# 量子纯态演化的极限定理

S. V. Dzhenzher 和 V. Zh. Sakbaev

摘要。对于独立同分布随机酉通道的复合，获得了强大数定律和中心极限定理类型的极限定理。

关键词：随机酉半群；强大数定律；中心极限定理；量子态；弱算子拓扑。

*MSC*：*47D03*，*60F05*，*60F15*，*81P16*。

arXiv:2601.01845v1 [math.PR] 5 Jan 2026

## 1. 引言

随机量子通道和随机量子动力半群领域受到数学物理学界的广泛关注。随机半群的一般理论已在 [1, 2]中建立。独立同分布（i.i.d.）随机线性算子及其半群的乘积的极限定理已在 [1, 3, 4]中研究。i.i.d. 随机算子的复合的极限定理在微分方程 [5–8] 以及开放量子系统动力学的描述中有应用 [9–13]。随机幺正通道和随机量子动力半群自然出现在对开放量子系统动力学的研究中 [14, 15]。文献 [16], 描述了开放系统趋向马尔可夫动力学的方法。文献 [17–19]描述了由 i.i.d. 幺正通道构成的量子随机游走序列的极限行为。

随机幺正群出现在量子力学中，尤其与量子化过程的歧义有关 [20]。在 [13], 中，研究了量子态上的不同随机半群，特别讨论了移位算子半群。本文从对某种测度进行平均的角度考察随机半群，进而考察随机量子态。

本文研究随机酉通道的复合。特别是，我们针对作用于非随机量子纯态的平移随机半群，得到了强大数定律（SLLN）和中心极限定理（CLT）型的收敛结果。我们以量子态核的形式得到这类结果（定理 3.1 和 3.2 ），并在量子态的弱算子拓扑（ WOT ）下得到这类结果（定理 4.1 、 4.2 、 4.3 和 4.6 ）。我们还研究了另一种随机酉变换半群（定理 4.7）。

本文的结构如下。在第2节，我们介绍量子态的主要概念、表示及分类。在第3节，我们针对由独立同分布随机移位算子复合而成的算子，利用密度算子核，获得强大数定律和中心极限定理型的收敛结果。在第4节，我们针对与构型空间中随机向量上的平移相关的独立同分布随机酉通道的复合，定义弱算子拓扑中的不同类型的收敛（几乎必然收敛、依分布收敛以及依 $L_1$ 意义收敛），并获得上述收敛类型的充分条件。在第5节，我们分析所得结果，并讨论进一步的研究。

S. V. Dzhenzher：sdjenjer@yandex.ru。ORCID：0009-0008-3513-4312 V. Zh. Sakbaev：fu mi2003@mail.ru。ORCID：0000-0001-8349-1738 V. Zh. Sakbaev：俄罗斯科学院凯尔迪什应用数学研究所，俄罗斯莫斯科 125047 两位作者均供职于：莫斯科物理技术学院，俄罗斯多尔戈普鲁德内 141701。

## 2. 基本概念

考虑定义在 $\mathbb{C}$ 上的希尔伯特空间 $\mathcal{H} := \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^d)$，其中积分取自 $\mathbb{R}^d$ 上的经典勒贝格测度。对于 $a \in \mathbb{R}^d$，记 $S_a$: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 为如下定义的移位算子:

$$(S_a |u\rangle)(x) := u(x+a).$$

必要时，我们将 $u$ 与 $|u\rangle$ 视为相同。

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 为一个概率空间。已知 [21] 对于独立同分布（i.i.d.）随机向量 $\xi_1$，……，$\xi_n$，它们取值于 $\mathbb{R}^d$ 且具有有限期望值和方差时，独立平移的复合依分布收敛于 $S_{\sqrt{\frac{t}{n}}\xi_1} \dots S_{\sqrt{\frac{t}{n}}\xi_n} |u\rangle$ 与高斯测度的卷积。在本文中，我们探讨作用于量子态 $|u\rangle\langle u|$ 上的平移复合。

