arXiv:2601.01824v1 [math.AG] 5 Jan 2026

关于三型复平面曲线

ALEXANDRU DIMCA[1] 和 GABRIEL STICLARU

Abstract. 复射影平面曲线的类型最近由 T. Abe、P. Pokora 和第一作者引入。在同一篇论文中，他们研究了二型曲线。本文研究三型平面曲线，并特别关注低次曲线和直线配置。

1. Introduction

设 $S = \mathbb{C}[x, y, z]$ 为具有复系数、变量为 x, y, z 的多项式环，并设 C : $f = 0$ 为复射影平面 $\mathbb{P}^2$中的一条次数为 $d \geq 3$ 的约化曲线。记 f的雅可比理想为 J_f，即由 f_x, f_y, f_z 对 f的偏导数在 S中张成的齐次理想；记相应的分次商环为 $M(f) = S/J_f$，称为 f的雅可比（或米尔诺）代数。考虑 f的雅可比关系构成的分次 S-模，即

$$D_0(f) = \{(a, b, c) \in S^3 \ : \ af_x + bf_y + cf_z = 0\}.$$

若 C : $f = 0$ 是一个 m-关系曲线，则模 $D_0(f)$ 由 m 个齐次关系极小生成，例如 r_1， r_2，.....， r_m，其次数为 $d_j = \deg r_j$，并按如下顺序排列

$$1 \leq d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_m.$$

我们称这些次数为曲线 C 的指数，而将 r_1，.....， r_m称为模 $D_0(f)$ 的极小生成集。

令 I_f 表示雅可比理想 J_f 关于极大理想 $\mathbf{m} = (x, \ y, \ z)$ 的饱和化，其中 S。考虑下列局部上同调群，它通常称为 f 的雅可比模，

$$N(f) = I_f/J_f = H^0_{\mathbf{m}}(M(f)).$$

我们对任意整数 k 设定 $n(f)_k = \dim N(f)_k$，并通过以下公式引入曲线的自由缺陷 C

$$\nu(C) = \max_j\{n(f)_j\}$$

2010 数学主题分类。主要分类 14H50；次要分类 14B05、13D02、32S22。关键词与短语。雅可比理想、雅可比模、指数、直线配置、低次曲线。[1] 本研究部分获项目“奇点与应用”支持，该项目编号为 CF 132/31.07.2023，由欧盟通过罗马尼亚国家复苏与韧性计划资助的 NextGenerationEU 提供资金。

如 [13] 所示。注意， C 是自由的，即 $D_0(f)$ 是秩为 2 的自由 S-模，当且仅当 $N(f) = 0$，因此 $\nu(C) = 0$。回顾一下，给定曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$ 的总 Tjurina 数定义为

$$\tau(C) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \tau_p,$$

其中，Sing(C) 表示 C 的所有奇点的集合，而 τ_p 是奇点 (C, p) 的 Tjurina 数。

考虑曲线 C 的 Milnor 代数 $M(f)$ 的极小分解的一般形式，假设该曲线不是自由曲线，即

$$0 \to \oplus_{i=1}^{m-2} S(-c_i) \to \oplus_{j=1}^{m} S(1-d-d_j) \to S^3(1-d) \to S, \tag{1.1}$$

其中 $c_1 \leq .. \leq c_{m-2}$ 和 $d_1 \leq ... \leq d_m$。由 [19, 引理 1.1] 可得

$$c_j = d + d_{j+2} - 1 + \epsilon_j, \tag{1.2}$$

对于 $j = 1, ..., m-2$ 以及某些整数 $\epsilon_j \geq 1$。利用 [19, 公式（13）], 可得

$$d_1 + d_2 = d - 1 + \sum_{i=1}^{m-2} \epsilon_j. \tag{1.3}$$

下述不变量由 [2] 引入，它在所有平面曲线之间构成了一个有趣的层次结构。

定义 1.1. 设 $C : f = 0$ 是次数为 d 的一条约化平面曲线，且 d_1 和 d_2 是上述雅可比关系模 $D_0(f)$ 的极小生成元系中次数最小的两个生成元。那么我们称 C 的类型为 $t(C)$，其中正整数 $t(C)$ 定义如下：

$$t(C) = d_1 + d_2 + 1 - d.$$

该不变量在平面曲线研究中起着关键作用，这一点可从它的另一种定义看出。设 $C : f = 0$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中的一条约化曲线，且 r_1 是分次 S-模 $D_0(f)$ 的一个最低次数生成元。相应的 Bourbaki 理想 $B(C, r_1) \subset S$ 属于 $D_0(f)$，它由 [14, 第 5], 节和 [13, 第 3], 节引入；此前，du Plessis–Wall 在 [17] 中、第一作者在 [6] 中曾以非显式的方式对其进行过研究。其性质在近期论文 [20] 中得到了进一步探讨。根据 Bourbaki 理想 $B(C, r_1)$ 的定义，曲线 C 的类型正是齐次理想 $B(C, r_1)$ 的初始次数，即

$$t(C) = \mathrm{indeg}\, B(C, r_1) = \min\{s \in \mathbb{Z} \ : \ B(C, r_1)_s \neq 0\}. \tag{1.4}$$

注意，当且仅当 $t(C) = 0$ 时，曲线 C 是自由的；按照 [1, 13] 中的定义，当且仅当 $t(C) = 1$ 时，曲线 C 是加一生成的。满足 $t(C) = 2$ 的曲线 C 已在 [2] 中得到研究。

本文考虑满足 $t(C) = 3$ 的曲线。在第 2 节中，我们回顾与曲线的雅可比关系相关的一些基本事实；在第 3 节中，我们利用这些事实推导 Tjurina 数的公式（见定理 3.1）和 3 型曲线的自由缺陷公式（见命题 3.2、3.3、3.4 和 3.5）。特别地，我们证明

这些曲线自然分为 4 个子类，分别记为 $3A$、 $3B$、 $3B'$ 和 $3C$。例 3.6 证明了这 4 个子类确实都存在。

在第4节中，我们将3型曲线与其他类别的曲线联系起来，即极大 Tjurina 曲线（见命题 4.2 和例 4.3），以及节点曲线；较长的小节（4.4）专门讨论后者。特别地，例 4.7 构造了许多次数为6且属于3型的节点曲线。随后，我们证明具有圆锥曲线上6个尖点的 Zariski 六次曲线，以及具有圆锥曲线上6个三重点的9条直线的 Ziegler-Yuzvinski 线排列，都是3型曲线，见例 4.11 和例 4.12。本节最后，我们构造一个可数的曲线族 $3C$ ，它具有良好的对称性，见定理 4.13。

在第5节中，我们对具有3型的4次曲线（分别为5次曲线）进行了一定程度的分类，见命题 5.1 和推论5.2（分别见命题 5.4 和推论 5.5）。

在第6节中，我们考察 3 型的直线配置。首先，在命题 6.1、6.2 和 6.4 中，我们对具有 3 型的 6 条、7 条和 8 条直线的配置进行了分类，达到了某种程度。最后，在定理 6.8 中，我们构造了一个具有 $d = n_1 + n_2 + 2$ 条直线且类型为 $3C$ 的配置，其中 $2 \leq n_1 \leq n_2$ 为任意整数。

2. Basic facts related to Jacobian syzygies of curves

我们首先回顾以下不等式

$$d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq d - 1 \tag{2.1}$$

该不等式对任意约化平面曲线都成立，参见 [13, 定理 2.4]。如果生成元 r_j of$D_0(f)$ 的分量为 (a_j, b_j, c_j)，那么有

$$a_j, b_j, c_j \in S_{d_j} \text{ and } a_j f_x + b_j f_y + c_j f_z = 0,$$

对于任意 $j = 1, \ldots, m$，其中 $(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ 是 C 的指数： $f = 0$。此外，二阶缠结关系由 S^3 中以下形式的等式给出

$$\alpha_{i,1} r_1 + \alpha_{i,2} r_2 + \ldots + \alpha_{i,m} r_m = 0 \tag{2.2}$$

其中 $i = 1, \ldots, m-2$ 和 $\alpha_{i,j}$ 是 S 中的齐次多项式，且若 $\alpha_{i,j} \neq 0$，则

$$\deg(\alpha_{i,j}) = d_m - d_j + \epsilon_i, \tag{2.3}$$

对于任意 $i = 1, \ldots, m-2$ 以及任意 $j = 1, \ldots, m$。

接下来回顾 du Plessis 和 Wall 的以下结果，参见 [17, 定理 3.2]，以及 [18] ，了解另一种方法。

定理 2.1。 对于正整数 d 和 d_1，定义两个新的整数如下：

$\tau(d, d_1)_{min} = (d-1)(d-d_1-1)$ 和 $\tau(d, d_1)_{max} = (d-1)^2 - d_1(d-d_1-1)$。

