arXiv:2601.01863v1 [math.DG] 5 Jan 2026

自旋 Perelman 泛函：临界点与梯度流

TSZ-KIU AARON CHOW，FREDERICK TSZ-HO FONG

Abstract. 在本文中，我们在闭黎曼自旋流形上引入一个能量泛函，将 Perelman 的 $\mathcal{W}$-泛函和 $\mathcal{F}$-泛函、Baldauf-Ouzch 的 $\mathcal{E}$-泛函以及旋量的狄利克雷能量统一起来。我们计算了其一阶变分公式，并证明在自然约束下，其临界点是扭曲里奇孤子和加权狄拉克算子的特征旋量。我们引入了此类泛函的负 L^2-梯度流，并通过压缩映射方法建立了其短时间存在性与唯一性。

1. Introduction

1.1. 背景与动机。Perelman 的 $\mathcal{F}$-泛函和 $\mathcal{W}$-泛函是在他的第一篇预印本 [8]关于庞加莱猜想的证明中引入的。这些泛函在分析里奇流中的奇点时发挥着核心作用。在适当的归一化约束下，它们的极小化子——例如 λ-泛函和 μ-泛函——沿流单调递增，并且当且仅当度量为里奇平坦、爱因斯坦度量或里奇孤子时保持不变。

正如 [8], 中的注1.3所解释的，Perelman的泛函与自旋几何中的魏岑伯克（或 Bochner-Lichnerowicz）公式密切相关。为进一步阐述这种联系，我们定义以下量。给定黎曼自旋流形 $(M^n,\ g)$ 上的光滑标量函数 $f\colon M\to\mathbb{R}$，对于任意张量场 α 和标量函数 φ，我们定义：

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_f\alpha &= e^f\operatorname{div}(e^{-f}\alpha) = \operatorname{div}(\alpha) - i_{\nabla f}\alpha\\
D_f\psi &= e^{f/2}e_i\cdot\nabla_{e_i}(e^{-f/2}\psi) = D\psi - \frac{1}{2}\nabla f\cdot\psi\\
\Delta_f\varphi &= \operatorname{div}_f\nabla\varphi = \Delta\varphi - \langle\nabla f,\nabla\varphi\rangle\\
\Delta_f\psi &= -\nabla^*\nabla\psi - \nabla_{\nabla f}\psi\\
\operatorname{Ric}_f &= \operatorname{Ric} + \nabla\nabla f\\
R_f &= R + 2\Delta f - |\nabla f|^2 = R + |\nabla f|^2 - 2\Delta_f f.
\end{aligned}$$

这里我们用 ∇ 表示由 g 诱导的列维-奇维塔联络，以及与 g 相容的自旋联络。利用这一记号，我们可以将 Perelman 的 $\mathcal{F}$-泛函表示为

$$\mathcal{F}(g,f) = \int_M R_f e^{-f}\,d\mu_g.$$

根据魏岑伯克公式：

$$D_f^2\psi = -\Delta_f\psi + \frac{1}{4}R_f\psi,$$

然后可以利用分部积分证明：

$$\begin{aligned}
&\int_M 4\,|D_f\psi|^2\,e^{-f}\,d\mu_g - \mathcal{F}(g,f)\\
&= \int_M \left\{4\mathrm{Re}\langle D_f^2\psi,\psi\rangle - R_f\right\}e^{-f}\,d\mu_g\\
&= \int_M \left\{4\,|\nabla\psi|_g^2 + R_f\big(\,|\psi|^2-1\big)\right\}e^{-f}\,d\mu_g,
\end{aligned}\tag{1.1}$$

Date：2026年1月5日。

因此，考虑以下极小化约束（固定 g 和 f），可得

$$\begin{aligned}&\inf_{\int_M|\psi|^2e^{-f}\,d\mu_g=1}\int_M 4\,|D_f\psi|^2\,e^{-f}\,d\mu_g-\mathcal{F}(g,f)\\&=\inf_{\int_M|\psi|^2e^{-f}\,d\mu_g=1}\int_M\Big\{4\,|\nabla\psi|_g^2+R_f\big(\,|\psi|^2-1\big)\Big\}\,e^{-f}\,d\mu_g\end{aligned}$$

回忆一下， $D_f\psi=e^{f/2}D(e^{-f/2}\psi)$，因此通过变量替换 $\psi\mapsto e^{-f/2}\psi$，可以得到

$$\inf_{\int_M|\psi|^2e^{-f}\,d\mu_g=}\int_M 4\,|D_f\psi|^2\,e^{-f}d\mu_g=\inf_{\int_M|\psi|^2\,d\mu_g=1}\int_M 4\,|D\psi|^2\,d\Omega_0=4\lambda_1(D)^2$$

其中 $\lambda_1(D)$ 是狄拉克算子 D 的最低特征值，因此我们有

$$4\lambda_1(D)^2-\mathcal{F}(g,f)=\inf_{\int_M|\psi|^2e^{-f}\,d\mu_g=1}\int_M\Big\{4\,|\nabla\psi|_g^2+R_f\big(\,|\psi|^2-1\big)\Big\}\,e^{-f}\,d\mu_g.$$

注意到 $\lambda_1(D)$ 与 f 无关，因此在满足以下关于f 的约束条件（ g 固定）的情况下取最大值，可得：

$$4\lambda_1(D)^2-\lambda(g)=\sup_{\int_M e^{-f}\,d\mu_g=1}\inf_{\int_M|\psi|^2e^{-f}\,d\mu_g=1}\int_M\Big\{4\,|\nabla\psi|_g^2+R_f\big(\,|\psi|^2-1\big)\Big\}\,e^{-f}\,d\mu_g.$$

其中 $\lambda(g)$ 是 Perelman 的 λ-泛函：

$$\lambda(g):=\inf_{\int_M e^{-f}\,d\mu_g}\int_M R_fe^{-f}\,d\mu_g.$$

ˆ Perelman 在 [8] 中证明，极小值可由函数 f 取得，使得$R_{\hat{f}}=\lambda(g)$，因此我们有：

$$\begin{aligned}4\lambda_1(D)^2-\lambda(g)&=\inf_{\int_M|\psi|^2e^{-\hat{f}}d\mu_g=1}\int_M\Big\{4\,|\nabla\psi|_g^2+\lambda(g)\big(\,|\psi|^2-1\big)\Big\}\,e^{-\hat{f}}\,d\mu_g\\&=\inf_{\int_M|\psi|^2e^{-\hat{f}}d\mu_g=1}\int_M 4\,|\nabla\psi|_g^2\,d\mu_g=-4\lambda_1(\Delta_f)\end{aligned}$$

其中， $\lambda_1(\Delta_f)$ 是 Δ_f 作用于旋量时的最低特征值。这表明，Perelman 的 λ-泛函也可以改写为两个算子特征值之差。

$$\lambda(g)=4\lambda_1(D)^2-4\lambda_1(\Delta_f).$$

在 [3], 中，Baldauf-Ozuch 引入了如下泛函：

$$\mathcal{E}(g,f,\psi):=\int_M\Big\{4\,|\nabla\psi|_g^2+R_f\big(\,|\psi|^2-1\big)\Big\}\,e^{-f}\,d\mu_g$$

这就是式（1.1）的右端项。在具有非负 R_f 的渐近欧几里得流形上应用该泛函后，Baldauf-Ozuch 证明了 $\mathcal{E}$ 的极小极大值的单调性，以及此类流形沿里奇流演化时 ADM 质量的恒定性。

Perelman 引入的另一个重要泛函是 $\mathcal{W}$-泛函，其定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(g,f,\tau)&:=\frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M\Big\{\tau\big(R+|\nabla f|^2\,\big)+f-n\Big\}\,e^{-f}\,d\mu_g\\&=\frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M(\tau R_f+f-n)e^{-f}\,d\mu_g.\end{aligned}$$

在约束 $\int_M e^{-f}\,d\mu_g=(4\pi\tau)^{n/2}$ 下， $\mathcal{W}$ 的临界点是收缩里奇孤子，它们刻画了有限时间奇点。

受此前关于 Perelman 的 $\mathcal{F}$-泛函和 λ-泛函，以及 Baldauf-Ozuch 的 $\mathcal{E}$-泛函的讨论启发，我们引入如下 $\mathbb{W}_\lambda$-泛函，将这些已知泛函统一起来。

定义 1.1。 在闭黎曼旋量流形（M^n， g）上，我们将自旋 Perelman 熵 $\mathbb{W}_\lambda$ 定义如下：

$$\mathbb{W}_\lambda(g,f,\psi,\tau):=\frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M\Big\{4\,|\nabla\psi|_g^2+R_f\big(\,|\psi|^2-\tau\big)-\lambda(f-n)\Big\}\,e^{-f}\,d\mu_g\tag{1.2}$$

其中， g 是 M上的任意黎曼度量， $f\colon\ M\to\mathbb{R}$ 是任意光滑函数， ψ 是旋量场，$\tau>0$ 是 t上的正标量函数，而 $\lambda\in\mathbb{R}$ 是一个固定常数。

ˆ 1.2. **与狄利克雷旋量能量的关系**。当 $\lambda=0$时， f 是一个满足 $R_{\hat{f}}=C$为常数的函数，而 ψ_0 是一个旋量，且

$$\int_M e^{-\hat{f}}\,d\mu_g=(4\pi\tau)^{n/2}\quad\text{ and }\quad\int_M|\psi_0|^2\,e^{-\hat{f}}\,d\mu_g=c(4\pi\tau)^{n/2},$$

ˆˆ 那么 $\mathbb{W}_\lambda(g,\ f,\ \psi,\ \tau)$ 本质上就是 Dirichlet 旋量能量：

$$\mathbb{W}_\lambda(g,\hat{f},\hat{\psi},\tau)=\frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M 4\,|\nabla\psi|_g^2\,d\mu_g+C(c-\tau).$$

1.3. **与 Perelman 的 $\mathcal{W}$-泛函和 $\mathcal{F}$-泛函的关系**。带 f 权的 Weitzenb¨ock 公式

$$D_f^2\psi=-\Delta_f\psi+\frac{1}{4}R_f\psi \tag{1.3}$$

这意味着

$$2\Delta_f|\psi|^2=R_f|\psi|^2+4|\nabla\psi|^2-4\mathrm{Re}\langle D_f^2\psi,\psi\rangle. \tag{1.4}$$

由于 M 是闭的，对于任意标量函数 φ，都有 $\int_M(\Delta_f\varphi)e^{-f}\,d\mu_g=0$，因此 (1.2) 变为

$$\begin{aligned}\mathbb{W}_\lambda(g,f,\psi,\tau)&=\frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M\Big\{4\mathrm{Re}\langle D_f^2\psi,\psi\rangle+2\Delta_f|\psi|^2-\tau R_f-\lambda(f-n)\Big\}e^{-f}\,d\mu_g\\&=\frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M\Big\{4|D_f\psi|^2-\tau\big(R+|\nabla f|_g^2\big)-\lambda(f-n)\Big\}e^{-f}\,d\mu_g.\end{aligned}$$

ˆ 旋量 $\psi\in\ker D_f$ 称为 f 权调和旋量。当我们将 $\mathbb{W}_\lambda$ 限制在 f 权调和旋量上时，根据 λ 的选择，可以得到 Perelman 的 $\mathcal{W}$-泛函或 $\mathcal{F}$-泛函：

$$\begin{aligned}\mathbb{W}_\lambda(g,f,\hat{\psi},\tau)&=-\frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M\Big\{\tau\big(R+|\nabla f|_g^2\big)+\lambda(f-n)\Big\}e^{-f}\,d\mu_g\\&=\begin{cases}-\mathcal{W}(g,f,\tau)&\text{if }\lambda=1\\-\frac{\tau}{(4\pi\tau)^{n/2}}\mathcal{F}(g,f)&\text{if }\lambda=0\end{cases}.\end{aligned}$$

