arXiv:2601.01848v1 [math.NT] 5 Jan 2026

关于二阶假拟 theta 函数的一些恒等式

Xingyuan Cai[1], Eric H. Liu[2] 和Olivia X.M. Yao[3,1]苏州科技大学数学科学学院，苏州，215009，中国江苏省[2]上海对外经贸大学统计与信息学院，上海，201620，中国 [1]电子邮件： [1]cxy6338@163.com， [2]liuhai@suibe.edu.cn， [3]yaoxiangmei@163.com

摘要。 最近，Nath 和 Das 研究了二阶假 theta 函数的同余性质 $B(q)$。在他们的论文中，他们提出了关于二阶假拟 theta 函数的三个恒等式的解析证明问题 $A(q)$、 $B(q)$ 和 $\mu_2(q)$。本文利用 theta 函数的 (p,k) 参数化以及 Hickerson 和 Mortenson 给出的若干恒等式，解决了 Nath 和 Das 提出的未解决问题。

关键词：假 theta 函数、Appell-Lerch 和、theta 函数恒等式。

美国数学学会数学主题分类：11P81,11P83.

1 引言

Ramanujan 在写给 Hardy 的著名临终信中列出了 17 个函数，并称之为“假拟 theta 函数”。他将这些函数分别定义为 q 级数，并发现当 q 趋近于一个单位根时，这些函数具有某些与 theta 函数相似的渐近性质，但它们并不是 theta 函数。他列出的函数包括 3 阶、5 阶和 7 阶假 theta 函数。Ramanujan 在他的遗失的笔记本中记录了若干关于 6 阶和 10 阶假 theta 函数的恒等式。这些函数问世后，吸引了许多数学家的关注。关于经典假拟 theta 函数的综述，参见 [6] 。

以下函数是三个二阶经典假拟 theta 函数

$$A(q) := \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q^2)_n}{(q;q^2)_{n+1}^2} q^{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^2;q^2)_n}{(q;q^2)_{n+1}} q^{n+1},$$
$$B(q) := \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q^2;q^2)_n}{(q;q^2)_{n+1}^2} q^{n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q^2)_n}{(q;q^2)_{n+1}} q^n,$$
$$\mu_2(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(q;q^2)_n}{(-q^2;q^2)_n^2} q^{n^2}.$$

本文中，我们始终采用标准的 q-级数记号：

$$(a;q)_\infty := \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k), \qquad (a;q)_n := \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}$$

and

$$(a_1,a_2,\ldots,a_m;q)_\infty := (a_1;q)_\infty(a_2;q)_\infty\cdots(a_m;q)_\infty,$$

其中 q 是一个满足 $|q|<1$的复数。此外，对于任意正整数 k，我们定义

$$f_k := (q^k;q^k)_\infty.$$

2012年，Chan 和 Mao [4] 利用模形式理论证明了

$$\sum_{n=0}^{\infty} b(4n+1)q^n = 2\frac{f_2^{10}}{f_1^9}$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty} b(4n+2)q^n = 2\frac{f_2^2 f_4^4}{f_1^5}.$$

2019年，Mao [12] 证明了关于 $b(n)$ 的模4、5和9的同余式。例如，他证明对于 $n\geq 0$,

$$b(10n+6)\equiv b(10n+8)\equiv 0 \pmod 5.$$

Mao [13] 还证明了

$$\sum_{n=0}^{\infty} b(6n+2)q^n = 4\frac{f_2^{10}f_3^2}{f_1^{10}f_6}$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty} b(6n+4)q^n = 9\frac{f_2^4 f_3^4 f_6}{f_1^8}.$$

在一篇出色的论文中，Wang [15], 证明了：对于某个 $k\geq 0$，当且仅当 $n=2k^2+2k$ 时， $b(n)$ 为奇数。Kaur 和 Rana [11] 证明了对于 $n\geq 0$,

$$b(12n+10)\equiv 0 \pmod{36}, \qquad b(18n+16)\equiv 0 \pmod{72}.$$

最近，Yao [17] 证明了关于 $B(q)$ 的一些同余式。例如，她证明了若 $p\equiv 1$ （模4），则对于满足 $p\nmid n$的 $n\geq 0$,

$$b\left(4p^{16\alpha+15}n+\frac{5p^{16\alpha+16}-1}{2}\right)\equiv 0 \pmod{32}.$$

最近，Nath 和 Das [14] 证明，对于 $n\geq 0$,

$$b(6n+3)\equiv 0 \pmod 6, \quad b(36n+22)\equiv 0 \pmod{36}, \quad b(12n+9)\equiv 0 \pmod{54}.$$

为了证明上述三个同余式，Nath 和 Das 借助 Garvan 开发的 q-级数软件包 [5]，发现了以下恒等式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} b(3n)q^n = \frac{f_2^7 f_3^2}{f_1^6 f_4 f_6}. \tag{1.1}$$