如果 $C: f = 0$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中的一条 d 次约化曲线，且 d_1 是 f的第一指数，那么

$$\tau(d, d_1)_{min} \leq \tau(C) \leq \tau(d, d_1)_{max}.$$

此外，对于 $d_1 \geq d/2$，更强的不等式 $\tau(C) \leq \tau'(d, d_1)_{max}$成立，其中

$$\tau(d,d_1)'_{max} = \tau(d,d_1)_{max} - \binom{2d_1+2-d}{2}.$$

下述结果描述了具有最小 Tjurina 数的曲线，参见 [13,定理 3.5 (1)]。

定理 2.2。若 $C : f = 0$ 是次数为 d 的约化曲线，位于 $\mathbb{P}^2$ 中，且 d_1 是 f的第一指数，则 $\tau(C) = \tau(d, d_1)_{min}$当且仅当 C是一个满足$d_2 = d_3 = d - 1$的 *3*-协 *syzygy* 曲线。

采用 (1.1) 中的记号和假设，S-模 $D_0(f)$ 的 Castelnuovo-Mumford 正则度 $reg(D_0(f))$ 为

$$\operatorname{reg} D_0(f) = d_m + \epsilon_{m-2} - 1. \tag{2.4}$$

这个不变量满足

$$\operatorname{reg} D_0(f) \leq 2d - 4, \tag{2.5}$$

对于 $d \geq 3$，参见 [9, 注 5.1]。结合 (2.4)，特别可得

$$d_m \leq 2d - 4, \tag{2.6}$$

此外，当 C 是仅有一个节点作为奇点的曲线时，即当 $\tau(C) = 1$时，(2.5) 和 (2.6) 中的等号成立。此外，我们有以下结果： [9,定理 2.1]。

定理 2.3. 假设 C 有 s个不可约分支 C_i，次数为 e_i，且它们均光滑，其中 $i = 1, \ldots, s$。令 e 为次数 e_i中的最大值。那么

$$\operatorname{reg} D_0(f) \leq d + e - 3$$

并且当 C 是节点曲线时，等号成立。

最后，我们回顾以下结果，参见 [8, 定理 1.2]。

定理 2.4. 设 $C : f = 0$ 是次数为 d 的约化平面曲线，且 $d_1 = \operatorname{mdr}(C)$。则有以下结论。

(1) 若 $d_1 \leq (d-1)/2$，则 $\nu(C) = (d-1)^2 - d_1(d-1-d_1) - \tau(C)$。

(2) 若 $d_1 \geq (d-1)/2$，则

$$\nu(C) = \left\lceil \frac{3}{4}(d-1)^2 \right\rceil - \tau(C).$$

3. Tjurina numbers and freeness defects

以下结果描述了类型 3 曲线的指数及其对应的 Tjurina 数，其中使用了 (1.3) 中的记号。

定理 3.1. 设 C 是一条类型 3 的曲线。那么以下四种情况之一成立。

(1) C 是一个 *3*-协 *syzygy* 曲线，且 $\epsilon_1 = 3$。如果 (d_1, d_2, d_3) 是 C 的指数，那么

$$\tau(C) = d_1^2 + d_1d_2 + d_2^2 - 3(d_1 + d_2 + d_3).$$

(2) C 是一个 *4*-协 *syzygy* 曲线，且 $\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = 1$。如果 (d_1, d_2, d_3, d_4) 是 C 的指数，那么 $d_3 < d_4$ 和

$$\tau(C) = d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2 - 3d_1 - 3d_2 - 2d_3 - d_4 + 2.$$

(3) C 是一个 *4*-协 *syzygy* 曲线，且 $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 2$。若 (d_1, d_2, d_3, d_4) 是 C的指数，则

$$\tau(C) = d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2 - 3d_1 - 3d_2 - d_3 - 2d_4 + 2.$$

(4) C 是一个 *5*-协 *syzygy* 曲线，且 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$。若 $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ 是 C的指数，则

$$\tau(C) = d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2 - 3d_1 - 3d_2 - d_3 - d_4 - d_5 + 3.$$

反之，若出现以下情形之一

(a) C 是一个 *3*-协 *syzygy* 曲线，且 $\epsilon_1 = 3$,(b) C 是一个 *4*-协 *syzygy* 曲线，且 $\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = 1$,(c) C 是一个 *4*-协 *syzygy* 曲线，且 $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 2$,(d) C 是一个 *5*- 协 *syzygy* 曲线，且 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$,

然后 $t(C) = 3$。

在情形 (1)（分别地，(2)、(3)、(4)）中，我们称 C 为类型 $3A$ 的曲线（分别为 $3B$、$3B'$、 $3C$）。情形 (2) 中的附加条件 $d_3 < d_4$ 来自不等式$c_1 \leq c_2$ (1.1)，该不等式等价于

$$d_3 + 2 = d_3 + \epsilon_1 \leq d_4 + \epsilon_2 = d_4 + 1.$$

证明。为证明 syzygies 的数量 m 满足 $3 \leq m \leq 5$，并得到 ϵ_j的相应取值，使用等式 (1.3)。在情形 (1) 中， $\tau(C)$ 的取值由 [13, 命题 2.1] 推出，利用 $d_1 + d_2 = d + 2$，其中 $d = \deg C$。

在情形 (2) 中，我们使用 (1.2) 得到 Milnor 代数$M(f)$ 的如下分辨率:

$$0 \to S(-d - d_3 - 1) \oplus S(-d - d_4) \to \oplus_{j=1}^{5} S(1 - d - d_j) \to S^3(1 - d) \to S.$$

该分辨率意味着在此情形下有

$$\tau(C) = \binom{k+2}{2} - 3\binom{k+3-d}{2} + \sum_{j=1}^{4} \binom{k+3-d-d_j}{2} -$$

$$- \binom{k+1-d-d_3}{2} - \binom{k+2-d-d_4}{2}$$

对于任意充分大的 k。在情形 (3) 中，我们使用 (1.2) 得到 Milnor 代数 $M(f)$ 的如下分辨率:

$$0 \to S(-d - d_3) \oplus S(-d - d_4 - 1) \to \oplus_{j=1}^{5} S(1 - d - d_j) \to S^3(1 - d) \to S.$$

这一分辨率意味着，在这种情况下有

$$\tau(C) = \binom{k+2}{2} - 3\binom{k+3-d}{2} + \sum_{j=1}^{4} \binom{k+3-d-d_j}{2} -$$

$$-\binom{k+2-d-d_3}{2}-\binom{k+1-d-d_4}{2}$$

对任意大的 k 均成立。

在情形 (4) 中，我们利用 (1.2) 得到 Milnor 代数 $M(f)$ 的如下分辨率：
$0 \to S(-d-d_3) \oplus S(-d-d_4) \oplus S(-d-d_5) \to \oplus_{j=1}^{5} S(1-d-d_j) \to S^3(1-d) \to S$.此分辨率表明，在这种情形下有

$$\tau(C)=\binom{k+2}{2}-3\binom{k+3-d}{2}+\sum_{j=1}^{5}\binom{k+3-d-d_j}{2}-$$

$$-\binom{k+2-d-d_3}{2}-\binom{k+2-d-d_4}{2}-\binom{k+2-d-d_5}{2}$$

对于任意充分大的 k。最后一个结论由等式 (1.3) 得出。 □

对于 3 型曲线 C，自由缺陷$\nu(C)$也有简单的公式，如下所示。

命题 3.2。 假设 C 的类型为 $3A$，且指数为 (d_1, d_2, d_3)。则有以下结论。

(1) 如果 $d_1 \leq d_2 - 2$，则 $\nu(C) = 3(d_3 - d_2) + 9 \geq 9$.(2) 如果 $d_1 = d_2 - 1$，则 $\nu(C) = 3(d_3 - d_2) + 8 \geq 8$.(3) 如果 $d_1 = d_2$，则 $\nu(C) = 3(d_3 - d_2) + 7 \geq 7$.