在本文中，我们考虑正规量子态，它们是空间 $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ 中的核算子；换句话说，它们是具有迹的算子。注意，对偶空间 $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})^* = B(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{H}$ 上所有有界线性算子构成的空间。第二对偶空间 $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})^{**} = B(\mathcal{H})^*$ 是所有量子态构成的空间；但本文不会涉及这一一般情形。因此，我们将正规量子态简称为“量子态”。

对于任意 $|u\rangle \in \mathcal{H}$，我们用 $\rho[u] := |u\rangle\langle u| \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ 表示该纯态。

## 3. 坐标表示

对于任意量子态 $\rho \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ 以及任意 $x$，$y \in \mathbb{R}^d$ 记 $\rho(x, y)$ 为 $\in \mathbb{R}$ 其核；也就是说，对于任意 $u$，$v \in \mathcal{H}$ 该函数由下式给出

$$\langle u| \rho |v\rangle = \int \rho(x,y) u(x) \overline{v(y)}\, dxdy.$$

在傅里叶像中，我们将写作 $\alpha$，$\beta$ 而不是 $x$，$y$。

用 $F$: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 表示傅里叶变换。我们将 $F|u\rangle$ 与 $|Fu\rangle$ 视为相同。

记 $\mathbb{E}$ 为随机变量的期望值。

以下两个定理推广了量子态核的强大数定律和中心极限定理。

**定理 3.1**（核的强大数定律）。设 $|u\rangle \in \mathcal{H}$。设 $\{\xi_n\}$ 是具有有限期望 $\mu \in \mathbb{R}^d$ 的独立同分布随机向量。那么，对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\rho\left[S_{\xi_1/n} \dots S_{\xi_n/n} u\right](x,y) \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} \rho[S_\mu u](x,y).$$

**定理 3.2**（核的中心极限定理）。设 $|u\rangle \in \mathcal{H}$。设 $\{\xi_n\}$ 是协方差矩阵为 $\Sigma$ 的独立同分布零均值随机向量。那么，对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\rho\left[S_{\xi_1/\sqrt{n}} \dots S_{\xi_n/\sqrt{n}} u\right](x,y) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \rho[S_\eta u](x,y),$$

其中 $\eta \sim N(0, \Sigma)$ 是随机高斯向量。特别地，

$$\mathbb{E}\, F\rho\left[S_{\xi_1/\sqrt{n}} \dots S_{\xi_n/\sqrt{n}} u\right] F^{-1}(\alpha,\beta) \to e^{-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^T \Sigma (\alpha-\beta)} \rho[Fu](\alpha,\beta) \quad as \quad n \to \infty.$$

这些定理由连续映射定理 3.4 以及以下命题得出。

**命题 3.3**。设 $|u\rangle \in \mathcal{H}$ 和 $a \in \mathbb{R}^d$。则对于任意 $\alpha$、$\beta \in \mathbb{R}^d$

$$F\rho\left[S_a u\right] F^{-1}(\alpha,\beta) = e^{i(a,\alpha-\beta)} \rho\left[Fu\right](\alpha,\beta).$$

证明。这是因为对于任意 $|v\rangle \in \mathcal{H}$，我们有

$$F\rho[v]F^{-1} = F|v\rangle\langle v| F^{-1} = |Fv\rangle\langle Fv| = \rho[Fv],$$

并且由于

$$\left(F S_a |u\rangle\right)(\alpha) = e^{i(a,\alpha)} F|u\rangle(\alpha).$$

□

**定理 3.4** (连续映射 [22])。 设 $\mathcal{S}$ 是一个度量空间。设 $\{\xi_n\}$ 是定义在 $\mathcal{S}$上的随机变量，且收敛到 $\xi$，收敛方式为几乎必然收敛、依概率收敛或依分布收敛。设 $f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ 是一个博雷尔函数，且在 $\mathrm{P}_\xi$-几乎必然连续。那么随机变量 $f(\xi_n)$ 以相同方式收敛到随机变量 $f(\xi)$ 。