他们还发现了以下两个与 $A(q)$ 和 $\mu_2(q)$ 相关的恒等式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(3n+1)q^n = \frac{f_2^4 f_3^2 f_4}{f_1^5 f_6}, \tag{1.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(3n+1)q^n = -\frac{f_2^7 f_{12}^2}{f_1 f_4^6 f_6}. \tag{1.3}$$

在他们的论文中，[14], Nath 和 Das 要求给出 (1.1)–(1.3) 的解析证明。本文旨在利用 theta 函数的（p, k）参数化，以及 Hickerson 和 Mortenson [7]给出的若干恒等式，解决 Nath 和 Das 提出的未解决问题。

2 (1.1) 的解析证明

为了给出 (1.1) 的解析证明，我们首先证明以下引理。

引理 2.1 定义

$$\begin{aligned} F_1(q) :=& \frac{1}{f_1^4}\cdot\frac{f_3}{f_1^3}\cdot\frac{f_2^5 f_{12}^{14}}{f_4 f_6 f_8^5 f_{24}^5} - 3q\cdot\frac{1}{f_1^4}\cdot\left(\frac{1}{f_1 f_3}\right)^2\cdot\frac{f_2^3 f_4 f_6^5 f_{12}^8}{f_8^6 f_{24}^2} \\ &+ 3q\cdot\frac{1}{f_1^4}\cdot\left(\frac{1}{f_1 f_3}\right)^2\cdot\frac{f_2 f_4^4 f_6^{11} f_{24}}{f_8^7 f_{12}} + \frac{q}{4}\cdot\frac{1}{f_1^4}\cdot\left(\frac{1}{f_3^4}\right)^2\cdot\frac{f_4^8 f_6^{26} f_{24}^4}{f_2^4 f_8^8 f_{12}^{13}} \\ &+ \frac{3q}{2}\cdot\left(\frac{1}{f_1^4}\right)^2\cdot f_3^4\cdot\frac{f_2^6 f_{12}^{11}}{f_6^4 f_8^6 f_{24}^2} - 2q\cdot\left(\frac{1}{f_1^4}\right)^2\cdot f_3^4\cdot\frac{f_2^8 f_{12}^{20}}{f_4^3 f_6^{10} f_8^5 f_{24}^5} - \frac{3q}{4}\cdot\frac{f_4^7 f_{24}^3}{f_8^9} \\ &- 6q^2\cdot\frac{f_3}{f_1^3}\cdot\frac{1}{f_1^4}\cdot\frac{f_2^4 f_4^2 f_6^2 f_{12}^5 f_{24}}{f_8^7} + q^2\cdot\frac{f_3}{f_1^3}\cdot\frac{1}{f_1^4}\cdot\frac{f_2^2 f_4^5 f_6^8 f_{24}^4}{f_8^8 f_{12}^4} \\ &- 2q^2\cdot\left(\frac{1}{f_1 f_3}\right)^5\cdot\frac{f_4^6 f_6^{17} f_{24}^4}{f_2 f_8^8 f_{12}^7} - \frac{q^3}{2}\cdot\left(\frac{1}{f_1^4}\right)^2\cdot f_3^4\cdot\frac{f_2^5 f_4^3 f_{12}^2 f_{24}^4}{f_6 f_8^8} - \left(\frac{f_3}{f_1^3}\right)^2\cdot\frac{f_2^7}{f_4 f_6}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Then

$$F_1(q) = 0. \tag{2.2}$$

证明。由 [3, 第 25 条目的 (v) 和 (vi)，第 40] 页，可得

$$\frac{1}{f_1^4} = \frac{f_4^{14}}{f_2^{14} f_8^4} + 4q\frac{f_4^2 f_8^4}{f_2^{10}} \tag{2.3}$$

在 (2.3) 中用 q^3 替换 q，可得

$$\frac{1}{f_3^4} = \frac{f_{12}^{14}}{f_6^{14} f_{24}^4} + 4q^3\frac{f_{12}^2 f_{24}^4}{f_6^{10}}. \tag{2.4}$$

在（2.3）中用 $-q$ 替换 q 后，我们得到

$$f_3^4 = \frac{f_{12}^{10}}{f_6^2 f_{24}^4} - 4q^3\frac{f_6^2 f_{24}^4}{f_{12}^2}. \tag{2.5}$$

Baruah 和 Ojah [2,定理 4.3] 证明了

$$\frac{1}{f_1 f_3} = \frac{f_8^2 f_{12}^5}{f_2^2 f_4 f_6^4 f_{24}^2} + q\frac{f_4^5 f_{24}^2}{f_2^4 f_6^2 f_8^2 f_{12}} \tag{2.6}$$