证明。 我们使用定理 2.4 和定理 3.1。注意，条件 $d_1 \leq d_2 - 3$恰好就是定理 2.4 (1) 中出现的条件 $d_1 \leq (d-1)/2$。因此，要在这个更强的条件下证明命题 3.2 中的断言 (1)，我们使用定理 2.4 (1) 给出的 $\nu(C)$ 公式，以及定理 3.1 (1) 给出的 $\tau(C)$ 公式。要证明断言 (1) 的其余部分以及断言 (2)、(3) 和 (4)，我们使用定理 2.4 (2) 给出的 $\nu(C)$ 公式，以及定理 3.1 (1) 给出的 $\tau(C)$ 公式。至此，命题 3.2 得证。

□

下面命题 3.3、3.4 和 3.5 的证明与上述证明类似，留给读者完成。

命题 3.3。 假设 C 的类型为 $3B$，指数为 (d_1, d_2, d_3, d_4)。则有以下结论。

(1) 若 $d_1 \leq d_2 - 2$，则 $\nu(C) = 2d_3 + d_4 - 3d_2 + 7 \geq 7$.(2) 若 $d_1 = d_2 - 1$，则 $\nu(C) = 2d_3 + d_4 - 3d_2 + 6 \geq 6$.(3) 若 $d_1 = d_2$，则 $\nu(C) = 2d_3 + d_4 - 3d_2 + 5 \geq 5$.

命题 3.4。 假设 C 的类型为 $3B'$，指数为 (d_1, d_2, d_3, d_4)。则有以下结论。

(1) 如果 $d_1 \leq d_2 - 2$，则 $\nu(C) = d_3 + 2d_4 - 3d_2 + 7 \geq 7$.(2) 如果 $d_1 = d_2 - 1$，则 $\nu(C) = d_3 + 2d_4 - 3d_2 + 6 \geq 6$.(3) 如果 $d_1 = d_2$，则 $\nu(C) = d_3 + 2d_4 - 3d_2 + 5 \geq 5$.

命题 3.5。 设 C 的类型为 $3C$，指数为$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$。则以下结论成立。

(1) 若 $d_1 \leq d_2 - 2$，则 $\nu(C) = d_3 + d_4 + d_5 - 3d_2 + 6 \geq 6$.(2) 若 $d_1 = d_2 - 1$，则 $\nu(C) = d_3 + d_4 + d_5 - 3d_2 + 5 \geq 5$.(3) 若 $d_1 = d_2$，则 $\nu(C) = d_3 + d_4 + d_5 - 3d_2 + 4 \geq 4$.

让我们来看一些具有 3 型的曲线 C 的首批例子。

例 3.6. (i) 曲线 $C: f = xy(x^4 + y^4 - z^4) = 0$ 属于 $3A$ 型，指数为 (4,4, 5)；例如，使用 SINGULAR [3] 进行直接计算即可得出这一点。利用定理 3.1 (1)，我们得到 $\tau(C) = 9$，而命题 3.2 (3) 意味着$\nu(C) = 10$。

(ii) 曲线 $C: f = x^4 + y^4 + xyz(x + z) = 0$ 的类型为 $3B$，指数为 (3，3，3，4)。由定理 3.1 (2) 可知 $\tau(C) = 1$，而命题 3.3 (3) 蕴含 $\nu(C) = 6$。

(iii) 曲线 C: $f = (x^2 + y^2 - 2z^2)(x^9 + y^9 - z(x^2 - 3y^2)^4) = 0$ 的类型为 $3B'$，指数为 (6，7，8，9)。由定理 3.1 (3) 可知 $\tau(C) = 64$，而命题 3.4 (2) 蕴含 $\nu(C) = 11$。

(iv) 直线配置

$$C : f = (x - 2y)(y - 3z)(z - 5x)(x - y + z)(x + y - z)(x + 2y - 3z)$$

$$(2x + 3y - 5z)(3x + 5y - 8z)(5x + 7y - 12z) = 0$$

的类型为 $3C$，指数为 (5，6，7，7，7)。由定理 3.1 (4) 可知 $\tau(C)$ =40，而命题 3.5 (2) 蕴含 $\nu(C) = 8$。

注 3.7. 对于 3 型曲线，我们可以进一步讨论二阶缠结关系 (2.2)。例如，若 $C: f = 0$ 的类型为 $3A$，则存在唯一的生成二阶缠结关系，因为 $m = 3$，而等式 (2.3) 给出以下不等式

$$\deg \alpha_{1,1} \leq d - 1, \ \deg \alpha_{1,2} \leq \frac{d}{2} + 1 \text{ and } \deg \alpha_{1,3} = 3.$$

对于第一个不等式，我们利用这样一个事实： $d_1 \geq 3$，这由 (2.1) 和$t(C) = 3$推出。对于第二个不等式，我们利用 $d_2 \geq (d + 2)/2$；对于最后一个等式，我们利用这样一个事实：在此情形下，$\epsilon_1 = 3$，与定理 3.1 (1) 中的情况相同。对于类型为 $3B$、 $3B'$ 和 $3C$的曲线，也可以得到类似的关系。

4. 3型曲线的几何例子

4.1. 极大Tjurina曲线。 次数为 d 的约化曲线 $C: f = 0$，满足$d_1 \geq d/2$ 以及等式

$$\tau(C) = \tau(d, d_1)'_{max}, \tag{4.1}$$

其中 $\tau(d, d_1)'_{max}$ 如定理 2.1 所示，对 C 成立的曲线称为类型为 (d, d_1) 的极大 *Tjurina* 曲线，参见 [15]。此类曲线满足 $m = 2d_1 - d + 3$ 并且

$$d_1 = d_2 = \ldots = d_m.$$

由此可得

$$t(C) = 2d_1 - d + 1 = m - 2.$$

因此，要得到此类曲线中满足 $t(C) = 3$ 的曲线示例，我们需要 $m = 5$。事实上，有如下结论。

命题 4.2. 对于次数为 d 的约化曲线 C : $f = 0$，以下条件等价。

(1) 曲线 C 的类型为 $3C$，且其指数满足 $d_1 = d_2 = \ldots = d_5$。(2) 曲线 C 是类型为 (d, d_1)、满足 $2d_1 = d + 2$ 的极大 *Tjurina* 曲线。

证明。 首先假设 C 满足 (1)。由此可得 $2d_1 = d_1 + d_2 = d + 2$，进而得到 $d_1 \geq d/2$。然后，利用定理 3.1 (4)，我们得到

$$\tau(C) = 3d_1^2 - 9d_1 + 3,$$

这表明等式 (4.1) 成立，因此 C 是类型为 (d, d_1) 的极大 Tjurina 曲线。

现在假设 C 满足 (2)。那么，如上所述，等式 $2d_1 = d+2$ 意味着 $m = 5$，且 $t(C) = 3$。因此 C 的类型为 $3C$，并且

$$d_1 = d_2 = \ldots = d_5.$$

□

命题 4.2和 [15] 中的极大 Tjurina曲线列表给出了以下类型为 $3C$的曲线实例。

例 4.3. (i) 一个具有 3 个节点的四次曲线 C 是类型为 (4，3) 的极大Tjurina曲线，见 [15, 命题 5.8], ，因此 C 是类型为 $3C$的曲线。

(ii) 一个由 C 中 6 条处于一般位置的直线构成的配置，换言之，仅有二重点，是类型为 (6，4) 的极大Tjurina曲线，见 [15, 命题 5.11]，，因此 C 是类型为 $3C$的曲线。

(iii) 类型为 (8，5) 和 (10，6) 的极大Tjurina直线配置构造于 [15, 第 (5.5) 和 (5.6) 小节], ，因此这两种配置都是类型为 $3C$的曲线。

4.4. **节点曲线**。 回顾以下结果，参见 [12, 定理 4.1]。

定理 4.5。 设 C 是次数为 d 且有 $r \geq 2$ 个不可约分支的节点曲线。那么

$$d_1 = \ldots = d_{r-1} = d - 2.$$

我们可以直接得到以下推论。

推论 4.6。 设 C 是次数为 d 且有 $r \geq 3$ 个不可约分支的节点曲线。那么，当且仅当 $d = 6$ 时， C 具有3 类型。

例 4.7。 (i) 当 C 是由 6 条直线构成的节点线排列时，我们在例 4.3 (ii) 中已经看到 C 具有 $3C$类型。

(ii) 节点曲线

$$C_2 : f = xyz(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

由一条圆锥曲线和 4 条直线组成，通过 SINGULAR 进行直接计算可知， C的类型为 $3B'$，即指数为 (4，4，4，4)。同样，节点曲线

$$C_3 : f = xyz(x^3 + y^3 + z^3) = 0$$

指数为 (4，4，4)，因此类型为 $3A$，该节点曲线

$$C_4 : f = xy(x^4 + y^4 + z^4) = 0$$

指数为 (4，4，5)，类型为 $3A$。

另一方面 ，该节点曲线

$$C_5 : f = x(x^5 + y^5 + z^5) = 0,$$

仅有 2 个不可约分支，指数为 (4，5，5)，因此类型为 4。（iii）该节点曲线

$$C_{2,2} : f = xy(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + 2y^2 + 3z^2) = 0$$

