因此，完整的度量为 $g = dt^2 + e^{2\lambda t} g_{\Sigma}$。

我们来检验 M的紧致性。坐标 t 的取值范围为 $(-\infty, 0]$。由于 $V(t) = V_0 e^{\lambda t}$ 对所有 t 都严格为正且非临界，流线不可能终止于内部临界点，也不可能存在其他边界分支（否则边界条件将不成立）。因此，M 是非紧致的。

为了刻画 Σ，我们计算 Ricci 曲率。根据 [8, 推论 7.43], ，对于扭曲函数为 $\rho = e^{\lambda t}$ 的扭曲积度量，将 Ricci 曲率限制在水平向量 X，$Y \in T\Sigma$ 上可得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_M(X,Y) &= \mathrm{Ric}_\Sigma(X,Y) - \left(\frac{\Delta_{\mathbb{R}}\rho}{\rho} + (n-2)\frac{|D\rho|^2}{\rho^2}\right) g(X,Y) \\
&= \mathrm{Ric}_\Sigma(X,Y) - (n-1)\lambda^2 g(X,Y),
\end{aligned}$$

其中 $\Delta_{\mathbb{R}} = \partial_t^2$ 是底空间 $\mathbb{R}$ 上的拉普拉斯算子。将其与 Einstein 条件 $\mathrm{Ric}_M = -(n-1)\lambda^2 g$ 比较，可得 $\mathrm{Ric}_\Sigma = 0$。因此，$(\Sigma,\ g_\Sigma)$ 是里奇平坦的。

最后，假设 $(M,\ g)$ 具有常截面曲率 K。根据上文推导的 Ricci 曲率，必有 $K = -\lambda^2$。因此，黎曼曲率张量为

$$\mathrm{Rm}_M(X,Y)Z = -\lambda^2\left(g(Z,X)Y - g(Z,Y)X\right).$$

另一方面，根据 [8, 命题 7.42], ，扭曲积的曲率张量限制在与 Σ 相切的向量 X，Y，Z上满足：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rm}_M(X,Y)Z &= \mathrm{Rm}_\Sigma(X,Y)Z - \frac{|D\rho|^2}{\rho^2}(g(Z,X)Y - g(Z,Y)X) \\
&= \mathrm{Rm}_\Sigma(X,Y)Z - \lambda^2(g(Z,X)Y - g(Z,Y)X).
\end{aligned}$$

比较这两个表达式可得 $\mathrm{Rm}_\Sigma \equiv 0$，这意味着 Σ 是平坦的。由于 Σ 是紧致的，可知 $\Sigma \cong \mathbb{R}^{n-1}/\Gamma$，因此 M 与双曲尖 cusp 等距。□

我们结合上述结果来证明定理 1.5。

定理 *1.5* 的证明。我们重点讨论条件 3 成立的情形。反证，假设映射 $g \mapsto (R_g,\ H_g)$ 不是局部满射。由此可知，$(M,\ g)$ 必须是具有紧边界的简单静态流形。根据条件 3，曲率满足不等式

$$\left(R+H^2\right)\left(R+\frac{n}{n-1}H^2\right)\leq 0.$$

因此，推论 2.3 表明，(M,g) 必须是 Obata 型。然而，这与条件 3 中的假设矛盾，因为该假设指出 (M,g) 不是 Obata 型。因此，该映射必为局部满射。□

3. Examples

本节将介绍一些具有紧边界的简单流形的例子（若为非紧致流形，则须满足衰减条件 (2.4)），这些流形配备了静态度量 g 和正静态势。这些例子不是 Obata 型，且其标量曲率满足

$$-\frac{n}{n-1}H^2\leq R\leq -H^2.$$

因此，由定理 1.5，映射 $g\mapsto (R_g,H_g)$ 是局部满射。

例 3.1（史瓦西度量）。设 $m>0$。考虑 $\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上的史瓦西度量$g=\phi^{\frac{4}{n-2}}\delta$，其中 δ 是欧几里得度量，$r=|\vec{x}|$，且共形因子定义为 $\phi=1+\frac{m}{2r^{n-2}}$。设 M 为视界（$r^{n-2}>\frac{m}{2}$）外部的区域，因此边界 ∂M 对应于视界本身。那么 (M,g) 是一个具有紧边界的简单流形。