1.4. **与 Baldauf-Ozuch 泛函的关系**。当 $\lambda=0$，且 $\tau\equiv1$时，(1.2) 变为 ：

$$\mathbb{W}_\lambda(g,f,\psi,1)=\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\int_M\Big\{4|\nabla\psi|_g^2+R_f\big(|\psi|^2-1\big)\Big\}e^{-f}\,d\mu_g=\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\mathcal{E}_g(f,\psi)$$

这（相差一个常数因子）就是 Baldauf-Ozuch 的工作 [3] 中研究的旋量能量泛函。

1.5. **与 Perelman 的 μ-泛函和 λ-泛函的关系**。为简单起见，我们记

$$d\Omega_f=\frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}e^{-f}d\mu_g.$$

接下来，我们考虑所有满足 $L^2(d\Omega_f)$-范数固定的旋量 ψ 上的约束。

$$\inf_{\int_M|\psi|^2d\Omega_f=c}\mathbb{W}_\lambda(g,f,\psi,\tau)=\inf_{\int_M|\psi|^2d\Omega_f=c}\int_M4|D_f\psi|^2\,d\Omega_f-\int_M\Big\{\tau(R+|\nabla f|_g^2)+\lambda(f-n)\Big\}\,d\Omega_f,$$

其中，下确界是在固定 $(g,\ f,\ \tau)$ 的条件下取的，且 $c>0$ 是一个常数。

如前所述，我们有

$$\inf_{\int_M|\psi|^2d\Omega_f=c}\int_M4|D_f\psi|^2\,d\Omega_f=\int_{\int_M|\psi|^2\,d\Omega_0=c}\int_M4|D\psi|^2\,d\Omega_0=4c\lambda_1(D)^2,$$

因此，进一步对约束 $\int_M d\Omega_f=1$ 取上确界，可得

$$\sup_{\int_M d\Omega_f=1}\inf_{\int_M|\psi|^2d\Omega_f=c}\mathbb{W}_\lambda(g,f,\psi,\tau)=\begin{cases}4c\lambda_1(D)^2-\mu(g,\tau)&\text{if }\lambda=1\\4c\lambda_1(D)^2-\tau(4\pi\tau)^{n/2}\lambda(g)&\text{if }\lambda=0\end{cases}$$

ˆ Perelman 在 [8] 中证明了，μ 泛函和 λ 泛函的极小化子 f 存在，并且满足以下结论：

$$\tau R_{\hat{f}}+\lambda(\hat{f}-n)=\begin{cases}\mu(g,\tau)&\text{if }\lambda=1\\\tau\lambda(g)&\text{if }\lambda=0.\end{cases}$$

因此，我们有

$$\sup_{\int_M d\Omega_f=1}\inf_{\int_M|\psi|^2d\Omega_f=c}\mathbb{W}_\lambda(g,f,\psi,\tau)=\begin{cases}4c\lambda_1(D)^2-\tau R_f-f+n & \text{if } \lambda=1\\ 4c\lambda_1(D)^2-\tau(4\pi\tau)^{n/2}R_f & \text{if } \lambda=0\end{cases} \tag{1.5}$$

著名的 Friedrich 不等式 [4] 及其在 [2] 中的 f-加权推广指出，在闭自旋流形 (M^n,g) 和 ($f\in C^\infty,\mathbb{R}$) 上，若 M，则

$$\lambda_1(D)^2\geq\frac{n}{4(n-1)}\min R_f,$$

等号成立当且仅当 f为常数，且 (M^n,g) 存在 Killing 旋量，因此 (M^n,g) 是爱因斯坦度量。由 (1.5) 和 Friedrich 不等式可知，如果能在适当选择约束 (τ,c) 的情况下，对数据 (g,f,ψ) 进行光滑变形，并使其沿某个适当的流演化，从而使 $\mathbb{W}_0$ 随 $t\to\infty$ 趋于 0，那么极限度量 g_∞ 应当是爱因斯坦度量。若能发现 Friedrich 不等式是否存在某种推广，使得当且仅当 (M^n,g,f) 是梯度 Ricci 孤子时等号成立，也将很有意义。我们将在后文证明，$\mathbb{W}_1$ 的约束临界点由“扭曲”Ricci 孤子实现。(1.5) 中的情形 $\lambda=1$ 似乎表明，广义 Friedrich 不等式可能具有某种形式，其等号情形由 Ricci 孤子实现。

1.6. **梯度流**。受 (1.5) 以及与 Friedrich 不等式的潜在联系启发，我们将在 (g,f,ψ) 上引入一个保持约束的流系统

$$\int_M d\Omega_f=1\quad\text{ and }\quad|\psi|^2=c.$$

该流系统具有如下形式:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t}&=-2\left(\mathrm{Ric}+\mathcal{L}_{\frac{1}{2}\nabla f-\frac{1}{\tau}V_f}g-\frac{2}{\tau}S_{g,f,\psi}-\frac{\lambda}{2\tau}g\right)\\ \frac{\partial f}{\partial t}&=-\Delta f-R+\frac{\lambda n}{2\tau}+\frac{4}{\tau}\mathrm{Tr}_gS+\frac{2}{\tau}\operatorname{div}V_f\\ \frac{\partial\psi}{\partial t}&=\Delta_f\psi+\frac{|\nabla\psi|^2}{|\psi|^2}\psi\end{aligned}$$

其中，向量场 V_f 和对称二阶张量 $S_{g,f,\psi}$ 将在后续章节中定义。我们将证明该流的短时存在性（定理 4.1）。将证明 $\mathbb{W}_\lambda$-泛函沿此流单调递减（命题 3.6），且在“扭曲”Ricci 孤子上取驻值。因此，从某种意义上说，该流系统是 $\mathbb{W}_\lambda$-函数的负 L^2-梯度流。

为证明短时存在性，我们采用一种适用于耦合 (g,f,ψ)-方程组的 DeTurck 技巧型策略。更具体地说，在第4节中，我们通过向度量方程添加 DeTurck 向量场 $X=W(g,g_0)-\frac{2}{\tau}V_f+\nabla f$来引入一个规范固定系统，并在 (f,ψ)-方程中加入相应的输运项（包括自旋子 Kosmann 李导数），以补偿由此产生的微分同胚作用。这种规范的一个关键分析特征是，它在最高阶导数层面使方程组呈现三角抛物型形式：度量方程在 g 中变为严格抛物型，且其主部为拉普拉斯型，并且不含 f 或 ψ 的二阶导数；自旋子方程在 ψ 中是严格抛物型，而额外的最高阶项至多涉及 g 的二阶导数（源自 Kosmann 修正），但仅涉及 ψ 的一阶导数；标量方程则在 f 中为（正向/反向）抛物型，具体取决于 $c>\tau$ 或 $c<\tau$。

在第 4.1 节中，我们计算主符号，并验证在逐点归一化 $|\psi_0|^2\equiv c$ 下，(g, ψ)-子方程组是一致抛物型的，而 f-方程在 $c>\tau$ 时是一致前向抛物型，在 $c<\tau$ 时则是一致反向抛物型。在第 4.2 节中，我们利用三角结构，在抛物型 H¨older 空间中通过巴拿赫不动点论证求解规范固定系统：依次求解 g、ψ，然后求解 f；每一步都应用抛物型 Schauder 估计，并利用短时间插值估计，在差值界中获得一个小因子，从而在时间足够短时得到压缩映射。最后，我们沿规范向量场生成的依赖时间的微分同胚进行拉回，以解除规范固定，从而得到原始流 (3.5)–(3.7) 的一个解。

T文章结构如下。我们将在第 2
usin以及 [8]和 [2,3]中推导出的一些公式。在第 3 节中，我们将推导欧拉-拉格朗日 ’s

方程，并考虑一些自然约束，这将启发我们研究旋量 Ricci 流。在第4节中，我们将证明旋量 Ricci 流的短时存在性和唯一性。

致谢。 A. Chow 部分获得邱彰基金会初创基金和香港科技大学新教员启动基金的资助。F. Fong 部分获得香港研究资助局优配研究金 #16305625 的资助。作者谨此感谢万景波的宝贵讨论。

2. Variation Formulae

2.1. 演化方程。 本节首先列出各种重要量的演化方程，然后利用它们求出 $\mathbb{W}_\lambda$-泛函的一阶变分。设$g(t)$、 $f(t)$、 $\tau(t)$ 和 $\psi(t)$ 分别是定义在 M 上的一参数黎曼度量、标量函数和旋量族。我们用 $\dot{g}$、 $\dot{f}$、 $\dot{\tau}$、 $\dot{\psi}$表示它们关于 t 的导数。

引理2.1 (参见 [1], [3]的命题2.6、2.25)。

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla\psi|_g^2 = -\big\langle \dot{g}, \langle\nabla\psi\otimes\nabla\psi\rangle\big\rangle + \frac{1}{2}\langle\nabla\dot{g}, T_\psi\rangle + 2\mathrm{Re}\langle\nabla\dot{\psi}, \nabla\psi\rangle \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}R_f = \operatorname{div}_f\operatorname{div}_f\dot{g} - 2\Delta_f\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g\dot{g} - \dot{f}\right) - \langle\dot{g}, \mathrm{Ric}_f\rangle \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 = 2\mathrm{Re}\langle\psi, \dot{\psi}\rangle \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}(e^{-f}\,d\mu_g) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g\dot{g} - \dot{f} - \frac{n\dot{\tau}}{2\tau}\right)e^{-f}\,d\mu_g \tag{2.4}$$

其中， T_ψ 和 $\langle\nabla\psi\otimes\nabla\psi\rangle$ 分别是由下式定义的3阶和2阶张量:

$$T_\psi(X,Y,Z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left((X\wedge Y)\cdot\psi, \nabla_Z\psi\rangle + \langle(X\wedge Z)\cdot\psi, \nabla_Y\psi\rangle\right) \tag{2.5}$$

$$\langle\nabla\psi\otimes\nabla\psi\rangle(X,Y) = \mathrm{Re}\langle\nabla_X\psi, \nabla_Y\psi\rangle \tag{2.6}$$

对于任意向量场 X、 Y、 Z。

因此，下面的积分满足以下演化方程。

引理 2.2 （参见 [1], [3]中的命题2.20和2.25）。假设 $\partial M = \emptyset$，则有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M R_f e^{-f}\,d\mu_g\\ &= \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M\left\{\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(\dot{g}) - \dot{f} - \frac{n\dot{\tau}}{2\tau}\right)R_f - \langle\dot{g}, \mathrm{Ric}_f\rangle\right\}e^{-f}\,d\mu_g\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M R_f|\psi|^2 e^{-f}\,d\mu_g\\ &= \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M\Big\{-\big\langle\dot{g}, \mathrm{Ric}_f|\psi|^2\big\rangle + |\psi|^2\operatorname{div}_f\operatorname{div}_f\dot{g} + 2\mathrm{Re}\langle\dot{\psi}, R_f\psi\rangle\\ &\qquad + 4\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g\dot{g} - \dot{f} - \frac{n\dot{\tau}}{2\tau}\right)\left(\mathrm{Re}\langle D_f^2\psi, \psi\rangle - |\nabla\psi|_g^2\right)\Big\}e^{-f}\,d\mu_g\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M|\nabla\psi|_g^2 e^{-f}\,d\mu_g\\ &= \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M\left\{\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g\dot{g} - \dot{f} - \frac{n\dot{\tau}}{2\tau}\right)|\nabla\psi|^2 - 2\mathrm{Re}\langle\dot{\psi}, \Delta_f\psi\rangle\right.\\ &\qquad\left. - \left\langle\dot{g}, \frac{1}{2}\operatorname{div}_f T_\psi + \langle\nabla\psi\otimes\nabla\psi\rangle\right\rangle\right\}e^{-f}\,d\mu_g\end{aligned} \tag{2.9}$$