此外，Baruah 和 Ojah [2, 定理 4.17] 证明了

$$\frac{f_3}{f_1^3} = \frac{f_4^6 f_6^3}{f_2^9 f_{12}^2} + 3q\frac{f_4^2 f_6 f_{12}^2}{f_2^7} \tag{2.7}$$

将 (2.3)–(2.7) 代入 (2.1) 得到

$$F_1(q) = qS_1(q^2) + S_0(q^2), \tag{2.8}$$

其中

$$\begin{aligned}
S_1(q) =& -2q^3\frac{f_2^{31}f_3^7f_{12}^{14}}{f_1^{21}f_4^{18}f_6^{12}} + 16q^3\frac{f_2^{19}f_3f_{12}^8}{f_1^{19}f_4^8} + 4q^3\frac{f_2^{22}f_3^6f_{12}^{12}}{f_1^{18}f_4^{12}f_6^9} - 20q^2\frac{f_2^{19}f_3^3f_{12}^6}{f_1^{17}f_4^{10}} - 8q^2\frac{f_2^7f_6^{12}}{f_1^{15}f_3^3}\\
&+ 64q^2\frac{f_2^{13}f_6^{18}}{f_1^{16}f_3^8f_4^5f_{12}} + 8q^2\frac{f_2^{10}f_3^2f_6^3f_{12}^4}{f_1^{14}f_4^4} - 48q^2\frac{f_2^{16}f_6^9f_{12}^2}{f_1^{18}f_3^2f_4^6} - q\frac{f_2^{31}f_6^{12}}{2f_1^{23}f_3^3f_4^{16}} - 32q\frac{f_2f_4^3f_6^{30}}{f_1^{12}f_3^{12}f_{12}^9}\\
&- 18q\frac{f_2^{18}f_3^3f_6^7f_{12}}{f_1^{17}f_4^{11}} + 3q\frac{f_2^{21}f_3^9f_{12}^4}{f_1^{19}f_4^{12}f_6^2} + 4q\frac{f_2^{13}f_3^{11}f_{12}^4}{f_1^{17}f_4^4f_6^6} - 34q\frac{f_2^7f_6^{12}}{f_1^{13}f_3f_4^2f_{12}^2} + 3q\frac{f_2^{28}f_3^7f_{12}^5}{f_1^{21}f_4^{15}f_6^3}\\
&+ 24q\frac{f_2^4f_4^2f_6^{21}}{f_1^{14}f_3^6f_{12}^6} - 3q\frac{f_2^{25}f_3f_6^6f_{12}^2}{f_1^{19}f_4^{14}} - \frac{3f_2^7f_{12}^3}{4f_4^9} - 2\frac{f_2^{25}f_6^{30}}{f_1^{20}f_3^{12}f_4^{13}f_{12}^9} + 3\frac{f_2^{16}f_3^3f_6^9}{f_1^{17}f_4^7f_{12}^3}\\
&+ \frac{f_2^{22}f_6^{15}}{4f_1^{18}f_3^2f_4^{12}f_{12}^4} + \frac{3f_2^{28}f_6^{21}}{2f_1^{22}f_3^6f_4^{14}f_{12}^6} + 3\frac{f_2^{15}f_6^{16}}{f_1^{16}f_4^9f_{12}^5} + 4\frac{f_2^7f_3^2f_6^{12}}{f_1^{14}f_4f_{12}^5} - 3\frac{f_2^{13}f_6^{18}}{f_1^{15}f_3^3f_4^6f_{12}^6} - 6\frac{f_2^7f_3^3}{f_1^9}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