几何量。如 [10]所示，g 是静态的，其势 V 由下式给出：

$$V=\frac{1-\frac{m}{2r^{n-2}}}{1+\frac{m}{2r^{n-2}}}=\frac{2}{\phi}-1.$$

注意，$V>0$ 在 M 的内部，并在视界 ∂M上消失。

回顾一下，(M,g)是标量平坦的（$R=0$），且由于视界 ∂M 是极小的，平均曲率 $H=0$。因此，$R=-H^2=0$，并且只有 I 型刚性是可能的。

衰减条件。我们验证 Ric(DV,ν) 在无穷远处满足衰减条件。令$\vec{e}=\frac{x}{r}$ 为欧几里得单位径向向量。坐标球面 Σ_r 的 g单位外法向量为：

$$\nu=\phi^{-\frac{2}{n-2}}\vec{e}.$$

势的欧几里得梯度 DV计算如下：

$$DV=\frac{m(n-2)}{r^{n-1}\phi^2}\vec{e}=\frac{m(n-2)}{r^{n-1}}\phi^{\frac{2}{n-2}-2}\nu.$$

利用共形平坦度量的里奇张量标准公式，我们观察到其主阶衰减：

$$\mathrm{Ric}_{ij}\sim\frac{m(n-2)}{r^n}\left(\delta_{ij}-n\frac{x_ix_j}{r^2}\right).$$

因此，

$$\mathrm{Ric}(DV,\nu)=\frac{m(n-2)}{r^{n-1}}\phi^{\frac{2}{n-2}-2}\,\mathrm{Ric}(\nu,\nu)\sim\frac{-m^2(n-1)(n-2)^2}{r^{2n-1}}.$$

在球面 Σ_r 上积分（其中 Area$_g(\Sigma_r)\sim\omega_{n-1}r^{n-1}$），极限变为：

$$\liminf_{r\to\infty}\int_{\Sigma_r}S(DV,\nu)d\sigma_g=\lim_{r\to\infty}\int_{\Sigma_r}\mathrm{Ric}(DV,\nu)d\sigma_g=\lim_{r\to\infty}\left(\frac{C}{r^{2n-1}}\cdot r^{n-1}\right)=\lim_{r\to\infty}\frac{C}{r^n}=0.$$

最后，由于 (M,g) 并非里奇平坦，因此它不可能是 I 型，进而也不是 Obata 型。

例 3.2 （广义Kottler度量）。 设 $m \geq 0$。设 (Σ, b) 是一个闭的 $(n-1)$ 维黎曼流形，其 Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}_b = (n-2)b$ 为常数。在 $M = [r_c, \infty) \times \Sigma$ 上定义度量 g，如下：

$$g = \frac{1}{r^2 + 1 - 2mr^{2-n}} dr^2 + r^2 b,$$

其中 $r_c = (2m)^{\frac{1}{n-2}}$。我们首先通过证明 $r_c > r_0$，来验证 (M, g) 定义良好，其中r_0 是 $u(r) = r^2 + 1 - 2mr^{2-n}$ 的最大根。

情形 I $(m = 0)$：对所有 r，$u(r) = r^2 + 1 > 0$，因此该度量对所有 r 都定义良好。

情形 II $(m > 0)$：由于对 $r > 0$，$u'(r) = 2r(1 + m(n-2)r^{-n}) > 0$，$u$ 严格递增。由于

$$u(r_c) = (2m)^{\frac{2}{n-2}} + 1 - 2m \cdot (2m)^{-1} = (2m)^{\frac{2}{n-2}} > 0 = u(r_0),$$

单调性意味着 $r_c > r_0$。

因此，(M, g) 是一个在 $r = r_c$ 处具有紧边界的光滑简单流形。

几何量。 如 [6]所示， g 是静态的，且具有静态势函数 $V = \sqrt{r^2 + 1 - 2mr^{2-n}} > 0$。因此，我们可以将度量改写为

$$g = \frac{1}{V^2} dr^2 + r^2 b.$$

Ricci曲率分量为

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_{rr} &= -\frac{n-1}{r} \cdot \frac{\left(V^2\right)'}{2} g_{rr} = -(n-1)\left(1 + m(n-2)r^{-n}\right) g_{rr}, \\
\mathrm{Ric}_{ij} &= \left(\frac{(n-2) - (n-2)V^2}{r^2} - \frac{\left(V^2\right)'}{2r} \right) g_{ij} = -\left((n-1) - m(n-2)r^{-n}\right) g_{ij}.
\end{aligned}$$