由两条光滑二次曲线和两条直线组成，具有指数 (4，4，4，5) 和 $\tau(C) = 13$。由此可得，$C_{2,\ 2}$ 的类型为 $3B$。节点曲线

$$C_{2,3} : f = x(x^2 + y^2 + z^2)(x^3 + 2y^3 + 3z^3) = 0$$

由一条光滑二次曲线、一条光滑三次曲线和一条直线组成，具有指数 (4，4，5，5)，因此$C_{2,\ 3}$ 的类型为 $3B'$。节点曲线

$$C_{2,2,2} : f = (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + 2y^2 + 3z^2)(x^2 - y^2 + 5z^2) = 0$$

由 3 条光滑圆锥曲线组成，具有指数 (4，4，5，5，5)，因此 $C_{2,\ 2,\ 2}$的类型为 $3C$。

当 C 是至多有两个不可约分支的节点曲线时，我们有以下定理 4.5 的推论。

推论4.8。设 C 是次数为 d 且有一个（分别地，两个）不可约分支（分别地，分支）的节点曲线。那么，当且仅当 $d = 4$ （分别地，$d = 5$）时， C 的类型为 3 。

证明。结论由定理 4.5 和不等式 (2.1) 得出。 □

例 4.9。(i) 光滑四次曲线或不可约有结点四次曲线的类型为 3 型。光滑四次曲线的类型为 $3A$ ，因为 $m = 3$；具有 3 个节点的不可约四次曲线的类型为 $3C$ ，如例 4.3 (i) 所示。该四次曲线

$$C : f = xyz^2 + x^4 + y^4 = 0$$

以及例 3.6 (ii) 中的四次曲线 C 都有一个唯一结点，指数为 (3，3，3，4)，且$\tau(C) = 1$。因此，这些曲线 C 的类型为 $3B$。

(ii) 节点曲线

$$C'_{2,3} : f = (x^2 + y^2 + z^2)(x^3 + 2y^3 + 3z^3) = 0$$

由一条光滑二次曲线和一条光滑三次曲线组成，指数为 (3，4，4，4)，因此$C'_{2,\ 3}$ 具有类型 $3B'$。

4.10. **其他 3 型曲线**。

例 4.11. 这条六次曲线

$$C : f = (x^3 + y^3)^2 + (y^2 + z^2)^3 = 0$$

有 6 个尖点 A_2，并追溯到 Zariski 关于射影平面曲线补集基本群的研究，例如参见 [4, 命题 4.4.16 和定理 6.4.9]。直接计算表明，这条曲线的指数为 (3，5，5，5)，因此其类型为 $3B'$。

例 4.12. 当 $C : f = 0$ 为由内接于圆锥曲线的六边形出发构造的 9 条直线的 Ziegler-Yuzvinsky 配置时，参见 [23, 22], 相应的指数为 (5，6，6，6)，因此 C 是 3 型曲线。C 的一个显式方程可取为

$$xyz(x+y-z)(x-y+z)(2x-2y+z)(2x-y-2z)(2x+y+z)(2x-y-z) = 0,$$

当圆锥曲线 Q 是两条直线的并，或者

$$xy(x-y-z)(x-y+z)(2x+y-2z)(x+3y-3z)(3x+2y+3z)(x+5y+5z)(7x-4y-z) = 0,$$

当圆锥曲线 Q光滑时，详情请参见 [16]。

我们以描述一个具有优美对称性的类型 $3C$ 曲线的可数族来结束本节。

定理 4.13。曲线

$$C_j : f = x^j y^j + y^j z^j + x^j z^j = 0$$

对于 $j \geq 3$，其次数为 $d = 2j$，指数为 $(j+1, j+1, 2j-1, 2j-1, 2j-1)$。特别地，任意这样的曲线都具有类型 $3C$。

证明。 容易验证以下 3 个等式

$$xf_x - yf_y + zf_z = 2jx^j z^j,\ -xf_x + yf_y + zf_z = 2jy^j z^j \text{ and } xf_x + yf_y - zf_z = 2jx^j y^j.$$

将第一个等式乘以 y^j，并减去第二个等式（分别为第三个等式）乘以 x^j （分别为 z^j）所得的结果，我们得到 f 的两个 r_1 和 r_2，其次数为$j+1$。观察 f_x、 f_y 和 f_z 的公式可清楚看出，不存在次数为$< j+1$ 的 $d_1 = d_2 = j+1$，因此 C_j。特别地， C_j 的类型为 3。

为说明下一个 r_3 只能出现在次数 $d_3 = 2j-1$，我们使用 [5, 中关于 $k = 2j-3$的定理 1] 的等式。这得到等式

$$\dim D_0(f)_{2j-2} = \tau(C_j) - \dim S_{2j-3}/I_{f,2j-3}. \tag{4.2}$$

曲线 C_j 有 3 个奇点，分别位于 p_1 =(0 : 0 : 1)、 p_2 =(0 : 1 : 0) 和p_3 = (1 : 0 : 0)。在 p_1处，相应的奇点由 f 通过令$z = 1$得到，因此它表示为

$$g_1 = x^j + y^j + x^j y^j = u^j + v^j = 0,$$

其中 $u = x\rho$ 且 $v = y$， $\rho^j = 1 + y^j$ 是p_1处局部环中的一个可逆元素。由此可知， p_1 处的局部 Tjurina 数为 $\tau(C_j,\ p_1) = (j-1)^2$。同样的论证适用于 p_2 和 p_3，因此

$$\tau(C_j) = 3(j-1)^2.$$

接下来， I_f 雅可比理想 J_f 的饱和化由这样的多项式构成：它们在所有奇点 p_j 处的局部化都属于相应的局部雅可比理想 J_{g_j}。注意，按照上述记号， J_{g_1} 由 u^{j-1} 和 v^{j-1}生成，也由 x^{j-1} 和 y^{j-1}生成。因此，$h \in I_{f,\ 2j-3}$ 是若干单项式之和，其中每个单项式都至少含有 x， y， z中的两个变量，且指数至少为 $j-1$。事实上，如果只出现一个这样的变量，例如 x，那么在 p_3 处局部化就会导致矛盾。因此，$I_{f,\ 2j-3} = 0$，于是

$$\dim S_{2j-3}/I_{f,2j-3} = \dim S_{2j-3} = \binom{2j-1}{2} = (j-1)(2j-1).$$

由 (4.2) 可得

$$\dim D_0(f)_{2j-2} = 3(j-1)^2 - (j-1)(2j-1) = j^2 - 3j + 2.$$

由于 C_j 是 3 型，因此以下情况中只有一种可能成立。

情形 1： C_j **的类型为** $3A$。然后利用定理 3.1 中给出的 $\tau(C_j)$的公式，可得

$$3(j-1)^2 = \tau(C_j) = 3(j+1)^2 - 6(j+1) - 3d_3,$$

这意味着 $d_3 = 2j-2$。但次数为 $j+1$ 的两个 syzygy r_1 和 r_2 在 dim $D_0(f)_{2j-2}$ 中张成一个维数为

$$2\dim S_{j-3} = j^2 - 3j + 2,$$

的子空间，因此它们张成整个子空间 dim $D_0(f)_{2j-2}$。事实上，有

$$S_{j-3}r_1 \cap S_{j-3}r_2 = 0,$$

因为 S-模 $D_0(f)/Sr_1$ 是无挠的，参见 [2, 定理 1.4] 证明的末尾。这个矛盾表明这种情况不可能发生。

情形 2： C_j **的类型为** $3B$ **或** $3B'$。那么，若指数为 $(j+1, j+1, d_3, d_4)$，则像上面那样利用总 Tjurina 数可得

$$2d_3 + d_4 = 6j - 4 \text{ or } d_3 + 2d_4 = 6j - 4.$$

如上所述，我们看到 $d_4 \geq d_3 > 2j-2$，这再次导致矛盾。

情形 3： C_j **的类型为** $3C$。

那么，如果指数为 $(j+1, j+1, d_3, d_4, d_5)$，则利用上述总 Tjurina 数可得

$$d_3 + d_4 + d_5 = 6j - 3.$$

如上所见， $d_5 \geq d_4 \geq d_3 > 2j-2$，因此唯一的解是

$$d_5 = d_4 = d_3 = 2j - 1.$$

定理 4.13 的证明至此完成。

□

注记 4.14. 有趣的是，通过在上面的曲线 C_j 中添加一些坐标直线 x, y 或 z 得到的曲线具有更小的类型。事实上，可以通过 SINGULAR 验证，对于较小的 $j \geq 3$，以下事实成立。