and

$$\begin{aligned}
S_0(q) =& 16q^4\frac{f_2^{10}f_3^6f_{12}^{12}}{f_1^{14}f_4^4f_6^9} + 32q^4\frac{f_2^7f_3f_{12}^8}{f_1^{15}} - 96q^3\frac{f_2^4f_4^2f_6^9f_{12}^2}{f_1^{14}f_3^2} + 128q^3\frac{f_2f_4^3f_6^{18}}{f_1^{12}f_3^8f_{12}} - 10q^3\frac{f_2^{25}f_3^5f_{12}^{10}}{f_1^{19}f_4^{14}f_6^6}\\
&+ 2q^3\frac{f_2^{31}f_3f_{12}^8}{f_1^{23}f_4^{16}} - 6q^2\frac{f_2^{28}f_6^9f_{12}^2}{f_1^{22}f_3^2f_4^{14}} + 8q^2\frac{f_2^{25}f_6^{18}}{f_1^{20}f_3^8f_4^{13}f_{12}} + 12q^2\frac{f_2^{16}f_3^7f_{12}^5}{f_1^{17}f_4^7f_6^3} + 2q^2\frac{f_2^{22}f_3^2f_6^3f_{12}^4}{f_1^{18}f_4^{12}}\\
&+ 12q^2\frac{f_2^9f_3^9f_{12}^4}{f_1^{15}f_4^4f_6^2} - 32q^2\frac{f_2^{13}f_3f_6^6f_{12}^2}{f_1^{15}f_4^6} - 4q^2\frac{f_2^{19}f_6^{12}}{f_1^{19}f_3^3f_4^8} - 72q^2\frac{f_2^6f_3^3f_6^7f_{12}}{f_1^{13}f_4^3} - 9q\frac{f_2^3f_3f_6^4}{f_1^7}\\
&+ 12q\frac{f_2^{16}f_6^{21}}{f_1^{18}f_3^6f_4^6f_{12}^6} - 16q\frac{f_2^{13}f_6^{30}}{f_1^{16}f_3^{12}f_4^5f_{12}^9} + 12q\frac{f_2^3f_6^{16}}{f_1^{12}f_4f_{12}^5} - 6q\frac{f_2^{19}f_6^{12}}{f_1^{17}f_3f_4^{10}f_{12}^2}\\
&+ 12q\frac{f_2^4f_3^3f_4f_6^9}{f_1^{13}f_{12}^3} + q\frac{f_2^{10}f_6^{15}}{f_1^{14}f_3^2f_4^4f_{12}^4} - 14q\frac{f_2f_4^2f_6^{18}}{f_1^{11}f_3^3f_{12}^6} + q\frac{f_2^{25}f_3^{11}f_{12}^4}{f_1^{21}f_4^{12}f_6^6} - \frac{f_2^{11}f_3^5}{f_1^{11}f_6^4} + \frac{f_2^{19}f_3^2f_6^{12}}{f_1^{18}f_4^9f_{12}^5}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

在 [1], Alaca 和 Williams 证明了

$$f_1 = 2^{-\frac{1}{6}}p^{\frac{1}{24}}(1-p)^{\frac{1}{2}}(1+p)^{\frac{1}{6}}(1+2p)^{\frac{1}{8}}(2+p)^{\frac{1}{8}}k^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{24}}, \tag{2.11}$$

$$f_2 = 2^{-\frac{1}{3}}p^{\frac{1}{12}}(1-p)^{\frac{1}{4}}(1+p)^{\frac{1}{12}}(1+2p)^{\frac{1}{4}}(2+p)^{\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{12}}, \tag{2.12}$$

$$f_3 = 2^{-\frac{1}{6}}p^{\frac{1}{8}}(1-p)^{\frac{1}{6}}(1+p)^{\frac{1}{2}}(1+2p)^{\frac{1}{24}}(2+p)^{\frac{1}{24}}k^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{8}}, \tag{2.13}$$

$$f_4 = 2^{-\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{6}}(1-p)^{\frac{1}{8}}(1+p)^{\frac{1}{24}}(1+2p)^{\frac{1}{8}}(2+p)^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{6}}, \tag{2.14}$$

$$f_6 = 2^{-\frac{1}{3}}p^{\frac{1}{4}}(1-p)^{\frac{1}{12}}(1+p)^{\frac{1}{4}}(1+2p)^{\frac{1}{12}}(2+p)^{\frac{1}{12}}k^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{4}}, \tag{2.15}$$

$$f_{12} = 2^{-\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{2}}(1-p)^{\frac{1}{24}}(1+p)^{\frac{1}{8}}(1+2p)^{\frac{1}{24}}(2+p)^{\frac{1}{6}}k^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.16}$$

将 (2.11)–(2.16) 代入 (2.9) 和 (2.10)，得到

$$S_0(q) = S_1(q) = 0. \tag{2.17}$$

恒等式 (2.2) 由 (2.8) 和 (2.17) 得出。至此，引理 2.1 的证明完成。 ∎

现在，我们来证明 (1.1)。

在 [7, (5.2)]，中，Hickerson 和 Mortenson 证明了

$$B(q) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n = -\frac{1}{q}m(1, q^4, q^3), \tag{2.18}$$

其中，$m(x,\ q,\ z)$ 是定义如下的 Appell-Lerch 和

$$m(x, q, z) = \frac{-z}{(z, q/z, q; q)_\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^r q^{r(r+1)/2} z^r}{1 - xzq^r}.$$

Hickerson 和 Mortenson [7, 定理 3.3] 还证明了关于 Appell-Lerch 和的以下恒等式：对一般的 $x,\ z_0,\ z_1 \in \mathbb{C}^*$,

$$m(x, q, z_1) - m(x, q, z_0) = \frac{z_0 f_1^3 j(z_1/z_0; q) j(xz_0z_1; q)}{j(z_0; q) j(z_1; q) j(xz_0; q) j(xz_1; q)}, \tag{2.19}$$