综合这些结果，我们便可计算出 $\mathbb{W}_\lambda$ 的一阶变分公式。

命题 2.3。 假设 $\partial M = \emptyset$。 $\mathbb{W}_\lambda$ 的一阶变分为

$$\begin{aligned}(2.10)\quad &\frac{d}{dt}\mathbb{W}_\lambda(g,f,\psi,\tau)\\ &= \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M \left\{\left\langle \tau\dot{g} - \dot{\tau}g,\, \mathrm{Ric}_f - \frac{\lambda}{2\tau}g\right\rangle - \langle \dot{g},\, \mathcal{L}_V g + 2S\rangle + 8\mathrm{Re}\left\langle D_f^2\psi,\, \dot{\psi}\right\rangle \right.\\ &\qquad \left. + \left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(\dot{g}) - \dot{f} - \frac{n\dot{\tau}}{2\tau}\right)\left(4\mathrm{Re}\langle D_f^2\psi,\psi\rangle - \tau R_f - \lambda(f-n-1)\right)\right\} e^{-f}d\mu\end{aligned}$$

其中 V 是 M 上的向量场，满足

$$(2.11)\qquad V_{g,f,\psi} = \sum_{i=1}^n \mathrm{Re}\langle \psi, e_i\cdot D_f\psi\rangle e_i,$$

而 S 是由下式定义的对称2阶张量

$$(2.12)\qquad S_{g,f,\psi}(X,Y) := \mathrm{Re}\langle D_f\psi, X\cdot\nabla_Y\psi + Y\cdot\nabla_X\psi\rangle.$$

若(g, f, ψ) 可由上下文明确，我们将 $V_{g,f,\psi}$ 以及 $S_{g,f,\psi}$ 分别简写为 V和 S。

证明。 首先，以下结果很有用

$$(2.13)\qquad \int_M |\psi|^2\,(\,\mathrm{div}_f\,\mathrm{div}_f\dot{g})e^{-f}\,d\mu_g = \int_M \langle \dot{g}, \nabla\nabla\,|\psi|^2\rangle e^{-f}\,d\mu_g.$$

我们还需要以下演化方程，它可以通过直接计算轻易得到:

$$\begin{aligned}(2.14)\qquad &\frac{d}{dt}\frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M (f-n)e^{-f}\,d\mu_g\\ &= \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M \left\{\dot{f} + \left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g\dot{g} - \dot{f} - \frac{n\dot{\tau}}{2\tau}\right)(f-n)\right\} e^{-f}\,d\mu_g.\end{aligned}$$

将上述恒等式与引理 2.2 中的演化方程相加，我们得到

$$\begin{aligned}(2.15)\qquad &\frac{d}{dt}\mathbb{W}_\lambda(g,f,\psi,\tau) = 4(2.9) + (2.8) - \tau(2.7) - \lambda(2.14) - \frac{\dot{\tau}}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M R_f e^{-f}\,d\mu_g\\ &= \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M \left\{\left\langle \dot{g}, -2\,\mathrm{div}_f T_\psi - 4\mathrm{Re}\langle\nabla\psi\otimes\nabla\psi\rangle - \mathrm{Ric}_f\,|\psi|^2 + \nabla\nabla\,|\psi|^2 + \tau\mathrm{Ric}_f\right\rangle \right.\\ &\qquad + \mathrm{Re}\langle\dot{\psi}, -8\Delta_f\psi + 2R_f\psi\rangle - \dot{\tau}R_f - \lambda\dot{f}\\ &\qquad \left. + \left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(\dot{g}) - \dot{f} - \frac{n\dot{\tau}}{2\tau}\right)\left(4\mathrm{Re}\langle D_f^2\psi,\psi\rangle - \tau R_f - \lambda(f-n)\right)\right\} e^{-f}\,d\mu_g\\ &= \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M \left\{\left\langle \tau\dot{g}, \mathrm{Ric}_f - \frac{\lambda}{2\tau}g\right\rangle - \dot{\tau}\left(R_f - \frac{\lambda n}{2\tau}\right) + 8\mathrm{Re}\langle\dot{\psi}, D_f^2\psi\rangle \right.\\ &\qquad + \left\langle \dot{g}, -2\,\mathrm{div}_f T_\psi - 4\mathrm{Re}\langle\nabla\psi\otimes\nabla\psi\rangle - \mathrm{Ric}_f\,|\psi|^2 + \nabla\nabla\,|\psi|^2\right\rangle\\ &\qquad \left. + \left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(\dot{g}) - \dot{f} - \frac{n\dot{\tau}}{2\tau}\right)\left(4\mathrm{Re}\langle D_f^2\psi,\psi\rangle - \tau R_f - \lambda(f-n-1)\right)\right\} e^{-f}\,d\mu_g\end{aligned}$$

通过观察到

$$R_f - \frac{\lambda n}{2\tau} = \mathrm{tr}_g\left(\mathrm{Ric}_f - \frac{\lambda}{2\tau}g\right) + \Delta_f = \left\langle g, \mathrm{Ric}_f - \frac{\lambda}{2\tau}g\right\rangle + \Delta_f f,$$

我们证明了:

$$
\begin{aligned}
(2.16)\qquad & \frac{d}{dt}\mathbb{W}_\lambda(g,f,\psi,\tau) \\
&= \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\int_M \left\{ \left\langle \tau\dot{g} - \dot{\tau}g,\, \mathrm{Ric}_f - \frac{\lambda}{2\tau}g \right\rangle \right. \\
&\qquad + \left\langle \dot{g},\, -2\,\mathrm{div}_f T_\psi - 4\mathrm{Re}\langle \nabla\psi\otimes\nabla\psi\rangle - \mathrm{Ric}_f\,|\psi|^2 + \nabla\nabla\,|\psi|^2 \right\rangle \\
&\qquad - \left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(\dot{g}) - \dot{f} - \frac{n\dot{\tau}}{2\tau}\right)(\tau R_f + \lambda(f-n-1)) \\
&\qquad \left. + 4\mathrm{Re}\left\langle D_f^2\psi,\, \left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(\dot{g}) - \dot{f} - \frac{n\dot{\tau}}{2\tau}\right)\psi + 2\dot{\psi} \right\rangle \right\} e^{-f}d\mu.
\end{aligned}
$$

接下来我们化简被积函数中的第二项。式 (2.16) 中的下列一项

$$
\left\langle \dot{g},\, -2\,\mathrm{div}_f T_\psi - 4\mathrm{Re}\langle \nabla\psi\otimes\nabla\psi\rangle - \mathrm{Ric}_f\,|\psi|^2 + \nabla\nabla\,|\psi|^2 \right\rangle
$$

通过以下恒等式与 $D_f\psi$ 密切相关（见 [3] 中的式 (2.13)：

$$
\begin{aligned}
(2.17)\qquad \mathrm{div}_f T_\psi(X,Y) &= -\frac{1}{2}\mathrm{Ric}_f(X,Y)\,|\psi|^2 + \frac{1}{2}\nabla_X\nabla_Y\,|\psi|^2 - 2\mathrm{Re}\langle \nabla_X\psi, \nabla_Y\psi\rangle \\
&\quad + \mathrm{Re}\langle D_f\psi, X\cdot\nabla_Y\psi + Y\cdot\nabla_X\psi\rangle + \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g
\end{aligned}
$$

其中， V 是 M 中由式 (2.11) 定义的向量场。

结合式 (2.16)、(2.17) 和 (2.12) 的所有结果，我们完成了式 (2.10) 的证明 □

2.2. **关于 S 和 V的更多内容**。我们将在关于 ψ 的一些特殊假设下，进一步探讨张量 S 和向量场 V。以下观察很有用：

引理 2.4。对于任意实向量场 X 和旋量 ψ，我们有

$$
\mathrm{Re}\langle X\cdot\psi, \psi\rangle = 0
$$

证明。

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{Re}\langle X\cdot\psi,\psi\rangle &= \langle X\cdot\psi,\psi\rangle + \overline{\langle X\cdot\psi,\psi\rangle} \\
&= \langle X\cdot\psi,\psi\rangle + \langle\psi, X\cdot\psi\rangle \\
&= -\langle\psi, X\cdot\psi\rangle + \langle\psi, X\cdot\psi\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

引理 2.5. 若 ψ 是 D 或 D_f 的特征旋量，且对应实特征值 β，则有

$$
\mathrm{Tr}_g S_{g,f,\psi} = 2\beta^2\,|\psi|^2\,.
$$

证明。注意到张量 S 的迹为：

$$
\mathrm{Tr}_g S_{g,f,\psi} = \sum_i S_{g,f,\psi}(e_i,e_i) = \mathrm{Re}\langle D_f\psi, e_i\cdot\nabla_{e_i}\psi + e_i\cdot\nabla_{e_i}\psi\rangle = \mathrm{Re}\langle D_f\psi, 2D\psi\rangle.
$$

若对于某个 $\beta\in\mathbb{R}$有 $D\psi = \beta\psi$，则

$$
\mathrm{Re}\langle D_f\psi, 2D\psi\rangle = \mathrm{Re}\left\langle \beta\psi - \frac{1}{2}\nabla f\cdot\psi, 2\beta\psi\right\rangle = 2\beta^2\,|\psi|^2\,.
$$

类似地，若 $D_f\psi = \beta\psi$。

□

若旋量 ψ满足存在常数 $\mu\in\mathbb{R}$，使得对于任意实向量场 X都有 $\nabla_X\psi = \mu X\cdot\psi$，则称其为 Killing 旋量。特别地，若 $\mu = 0$，则称 ψ 为平行旋量。若 ψ 是 Killing 旋量，则 S-张量可表示为度量 g的形式：

引理 2.6. 假设存在一个常数 $\mu\in\mathbb{R}$，使得 $\nabla_X\psi = \mu X\cdot\psi$ 对任意向量场X 都成立（即 ψ 是 *Killing* 旋量），那么我们有

$$
S_{g,f,\psi} = 2\mu^2 n\,|\psi|^2\,g
$$

证明. 根据给定条件 $\nabla_X\psi = \mu X\cdot\psi$，我们有

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \mathrm{Re}\langle D_f\psi, X\cdot\nabla_Y\psi + Y\cdot\nabla_X\psi\rangle \\ &= \mathrm{Re}\left\langle \sum_k e_k\cdot\nabla_{e_k}\psi - \frac{1}{2}\nabla f\cdot\psi, \mu(X\cdot Y + Y\cdot X)\cdot\psi\right\rangle \\ &= \mathrm{Re}\left\langle \sum_k e_k\cdot\mu e_k\cdot\psi - \frac{1}{2}\nabla f\cdot\psi, -2\mu g(X,Y)\psi\right\rangle \\ &= \mathrm{Re}\left\langle -\mu n\psi - \frac{1}{2}\nabla f\cdot\psi, -2\mu g(X,Y)\psi\right\rangle \end{aligned}$$

S由于 ∇f 是一个实向量场，根据引理 2.4，我们有 $2\mathrm{Re}\langle\nabla f\cdot\psi,\ \psi\rangle = 0$。由此可得

$$S(X,Y) = 2\mu^2 n\left|\psi\right|^2 g(X,Y).$$

□

ˆ ˆ 值得注意的是，如果 ψ是一个 f-加权调和旋量，即 $D_f\psi = 0$，那么根据 (2.11) 我们有 $V = 0$。更一般地，如果 ψ 是f-加权狄拉克算子 D_f的一个特征旋量，同样的结论也成立。