(i) 曲线
$$C_j' : f = x(x^j y^j + y^j z^j + x^j z^j) = 0$$
的次数为 $d = 2j + 1$，指数为（$j + 1$，$j + 1$，$2j - 1$），因此其类型为 $2A$。

(ii) 曲线
$$C_j'' : f = xy(x^j y^j + y^j z^j + x^j z^j) = 0$$
的次数为 $d = 2j + 2$，指数为（$j + 1$，$j + 1$，$2j$），因此其类型为 1，也就是说它是一条加一生成曲线，参见 [1, 13]。

(iii) 曲线
$$C_j''' : f = xyz(x^j y^j + y^j z^j + x^j z^j) = 0$$
次数为 $d = 2j + 3$，指数为 $(j + 1, j + 1)$，因此其类型为 0，也就是说它是一条自由曲线。

5. On the curves of type 3 and low degree

本节给出一些 3 型曲线的例子，无需使用定义方程 $f = 0$ 或 *SINGULAR* 软件包。由 (2.1) 可知，对于一条 3 型曲线 C，有
$$d + 2 = d_1 + d_2 \leq 2d - 2,$$
由此得到 $d \geq 4$。因此，我们从 4 次曲线开始分析。

命题 5.1. 若 C 是一条次数为 $d = 4$ 的 *3* 型曲线，则 $d_1 = d_2 = d_3 = 3$ 且 $\tau(C) \leq 3$。此外，只可能出现以下情形。

(1) $\tau(C) = 0$，指数为 *(3, 3, 3)*。*(2)* $\tau(C) = 1$，指数为 *(3, 3, 3, 4)*。*(3)* $\tau(C) = 2$，指数为 *(3, 3, 3, 3)* 或 *(3, 3, 3, 3, 4)*。*(4)* $\tau(C) = 3$，指数为 *(3, 3, 3, 3, 3)*。

反过来，任何满足 $\tau（C）\leq 2$ 的次数为 $d = 4$ 的曲线 C 都是 *3* 型。

证明。如果 $d = 4$ 和 $t（C）= 3$，那么由 (2.1) 可得 $d_1 = d_2 = d_3 = 3$。由于$\tau(4，3)'_{max} = 3$，定理 2.1 推出
$$0 \leq \tau(C) \leq 3.$$
利用 (2.6) 可得 $d_m \leq 4$，因此只有命题 5.1 中列出的指数可能出现。对于每个指数，我们利用定理 3.1 计算 Tjurina 数 $\tau（C）$。当 $\tau（C）= 1$ 时，指数 (3，3，3，4) 和 (3，3，3，4，4) 似乎是可能的。然而，已知一个次数为 d 且只有一个节点的曲线，其指数为 $(d-1，\ d-1，\ d-1，\ 2d-4)$，见 [13, 注 2.5]。最后一个断言由定理 2.1 得出。事实上，
$$\tau(4, 2)_{min} = 3$$
以及 h 因此 $\tau(C) \leq 2$ 意味着 $d_1 = 3$。然后根据(2.1)得到 $d_2 = 3$，从而 $t(C) = 3$。 □

推论5.2。具有 $\tau(C) = 3$ 的四次曲线 C 要么是指数为(2、3、3)的类型为 $2A$ 的曲线，要么是指数为(3、3、3、3、3)的类型为 $3C$ 的曲线。

证明。若 $d_1 = 3$，则由命题 5.1 可知，C 是 $3C$ 类型。若 $d_1 = 2$，则利用等式

$$\tau(4,2)_{min} = 3 = \tau(C)$$

以及定理 2.2 得到 $d_2 = d_3 = 3$。因此指数为 (2、3、3)，且 C 是 $2A$类型的曲线，见 [2, 命题 1.11]。$d_1 = 1$ 的情形不可能，因为τ(4、1)$_{min} = 6$。□

例5.3。(i) 曲线

$$C : f = x^4 + x^2z^2 + y^3z = 0$$

有一个尖点 A_2 在点 (0 : 0 : 1) 处，指数为 (3、3、3、3)，且 $\tau(C) = 2$。曲线

$$C : f = xyz(x + y + z) + (x + y)^4 = 0$$

在点 (1 : 0 : 0) 和 (0 : 1 : 0) 处有 2 个节点，指数为 (3，3，3，3)，且 $\tau(C) = 2$。我们不知道是否存在一条曲线 C，满足 $d = 4$ 且指数为 (3，3，3，3，4)。

(ii) 节点曲线

$$C : f = x(x^3 + y^3 + z^3) = 0$$

指数为 (2，3，3)，$t(C) = 2$ 且 $\tau(C) = 3$。这表明命题 5.1 中最后一项断言无法进一步加强。

接下来我们考虑五次曲线的情形。

命题 5.4。若 C 是一条次数为 $d = 5$ 且属于 *3* 型的曲线，则 $d_1 = 3$ 且$d_2 = d_3 = 4$ 且 $4 \le \tau(C) \le 7$。此外，只可能出现以下情形。

(1) C 属于 $3A$ 型，$\tau(C) = 4$ 且指数为 *(3, 4, 4)*。*(2)* C 属于 $3B$ 型，$\tau(C) = 5$ 且指数为 *(3, 4, 4, 5)*。*(3)* C 属于 $3B'$ 型，$\tau(C) = 6$ 且指数为 *(3, 4, 4, 4)*。*(4)* C 属于 $3C$ 型，且以下情形之一成立。$\tau(C) = 5$ 且指数为 *(3, 4, 4, 5, 5)* 或 *(3, 4, 4, 4, 6)*；$\tau(C) = 6$ 且指数为 *(3, 4, 4, 4, 5)*；$\tau(C) = 7$ 且指数为 *(3, 4, 4, 4, 4)*。

反过来，任何具有 *2* 个不可约分支、次数为 $d = 5$ 的节点曲线 C 都是 *3* 型。

证明。条件 $t(C) = 3$ 等价于 $d_1 + d_2 = 7$，结合 (2.1) 可得 $d_1 = 3, d_2 = d_3 = 4$。注意

$$\tau(5,3)_{min} = 4,$$

这意味着 $\tau(C) \ge 4$，且当且仅当 C 是指数为 (3，4，4) 的 $3A$ 型时等号成立，由定理 2.2 可知。现在考虑 $m = 4$ 的情形。此时

$$\tau(C) = 18 - 2d_3 - d_4 \text{ or } \tau(C) = 18 - d_3 - 2d_4$$

其中 $4 = d_3 \le d_4$。当 $d_4 = 4$ 时，我们得到类型为 $3B'$ 的情形 $\tau(C) = 6$ 和 C。当 $d_4 = 5$时，第一个表达式给出类型为 $3B$ 的 $\tau(C) = 5$ 和 C，而第二个

表达式给出 $\tau(C) = 4$。根据定理 2.2，这最后一种情形不可能。最后考虑情形 $m = 5$。于是有

$$\tau(C) = 15 - d_4 - d_5,$$

满足 $4 \leq d_4 \leq d_5 \leq 6$。这里的最后一个不等式来自（2.6）。由于根据定理 2.2，$\tau(C) > 4$，当 C 具有类型 $3C$时，我们得到上面列出的指数的 4 种可能性。

另一方面，任何具有 C 、次数为 $d = 5$ 且有 2 个不可约分支的节点曲线都满足 $d_1 = 3$ 和 $d_2 = d_3 = 4$，这是由定理 4.5 和（2.1）得到的。□

推论 5.5。具有 $\tau(C) = 7$ 的五次曲线 C 要么是类型为 $2A$ 且指数为（3、3、4）的曲线，要么是类型为 $3C$ 且指数为（3、4、4、4、4）的曲线。