其中

$$j(z; q) = (z, q/z, q; q)_\infty.$$

在 (2.19) 中令 $(x, q, z_1, z_0) \to (1, q^4, q^3, -1)$，得到

$$m(1, q^4, q^3) - m(1, q^4, -1) = -\frac{f_2^6 f_4^3}{4 f_1^4 f_8^4}. \tag{2.20}$$

在 [7, 推论 3.8],中，Hickerson 和 Mortenson 证明了

$$\begin{aligned} m(x, q, -1) =& m(x^3q^3, q^9, -1) - \frac{x}{q} m(x^3, q^9, -1) + \frac{x^2}{q^3} m(x^3/q^3, q^9, -1) \\ &+ \frac{x f_1 f_3^2 f_6 f_9 j(x^2q; q^2)}{2q f_2^2 f_{18}^2 j(-x^3; q^3)}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

在 (2.21) 中取 $(x, q) \to (1, q^4)$，可得

$$m(1, q^4, -1) = m(q^{12}, q^{36}, -1) - q^{-4} m(1, q^{36}, -1) + q^{-12} m(q^{-12}, q^{36}, -1) + \frac{f_4^3 f_{12}^3 f_{36}}{4q^4 f_8^3 f_{24} f_{72}^2}. \tag{2.22}$$

由 (2.18)、(2.20) 和 (2.22),

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n &= -\frac{1}{q}\left(m(1, q^4, -1) - \frac{f_2^6 f_4^3}{4 f_1^4 f_8^4} \right) \\ &= -\frac{1}{q} m(q^{12}, q^{36}, -1) + q^{-5} m(1, q^{36}, -1) - q^{-13} m(q^{-12}, q^{36}, -1) \\ &\quad - \frac{q^{-5}}{4} \cdot \frac{f_4^2}{f_8} \cdot \frac{f_4}{f_8^2} \cdot \frac{f_{12}^3 f_{36}}{f_{24} f_{72}^2} + \frac{q^{-1}}{4} \cdot \left(\frac{f_2 f_4}{f_1 f_8} \right)^4 \cdot \frac{f_2^2}{f_4}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

由 [3,推论 (i)，第 49] 页可知

$$\frac{f_2^5}{f_1^2 f_4^2} = \frac{f_{18}^5}{f_9^2 f_{36}^2} + 2q \frac{f_6^2 f_9 f_{36}}{f_3 f_{12} f_{18}}. \tag{2.24}$$

在 (2.24) 中用 $-q$ 替换 q 得

$$\frac{f_1^2}{f_2}=\frac{f_9^2}{f_{18}}-2q\frac{f_3f_{18}^2}{f_6f_9}. \tag{2.25}$$

Hirschhorn 和 Sellers [9]证明了

$$\frac{f_2}{f_1f_4}=\frac{f_{18}^9}{f_3^2f_9^3f_{12}^2f_{36}^3}+q\frac{f_6^2f_{18}^3}{f_3^3f_{12}^3}+q^2\frac{f_6^4f_9^3f_{36}^3}{f_3^4f_{12}^4f_{18}^3}. \tag{2.26}$$

在（2.26）中将 q 替换为 $-q$ 得到

$$\frac{f_1}{f_2^2}=\frac{f_3^2f_9^3}{f_6^6}-q\frac{f_3^3f_{18}^3}{f_6^7}+q^2\frac{f_3^4f_{18}^6}{f_6^8f_9^3}. \tag{2.27}$$

在 [10], Hirschhorn 和 Sellers 证明了以下恒等式:

$$\frac{f_2f_4}{f_1f_8}=\frac{f_6^2f_9f_{36}^6}{f_3^2f_{12}f_{18}^3f_{24}f_{72}^2}+q\frac{f_{12}^2f_{18}^6f_{72}}{f_3f_6f_9^2f_{24}^2f_{36}^3}+q^2\frac{f_6f_9f_{12}f_{72}}{f_3^2f_{24}^2}. \tag{2.28}$$

将（2.25）、（2.27）和（2.28）代入（2.23），提取其中 q的幂模 3 同余于 0 的项，然后将 q^3 替换为 q, 得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}b(3n)q^n=&\frac{f_2^5f_3f_{12}^{14}}{f_1^7f_4f_6f_8^5f_{24}^5}-3q\frac{f_2^3f_4f_6^5f_{12}^8}{f_1^6f_3^2f_8^6f_{24}^2}+3q\frac{f_2f_4^4f_6^{11}f_{24}}{f_1^6f_3^2f_8^7f_{12}}+\frac{q}{4}\frac{f_4^8f_6^{26}f_{24}^4}{f_1^4f_2^4f_3^8f_8^8f_{12}^{13}}\\&+\frac{3q}{2}\frac{f_2^6f_3^4f_{12}^{11}}{f_1^8f_6^4f_8^6f_{24}^2}-2q\frac{f_2^8f_3^4f_{12}^{20}}{f_1^8f_4^3f_6^{10}f_8^5f_{24}^5}-\frac{3q}{4}\frac{f_4^7f_{24}^3}{f_8^9}-6q^2\frac{f_2^4f_3f_4^2f_6^2f_{12}^5f_{24}}{f_1^7f_8^7}\\&+q^2\frac{f_2^2f_3f_4^5f_6^8f_{24}^4}{f_1^7f_8^8f_{12}^4}-2q^2\frac{f_4^6f_6^{17}f_{24}^4}{f_1^5f_2f_3^5f_8^8f_{12}^7}-\frac{q^3}{2}\frac{f_2^5f_3^4f_4^3f_{12}^2f_{24}^4}{f_1^8f_6f_8^8}.\end{aligned}$$