引理 2.7。 如果 $\psi\in\mathcal{J}$ 是 D_f 的一个特征旋量，其特征值为 β，那么在 (2.11) 中定义的向量场 V 处处为零:

$$V = \sum_{i=1}^n \mathrm{Re}\langle\psi,\, e_i\cdot D_f\psi\rangle e_i = 0.$$

证明。 直接由引理 2.4 得出。 □

如果 ψ 是一个 Killing 旋量，那么我们可以证明 V 与梯度 ∇f平行。

引理 2.8. 假设存在一个常数 $\mu\in\mathbb{R}$，使得对于任意向量场 X 都有 $\nabla_X\psi = \mu X\cdot\psi$ （即 ψ 是一个 *Killing* 旋量），那么我们有

$$V = \left|\psi\right|^2\nabla f.$$

证明。

$$\begin{aligned} e_i\cdot D_f\psi &= e_i\cdot\Big(\sum_k e_k\cdot\nabla_{e_k}\psi - \frac{1}{2}\nabla f\cdot\psi\Big) \\ &= \mu\sum_k e_i\cdot e_k\cdot e_k\cdot\psi - \frac{1}{2}\sum_k(\nabla_k f)e_i\cdot e_k\cdot\psi \\ &= -\mu n e_i\cdot\psi - \frac{1}{2}\sum_k(\nabla_k f)e_i\cdot e_k\cdot\psi \end{aligned}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\langle\psi, e_i\cdot D_f\psi\rangle \\ &= \underbrace{\mathrm{Re}\langle\psi, -\mu n e_i\cdot\psi\rangle}_{=0\text{ by Lemma 2.4}} - \frac{1}{2}\sum_k(\nabla_k f)\mathrm{Re}\langle\psi, e_i\cdot e_k\cdot\psi\rangle \\ &= -\frac{1}{2}\sum_k(\nabla_k f)\left(\langle\psi, e_i\cdot e_k\cdot\psi\rangle + \langle e_i\cdot e_k\cdot\psi,\psi\rangle\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_k(\nabla_k f)\left(\langle\psi, e_i\cdot e_k\cdot\psi\rangle + \langle\psi, e_k\cdot e_i\cdot\psi\rangle\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_k(\nabla_k f)\langle\psi, -2\delta_{ik}\psi\rangle = \left|\psi\right|^2\nabla_i f \end{aligned}$$

这就证明了我们的结果。

□

3. Euler-Lagrange's Equations and Spinorial Ricci Flow

3.1. 欧拉-拉格朗日方程。 在上一节推导出 $\mathbb{W}_\lambda$-泛函的一阶变分公式后，接下来我们讨论下文所述一些自然约束下的欧拉-拉格朗日方程。

对于任意黎曼度量 g、函数 f 和正常数 τ，记

$$d\Omega_{g,f,\tau} := e^{-f}(4\pi\tau)^{-n/2}d\mu_g.$$

若 g、f、τ由上下文可知，我们就简记为 $d\Omega$。

定义以下函数与旋量空间:

$$\mathcal{I}_{g,\psi,\tau} := \left\{ f \in C^\infty(M,\mathbb{R}) : \int_M d\Omega_{g,f,\tau} = 1 \right\}$$

$$\mathcal{J}_{g,f,\tau,c} := \left\{ \psi \in \Gamma^\infty(\Sigma M) : \int_M |\psi|^2 \, d\Omega_{g,f,\tau} = c \right\}$$

若 g、f、ψ、τ、c由上下文可知，我们就简记为 $\mathcal{I}$和 $\mathcal{J}$。

于是，我们求出满足约束 $f \in \mathcal{I}_{g,\ \psi,\ \tau}$ 和 $\psi \in \mathcal{J}_{g,\ f,\ \tau,\ c}$的 $\mathbb{W}_\lambda$ 的临界点。注意到以下事实很有用:

$$\frac{\partial}{\partial t} d\Omega_{g,f,\tau} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(\dot{g}) - \dot{f} - \frac{n\dot{\tau}}{2\tau} \right) d\Omega_{g,f,\tau}. \tag{3.1}$$

因此，我们有

$$\frac{d}{dt}\int_M d\Omega_{g,f,\tau} = \int_M \left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(\dot{g}) - \dot{f} - \frac{n\dot{\tau}}{2\tau} \right) d\Omega_{g,f,\tau}, \tag{3.2}$$

$$\frac{d}{dt}\int_M |\psi|^2 \, d\Omega_{g,f,\tau} = \int_M \left\{ 2\mathrm{Re}\langle\dot{\psi},\psi\rangle + \left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(\dot{g}) - \dot{f} - \frac{n\dot{\tau}}{2\tau} \right) |\psi|^2 \right\} d\Omega_{g,f,\tau}. \tag{3.3}$$

N接下来，我们使用拉格朗日乘子法求出欧拉-拉格朗日方程 of $\mathbb{W}_\lambda$ 满足约束 $f \in \mathcal{I}$和 $\psi \in \mathcal{J}$。

由 (2.10)、(3.2) 和 (3.3)，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathbb{W}_\lambda - \alpha\frac{d}{dt}\int_M d\Omega - \beta\frac{d}{dt}\int_M |\psi|^2 \, d\Omega \\
&= \int_M \left\{ \left\langle \tau\dot{g} - \dot{\tau}g,\ \mathrm{Ric}_f - \frac{\lambda}{2\tau}g \right\rangle - \langle \dot{g}, \mathcal{L}_V g + 2S\rangle + 8\mathrm{Re}\left\langle \dot{\psi}, D_f^2\psi - \frac{\beta}{4}\psi \right\rangle \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(\dot{g}) - \dot{f} - \frac{n\dot{\tau}}{2\tau} \right) \underbrace{\left(4\mathrm{Re}\langle D_f^2\psi,\psi\rangle - \beta|\psi|^2 - \tau R_f - \lambda(f-n-1) - \alpha \right)}_{(*)} \right\} d\Omega.
\end{aligned}$$

因此，假设 $\tau > 0$ 为常数（即 $\dot{\tau} = 0$），则满足约束 $f \in \mathcal{I}$和 $\psi \in \mathcal{J}$的 $\mathbb{W}_\lambda$ 的欧拉-拉格朗日方程为:

$$\begin{aligned}
\tau\left(\mathrm{Ric}_f - \frac{\lambda}{2\tau}g \right) - \mathcal{L}_V g - 2S + \frac{(*)}{2}g &= 0 \\
D_f^2\psi &= \frac{\beta}{4}\psi \\
\underbrace{\tau R_f + \lambda(f-n-1) + \alpha + \beta|\psi|^2 - 4\mathrm{Re}\langle D_f^2\psi,\psi\rangle}_{=(*)} &= 0
\end{aligned}$$

化简后，我们得到如下结果:

命题 3.1。 固定 $\tau > 0$。在约束条件 $f \in \mathcal{I}$和 $\psi \in \mathcal{J}$下， $\mathbb{W}_\lambda(g,f,\psi,\tau)$ 的欧拉-拉格朗日方程为:

$$\mathrm{Ric} + \mathcal{L}_{\frac{1}{2}\nabla f - \frac{1}{\tau}V} g - \frac{2}{\tau}S - \frac{\lambda}{2\tau}g = 0, \qquad D_f^2\psi = \frac{\beta}{4}\psi, \qquad \tau R_f + \lambda(f-n) = \lambda - \alpha, \tag{3.4}$$

其中， S 和 V 分别是在(2.12) 和(2.11) 中定义的张量场和向量场。因此，若(g,f,ψ) 是一个临界点，则 g是一个"扭曲的"里奇孤子，而 ψ是 D_f^2的特征旋量。

注记 3.2. 利用约束 $f \in \mathcal{I}$和 $\psi \in \mathcal{J}$，还可以证明

$$\beta = \frac{4}{c}\int_M |D_f\psi|^2 \, d\Omega, \qquad\qquad \mathbb{W}_\lambda = \beta c - \lambda + \alpha.$$

注记 3.3. 我们将临界点的度量 g 称为“扭曲”里奇孤子，这是因为式 (3.4) 中存在 S-张量项。

备注 3.4（从 $L^2(d\Omega)$-约束到单位旋量丛）。 在命题 3.1 中，我们施加了全局约束 $\psi \in J_{g,\ f,\ \tau,\ c}$，即

$$\int_M |\psi|^2 \, d\Omega_{g,f,\tau} = c,$$

这导出了特征旋量方程 $D_f^2\psi = \frac{\beta}{4}\psi$。 –

对于演化问题，在分析上（并且在旋量流文献 [1]中也是标准做法）有利于在单位旋量丛上开展研究，即施加更强的逐点约束$|\psi|^2 \equiv c$。除了消除旋量变量中的缩放方向外，这一归一化还为我们接下来引入的耦合流带来了两个关键的分析后果。

(1) 投影欧拉–拉格朗日方程。 如果在单一归一化条件 $\int_M d\Omega_{g,\ f,\ \tau} = 1$下，对 $\mathbb{W}_\lambda$ 重复一阶变分论证，但将变化限制在与 $\{|\psi|^2 \equiv c\}$ 相切的方向上（从而实部$\langle \psi,\ \psi\rangle = 0$ 逐点成立），那么旋量欧拉–拉格朗日方程就是将$D_f^2\psi$ 正交投影到 $\psi^\perp$上的结果。利用带权 Weitzenb¨ock 公式（1.3），这等价于

$$\Delta_f \psi + \frac{|\nabla\psi|^2}{c}\,\psi = 0,$$

这与流（3.7）的 ψ 分量的驻定方程一致。

(2) 最高阶系数的统一控制以及 f 的抛物性区域。点态约束 $|\psi|^2 \equiv c$ 也固定了第4节规范固定系统中的最高阶系数。特别地，记

$$V_f \;=\; U + \frac{c}{2}\nabla f, \qquad U := \sum_i \mathrm{Re}\langle \psi,\, e_i \cdot D\psi\rangle\, e_i,$$

我们得到

$$\frac{2}{\tau}\,\mathrm{div}(V_f) = \frac{c}{\tau}\,\Delta f + \frac{2}{\tau}\,\mathrm{div}(U),$$

因此， f 方程的主二阶部分变为

$$-\Delta f + \frac{2}{\tau}\mathrm{div}(V_f) = -\Big(1 - \frac{c}{\tau}\Big)\Delta f + (\text{lower order terms}).$$

因此，经过 DeTurck 规范固定后，当 $c < \tau$ 时，标量方程一致向后抛物型；当 $c > \tau$ 时，方程一致向前抛物型（在 $c = \tau$ 处退化）。在全前向区域 $c > \tau$ 中，规范固定系统在所有变量（g、f、ψ）上成为向前拟线性抛物型演化，而下文命题 3.6 的单调性恒等式表明， $\mathbb{W}_\lambda$ 是这一向前抛物型类梯度流的真正 Lyapunov 泛函。这种向前抛物型视角表明，诸如 ´Lojasiewicz–Simon 不等式等动力学工具，或可用于临界点附近的稳定性与收敛性分析；与之相对，在经典 Perelman 情形中， f 方程是向后抛物型。

总而言之，下面介绍的流可以看作约束空间上 $\mathbb{W}_\lambda$ 的负 L^2-梯度流

$$\Big\{(g, f, \psi) : \int_M d\Omega_{g,f,\tau} = 1,\ \ |\psi|^2 \equiv c\Big\}.$$

3.2. 旋量 Ricci 流。 受上述讨论以及 Ammann– Weiß–Witt [1] 的旋量流启发（正则性结果另见 He–Wang [5] ），我们引入以下耦合演化方程组。该流旨在保持归一化 $\int_M d\Omega_{g,\ f,\ \tau} = 1$ 并且在 $|\psi_0|^2 \equiv c$ 逐点成立的条件下，使演化始终处于单位旋量丛 $|\psi(t)|^2 \equiv c$ 内（因此也处于 $\int_M |\psi(t)|^2\, d\Omega_{g,\ f,\ \tau} = c$ 内）。泛函 $\mathbb{W}_\lambda(g,\ f,\ \psi,\ \tau)$ 沿该流单调递减。此外，在 $c > \tau$ 的范围内，DeTurck 规范固定系统是完全向前抛物型的，因此 $\mathbb{W}_\lambda$ 是向前抛物演化的 Lyapunov 泛函，这可能有助于未来的稳定性与收敛性分析。

定义 3.5（旋量 Ricci 流）。 在黎曼自旋流形 $(M^n,\ g_0)$ 上，我们考虑以下方程组，称为旋量 *Ricci* 流，其初始条件为 $(g_0,\ f_0,\ \psi_0)$，满足 $|\psi_0|^2 \equiv c$，且 $\tau > 0$ 固定：

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\left(\mathrm{Ric} + \mathcal{L}_{\frac{1}{2}\nabla f - \frac{1}{\tau}V_f} g - \frac{2}{\tau} S_{g,f,\psi} - \frac{\lambda}{2\tau} g\right) \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Delta f - R + \frac{\lambda n}{2\tau} + \frac{4}{\tau}\mathrm{Tr}_g S + \frac{2}{\tau}\,\mathrm{div}\, V_f \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta_f \psi + \frac{|\nabla\psi|^2}{|\psi|^2}\psi \tag{3.7}$$