由此可知，标量曲率为常数： $R = -n(n-1)$。

令 $\nu = V\partial_r$ 为 r-水平集 Σ_r的外单位法向量。 Σ 的平均曲率 H为：

$$H = \mathrm{div}(-\nu) = -\frac{n-1}{r_c} V(r_c) = -(n-1).$$

因此 $R = -\frac{n}{n-1} H^2 < 0$，且只可能是II型刚性。

衰减条件。 注意， $DV = (VV')\,\nu$，因此

$$\begin{aligned}
S(DV, \nu) &= \left(VV'\right) S(\nu, \nu) = \left(VV'\right) (\mathrm{Ric}(\nu, \nu) + (n-1)) \\
&= \left(VV'\right) \left(V^2 \mathrm{Ric}_{rr} + (n-1)\right) \\
&= -m(n-1)(n-2) r^{1-n} \cdot (1 + m(n-2)r^{-n}).
\end{aligned}$$

由于 $r \to \infty$, $S(DV, \nu) \sim -m(n-1)(n-2)r^{1-n}$。对等值集 Σ_r 使用体积元 $d\sigma_g = r^{n-1} d\sigma_b$ 积分，得到

$$\begin{aligned}
\liminf_{r \to \infty} \int_{\Sigma_r} S(DV, \nu) d\sigma_g &= \lim_{r \to \infty} \int_{\Sigma} \left(-m(n-1)(n-2)r^{1-n}\right) r^{n-1} d\sigma_b \\
&= -m(n-1)(n-2)\,\mathrm{Vol}(\Sigma, b) \leq 0.
\end{aligned}$$

最后，如果 (Σ, b) 不是里奇平坦的，那么 (M, g) 不可能是 II 型，因此不是 Obata 型。

注 3.3。 正如 [6], 中在 $H = -(n-1)$ 的情形下所指出的，上述积分与 *Wang–Chru´sciel–Herzlich* 质量积分 一致（另见 [1,2,5]）：

$$-\frac{n-2}{2} m(g, V) = \lim_{r \to \infty} \int_{\Sigma_r} (\mathrm{Ric} + (n-1)g)(DV, \nu) d\sigma_g.$$

此外，这个极限定义良好，并且在任意渐近局部双曲流形上收敛。

References

[1] Hamed Barzegar、Piotr T. Chru´sciel 和 Michael H¨orzinger, *Energy in higher-dimensional spacetimes*, 《物理评论 D》 **96** 2017 12, 124002, 25, 10 1103 96 124002 3870907 ( ), 第 [2] ´ *The mass of asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds* 号。DOI . /physrevd. . . MR Piotr T. Chrusciel 和 Marc Herzlich, , 《太平洋数学杂志》**212** (2003), 第 2 期, 231–264, DOI 10.2140/pjm.2003.212.231。MR2038048[3] Justin Corvino, , 《数学物理通讯》( ), 第 – 期, DOI . /PL . MR 1794269 [4] *Deformations of the scalar curvature*

Arthur E. Fischer 和 Jerrold E. Marsden, , 《杜克数学杂志》**42** (1975), 第 3 期, 519–547。MR380907[5] Marc Herzlich, , Ann. Henri Poincare ( ), 第 – 期, DOI 10.1007/s00023-016-0494-5。MR3568027[6] Lan-Hsuan Huang 和 Hyun Chul Jang, , 《美国数学会汇刊》( ), 第 – 期, DOI . /tran/ . MR4491448[7] Masahiko Kanai, , 《东京数学杂志》 **6** 1983 1, 143 151, 10 3836 1270214332 0707845 ( ), 第 – 期, DOI . / [8] *Semi-Riemannian geometry* tjm/ . MR Barrett O'Neill, 《纯粹与应用数学》, 第 103 卷, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers],纽约, 1983年。附有相对论方面的应用。MR0719023[9] Hongyi Sheng, *Localized deformation of the scalar curvature and the mean curvature*, arXiv: 2402.08619（2024年）。[10] , *Static manifolds with boundary and rigidity of scalar curvature and mean curvature*, 《国际数学研究通知》 ——— **7** 2025 086, 18, 10 1093 086 4888700 ( ), 论文 [11] *Complete Riemannian manifolds and some vector fields* 编号 rnaf, DOI . /imrn/rnaf . MR Yoshihiro Tashiro, 《美国数学会汇刊》**117** (1965年), 251–275, DOI 10.2307/1994206。MR0174022

Institute for Theoretical Sciences, Westlake Institute for Advanced Study, Westlake University, Hangzhou, Zhejiang Province 310024, China*Email address*: shenghongyi@westlake.edu.cn

Department of Mathematics, University of California, Irvine, Irvine, CA, 92697, USA*Email address*: kaiweiz2@uci.edu