根据（2.1）和上述恒等式,

$$\sum_{n=0}^{\infty}b(3n)q^n=F_1(q)+\frac{f_2^7f_3^2}{f_1^6f_4f_6}. \tag{2.29}$$

恒等式（1.1）由（2.2）和（2.29）推出。证明完毕。 ∎

3 对 (1.2) 的解析证明

我们首先证明以下引理。

引理 3.1 定义

$$\begin{aligned}F_2(q):=&2q\cdot\frac{1}{f_1^4}\cdot\frac{f_1}{f_3^3}\cdot\frac{f_4^2f_6^{11}f_{24}^2}{f_2^2f_8^2f_{12}^5}+2q\cdot\frac{f_3^3}{f_1}\cdot\frac{1}{f_1^4}\cdot\frac{f_2^3f_{12}^7}{f_4^2f_6^4f_8f_{24}}\\&+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{f_1^4}\cdot\frac{f_2^2f_{12}^{10}}{f_4^3f_6f_{24}^4}-\frac{f_2^2f_8f_{12}^9}{2f_4^6f_6^3f_{24}^3}+\frac{f_6^3}{f_4^3}-\left(\frac{f_3}{f_1^3}\right)^2\cdot\frac{f_2^4f_4}{f_6}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Then

$$F_2(q)=0. \tag{3.2}$$

证明。Xia 和 Yao [16] 证明了

$$\frac{f_3^3}{f_1}=\frac{f_4^3f_6^2}{f_2^2f_{12}}+q\frac{f_{12}^3}{f_4}. \tag{3.3}$$

在 (3.3) 中用 $-q$ 替换 q，得到

$$\frac{f_1}{f_3^3}=\frac{f_2f_4^2f_{12}^2}{f_6^7}-q\frac{f_2^3f_{12}^6}{f_4^2f_6^9}. \tag{3.4}$$

将 (2.3)、(2.7)、(3.3) 和 (3.4) 代入 (3.1)，得到

$$F_2(q)=qH_1(q^2)+H_0(q^2), \tag{3.5}$$

其中

$$\begin{aligned}H_1(q)=&-8q\frac{f_2^2f_3^2f_4^2f_6f_{12}^2}{f_1^9}+8q\frac{f_4^3f_6^{10}}{f_1^7f_2f_3^4f_{12}}+2\frac{f_2^{18}f_3^4f_{12}^2}{f_1^{15}f_4^6f_6^3}+2\frac{f_2^{15}f_6^6}{f_1^{13}f_3^2f_4^5f_{12}}\\&+2\frac{f_4^4f_6^{10}}{f_1^8f_2f_3f_{12}^4}-6\frac{f_2^9f_3^3}{f_1^{12}}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}H_0(q)=&-2q\frac{f_2^{14}f_3^2f_6f_{12}^2}{f_1^{13}f_4^6}+8q\frac{f_2^6f_3^4f_4^2f_{12}^2}{f_1^{11}f_6^3}+2q\frac{f_2^{11}f_6^{10}}{f_1^{11}f_3^4f_4^5f_{12}}+8q\frac{f_2^3f_4^3f_6^6}{f_1^9f_3^2f_{12}}-9q\frac{f_2^5f_3f_6^4}{f_1^{10}}\\&+\frac{f_2^{11}f_6^{10}}{2f_1^{12}f_3f_4^4f_{12}^4}-\frac{f_1^2f_4f_6^9}{2f_2^6f_3^3f_{12}^3}+\frac{f_3^3}{f_2^3}-\frac{f_2^{13}f_3^5}{f_1^{14}f_6^4}.\end{aligned}$$

将 (2.11)–(2.16) 代入上述两个恒等式，可得

$$H_0(q)=H_1(q)=0. \tag{3.6}$$

恒等式 (3.2) 由 (3.5) 和 (3.6) 得出。引理 3.1 的证明至此完成。∎

现在，我们准备证明 (1.2)。

在 (2.19) 中代入 $(x,q,z_1,z_0)\to(q,q^4,q^2,-1)$，得到

$$m(q,q^4,q^2)-m(q,q^4,-1)=-\frac{f_4^9}{2f_1f_2^3f_8^4}. \tag{3.7}$$

在 (2.21) 中令 $(x,q)\to(q,q^4)$，得到

$$m(q,q^4,-1)=m(q^{15},q^{36},-1)-q^{-3}m(q^3,q^{36},-1)+q^{-10}m(q^{-9},q^{36},-1)+\frac{f_2f_3f_{12}^2f_{24}f_{36}}{2q^3f_6^2f_8f_{72}^2}. \tag{3.8}$$