定理的证明 *3.1*。 由于平移构成一个单参数群，根据命题3.3，我们有

$$F\rho\left[S_{\xi_1/n}\dots S_{\xi_n/n}u\right]F^{-1}(\alpha,\beta) = e^{i\left(\frac{\sum\xi_i}{n},\alpha-\beta\right)}\rho[Fu](\alpha,\beta).$$

右侧中，只有复指数是随机的。根据随机向量的强大数定律，

$$\frac{\sum\xi_i}{n} \xrightarrow{a.s.} \mu.$$

因此，根据连续映射定理 3.4 我们得到

$$F\rho\left[S_{\xi_1/n}\dots S_{\xi_n/n}u\right]F^{-1}(\alpha,\beta) \xrightarrow{a.s.} e^{i(\mu,\alpha-\beta)}\rho[Fu](\alpha,\beta).$$

现在，对命题 3.3应用逆傅里叶变换即可得到该结论。 □

定理的证明 *3.2*。 由于平移构成一个单参数群，根据命题3.3，我们有 e

$$F\rho\left[S_{\xi_1/\sqrt{n}}\dots S_{\xi_n/\sqrt{n}}u\right]F^{-1}(\alpha,\beta) = e^{i\left(\frac{\sum\xi_i}{\sqrt{n}},\alpha-\beta\right)}\rho[Fu](\alpha,\beta).$$

只有右侧的复 指数是随机的。根据随机向量的中心极限定理 ，

$$\frac{\sum\xi_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \eta.$$

因此，根据连续映射定理 3.4 我们得到

$$F\rho\left[S_{\xi_1/\sqrt{n}}\dots S_{\xi_n/\sqrt{n}}u\right]F^{-1}(\alpha,\beta) \xrightarrow{d} e^{i(\eta,\alpha-\beta)}\rho[Fu](\alpha,\beta).$$

现在，对命题 3.3 应用逆傅里叶变换即可得到结果。根据依分布收敛的定义，可得到特殊情形，因为

$$\mathbb{E}\, e^{i(a,\eta)} = e^{-\frac{1}{2}a^T\Sigma a}$$

是该高斯向量的特征函数。 □

## 4. Weak Operator Topology of quantum states

这里我们介绍量子态在弱算子拓扑下收敛的另一种方法。根据 [23, 定理 2.7。2]这种由线性连续泛函构成的拓扑可以通过有界算子来描述 $A \in B(\mathcal{H})$以及泛函

$$\rho \mapsto \mathrm{tr}(\rho A).$$

请注意，除了选择拓扑之外，我们还需要选择概率收敛方式。我们将采用其中三种：几乎必然、依分布，以及 in $L_1$(P)。因此，当我们说“随机态 $\rho_n$ 在弱算子拓扑下以某种概率收敛方式收敛到 $\rho$”时，我们的意思是，对于任意 $A \in B(\mathcal{H})$，随机变量 tr($\rho_n A$) 都以该概率收敛方式收敛到随机变量 tr($\rho A$)。

**定理 4.1** （弱算子拓扑中的强大数定律）。 设 $|u\rangle \in \mathcal{H}$。设 $\{\xi_n\}$ 是具有有限期望$\mu \in \mathbb{R}^d$的独立同分布随机向量。那么随机纯态 $\rho\left[S_{\xi_1/n}\dots S_{\xi_n/n}u\right]$ 几乎必然在弱算子拓扑下收敛到纯态 $\rho\left[S_\mu u\right]$；换言之，对任意 $A \in B(\mathcal{H})$

$$\mathrm{tr}\left(\rho\left[S_{\xi_1/n}\dots S_{\xi_n/n}u\right]A\right) \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} \mathrm{tr}\Big(\rho\left[S_\mu u\right]A\Big).$$