证明。由于

$$\tau(5,4)'_{max} = 4^2 - \binom{5}{2} = 6,$$

由此可得 $d_1 \leq 3$。另一方面

$$\tau(5,2)_{min} = 8$$

因此 $d_1 = 3$。回忆一下，

$$d_1 d_2 \geq (d-1)^2 - \tau(C) = 16 - 7 = 9,$$

参见 $[10, 定理\ 2.2]$，，等号成立当且仅当 $m = 3$ 和 $d_3 = d - 1$。因此，要么指数为 (3，3，4)，此时 C 是类型为 $2A$ 的曲线，参见 $[2, 命题\ 1.11]$，；要么 $d_1 = 3$ 和 $d_2 = 4$。在这种情况下，结论由命题 5.4 得出。□

例 5.6。(i) 一条节点曲线$C_{1,\ 4}$，它是一般直线与一条光滑四次曲线的交，具有 4 个节点，因此根据命题 5.4，它是类型为 $3A$ 的曲线。

(ii) 一条节点曲线 $C'_{1,\ 4}$，它是一般直线与一条有一个节点的四次曲线的交，总共有 5 个节点，因此 $\tau(C) = 5$。在特殊情形下，当 $C'_{1,\ 4}$由下式给出时

$$f = (x^4 + y^4 + xyz^2)z = 0,$$

我们得到指数 (3，4，4，5)，因此 $C'_{1,\ 4}$的类型为 $3B$。

(iii) 节点曲线 $C''_{1,\ 4}$ 是一般直线与具有 2 个节点的四次曲线的交，总共有 6 个节点，因此 $\tau(C) = 6$。在特殊情形下，当 $C''_{1,\ 4}$ 由下式给出时，

$$f = (xyz(x+y+z) + (x+y)^4)(x-y+z) = 0,$$

我们得到指数 (3，4，4，4)，因此 $C''_{1,\ 4}$的类型为 $3B'$。

(iv) 节点曲线 $C'''_{1,\ 4}$ 是一般直线与具有 3 个节点的四次曲线的交，总共有 7 个节点，因此 $\tau(C) = 7$，故 $C'''_{1,\ 4}$ 的类型为 $3C$，指数为 (3，4，4，4，4)。例如，可以取由下式给出的 $C'''_{1,\ 4}$

$$f = (x-y+z)(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + xyz(x+y+z)) = 0.$$

例 5.7。 (i) 节点曲线$C_{2,\ 3}$ 是光滑二次曲线与光滑三次曲线的交，具有 6 个节点。例 4.9 (ii) 中的曲线就是这样得到的，其指数为 (3，4，4，4)，因此其类型为 $3B'$。

(ii) 一条节点曲线 $C'_{2,\ 3}$ 是光滑二次曲线与节点三次曲线的交，共有 7 个节点，因此 $\tau(C) = 7$。所以 $C''_{2,\ 3}$ 具有 $3C$ 类型，指数为 (3，4，4，4，4)。

下面的例子展示了一些非节点的 3 型曲线。

例5.3. (i) 取例5.3 (i) 中带一个尖点 A_2 的四次曲线，并添加直线 $x+y+z=0$，得到五次曲线

$$C : f = (x+y+z)(x^4+x^2z^2+y^3z) = 0.$$

这条曲线有 4 个节点、一个尖点 A_2，因此 $\tau(C) = 6$。直接计算可得指数为 (3，4，4，4)，因此 C 具有 $3B'$类型。

(ii) 下面是一个具有 E_7 奇点的 $3C$ 型五次曲线的例子。令

$$C : f = x^5+y^5+yz(x^3+y^2z) = 0.$$

然后，直接计算可得 $\tau(C) = 7$，指数为 (3，4，4，4，4)，因此 C 具有 $3C$ 类型。点 (0 : 0 : 1) 处显然是一个 E_7奇点。利用贝祖定理，很容易看出这条曲线是不可约的。

注 5.9。 (i) 例 5.6 (i)、(ii)、(iii)、(iv) 以及例 5.8 (i) 中构造的 3 型五次曲线，都是通过在一条 3 型四次曲线上添加一条一般直线得到的。若能得到这类结论的一般性结果，将会很有意义。

(ii) 我们不知道 $d = m = 5$ 和 $5 \le \tau(C) \le 6$ 这两种情况是否可能。

6. On the line arrangements of type 3

对于直线配置 $\mathcal{A}$: $f = 0$ 且满足 $d = \deg(f)$，已知

$$d_m \le \operatorname{reg} D_0(f) \le d-2, \tag{6.1}$$

参见 [21, 推论 3.5]。由此可知，若 $\mathcal{A}$具有 3 型，则

$$d+2 = d_1+d_2 \le 2d-4$$

因此 $d \ge 6$。此外，我们知道

$$d_1 \le d - m(\mathcal{A}), \tag{6.2}$$

其中 $m(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$的奇点的最大重数，参见 [7,定理 1.2]。利用这些结果，我们可以证明如下命题。

命题 6.1。 由 $d = 6$ 条直线组成的配置 $\mathcal{A}$ 是 *3* 型，当且仅当它是节点线排列。在此情况下， $\tau(\mathcal{A}) = 15$, $\mathcal{A}$ 具有 $3C$ 类型，且指数为(4、4、4、4、4)。

证明。 若 $d = 6$，则由 (6.1) 可得 $d_1 = d_2 = 4$。进而可得 $m(\mathcal{A}) = 2$。最后利用(6.2)例 4.3 (ii) 即可得出结论。□

$d = 7$ 这一情形也很容易处理。

命题 6.2。 一个由 $d=7$ 条 $\mathcal{A}$ 直线组成的配置当且仅当除恰好一个三重点外只有节点时，才是 *3* 型。在此情形下 $\tau(\mathcal{A}) = 22$, $\mathcal{A}$ 具有$3C$类型，且指数为 $(4、5、5、5、5)$。

证明。如果 $d = 7$ 和 $\mathcal{A}$ 为 3 型，则由 (6.1) 可得 $d_1 = 4$ 和 $d_2 = 5$。接着由 (6.2) 可知， $\mathcal{A}$ 只有二重点和三重点。现在我们运用 [11, 定理 1。3] ，得出恰有一个三重点。因此， $\mathcal{A}$ 有 $n_2 = 18$ 个二重点和 $n_3 = 1$ 个三重点。由此可得

$$\tau(\mathcal{A}) = n_2 + 4n_3 = 22.$$

根据 (6.1)，唯一可能的指数为 (4，5，5，5，5)，因此 $\mathcal{A}$ 的类型为 $3C$。反过来，假设 $n_2 = 18$ 和 $n_3 = 1$。那么 [11, 定理 1。1] 可推出

$$\dim D_0(f)_4 = 1$$

由此得到 $d_1 = 4$ 和 $d_2 = 5$。因此， $\mathcal{A}$ 为 3 型。 □

例 6.3. (i) 该直线配置

$$\mathcal{A} : xyz(x + y + z)(x + 2y + 3z)(x + 4y + 9z) = 0$$

是节点型的，且有 $d = 6$，因此由命题 6.1 可知其类型为 $3C$ ，指数为 (4，4，4，4，4)。

(ii) 若将直线 $L : x - y = 0$ 加入上面 (i) 中的配置 $\mathcal{A}$ ，便得到配置 $\mathcal{A}'$ ，其中除了 (0 : 0 : 1) 处的三重点外，其余均为二重点。因此由命题 6.2 可知，配置 $\mathcal{A}'$ 的类型为 $3C$， $\tau(\mathcal{A}') = 22$，指数为 (4，5，5，5，5)。