命题 3.6。 只要解存在，就有

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\mathbb{W}_\lambda(g,f,\psi,\tau) \\ &= -\int_M \left(2\tau\left|\mathrm{Ric} + \mathcal{L}_{\frac{1}{2}\nabla f - \frac{1}{\tau}V_f} g - \frac{2}{\tau}S - \frac{\lambda}{2\tau}g\right|^2 + 8\left|\Delta_f\psi + \frac{|\nabla\psi|^2}{|\psi|^2}\psi\right|^2\right) d\Omega \le 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

因此， $\mathbb{W}_\lambda$ 单调递减，并且当且仅当（g、f、ψ）是由下式给出的“扭曲”里奇孤子时保持不变：

$$\left(1 - \frac{c}{\tau}\right)\mathrm{Ric}_f - \frac{\lambda}{2\tau} g = \frac{2}{\tau}\,\mathrm{div}_f T_\psi + \frac{4}{\tau}\mathrm{Re}\langle \nabla\psi \otimes \nabla\psi\rangle$$

并且 ψ 满足 $\Delta_f\psi + \frac{|\nabla\psi|^2}{c}\psi = 0$。

证明。 利用恒等式 $\Delta_f|\psi|^2 = 2\text{实部}\langle\Delta_f\psi,\ \psi\rangle + 2|\nabla\psi|^2$ 以及 Weitzenb¨ock 恒等式，我们得到

$$\begin{aligned} &8\mathrm{Re}\langle D_f^2\psi,\ \dot\psi\rangle \\ &= -8\mathrm{Re}\langle\Delta_f\psi,\ \dot\psi\rangle + R_f\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 \\ &= -8\mathrm{Re}\left\langle \Delta_f\psi + \frac{|\nabla\psi|^2}{|\psi|^2}\psi,\ \dot\psi\right\rangle + \left(\frac{4|\nabla\psi|^2}{|\psi|^2} + R_f\right)\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

接下来，我们注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 &= 2\mathrm{Re}\langle\dot\psi,\psi\rangle \\ &= 2\mathrm{Re}\langle\Delta_f\psi,\psi\rangle + \frac{|\nabla\psi|^2}{|\psi|^2}2\mathrm{Re}\langle\psi,\psi\rangle \\ &= \Delta_f|\psi|^2. \end{aligned}$$

因此，如果 $|\psi|^2 \equiv c$ 在 $t = 0$，则只要流存在，$|\psi|^2 \equiv c$。从而，

$$8\mathrm{Re}\langle D_f^2\psi,\ \dot\psi\rangle = -8\left|\Delta_f\psi + \frac{|\nabla\psi|^2}{|\psi|^2}\psi\right|^2. \tag{3.10}$$

结合（2.10），我们证明了单调性公式（3.8）。

N此外，由单调性公式可知，当且仅当（g，f，ψ）满足 es

$$\mathrm{Ric} + \mathcal{L}_{\frac{1}{2}\nabla f - \frac{1}{\tau}V_f} g - \frac{2}{\tau}S - \frac{\lambda}{2\tau}g = 0, \quad \text{and} \quad \Delta_f\psi + \frac{|\nabla\psi|^2}{|\psi|^2}\psi = 0.$$

将（2.17）与 $|\psi|^2 \equiv c$ 代入上面的第一个恒等式，我们得到

$$\left(1 - \frac{c}{\tau}\right)\mathrm{Ric}_f - \frac{\lambda}{2\tau} g = \frac{2}{\tau}\,\mathrm{div}_f T_\psi + \frac{4}{\tau}\mathrm{Re}\langle \nabla\psi \otimes \nabla\psi\rangle.$$

□

引理 3.7. 设 (g, f, ψ) 是 $\mathbb{W}_\lambda$ 的一个临界点。那么

$$\int_M R_f d\Omega = \frac{n\lambda}{2\tau} + \frac{4}{\tau}\int_M |D_f\psi|^2 d\Omega$$

$$and \quad \left(1 - \frac{c}{\tau}\right)\int_M |D_f\psi|^2 d\Omega = \frac{nc\lambda}{8\tau} + \int_M |\nabla\psi|^2 d\Omega.$$

证明. 对第一个扭曲里奇孤子方程取迹，并注意到 $\mathrm{tr}(\mathrm{Ric}_f) = R + \Delta f = R_f - \Delta_f f$，然后积分，得到

$$\left(1 - \frac{c}{\tau}\right) \int_M R_f d\Omega - \frac{n\lambda}{2\tau} = \frac{4}{\tau} \int_M |\nabla \psi|^2 d\Omega.$$

接下来，我们有

$$\int_M |\nabla \psi|^2 d\Omega = \int_M |D_f \psi|^2 d\Omega - \frac{c}{4} \int_M R_f d\Omega.$$

这推出以下恒等式。 □

推论 3.8. 设(g, f, ψ) 是约束空间上 $\mathbb{W}_\lambda$ 的一个临界点

$$\left\{(g, f, \psi) : \int_M d\Omega_{g,f,\tau} = 1,\ |\psi|^2 \equiv c\right\},$$

其中 $\tau > 0$ 固定且 $c > 0$。那么，引理 *3.7* 中的恒等式推出:

(i) **(**完全前向抛物型区域 $c > \tau$.**)** 必有 $\lambda \leq 0$。此外，若$\lambda = 0$ ，则

$$\nabla \psi \equiv 0 \qquad and \qquad D_f \psi \equiv 0.$$

特别地， $\nabla f \equiv 0$，因此 Ric_f =Ric；代入驻定方程可得Ric $\equiv 0$。因此，全前向区域中的稳态临界点只能是具有平行旋量且 f 为常数的里奇平坦解。

(ii) **(**退化区间 $c = \tau$。）必有 $\lambda \leq 0$，事实上

$$\int_M |\nabla \psi|^2 \, d\Omega \ = \ -\frac{n}{8} \lambda.$$

特别地，若 $\lambda = 0$ ，则 $\nabla \psi \equiv 0$。

(iii) **(**反向—正向区间 $c < \tau$。）有恒等式

$$\int_M |D_f \psi|^2 \, d\Omega = \frac{1}{1 - \frac{c}{\tau}} \left(\frac{nc\lambda}{8\tau} + \int_M |\nabla \psi|^2 \, d\Omega \right),$$

因此，必要条件为

$$\frac{nc\lambda}{8\tau} + \int_M |\nabla \psi|^2 \, d\Omega \ \geq \ 0.$$

特别地，若 $\lambda > 0$ （收缩子符号），则

$$\int_M |D_f \psi|^2 \, d\Omega \ \geq \ \frac{nc\lambda}{8(\tau - c)} \ > \ 0.$$

*I*尤其是，收缩型临界点（$\lambda > 0$）只能出现在后向–前向区域 *e* $c < \tau$，绝不会出现在全前向区域 $c > \tau$ （退化情形 $c = \tau$亦然）。

证明。设

$$A := \int_M |D_f \psi|^2 \, d\Omega \geq 0, \qquad B := \int_M |\nabla \psi|^2 \, d\Omega \geq 0.$$

由引理 3.7 可得

$$\left(1 - \frac{c}{\tau}\right) A = \frac{nc\lambda}{8\tau} + B.$$

若 $c > \tau$，则 $1 - \frac{c}{\tau} < 0$，因此左端为 ≤ 0，故右端为 ≤ 0，这迫使 $\lambda \leq 0$。若进一步有 $\lambda = 0$，则 $\left(1 - \frac{c}{\tau}\right) A = B$ 的系数为负，从而迫使 $A = B = 0$，即 $\nabla \psi \equiv 0$ 且 $D_f \psi \equiv 0$。由于 $\nabla \psi \equiv 0$ 蕴含 $D\psi \equiv 0$，我们有 $0 = D_f \psi = D\psi - \frac{1}{2} \nabla f \cdot \psi = -\frac{1}{2} \nabla f \cdot \psi$；又因为 $|\psi|^2 \equiv c > 0$，这意味着 $\nabla f \equiv 0$。当 $\lambda = 0$时，定常度量方程遂化为 Ric $\equiv 0$ 。

若 $c = \tau$，则同一恒等式化简为 $0 = \frac{nc\lambda}{8\tau} + B$，得到 $\lambda \leq 0$ 和 $B = -\frac{nc\lambda}{8\tau} = -\frac{n}{8}\lambda$，因此当 $\lambda = 0$ 时有 $\nabla \psi \equiv 0$ 。

若 $c < \tau$，则 $1 - \frac{c}{\tau} > 0$，解出 A 即可得到所述公式和不等式 $\frac{nc\lambda}{8\tau} + B \geq 0$。若 $\lambda > 0$，则 $A \geq \frac{1}{1 - c/\tau} \cdot \frac{nc\lambda}{8\tau} = \frac{nc\lambda}{8(\tau - c)}$。□

4. Short-time existence and uniqueness of Spinorial Ricci flow

接下来，我们将证明上一节所引入的旋量里奇流的短时间存在性与唯一性。

定理 4.1（短时间存在性与唯一性）。设（M, g_0）为闭黎曼旋量流形。固定 $\tau > 0$、一个光滑函数 f_0: $M \to \mathbb{R}$，以及一个长度为常数的旋量 $\psi_0 \in \mathcal{S}\,|\psi_0|^2 \equiv c$。

（i）（后向—前向抛物型区域。）若 $c < \tau$，则存在 $\varepsilon = \varepsilon(g_0, f_0, \psi_0, \tau) > 0$，使得旋量里奇流方程组 (3.5)–(3.7) 在 $t \in [0, \varepsilon)$ 上存在唯一解 $(g(t)\ f(t)\ \psi(t))$，满足

$$g(0) = g_0, \qquad \psi(0) = \psi_0, \qquad f(\varepsilon) = f_0.$$

在此情形下，经过 *DeTurck* 规范固定后，(g, ψ) 方程为一致向前抛物型，而 f 方程为一致后向抛物型。

（ii）（完全前向抛物型区域。）若 $c > \tau$，则存在 $\varepsilon = \varepsilon(g_0, f_0, \psi_0, \tau) > 0$，使得旋量里奇流方程组 (3.5)–(3.7) 在 $t \in [0, \varepsilon)$ 上存在唯一解 $(g(t)\ f(t)\ \psi(t))$，满足

$$g(0) = g_0, \qquad f(0) = f_0, \qquad \psi(0) = \psi_0.$$

在这种情况下，经过 *DeTurck* 规范固定后，方程组在所有变量向前抛物型（g、f、ψ）。

注4.2。$c < \tau$ 与 $c > \tau$ 两种情形的区别反映了流的解析性质发生了实质变化，分别对应混合前向—后向方程组和完全向前抛物型方程组。

我们将在本节余下部分证明这一结论。取 g_0 为固定的背景度量，定义 DeTurck 向量场

$$W(g, g_0)^k = g^{ij}(\Gamma^k_{ij}(g) - \Gamma^k_{ij}(g_0)).$$

注意，若 $|\psi|$ 为常数，则向量场 V_f 由 $V_f^i = $实部$\langle \psi,\ e_i \cdot D\psi\rangle + \frac{1}{2} df(e_i)|\psi|^2$给出。因此，定义向量场 U为 $U =$实部$\langle \psi,\ e_i \cdot D\psi\rangle e_i$。考虑以下规范固定后的方程组:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\mathrm{Ric} + \mathcal{L}_{W(g,g_0)} g + \frac{4}{\tau} S_{g,f,\psi} + \frac{\lambda}{\tau} g \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} = &-\left(1 - \frac{|\psi|^2}{\tau}\right)\Delta f - R + \frac{\lambda n}{2\tau} + \frac{4}{\tau}\mathrm{Tr}_g S_{g,f,\psi} \\ &+ \frac{2}{\tau}\,\mathrm{div}\, U + (1 - \frac{|\psi|^2}{\tau})|\nabla f|^2 + \langle \nabla f, W - \frac{2}{\tau} U\rangle\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta_f \psi + \frac{|\nabla\psi|^2}{|\psi|^2}\psi + (1 - \frac{|\psi|^2}{\tau})\nabla_{\nabla f}\psi + \mathcal{L}^{\mathrm{spin}}_{W - \frac{2}{\tau}U}\psi. \tag{4.3}$$