在 [7], Hickerson 和 Mortenson 证明了

$$A(q)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)q^n=-m(q,q^4,q^2),$$

由此结合 (3.7) 和 (3.8)，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}a(n)q^n=\frac{f_4^9}{2f_1f_2^3f_8^4}-m(q,q^4,-1)$$

$$
\begin{aligned}
=&-m(q^{15},q^{36},-1)+q^{-3}m(q^3,q^{36},-1)-q^{-10}m(q^{-9},q^{36},-1)\\
&+\frac{1}{2}\cdot\frac{f_2}{f_1f_4}\cdot\left(\frac{f_4^5}{f_2^2f_8^2}\right)^2-\frac{1}{2q^3}\cdot\frac{f_2}{f_4^2}\cdot\frac{f_4^2}{f_8}\cdot\frac{f_3f_{12}^2f_{24}f_{36}}{f_6^2f_{72}^2}.
\end{aligned}\tag{3.9}
$$

将 (2.24)–(2.27) 代入 (3.9)，提取其中 q 的幂模 3 同余于 1 的项，再除以 q，并将 q^3 替换为 q，得到

$$
\sum_{n=0}^{\infty}a(3n+1)q^n=\left(F_2(q)+\frac{f_2^4f_3^2f_4}{f_1^6f_6}\right)f_1,
$$

其中 $F_2(q)$ 由 (3.1) 定义。恒等式 (1.2) 可由 (3.2) 和上述恒等式推出。证明完毕。

∎

4 对 (1.3) 的解析证明

为证明 (1.3)，我们先证明以下引理。

引理 4.1 定义

$$
\begin{aligned}
F_3(q):=&-4q\cdot\frac{f_1^3}{f_3}\cdot\frac{f_6^4f_{12}^2}{f_2^4f_4^2}+4\frac{f_2^3f_6^3}{f_4^4}-4\cdot(f_1f_3)^2\cdot\frac{f_6^4}{f_2^4f_4f_{12}}+\left(\frac{f_1^2}{f_3^2}\right)^2\cdot\frac{f_6^{13}}{f_2^7f_{12}^4}\\
&-2\frac{f_2^5f_8f_{12}^9}{f_4^7f_6^3f_{24}^3}+\frac{f_2^7f_{12}^2}{f_4^6f_6}.
\end{aligned}\tag{4.1}
$$

Then

$$
F_3(q)=0.
$$

证明。Xia 和 Yao [16, 引理 2.4] 证明了

$$
\frac{f_1^3}{f_3}=\frac{f_4^3}{f_{12}}-3q\frac{f_2^2f_{12}^3}{f_4f_6^2}.\tag{4.2}
$$

由 [8,(30.10.2) 和 (30.12.3)] 可得

$$
\frac{f_1^2}{f_3^2}=\frac{f_2f_4^2f_{12}^4}{f_6^5f_8f_{24}}-2q\frac{f_2^2f_8f_{12}f_{24}}{f_4f_6^4}\tag{4.3}
$$

and

$$
f_1f_3=\frac{f_2f_8^2f_{12}^4}{f_4^2f_6f_{24}^2}-q\frac{f_4^4f_6f_{24}^2}{f_2f_8^2f_{12}^2}.\tag{4.4}
$$

将（4.2）–（4.4）代入（4.1），得到

$$
F_3(q)=R_0(q^2),\tag{4.5}
$$

其中

$$
R_0(q)=12q\frac{f_3^2f_6^5}{f_1^2f_2^3}-4q\frac{f_2^7f_3^6f_{12}^4}{f_1^6f_4^4f_6^5}+4q\frac{f_3^5f_4^2f_{12}^2}{f_1^3f_2^2f_6^2}+4\frac{f_1^3f_3^3}{f_2^4}-4\frac{f_3^2f_4^4f_6^7}{f_1^2f_2^5f_{12}^4}
$$

$$+\frac{f_2^4 f_3^3 f_6^4}{f_1^5 f_4^2 f_{12}^2}-2\frac{f_1^5 f_4 f_6^9}{f_2^7 f_3^3 f_{12}^3}+\frac{f_1^7 f_6^2}{f_2^6 f_3}. \tag{4.6}$$