情形 $d = 8$ 显然要微妙得多。

命题 6.4. 若由 $d = 8$ 条直线组成的配置 $\mathcal{A}$ 属于 *3* 型，则 $\mathcal{A}$ 满足以下三个性质之一。

(1) $\mathcal{A}$ 除了恰好 *4* 个三重点外均只有节点， $\tau(\mathcal{A}) = 32$， $\mathcal{A}$ 的类型为$3B'$，指数为 *(5, 5, 5, 5)*。*(2)* $\mathcal{A}$ 除了恰好 *3* 个三重点外均只有节点， $\tau(\mathcal{A}) = 31$， $\mathcal{A}$ 的类型为$3B$，指数为 *(5, 5, 5, 6)*。*(3)* $\mathcal{A}$ 除了恰好 *5* 个三重点外均只有节点， $\tau(\mathcal{A}) = 33$， $\mathcal{A}$ 的类型为$3C$，指数为 *(5, 5, 5, 5,5)*。*(4)* $\mathcal{A}$ 除了恰好 *4* 个三重点外均只有节点， $\tau(\mathcal{A}) = 32$， $\mathcal{A}$ 的类型为$3C$，指数为 *(5, 5, 5, 5,6)*。*(5)* $\mathcal{A}$ 除了恰好 *3* 个三重点外均只有节点， $\tau(\mathcal{A}) = 31$， $\mathcal{A}$ 的类型为$3C$，指数为 *(5, 5, 5, 6,6))*。*(6)* $\mathcal{A}$ 除了恰好 *2* 个三重点外均只有节点， $\tau(\mathcal{A}) = 30$， $\mathcal{A}$ 的类型为$3C$，指数为 *(5, 5, 6, 6,6))*。*(7)* $\mathcal{A}$ 除了恰好一个四重交点外均只有节点， $\tau(\mathcal{A}) = 31$， $\mathcal{A}$的类型为 $3C$，指数为 *(4, 6,6, 6, 6)*。

证明。若 $d = 8$，则由 (6.1) 可知， $d_1 = d_2 = 5$ 或 $d_1 = 4$ 且 $d_2 = 6$。先考虑 $d_1 = d_2 = 5$ 的情形。于是由 (6.1) 可得

$\mathcal{A}$的指数为 (5，5，5，5)、(5，5，5，6)、(5，5，5，5，5)、(5，5，5，5，6)、(5，5，5，6，6) 或 (5，5，6，6，6)。

在每种情况下， $\mathcal{A}$ 具有 $d_1 = 5 = 8 - 3$，因此根据 (6.2)，不存在重数为> 3的点。此外，三重点 n_3 的数量由相应指数中数字 5 的个数给出，依据 [11, 定理 1.3]。于是，节点数的公式由众所周知的

$$n_2 = \binom{8}{2} - n_3\binom{3}{2}.$$

由此可得

$$\tau(\mathcal{A}) = n_2 + 4n_3$$

这与定理 3.1 给出的数值一致。

现在考虑 $d_1 = 4$和 $d_2 = 6$的情形。由 (6.1) 可知，唯一可能的指数为 (4，6，6，6，6)，且根据 [11, 定理 1.3]， $\mathcal{A}$除一个四重交点外，只有二重点。于是 $\mathcal{A}$ 具有

$$n_2 = 28 - \binom{4}{2} = 22$$

个二重点，并且

$$\tau(\mathcal{A}) = n_2 + 9n_4 = 31,$$

这与定理 3.1 (iv) 给出的值一致。 □

例 6.5。 (i) 直线配置

$\mathcal{A}$: $f = xy(x-y-z)(x-y+z)(2x+y-2z)(x+3y-3z)(3x+2y+3z)(x+5y+5z) = 0$由例 4.12 中的第二个直线配置删去最后一个因子得到，具有 $d = 8, n_2 = 16, n_3 = 4$，其指数为 (5,5, 5, 5)，如命题 6.4 (i) 所示。

(ii) 直线配置

$\mathcal{A}$: $f = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x-z)(x-2z)(x-3z)(9x-2y-z)(10x-y-z) = 0$具有 $d = 8, n_2 = 19, n_3 = 3, \tau(\mathcal{A}) = 31$，其指数为 (5, 5, 5, 6)，如命题 6.4 (2) 所示。

(iii) 直线配置

$$\mathcal{A} : f = xyz(x-z)(y-z)(x-2y)(y-z+3x)(x-z+7y) = 0$$

具有 $d = 8, n_2 = 13, n_3 = 5, \tau(\mathcal{A}) = 33$，其指数为 (5，5，5，5，5)，如命题 6.4 (3) 所示。

(iv)直线配置

$$\mathcal{A} : f = xyz(x-z)(y-z)(x-2y)(2x-y-z)(x+7y+11z) = 0$$

具有 $d = 8, n_2 = 16, n_3 = 4, \tau(\mathcal{A}) = 32$，其指数为 (5，5，5，5，6)，如命题 6.4 (4) 所示。

(v) 直线配置

$$\mathcal{A} : f = x(x-z)y(y-z)(x+3y)z(x+2y+3z)(x+4y+9z) = 0$$

具有 $d = 8, n_2 = 19, n_3 = 3, \tau(\mathcal{A}) = 31$，其指数为 (5，5，5，6，6)，如命题 6.4 (5) 所示。

(vi) 直线配置

$$\mathcal{A}: f = yz(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(x - 2y + 13z)(x + 7y + 11z) = 0$$

具有 $d = 8$、 $n_2 = 22$、 $n_3 = 2$、 $\tau(\mathcal{A}) = 30$，其指数为 (5、5、6、6、6)，如命题 6.4 (6) 所示。这里的三重点为 (0 : 0 : 1) 和 (0 : 1 : 0)，且在 $\mathcal{A}$中没有直线将它们连接起来。另一方面，该配置

$$\mathcal{A}': f = x(x + y)(x - y)(x^2 - z^2)(x - 2y + 13z)(x + 7y + 11z)(y + 13z) = 0$$

与 $\mathcal{A}$ 具有相同的数值不变量和相同的三重点，但这一次它们由直线 $x = 0$ 连接，而该直线属于 $\mathcal{A}'$。

(vii) 直线配置

$$\mathcal{A}: f = xyz(x + y + z)(x + 2y + 3z)(x + 4y + 9z)(x - 2y)(x - 3y) = 0$$

具有 $d = 8$、 $n_2 = 22$、 $n_4 = 1$、 $\tau(\mathcal{A}) = 31$，其指数为 (4、6、6、6、6)，如命题 6.4 (7) 所示。

注释 6.6。 (i) 直线配置

$$\mathcal{B}: xyz(x - y)(y - z)(x - z) = 0$$

有 $d = 6$ 个二重点和 $n_3 = 4$ 个三重点。为了得到一个具有 $d = 8$、 $n_2 = 16$ 和 $n_3 = 4$ 的配置，我们可以向 $\mathcal{B}$ 添加两条一般直线，例如 $x + y + z = 0$ 和 $x + 3y + 7z = 0$。这个配置 $\mathcal{B}'$ 有 $\tau(\mathcal{B}') = 32$，但直接使用 SINGULAR 计算可知，其指数为 (4，5，6，6)。因此，配置 $\mathcal{B}'$ 属于 $2B$ 型，而非 3 型，尽管 $\mathcal{B}'$ 与上文例 6.5 (i) 中的配置 $\mathcal{A}$ 具有相同的一对数值不变量（n_2，n_3），有时称为弱组合类型。

如果我们向 $\mathcal{B}$ 添加直线 $x + y + z = 0$ 和 $x + 2y + 3z = 0$，就会得到一个新的直线配置 $\mathcal{B}''$，它具有 $n_2 = 13$、 $n_3 = 5$、 $\tau(\mathcal{B}'') = 33$，指数为 (4，5，5)。因此， $\mathcal{B}''$ 属于 $2A$ 型；即便 Tjurina 数 33 在本命题列出的情形中只出现一次，命题 6.4 (3) 中也没有反向断言。

(ii) 我们从命题 6.4 中看到，即使在次数为 8 的三型直线排列中，弱组合类型也不能完全决定指数。(1) 和 (4) 中的配置（分别是 (2) 和 (5) 中的配置）具有相同的弱组合类型，但交格不同。遗憾的是，似乎没有一般的方法能从交格得到指数，即使在交格能够决定指数的情形下也是如此。

我们能够证明的、与命题 6.4 相关的唯一逆向结论如下。它表明，在命题 6.4 (6) 的情形下，弱组合类型与指数可以相互决定；尽管我们已在例 6.5 (vi) 中看到，指数并不能决定交格。

推论 6.7. 如果一个由8条直线组成的配置 $\mathcal{A}$ 除恰好 *2* 个三重点外仅有节点，那么 $\mathcal{A}$ 属于 $3C$ 型，且指数为$(5,5, 6, 6,6)$。