这里，$\mathcal{L}^{\mathrm{spin}}_X$ 表示沿 X的旋量（Kosmann）李导数:

$$\mathcal{L}^{\mathrm{spin}}_X \psi = \nabla_X \psi - \frac{1}{4}(\nabla_i X_j - \nabla_j X_i) e_i \cdot e_j \cdot \psi.$$

注意，当 $c > \tau$ 时，(4.2) 是向前抛物型；当 $c < \tau$ 时，则是反向抛物型。此外，修改后的流仍在单位旋量丛内演化。事实上，若我们在 M 上逐点以 $|\psi_0|^2 \equiv c > 0$ 为初始条件，那么由度量相容性可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 &= 2\mathrm{Re}\langle \dot{\psi}, \psi\rangle \\ &= 2\mathrm{Re}\langle \Delta_f \psi, \psi\rangle + \frac{|\nabla\psi|^2}{|\psi|^2} 2\mathrm{Re}\langle \psi, \psi\rangle + 2\mathrm{Re}\langle \mathcal{L}^{\mathrm{spin}}_X \psi, \psi\rangle \\ &= \Delta_f |\psi|^2 + X|\psi|^2,\end{aligned} \tag{4.4}$$

因此，只要流存在，$|\psi|^2 \equiv |\psi_0|^2$

4.1. 符号计算。在证明短时存在性之前，我们先计算该方程组的线性算子的主符号。回顾一下， L 阶线性算子的主符号定义如下：

$$\sigma_\xi(L)u = \frac{i^k}{k!}L(f^k u)(x),$$

其中 $f \in C^\infty(M)$ 具有 $f(x) = 0,\ df_x = \xi$。

我们首先回顾

引理 4.3。设 $(\dot{g}, \psi) = (\eta, s)$。则有

$$\sigma_\xi(D_{(g,\psi)}\mathrm{Ric}(g))_{ab}(\eta, s) = \frac{1}{2}|\xi|^2\eta(e_a, e_b) - \frac{1}{2}\Big(\xi_i\xi_a\,\eta(e_b, e_i) + \xi_i\xi_b\,\eta(e_a, e_i) - \xi_a\xi_b\,\mathrm{tr}(\eta)\Big),$$

$$\sigma_\xi(D_{(g,\psi)}R_g)(\eta, s) = |\xi|^2\mathrm{tr}(\eta) - \eta(\xi, \xi),$$

$$\sigma_\xi(D_{(g,\psi)}(\mathcal{L}_{W(g,g_0)}g))_{ab}(\eta, s) = -\Big(\xi_i\xi_a\,\eta(e_b, e_i) + \xi_i\xi_b\,\eta(e_a, e_i) - \xi_a\xi_b\,\mathrm{tr}(\eta)\Big).$$

引理 4.4。设 $(\dot{g}, \psi) = (\eta, s)$。则有

$$\begin{aligned}
\sigma_\xi\left(D_{(g,\psi)}\mathcal{L}_U^{spin}\psi\right)(\eta, s) = &-\frac{1}{16}\sum_{i,a,b}\sum_{j\neq k}\xi_a\xi_j\,\eta(e_i, e_k)\,\mathrm{Re}\langle\psi,\, e_b\cdot e_i\cdot e_j\cdot e_k\cdot\psi\rangle\, e_a\cdot e_b\cdot\psi \\
&+\frac{1}{16}\sum_{i,a,b}\sum_{j\neq k}\xi_b\xi_j\,\eta(e_i, e_k)\,\mathrm{Re}\langle\psi,\, e_a\cdot e_i\cdot e_j\cdot e_k\cdot\psi\rangle\, e_a\cdot e_b\cdot\psi \\
&-\frac{1}{4}\sum_{a,b}\xi_b\,\mathrm{Re}\langle\psi,\, e_a\cdot\xi\cdot s\rangle\, e_a\cdot e_b\cdot\psi + \frac{1}{4}\sum_{a,b}\xi_a\,\mathrm{Re}\langle\psi,\, e_b\cdot\xi\cdot s\rangle\, e_a\cdot e_b\cdot\psi,
\end{aligned}$$

$$\sigma_\xi\left(D_{(g,\psi)}\mathcal{L}^{spin}_{W(g,g_0)}\psi\right)(\eta, s) = -\frac{1}{4}\sum_k\sum_{i\neq j}(\xi_i\xi_k\,\eta(e_j, e_k) - \xi_j\xi_k\eta(e_i, e_k))e_i\cdot e_j\cdot\psi,$$

$$\sigma_\xi\left(D_{(g,\psi)}\Delta_g\psi\right)(\eta, s) = -\frac{1}{4}\sum_i\sum_{j\neq k}\xi_i\xi_j\,\eta(e_i, e_k)e_j\cdot e_k\cdot\psi - |\xi|^2 s,$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\xi\left(D_{(g,\psi)}\,\mathrm{div}_g\,U\right)(\eta, s) = &\frac{1}{4}\sum_i\sum_{j\neq k}\xi_i\xi_j\,\eta(e_i, e_k)\,Re\langle\psi,\, e_j\cdot e_k\cdot\psi\rangle + |\xi|^2\,Re\langle\psi, s\rangle \\
&+\frac{1}{4}|\xi|^2\mathrm{tr}(\eta)\,|\psi|^2 - \frac{1}{4}\eta(\xi, \xi)\,|\psi|^2.
\end{aligned}$$

证明。由于我们最终需要计算主符号，因此只需关注最高阶的线性化。我们有

$$\left(D_{(g,\psi)}\mathcal{L}_U^{\mathrm{spin}}\psi\right)(\eta, s) = \mathcal{L}^{\mathrm{spin}}_{(D_gU)(\eta)}\psi + \mathcal{L}^{\mathrm{spin}}_{(D_\psi U)(s)}\psi + \mathrm{l.o.t.} \tag{4.5}$$

注意， $U^a =$ 实部$\langle\psi,\ e_a\cdot D\psi\rangle$。利用 [AWW 引理 4.12],，我们计算至最高阶，

$$(D_gU^a)(\eta) = \frac{1}{4}\sum_i\sum_{j\neq k}(\nabla_{e_j}\eta)(e_i, e_k)\,\mathrm{Re}\langle\psi,\, e_a\cdot e_i\cdot e_j\cdot e_k\cdot\psi\rangle + \mathrm{l.o.t.} \tag{4.6}$$

这给出

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\mathrm{spin}}_{(D_gU)(\eta)}\psi &= -\frac{1}{4}\sum_{a\neq b}(\nabla_a(D_gU^b(\eta)) - \nabla_b(D_gU^a(\eta)))\,e_a\cdot e_b\cdot\psi + \mathrm{l.o.t.} \\
&= -\frac{1}{16}\sum_{i,a,b}\sum_{j\neq k}(\nabla_{e_a}\nabla_{e_j}\eta)(e_i, e_k)\,\mathrm{Re}\langle\psi,\, e_b\cdot e_i\cdot e_j\cdot e_k\cdot\psi\rangle\, e_a\cdot e_b\cdot\psi \\
&\quad+\frac{1}{16}\sum_{i,a,b}\sum_{j\neq k}(\nabla_{e_b}\nabla_{e_j}\eta)(e_i, e_k)\,\mathrm{Re}\langle\psi,\, e_a\cdot e_i\cdot e_j\cdot e_k\cdot\psi\rangle\, e_a\cdot e_b\cdot\psi + \mathrm{l.o.t.}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

对于其他最高阶项，我们也计算至最高阶，

$$(D_\psi U^a)(s) = \mathrm{Re}\langle\psi,\, e_a\cdot Ds\rangle + \mathrm{l.o.t.} \tag{4.8}$$

这就得到

(4.9)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathrm{spin}}_{(D_\psi U)(s)}\psi &= -\frac{1}{4}\sum_{a\neq b}(\nabla_a(D_\psi U^b(s)) - \nabla_b(D_\psi U^a(s)))\, e_a\cdot e_b\cdot\psi + \text{l.o.t.}\\ &= -\frac{1}{4}\sum_{a\neq b}\mathrm{Re}\langle\psi,\, e_a\cdot\nabla_{e_b}Ds\rangle\, e_a\cdot e_b\cdot\psi + \frac{1}{4}\sum_{a\neq b}\mathrm{Re}\langle\psi,\, e_b\cdot\nabla_{e_a}Ds\rangle\, e_a\cdot e_b\cdot\psi + \text{l.o.t.}\end{aligned}$$

因此,

$$\sigma_\xi\left(D_{(g,\psi)}\mathcal{L}^{\mathrm{spin}}_U\psi\right)(\eta,s) \tag{4.10}$$

$$= -\frac{1}{16}\sum_{i,a,b}\sum_{j\neq k}\xi_a\xi_j\,\eta(e_i,e_k)\,\mathrm{Re}\langle\psi,\, e_b\cdot e_i\cdot e_j\cdot e_k\cdot\psi\rangle\, e_a\cdot e_b\cdot\psi \tag{4.11}$$

$$+\frac{1}{16}\sum_{i,a,b}\sum_{j\neq k}\xi_b\xi_j\,\eta(e_i,e_k)\,\mathrm{Re}\langle\psi,\, e_a\cdot e_i\cdot e_j\cdot e_k\cdot\psi\rangle\, e_a\cdot e_b\cdot\psi \tag{4.12}$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{a,b}\xi_b\,\mathrm{Re}\langle\psi,\, e_a\cdot\xi\cdot s\rangle\, e_a\cdot e_b\cdot\psi + \frac{1}{4}\sum_{a,b}\xi_a\,\mathrm{Re}\langle\psi,\, e_b\cdot\xi\cdot s\rangle\, e_a\cdot e_b\cdot\psi. \tag{4.13}$$

其次,

$$D_{(g,\psi)}(\mathcal{L}^{\mathrm{spin}}_{W(g,g_0)}\psi)(\eta,s) = -\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}(\nabla_i(D_gW^j(\eta)) - \nabla_j(D_gW^i(\eta)))\, e_i\cdot e_j\cdot\psi + \text{l.o.t.},$$

这给出

$$\sigma_\xi(D_{(g,\psi)}(\mathcal{L}^{\mathrm{spin}}_{W(g,g_0)}\psi))(\eta,s) = -\frac{1}{4}\sum_k\sum_{i\neq j}(\xi_i\xi_k\,\eta(e_j,e_k) - \xi_j\xi_k\eta(e_i,e_k))e_i\cdot e_j\cdot\psi.$$

接下来，再次利用 [AWW 引理 4.12]，我们得到

$$D_{(g,s)}(\Delta_g\psi)(\eta,s) = \frac{1}{4}\sum_i\sum_{j\neq k}(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\eta)(e_i,e_k)e_j\cdot e_k\cdot\psi + \Delta_g s + \text{l.o.t.}$$

这给出

$$\sigma_\xi(D_{(g,s)}(\Delta_g\psi))(\eta,s) = -\frac{1}{4}\sum_i\sum_{j\neq k}\xi_i\xi_j\,\eta(e_i,e_k)e_j\cdot e_k\cdot\psi - |\xi|^2 s.$$

最后，注意到

$$\mathrm{div}_g U = \mathrm{Re}\langle\psi, D^2\psi\rangle = -\mathrm{Re}\langle\psi,\Delta\psi\rangle + \frac{1}{4}R\,|\psi|^2$$

因此，使用 $\Delta_g\psi$ 和 R_g的符号，我们得到

$$\begin{aligned}\sigma_\xi(D_{(g,s)}(\,\mathrm{div}_g U))(\eta,s) = \frac{1}{4}\sum_i\sum_{j\neq k}\xi_i\xi_j\,\eta(e_i,e_k)\,\mathrm{Re}\langle\psi,\, e_j\cdot e_k\cdot\psi\rangle + |\xi|^2\,\mathrm{Re}\langle\psi,s\rangle\\ + \frac{1}{4}|\xi|^2\mathrm{tr}(\eta)\,|\psi|^2 - \frac{1}{4}\eta(\xi,\xi)\,|\psi|^2.\end{aligned}$$