将 (2.11)–(2.16) 代入 (4.6)，得到

$$R_0(q)=0. \tag{4.7}$$

引理 4.1 由 (4.5) 和 (4.7) 得出。引理 4.1 的证明至此完成。∎

最后，本节给出 (1.3) 的证明。

在 [7]，中，Hickerson 和 Mortenson 证明了

$$\mu_2(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(n)q^n=4m(-q,q^4,-1)-\frac{f_2^8}{f_1^3 f_4^4}. \tag{4.8}$$

在 (3.8) 中用 $-q$ 替换 q，得到

$$\begin{aligned}m(-q,q^4,-1)=&m(-q^{15},q^{36},-1)+q^{-3}m(-q^3,q^{36},-1)\\&+q^{-10}m(-q^{-9},q^{36},-1)-\frac{f_2f_6f_{12}f_{24}f_{36}}{2q^3f_3f_8f_{72}^2},\end{aligned}$$

结合 (4.8)，由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mu(n)q^n=&4m(-q^{15},q^{36},-1)+4q^{-3}m(-q^3,q^{36},-1)+4q^{-10}m(-q^{-9},q^{36},-1)\\&-\frac{2}{q^3}\cdot\frac{f_2}{f_4^2}\cdot\frac{f_4^2}{f_8}\cdot\frac{f_6f_{12}f_{24}f_{36}}{f_3f_{72}^2}-\left(\frac{f_2^5}{f_1^2f_4^2}\right)^2\cdot\frac{f_1}{f_2^2}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

将 (2.24)、(2.25) 和 (2.27) 代入 (4.9)，提取其中 q 的幂模 3 同余于 1 的项，再除以 q 并用 q 替换 q^3，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mu(3n+1)q^n=\frac{1}{f_1}\left(F_3(q)-\frac{f_2^7f_{12}^2}{f_4^6f_6}\right). \tag{4.10}$$

恒等式 (1.3) 可由引理 4.1 和 (4.10) 得出。证明至此完成。∎

声明与声明事项

经费支持。致谢 本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12371334）的资助。

利益冲突。 作者声明不存在利益冲突。

数据可用性声明。 本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

参考文献

[1] S. Alaca 和 K.S. Williams，某些八元二次型表示正整数的个数，《函数、逼近与评论数学》43(2010) 45–54。

[2] N.D. Baruah 和 K.K. Ojah，由 Ramanujan 的 theta 函数和模方程导出的 Ramanujan 分拆恒等式及同余式的类似结果，Ramanujan J. 28（2012年）385–407。[3] B.C. Berndt，《拉马努金笔记》第三部分，Springer，纽约，1991年。[4] S.H. Chan 和 R.R. Mao，Appell-Lerch 和的两个同余式，Int. J. Number Theory 8（2012年）111–123。[5] F. Garvan，面向 q-级数 Maple 软件包的 q-乘积教程，S´em. Lothar. Combin. 42（1999年）27–52。[6] B. Gordon 和 R.J. McIntosh，经典假拟 theta 函数综述，载于 Developments in Mathematics。Developments in Mathematics，第23卷，纽约：Springer，第95–144页，（2012年）。[7] D.R. Hickerson 和 E.T. Mortenson，Hecke 型双重和、Appell-Lerch 和与假 theta 函数，I，Proc. London Math. Soc. 109（2014年）382–422。[8] M.D. Hirschhorn， q的力量：一段个人历程，Developments in Mathematics，第49卷，Springer，2017年。[9] M.D. Hirschhorn 和 J.A. Sellers，奇数部分互异的分拆的算术性质，Ramanujan J. 22（2010年）273–284。[10] M.D. Hirschhorn 和 J.A. Sellers，关于分拆为互异且不是四的倍数的部分的分拆的模3同余式，J. Integer Sequences 17（2014年），文章 14.9.6。[11] H. Kaur 和 M. Rana，关于二阶假 theta 函数 $B(q)$，Electron. Rese. Arch. 30（2022年）52–65。[12] R.R. Mao，假 theta 函数 $V_0(q)$ 的两个恒等式，J. Math. Anal. Appl. 479（2019年）122–134。[13] R.R. Mao，假 theta 函数 $B(q)$ 系数的算术性质，Bull. Austr. Math. Soc. 102（2020年）50–58。[14] H. Nath 和 H. Das，二阶假 theta 函数$B(q)$的无穷多个同余式族，已投稿（arXiv: 2509.20708v1）。[15] L.Q. Wang，假 theta 函数系数的奇偶性，J. Number Theory 229（2021年）53–99。[16] E.X.W. Xia 和 O.X.M. Yao，上部分拆关于2和3的幂的新 Ramanujan 型同余式，J. Number Theory 133（2013年）1932–1949。[17] O.X.M. Yao，关于二阶假 theta 函数 $B(q)$ 的同余式，Rev. Real Acad. Cienc. Exactas F´ís. Nat. Ser. A Mat. 119（2025年）# 112。