**定理 4.2**（弱算子拓扑中的中心极限定理）。 设 $|u\rangle \in \mathcal{H}$。设 $\{\xi_n\}$ 是协方差矩阵为 $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$的零均值独立同分布随机向量。那么随机纯态 $\rho\left[S_{\xi_1/\sqrt{n}}\dots S_{\xi_n/\sqrt{n}}u\right]$ 在弱算子拓扑下依分布收敛到随机纯态 $\rho\left[S_\eta u\right]$，其中 $\eta\sim N(0,\Sigma)$ 是随机高斯向量；换言之，对任意 $A\in B(\mathcal{H})$

$$\operatorname{tr}\left(\rho\left[S_{\xi_1/\sqrt{n}}\dots S_{\xi_n/\sqrt{n}}u\right]A\right)\xrightarrow[n\to\infty]{d}\operatorname{tr}\Big(\rho\left[S_\eta u\right]A\Big).$$

此外，我们有

$$\mathbb{E}\operatorname{tr}\left(\rho\left[S_{\xi_1/\sqrt{n}}\dots S_{\xi_n/\sqrt{n}}u\right]A\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathbb{E}\operatorname{tr}\Big(\rho\left[S_\eta u\right]A\Big).$$

**定理 4.3 (**随机游走**)**。 设 $d=1$。设 $\xi_{n,\,k}$ 为独立随机变量，满足 $\mathbb{E}\,\xi_{n,\,k}=0$、方差 $\xi_{n,\,k}=\frac{1}{n}$，并且

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathrm{P}\{|\xi_{n,k}|>\varepsilon\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

任取 $u\in\mathcal{H}$，考虑由以下各点构成的«随机折线» $\zeta_n(t)$

$$\left(\frac{k}{n},\rho\left[S_{\xi_{n,1}}\dots S_{\xi_{n,k}}u\right]\right)$$

当 $k=1$，……，$n$ 时。设 $w(t)$ 为标准维纳过程。

则 $\xi_n$ 在弱算子拓扑下依分布收敛于随机态值过程 $\rho[S_w u]$；换言之，对于任意 $A\in B(\mathcal{H})$，随机过程

$$\operatorname{tr}\left(\xi_n(t)A\right)$$

依分布收敛于

$$\operatorname{tr}\left(\rho[S_{w(t)}u]A\right)$$

最后三个定理均由连续映射定理 3.4 和引理 4.5 得出。定理 4.2中的“此外”部分成立，是因为纯态的随机平移 $|u\rangle$ 仍位于半径为 $\|u\|$ 的球内，因此其中所有随机变量都是一致有界的。

**引理 4.4** ([13, 引理 3。1])。 设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，且 $u$，$v\in\mathcal{H}$ 为赋范空间。则

$$\operatorname{tr}|\rho[u]-\rho[v]|\leqslant 2\,\|u-v\|\,.$$

**引理 4.5**。 对于任意 $u\in\mathcal{H}$ 和 $A\in B(\mathcal{H})$，函数 $x\mapsto\operatorname{tr}(\rho\left[S_x u\right]A)$ 是连续函数$\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$。

证明。 由引理 4.4 可知，这对某个常数 $C>0$

$$\left|\operatorname{tr}\left(\rho\left[S_x u\right]A\right)-\operatorname{tr}\left(\rho\left[S_y u\right]A\right)\right|\leqslant\operatorname{tr}\left|\rho\left[S_x u\right]-\rho\left[S_y u\right]\right|\cdot\|A\|\leqslant C\,\|S_x u-S_y u\|$$

并且由于（根据帕塞瓦尔定理）

$$\|S_x u-S_y u\|=\|FS_x u-FS_y u\|=\left|e^{ix}-e^{iy}\right|\|u\|\xrightarrow[x\to y]{}0.$$

□

**定理 4.6**。 设 $|u\rangle\in\mathcal{H}$。设 $\{\xi_n\}$ 为期望为 $\mu$ 的独立同分布随机向量。则随机纯态 $\rho\left[S_{\xi_1/n}\dots S_{\xi_n/n}u\right]$ 在 $L_1(\mathrm{P})$ 中按弱算子拓扑收敛到纯态 $\rho\left[S_\mu u\right]$；换言之，对于任意$A\in B(\mathcal{H})$

$$\mathbb{E}\left|\operatorname{tr}\left(\rho\left[S_{\xi_1/n}\dots S_{\xi_n/n}u\right]A\right)-\operatorname{tr}\left(\rho\left[S_\mu u\right]A\right)\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