□

引理 4.5。 设 $(\dot{g},\dot{\psi}) = (\eta, s)$ 且 实部$\langle\psi, s\rangle = 0$。我们有

(4.14)

$$\operatorname{Re}\left\langle \sigma_\xi \left(D_{(g,\psi)} \mathcal{L}_U^{spin} \psi \right)(\eta, s),\, s \right\rangle = -\frac{1}{8}|\psi|^2 \operatorname{Re}\langle \psi,\, c(\eta(\xi,\cdot)\wedge\xi)\, s\rangle + \frac{1}{2}\sum_a \operatorname{Re}\langle \psi,\, e_a\cdot\xi\cdot s\rangle^2,$$

$$\operatorname{Re}\left\langle \sigma_\xi \left(D_{(g,\psi)} \mathcal{L}_{W(g,g_0)}^{spin} \psi \right)(\eta, s),\, s \right\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\langle \psi,\, c(\eta(\xi,\cdot)\wedge\xi) s\rangle.$$

$$\operatorname{Re}\left\langle \sigma_\xi \left(D_{(g,\psi)} \Delta_g \psi \right)(\eta, s),\, s \right\rangle = -\frac{1}{4}\operatorname{Re}\langle \psi,\, c(\eta(\xi,\cdot)\wedge\xi) s\rangle - |\xi|^2|s|^2,$$

$$\left\langle \sigma_\xi \left(D_{(g,\psi)} \operatorname{div}_g U \right)(\eta, s),\, h \right\rangle = \frac{1}{4}|\xi|^2 \operatorname{tr}(\eta)\, h\, |\psi|^2 - \frac{1}{4}\eta(\xi,\xi)\, h\, |\psi|^2.$$

证明。 注意到

$$\begin{aligned} e_i\cdot e_k &= \frac{1}{2}(e_i\cdot e_k + e_k\cdot e_i) + \frac{1}{2}(e_i\cdot e_k - e_k\cdot e_i) \\ &= -\delta_{ik} + \frac{1}{2}(e_i\cdot e_k - e_k\cdot e_i). \end{aligned}$$

利用 η 的对称性，我们得到

$$\begin{aligned} &-\sum_i \sum_{j\neq k} \xi_a\xi_j\, \eta(e_i,e_k) \operatorname{Re}\langle \psi,\, e_b\cdot e_i\cdot e_j\cdot e_k\cdot\psi\rangle \\ &= \sum_i \sum_{j\neq k} \xi_a\xi_j\, \eta(e_i,e_k) \operatorname{Re}\langle \psi,\, e_b\cdot e_i\cdot e_k\cdot e_j\cdot\psi\rangle \\ &= \sum_{i,j,k} \xi_a\xi_j\, \eta(e_i,e_k) \operatorname{Re}\langle \psi,\, e_b\cdot e_i\cdot e_k\cdot e_j\cdot\psi\rangle - \sum_{i,j} \xi_a\xi_j\, \eta(e_i,e_j) \operatorname{Re}\langle \psi,\, e_b\cdot e_i\cdot e_j\cdot e_j\cdot\psi\rangle \\ &= -\sum_j \xi_a\xi_j \operatorname{tr}(\eta) \operatorname{Re}\langle \psi,\, e_b\cdot e_j\cdot\psi\rangle + \xi_a \operatorname{Re}\langle \psi,\, e_b\cdot\eta(\xi,\cdot)\cdot\psi\rangle \\ &= \xi_a\xi_b \operatorname{tr}(\eta)|\psi|^2 - \xi_a\, \eta(\xi,e_b)|\psi|^2. \end{aligned}$$

最后一行由以下性质得出

$$\operatorname{Re}\langle \psi,\, e_b\cdot e_j\cdot\psi\rangle = -\delta_{jb}|\psi|^2.$$

这给出

$$\begin{aligned} &-\sum_{i,a,b}\sum_{j\neq k} \xi_a\xi_j\, \eta(e_i,e_k) \operatorname{Re}\langle \psi,\, e_b\cdot e_i\cdot e_j\cdot e_k\cdot\psi\rangle\, e_a\cdot e_b\cdot\psi \\ &= \sum_{a,b} \left(\xi_a\xi_b \operatorname{tr}(\eta)|\psi|^2 - \xi_a\, \eta(\xi,e_b)|\psi|^2 \right) e_a\cdot e_b\cdot\psi \\ &= -|\psi|^2|\xi|^2 \operatorname{tr}(\eta)\, \psi - |\psi|^2 \xi\cdot\eta(\xi,\cdot)\cdot\psi. \end{aligned} \tag{4.15}$$

接下来，我们有

$$\begin{aligned} &-\xi_b \operatorname{Re}\langle \psi,\, e_a\cdot\xi\cdot s\rangle\, e_a\cdot e_b\cdot\psi + \xi_a \operatorname{Re}\langle \psi,\, e_b\cdot\xi\cdot s\rangle\, e_a\cdot e_b\cdot\psi \\ &= -\operatorname{Re}\langle \psi,\, e_a\cdot\xi\cdot s\rangle\, e_a\cdot\xi\cdot\psi + \operatorname{Re}\langle \psi,\, e_b\cdot\xi\cdot s\rangle\, \xi\cdot e_b\cdot\psi \\ &= 2\operatorname{Re}\langle \psi,\, e_a\cdot\xi\cdot s\rangle\, \xi\cdot e_a\cdot\psi + 2\operatorname{Re}\langle \psi,\, \xi\cdot\xi\cdot s\rangle\psi \\ &= 2\operatorname{Re}\langle \psi,\, e_a\cdot\xi\cdot s\rangle\, \xi\cdot e_a\cdot\psi. \end{aligned} \tag{4.16}$$

这里最后一行由实部$\langle\psi,\ s\rangle = 0$得到。将 (4.15) 和 (4.16) 与恒等式$c(v\wedge w) = \frac{1}{2}(v\cdot w - w\cdot v)$结合可得

$$\sigma_\xi \left(D_{(g,\psi)} \mathcal{L}_U^{\mathrm{spin}} \psi \right)(\eta, s) = \frac{1}{8}|\psi|^2\, c(\eta(\xi,\cdot)\wedge\xi)\, \psi + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\langle \psi,\, e_a\cdot\xi\cdot s\rangle\, \xi\cdot e_a\cdot\psi. \tag{4.17}$$

这就得到了第一个恒等式。对于第二个恒等式，由下式可得

$$\begin{aligned}
&-\sum_k\sum_{i\neq j}(\xi_i\xi_k\,\eta(e_j,e_k)-\xi_j\xi_k\eta(e_i,e_k))\,\mathrm{Re}\langle e_i\cdot e_j\cdot\psi,\,s\rangle\\
&=-\mathrm{Re}\langle\xi\cdot\eta(\xi,\cdot)\cdot\psi,\,s\rangle+\mathrm{Re}\langle\eta(\xi,\cdot)\cdot\xi\cdot\psi,\,s\rangle\\
&=-\mathrm{Re}\langle c(\xi\wedge\eta(\xi,\cdot))\psi,\,s\rangle+\mathrm{Re}\langle c(\eta(\xi,\cdot)\wedge\xi)\psi,\,s\rangle\\
&=-2\mathrm{Re}\langle\psi,\,c(\eta(\xi,\cdot)\wedge\xi)s\rangle.
\end{aligned}$$

对于第三个恒等式，我们有

$$\begin{aligned}
&-\sum_i\sum_{j\neq k}\xi_i\xi_j\,\eta(e_i,e_k)\,\mathrm{Re}\langle e_j\cdot e_k\cdot\psi,\,s\rangle\\
&=-\sum_{i,j,k}\xi_i\xi_j\,\eta(e_i,e_k)\,\mathrm{Re}\langle e_j\cdot e_k\cdot\psi,\,s\rangle+\sum_{i,j}\xi_i\xi_j\,\eta(e_i,e_j)\,\mathrm{Re}\langle e_j\cdot e_j\cdot\psi,\,s\rangle\\
&=-\mathrm{Re}\langle\xi\cdot\eta(\xi,\cdot)\cdot\psi,\,s\rangle-\eta(\xi,\xi)\mathrm{Re}\langle\psi,\,s\rangle\\
&=-\mathrm{Re}\langle c(\xi\wedge\eta(\xi,\cdot))\psi,\,s\rangle\\
&=-\mathrm{Re}\langle\psi,\,c(\eta(\xi,\cdot)\wedge\xi)s\rangle.
\end{aligned}$$

由此得到第三个恒等式。最后，同理可推得

$$\begin{aligned}
&\sum_i\sum_{j\neq k}\xi_i\xi_j\,\eta(e_i,e_k)\,\mathrm{Re}\langle\psi,\,e_j\cdot e_k\cdot\psi\rangle\\
&=\sum_{i,j,k}\xi_i\xi_j\,\eta(e_i,e_k)\,\mathrm{Re}\langle\psi,\,e_j\cdot e_k\cdot\psi\rangle-\sum_{i,j}\xi_i\xi_j\,\eta(e_i,e_j)\,\mathrm{Re}\langle\psi,\,e_j\cdot e_j\cdot\psi\rangle\\
&=\mathrm{Re}\langle\psi,\,\xi\cdot\eta(\xi,\cdot)\cdot\psi\rangle+\eta(\xi,\xi)\,\mathrm{Re}\langle\psi,\,\psi\rangle\\
&=\mathrm{Re}\langle\psi,\,c(\xi\wedge\eta(\xi,\cdot))\psi\rangle\\
&=0.
\end{aligned}$$

由此得到最后一个恒等式。 □

现在，对于每个 $\psi\in\mathcal{S}$，我们将 $A(\psi)^{kl}\in\mathrm{End}(\mathcal{S})$ 定义为

$$A(\psi)^{kl}(s):=(g^{kl}\mathrm{id})\,s+\frac{1}{\tau}\mathrm{Re}\langle\psi,e_a\cdot e_l\cdot s\rangle e_a\cdot e_k\cdot\psi. \tag{4.18}$$

回顾一下

$$-2\mathrm{Ric}(g)+\mathcal{L}_{W(g,g_0)}g=g^{kl}\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l g+\mathcal{Q}(g,\hat{\nabla}g),$$

其中，$\hat{\nabla}$ 是相对于固定背景度量 g_0的协变导数，而 $\mathcal{Q}(g,\hat{\nabla}g)$ 是一个仅取决于 g 的一阶导数的二次项。定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g,f,\psi)&:=-2\mathrm{Ric}(g)+\mathcal{L}_{W(g,g_0)}g+\frac{4}{\tau}S_{g,f,\psi}+\frac{\lambda}{4\tau}g-g^{kl}\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l g\\
&=\mathcal{Q}(g,\hat{\nabla}g)+\frac{4}{\tau}S_{g,f,\psi}+\frac{\lambda}{4\tau}g.\\
\mathcal{G}(g,f,\psi)&:=-R_g+\frac{\lambda n}{2\tau}+\frac{4}{\tau}\mathrm{Tr}_g S_{g,f,\psi}+\frac{2}{\tau}\,\mathrm{div}\,U+(1-\frac{|\psi|^2}{\tau})|\nabla f|^2+\langle\nabla f,W-\frac{2}{\tau}U\rangle\\
\mathcal{H}(g,f,\psi)&:=\Delta_f\psi+\frac{|\nabla\psi|^2}{|\psi|^2}\psi+(1-\frac{|\psi|^2}{\tau})\nabla_{\nabla f}\psi+\mathcal{L}^{\mathrm{spin}}_{W(g,g_0)-\frac{2}{\tau}U}\psi-A(\psi)^{kl}\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l\psi
\end{aligned} \tag{4.19}$$

引理 4.6。 对于任意 $(g、\ f、\ \psi) \in \Gamma(Sym^2(T^*M) \oplus \mathbb{R} \oplus \mathcal{S})$，有

$$\begin{aligned} &\sigma_\xi(D_{(g,f,\psi)}\mathcal{F}(g,f,\psi))(\eta,h,s) = 0, \\ &\sigma_\xi(D_{(g,f,\psi)}\mathcal{H}(g,f,\psi))(\eta,h,s) = \left(\frac{3}{4} - \frac{|\psi_0|^2}{4\tau}\right) c(\eta(\xi,\cdot)\wedge\xi)\psi. \end{aligned} \tag{4.20}$$