证明。根据命题 6.4，只需证明 $d_1 = d_2 = 5$。关于 $\mathcal{A}$和 [11, 定理 1.3]的假设意味着

$$\dim D_0(f)_5 = 2.$$

这意味着 $d_1 = d_2 = 5$。事实上，如果 $d_1 < 5$，那么

$$\dim D_0(f)_5 \geq \dim S_1 = 3,$$

再次由 [11, 定理 1.3]可得。因此 $d_1 = 5$，并且 $d_2 = 5$由于我们需要在 $D_0(f)_5$中再增加一个生成元。□

注意到 (6.1) 蕴含 $d_2 \leq d - 2$，因此对于三型直线排列$\mathcal{A}$，有

$$d_1 = d + 2 - d_2 \geq 4.$$

下面的结果表明，这是对三型直线排列的前两个指数的唯一条件。

定理 6.8。设 $\mathcal{B}_1$ （分别为 $\mathcal{B}_2$）是由 n_1 条经过点 $a_1 \in \mathbb{P}^2$ 的直线（分别为 n_2 条经过点 $a_2 \in \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}_1$的直线）构成的配置，且满足 $2 \leq n_1 \leq n_2$。则通过向配置 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 添加两条一般直线得到的配置 $\mathcal{A}$： $f = 0$ 属于 $3C$ 型，其指数为

$$(n_1 + 2, n_2 + 2, n_1 + n_2, n_1 + n_2, n_1 + n_2).$$

证明。令 $\mathcal{B}'$： $f' = 0$ 为在配置 $\mathcal{B}$ 的基础上添加一条一般直线所得的配置。于是 [2, 定理 1.6]表明， $\mathcal{B}'$ 的第一指数为 $d_1' = n_1 + 1$ 和 $d_2' = n_2 + 1$。事实上，根据 [2, 命题 1.17]， $\mathcal{B}$ 的指数为 $(n_1, n_2, n_1 + n_2 - 2)$，因此条件

$$n_2 \leq \deg \mathcal{B} - 2 = n_1 + n_2 - 2$$

满足 [2, 定理 1.6] 中的条件。由此可知， $\mathcal{B}'$ 为 2 型；事实上，对于 $n_1 \geq 3$，$\mathcal{B}'$ 的类型为 $2B$，其指数为

$$(n_1 + 1, n_2 + 1, n_1 + n_2 - 1, n_1 + n_2 - 1),$$

参见 [2, 推论 1.18]。对于 $n_1 = 2$，利用 [2, 命题 1.11] 中给出的 $\tau(\mathcal{B}')$ 的公式，以及显而易见的事实

$$\tau(\mathcal{B}') = n_2^2 + n_2 + 4$$

在这种情况下，我们得到 $\mathcal{B}'$ 的类型为 $2B$，指数由上述公式给出。

现在，我们将正合列 [2, (2.6)] 应用于配置 $\mathcal{B}'$ 和一条新的一般直线 L。于是，交 $\mathcal{B}' \cap L$ 由 $r = \deg \mathcal{B}' = n_1 + n_2 + 1$个点组成，由此我们得到一个正合列

$$0 \to D_0(f')_{k-1} \to D_0(f)_k \to H^0(L, \mathcal{O}_L(k + 1 - r))$$

对任意整数 k。由于

$$H^0(L, \mathcal{O}_L(k + 1 - r) = H^0(L, \mathcal{O}_L(k - n_1 - n_2)) = 0$$

对于 $k < n_1 + n_2$，由此可知， $\mathcal{A}$的前两个指数为 $d_1 = d_1' + 1 = n_1 + 2$和$d_2 = d_2' + 1 = n_2 + 2$。$D_0(f')$的另外两个生成元产生次数为 $n_1 + n_2$的元素；当.....时，还可以通过 $H^0(L,\ \mathcal{O}_L($ $k - n_1 - n_2))$ 添加类似的元素

$k \geq n_1 + n_2$。由于 $\mathcal{A}$ 包含 $d = n_1 + n_2 + 2$ 条直线，因此所有生成元的次数均为 $\leq n_1 + n_2$。所以 $\mathcal{A}$ 属于 3 型，且指数要么是

$$(n_1 + 2, n_2 + 2, n_1 + n_2, n_1 + n_2) \text{ or } (n_1 + 2, n_2 + 2, n_1 + n_2, n_1 + n_2, n_1 + n_2).$$

利用显而易见的事实进行直接计算，可得

$$\tau(\mathcal{B}) = (n_1-1)^2+(n_2-1)^2+n_1n_2,\ \tau(\mathcal{B}') = \tau(\mathcal{B})+n_1+n_2 \text{ and } \tau(\mathcal{A}) = \tau(\mathcal{B}')+n_1+n_2+1$$

再结合定理 3.1 中的公式可知，只有第二种情况是可能的。至此，我们的断言得证。□

References

[1] T. Abe，超平面的加一生成配置与近自由配置。国际数学研究通知**2021年(12)**：9233 – 9261 (2021)。1，4.14[2] T. Abe，A. Dimca，P. Pokora，复平面曲线的新层次结构，《加拿大数学通报》。2025年在线发表：1-24。doi:10.4153/S0008439525101422 1，1，4.10，5，5，6[3] W. Decker，G.-M. Greuel，G. Pfister 和 H. Sch¨onemann。 Singular 4-0-1 — 一个用于多项式计算的计算机代数系统，网址：http://www.singular.uni-kl.de（2014）。3.6[4] A. Dimca，《奇点与超曲面的拓扑》，Universitext，施普林格出版社，纽约，1992年。4.11[5] A. Dimca，雅可比理想的协同与线性系的缺陷，罗马尼亚数学科学会数学通报，第56卷（104）第2期（2013年），191–203。4.10[6] A. Dimca，平面曲线的自由性与最大整体 Tjurina 数。剑桥哲学会数学会刊 *163*：161 – 172（2017）。1[7] A. Dimca，曲线配置、铅笔与雅可比关系，《密歇根数学杂志》66（2017），347–365。6[8] A. Dimca，关于有理尖点平面曲线及雅可比环的局部上同调。《瑞士数学评论》**94(4)**：689 – 700（2019）。2[9] A. Dimca，关于曲线配置的 Castelnuovo-Mumford 正则性。*Rev. RoumaineMath. Pures Appl.*。70（2025年），73–84。2，2[10] A. Dimca，关于与自由性相关的平面曲线的一些评述，罗马尼亚数学科学会数学通报，第68卷（116）（2025年），281–292。5[11] A. Dimca，关于直线配置的导子模，arXiv:2503.01624，已被《数学出版物》接收。6，6，6[12] A. Dimca，G. Sticlaru，Koszul 复形与极点阶滤过，《爱丁堡数学会会刊》58（2015），333–354。4.4[13] A. Dimca 和 G. Sticlaru，具有三个协同的平面曲线、最小 Tjurina 曲线和近尖点曲线。《几何学奉献》**207**：29 – 49（2020）。1，1，1，2，2，3，4.14，5[14] A. Dimca，G. Sticlaru，平面曲线上对数向量场丛的跳跃直线。数学出版物**64**：513 – 542（2020）。1[15] A. Dimca，G. Sticlaru，雅可比关系、Fitting 理想与具有最大整体 Tjurina 数的平面曲线，数学集刊73（2022），391–409。4.1，4.1，4.3[16] A. Dimca，G. Sticlaru，从帕斯卡定理到 Ziegler 直线配置的几何，代数组合杂志60（2024），991–1009。4.12[17] A.A. du Plessis，C.T.C. Wall，将判别式理论应用于高度奇异平面曲线。剑桥哲学会数学会刊**126**：259 – 266（1999）。1，2[18] Ph. Ellia，准完全交与平面曲线的整体 Tjurina 数，纯粹与应用代数杂志224（2020），423–431。2

[19] S. H. Hassanzadeh，A. Simis，平面 Cremona 映射：基理想的饱和化与正则性。《代数学杂志》**371**：620 – 652（2012）。1，1[20] M. Jardim，A. Nasrollah Nejad，A. Simis，平面射影曲线的 Bourbaki 次数。《美国数学会会刊》**377**：7633 – 7655（2024）。1[21] H. Schenck，$\mathbb{P}^2$中的初等变换与直线构形。《瑞士数学评论》**78**：447 – 462（2003）。6[22] S. Yuzvinsky，配置自由性的前两个障碍。《美国数学会会刊》**335**：231 – 244（1993）。4.12[23] G. Ziegler，对数微分形式的组合构造。《数学进展》**76**：116 – 154（1989）。4.12

Université Côte d'Azur, CNRS, LJAD,
France and Simion Stoilow Institute ofMathematics, P.O. Box 1-764,
RO-014700 Bucharest, Romania电子邮件地址：Alexandru.Dimca@univ-cotedazur.fr
Faculty of Mathematics and Informatics, Ovidius University Bd. Mamaia 124,
900527 Constanta, Romania电子邮件地址：gabriel.sticlaru@gmail.com