证明。 由于平移不会改变范数，所有随机态 $S_{\xi_1/n}\dots S_{\xi_n/n}u$ 都位于半径为 $\|u\|$ 的球内。因此，根据定理 4.1 以及 [24, 勒贝格控制收敛定理 16。4]。 □

现在，对于任意 $a \in \mathbb{R}^d$，我们来考察由下式定义的「冲击」算子 $R_a$： $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$(R_a |u\rangle)(x) := e^{iax} u(x).$$

**定理 4.7。** 定理 *4.1*、*4.2*、*4.3* 和*4.6*的类似结果对于 $R_a$ 而非 $S_a$.

这同样由连续映射定理 3.4 和以下引理得出。

**引理 4.8。** 对于任意 $u \in \mathcal{H}$ 和 $A \in B(\mathcal{H})$，函数 $x \mapsto \operatorname{tr}(\rho[R_x u] A)$ 是连续函数$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$。

证明。 显然， $FS_a = R_a F$，因此 $R_a = FS_a F^{-1}$。由引理 4.4再次可得该引理，因为存在某个 $C > 0$ 依赖于 $u$, $A$ 使得

$$|\operatorname{tr}(\rho[R_x u] A) - \operatorname{tr}(\rho[R_y u] A)| \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{tr}|\rho[R_x u] - \rho[R_y u]| \cdot \|A\| \leqslant C \|R_x u - R_y u\| = C \left|e^{ix} - e^{iy}\right| \left\|F^{-1} u\right\| \xrightarrow[x \to y]{} 0.$$

□

## 5. 结论

定理 4.1、4.2、4.3和 4.6 的类似结论，对于 $\mathbb{R}^d$ 上的经典勒贝格测度以外的某些其他测度，未必成立。事实上，在引理 4.5 的证明中，用到了傅里叶变换是等距映射这一性质（换言之，用到了帕塞瓦尔定理）；但对于一般测度 $m$，这一性质并不成立。不过，这些定理的类似结论对连续函数 $u \in \mathcal{H}$ 以及有限 $\sigma$可加测度仍然成立，这可以由叶戈罗夫定理证明。一般而言，这些类似结论对于某些其他测度也可能成立，但证明需要采用与此处所述不同的技巧，因为我们的论证大量依赖傅里叶变换的性质（尤其是帕塞瓦尔等式）。若能为其他测度得到上述定理的类似结论，将会很有意义。

此外，探讨这些定理在某个无限维空间上的函数希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的类似结果（而非 $\mathbb{R}^d$）也很有意思。最显而易见的选择似乎是考虑带有某种勒贝格测度类似物的 $\ell_2(\mathbb{R})$ 情形。

最后，我们在这里仅讨论了正规量子态。奇异量子态的情形似乎也值得深入研究。特别是，考虑一些其他的随机变换来替代随机平移很有意思，这样得到的随机态就不会是纯态。例如，可以考虑具有某些特殊随机生成元的随机酉变换。

## 参考文献

[1] A. V. Skorokhod。《独立随机算子之积》。载于：《俄罗斯数学调查》，38.(4)（1983），第291–318页。[2] G. P. Butsan。随机半群。基辅：Izdatel’stvo Naukova Dumka（俄文），1977年，第216页。[3] V. N. Tutubalin。《随机矩阵乘积的局部极限定理》。载于：《概率论及其应用》，22.2（1978），第203–214页。[4] H. Furstenberg。《非交换随机乘积》。载于：《美国数学会汇刊》108.3（1963），第377–428页。[5] M. A. Berger。《随机矩阵乘积的中心极限定理》。载于：*Trans.AMS.*第二辑，285（1984），第777–803页。[6] R. Sh. Kalmetev。《利用费曼-切尔诺夫迭代求解多维柯尔莫哥洛夫方程的近似解》。载于：凯尔德什研究所预印本21（2023），第1–15页。DOI: 10.20948/prepr-2023-21。

[7] K. Yu. Zamana。《函数域上的随机正交变换的平均》。载于：Ufa Math. J. 13（4，2021），第23–40页。doi：10.13108/2021-13-4-23。[8] V. Zh. Sakbaev、O. G. Smolyanov 和 K. Yu. Zamana。《正交矩阵群上的随机过程及其描述的演化方程》。载于：计算数学与数学物理 60（10，2020），第1686–1700页。doi：10.1134/S0965542520100140。[9] Y. Aharonov、L. Davidovich 和 N. Zagury。《量子随机游走》。载于：《物理评论A》48.2（1993），第1687–1690页。[10] A. N. Pechen。《测试粒子与稀薄玻色气体相互作用的量子随机方程》。载于：《数学物理杂志》45.1（2004），第400–417页。[11] S. V. Dzhenzher 和 V. Zh. Sakbaev。《巴拿赫空间上的量子大数定律》。载于：《罗巴切夫斯基数学杂志》45（2024），第2485–2494页。doi：10.1134/S1995080224603114。[12] S. V. Dzhenzher。《希尔伯特空间上弱算子拓扑中的随机指数算子中心极限定理》。载于：《概率电子通讯》（已投稿）（2025）。网址：arXiv: 2510.04077。[13] G. Amosov 和 V. Sakbaev。《随机平移的平均所生成的量子态动力学》。载于：《算子理论进展》10.3（2025年4月），第51页。issn：2538-225X。doi：10.1007/s43036-025-00440-2。[14] L. Accardi、I. Volovich 和 Y. G. Lu。《开放系统》。载于：《量子理论及其随机极限》。柏林、海德堡：施普林格·柏林·海德堡，2002年，第113–151页。isbn：978-3-662-04929-7。doi：10.1007/978-3-662-04929-7_4。[15] J. Kempe。《量子随机游走：入门概述》。载于：Contemp.Phys. 44(4)（2003），第307–327页。[16] A. E. Teretenkov。《浴关联时间之后的量子马尔可夫动力学》。载于：计算数学与数学物理 63.1（2023），第135–145页。doi：10.1134/S096554252301012

8.

[17] A. Joye. “随机时变量子行走”。载于：《数学物理通讯》307.1（2011），第 65–100 页。[18] J. Gough 等。“量子系统演化的马尔可夫近似”。载于：《数学文献》105.2（2022），第 92–96 页。[19] S. V. Dzhenzher 和 V. Zh. Sakbaev。“一致光滑巴拿赫空间上随机半群的强大数定律”。载于：《算子理论进展》11.1（2025 年 11 月），第 4 页。doi：10.1007/s43036-025-00481-7。[20] Yu. N. Orlov、V. Zh. Sakbaev 和 O. G. Smolyanov。“无界随机算子与费曼公式”。载于：《数学汇刊》80.6（2016），第 1131–1158 页。[21] Yu. N. Orlov、V. Zh. Sakbaev 和 E. V. Shmidt。“测度弱收敛及随机算子极限定理的算子方法”。载于：《罗巴切夫斯基数学杂志》42.10（2021 年 10 月），第 2413–2426 页。issn：1818-9962。doi：10.1134/S1995080221100188。[22] P. Billingsley。《概率测度的收敛》。威利概率与统计丛书。威利，2013。isbn：9781118625965。url：https://books.google.am/books?id=6ItqtwaWZZQC。[23] A. Holevo。“量子理论数学”。载于：《量子理论的概率与统计方面》。比萨：高等师范学院出版社，2011，第 37–83 页。isbn：978-88-7642-378-9。doi：10.1007/978-88-7642-378-9_2。[24] P. Billingsley。《概率与测度》。威利概率与统计丛书。威利，2012。isbn：9781118341919。url：https://books.google.ru/books?id=a3gavZbxyJcC。