换言之，$\mathcal{F}$（$g、\ f、\ \psi$）不含有 $g、\ f、\ \psi$ 的最高阶导数，而 $\mathcal{H}$（$g、\ f、\ \psi$）不含有 $f、\ \psi$ 的最高阶导数。

证明。 我们将方程 (4.1) 和 (4.3) 简写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g &= Q_g(g,f,\psi) \\ \frac{\partial}{\partial t}\psi &= Q_\psi(g,f,\psi). \end{aligned} \tag{4.21}$$

由于 $S(g、\ f、\ \psi)$ 是一阶的，因此有

$$\langle \sigma_\xi(D_{(g,f,\psi)}Q_g)(\eta,h,s),\, \eta\rangle = \langle \sigma_\xi(D(-2\mathrm{Ric}(g) + \mathcal{L}_{\gamma W(g,g_0)}g))(\eta,h,s),\, \eta\rangle = -|\xi|^2|\eta|^2.$$

这意味着 $\sigma_\xi(D_{(g,f,\psi)}\mathcal{F}(g、\ f、\ \psi))(\eta、\ h、\ s) = 0$。接下来，利用引理 4.5，我们有

实部$\langle \sigma_\xi(D_{(g,f,\psi)}Q_\psi)(\eta,h,s)\ \ s\rangle$

$$\begin{aligned} &= \mathrm{Re}\langle \sigma_\xi\left(D\Delta_g\psi\right)(\eta,h,s),\, s\rangle + \mathrm{Re}\left\langle \sigma_\xi\left(D\mathcal{L}^{\mathrm{spin}}_{W(g,g_0)}\psi\right)(\eta,h,s),\, s\right\rangle - \frac{2}{\tau}\,\mathrm{Re}\left\langle \sigma_\xi\left(D\mathcal{L}^{\mathrm{spin}}_{U}\psi\right)(\eta,h,s),\, s\right\rangle \\ &= -\frac{1}{4}\mathrm{Re}\langle \psi,\, c(\eta(\xi,\cdot)\wedge\xi)s\rangle - |\xi|^2|s|^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\langle \psi,\, c(\eta(\xi,\cdot)\wedge\xi)s\rangle \\ &\quad - \frac{2}{\tau}\left(-\frac{1}{8}|\psi|^2\,\mathrm{Re}\langle \psi,\, c(\eta(\xi,\cdot)\wedge\xi)\,s\rangle + \frac{1}{2}\sum_a \mathrm{Re}\langle \psi,\, e_a\cdot\xi\cdot s\rangle^2\right) \\ &= -|\xi|^2|s|^2 - \frac{1}{\tau}\sum_a \mathrm{Re}\langle \psi,\, e_a\cdot\xi\cdot s\rangle^2 - \left(\frac{3}{4} - \frac{|\psi_0|^2}{4\tau}\right)\mathrm{Re}\langle \psi,\, c(\eta(\xi,\cdot)\wedge\xi)s\rangle. \end{aligned}$$

另一方面，根据 $A(\psi)^{kl}$的定义，我们还有

$$\mathrm{Re}\langle \sigma_\xi(D_{(g,f,\psi)}A(\psi)^{kl}\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l\psi)(\eta,h,s),\, s\rangle = -|\xi|^2|s|^2 - \frac{1}{\tau}\sum_a \mathrm{Re}\langle \psi,\, e_a\cdot\xi\cdot s\rangle^2.$$

这意味着 $\sigma_\xi(D_{(g,f,\psi)}\mathcal{H}(g,\ f,\ \psi))(\eta,\ h,\ s) = -\left(\frac{3}{4} - \frac{|\psi_0|^2}{4\tau}\right)$ 实部$\langle \psi,\ c(\eta(\xi,\ \cdot)\wedge\xi)s\rangle$。 □

4.2. 短时存在性的证明。 我们使用不动点论证求解规范固定系统 (4.1)-(4.3)。为此，固定 $(g_0,\ f_0,\ \psi_0)$，使得 $|\psi_0|^2 \equiv c_\circ$ 考虑 $c < \tau$ 的情形，此时 (4.2) 是反向抛物型。对于 $c > \tau$ 的情形，其中 (4.2) 是向前抛物型，其证明完全相同。令 $T > 0$ 稍后选定。我们考虑抛物型 H¨older 空间

$$\mathcal{Y}_T = C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T];\,\mathrm{Sym}^2(T^*M)\oplus\mathbb{R}\oplus\mathcal{S}).$$

此外，令 $\Lambda > 0$ 为一个待选定的固定常数，我们在抛物型 H¨older 空间 $\mathcal{Y}_T$ 中定义闭子集如下:

$$\mathcal{B}_{T,\Lambda} := \{(g,f,\psi)\in\mathcal{Y}_T |\ g(\cdot,0) = g_0,\ \psi(\cdot,0) = \psi_0,\ f(\cdot,T) = f_0 \text{ and } \|(g,f,\psi)\|_{\mathcal{Y}_T} \le \Lambda\}.$$

L引理 4.7。 对于每个 $(\omega,v,\varphi) \in \mathcal{Y}_T$，都存在唯一的 $(g,f,\psi) \in \mathcal{Y}_T$满足该方程组

$$\frac{\partial g}{\partial t} - g_0^{kl}\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l g = (\omega^{kl} - g_0^{kl})\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l\omega + \mathcal{F}(\omega, v, \varphi) \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(1 - \frac{|\psi_0|^2}{\tau}\right)\Delta_{g_0} f = -\left(1 - \frac{|\psi_0|^2}{\tau}\right)(\Delta_g v - \Delta_{g_0} v) + +\mathcal{G}(g, v, \psi) \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - A(\psi_0)^{kl}\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l\psi = (A(\varphi)^{kl} - A(\psi_0)^{kl})\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l\varphi + \mathcal{H}(g, v, \varphi) \tag{4.24}$$

$$g(\cdot, 0) = g_0$$

$$\psi(\cdot, 0) = \psi_0$$

$$f(\cdot, T) = f_0,$$

其中 $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ 定义于 *(4.19)* 中。此外，若 $(\omega, v, \varphi) \in \mathcal{B}_{T,\Lambda}$，则有如下估计

$$\|(g, f, \psi)\|_{\mathcal{Y}_T} \leq K$$

当 $T > 0$ 足够小时，其中 $K = K(\|g_0\|_{2+\alpha;M}, \|f_0\|_{2+\alpha;M}, \|\psi_0\|_{2+\alpha;M})$ 是一个正常数。

证明。由于 (4.22) 是一个线性抛物型方程，因此存在 (4.22) 的唯一解 $g \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T]; \mathrm{Sym}^2(T^*M))$。应用抛物型 Schauder 估计，得到

$$\begin{aligned}
&\|g\|_{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} \\
&\leq C\Big(\|(\omega^{kl} - g_0^{kl})\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l\omega\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} + \|\mathcal{F}(\omega, v, \varphi)\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} + \|g_0\|_{2+\alpha;M}\Big).
\end{aligned}$$

若 $(\omega, v, \varphi) \in \mathcal{B}_{T,\Lambda}$，则利用引理 A.1 可得

$$\begin{aligned}
&\|g\|_{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} \\
&\leq C\Big(\|\omega^{kl} - g_0^{kl}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]}\|\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l\omega\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} + \|\mathcal{F}(g_0, f_0, \psi_0)\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} \\
&\qquad + \|\mathcal{F}(\omega, v, \varphi) - \mathcal{F}(g_0, f_0, \psi_0)\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} + \|g_0\|_{2+\alpha;M}\Big) \\
&\leq C_1(\Lambda)\, T^{\frac{1}{2+\alpha}} + C_2,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

其中 $C_2 = C_2(\|g_0\|_{2+\alpha;M}, \|f_0\|_{2+\alpha;M}, \|\psi_0\|_{2+\alpha;M})$。取 $T > 0$ 足够小，可得

$$\|g\|_{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} \leq 2C_2. \tag{4.26}$$

接下来，在求解 (4.22) 后，由引理 4.6 的证明可知，(4.24) 是一个线性抛物型方程组。因此，根据标准抛物型理论（参见 [7]），存在 (4.24) 的唯一解 $\psi \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T]; \mathcal{S})$。此外，我们可以对 (4.24) 应用抛物型 Schauder 估计：

$$\begin{aligned}
&\|\psi\|_{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} \\
&\leq C\Big(\|(A(\varphi)^{kl} - A(\psi_0)^{kl})\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l\varphi\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} + \|\mathcal{H}(g, v, \varphi)\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} + \|\psi_0\|_{2+\alpha;M}\Big).
\end{aligned}$$

若 $(\omega, v, \varphi) \in \mathcal{B}_{T,\Lambda}$，则利用引理 A.1 可得

$$\begin{aligned}
&\|\psi\|_{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} \\
&\leq C\Big(\|(A(\varphi)^{kl} - A(\psi_0)^{kl}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]}\|\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l\varphi\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} + \|\mathcal{H}(g, f_0, \psi_0)\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} \\
&\qquad + \|\mathcal{H}(g, v, \varphi) - \mathcal{H}(g, f_0, \psi_0)\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} + \|\psi_0\|_{2+\alpha;M}\Big) \\
&\leq C_3(\Lambda)\, T^{\frac{1}{2+\alpha}} + C_4(\|g\|_{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]}, \|f_0\|_{2+\alpha;M}, \|\psi_0\|_{2+\alpha;M}) \\
&\qquad + C_5(\|g\|_{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]}, \Lambda)\, T^{\frac{1}{2+\alpha}}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

将上述估计与 (4.26) 结合，对于充分小的 $T > 0$，我们得到，

$$\|\psi\|_{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} \leq C_6, \tag{4.28}$$

其中 $C_6 = C_6(\|g_0\|_{2+\alpha;M}, \|f_0\|_{2+\alpha;M}, \|\psi_0\|_{2+\alpha;M})$。最后，在求解 (4.22) 和 (4.24) 后，我们看到 (4.23) 是一个线性向后抛物型方程，只要系数有定义，就存在唯一解。对 $f(T-t)$ 应用标准的抛物型 Schauder 估计，并结合 (4.26) 和 (4.28) 应用引理 A.1，我们得到 (

4.29)

$$\begin{aligned}
&\|f\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\\
&\leq C\Big(\|\Delta_{g_0}v-\Delta_g v\|_{\alpha,\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}+C(\|g\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]},\|\psi\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]},\|f_0\|_{2+\alpha;M})\Big)\\
&\leq C_7(\Lambda)\,T^{\frac{1}{2+\alpha}}+C_8(\|g_0\|_{2+\alpha;M},\|f_0\|_{2+\alpha;M},\|\psi_0\|_{2+\alpha;M}).
\end{aligned}$$

因此

$$\|f\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\leq C(\|g_0\|_{2+\alpha;M},\|f_0\|_{2+\alpha;M},\|\psi_0\|_{2+\alpha;M}). \tag{4.30}$$

当 $T>0$ 充分小时。这就证明了该引理。 □

取 $\Lambda > K$，其中 K 是引理 4.7 中给出的常数。根据引理 4.7，我们可以定义映射

$$\mathcal{P}:\mathcal{Y}_T\to\mathcal{Y}_T$$

如下：对于 $(\omega,\ v,\ \varphi)\in\mathcal{Y}_T$，定义 $\mathcal{P}(\omega,\ v,\ \varphi)=(g,\ f,\ \psi)\in\mathcal{Y}_T$为引理 4.7 中所考虑的方程组 (4.22)-(4.24) 的唯一解。此外，引理 4.7 断言，若 $T>0$ 充分小，则 $\mathcal{P}(\mathcal{B}_{T,\ \Lambda})\subset\mathcal{B}_{T,\ \Lambda}$。

引理 4.8。令 $(\omega_1,v_1,\varphi_1),(\omega_2,v_2,\varphi_2)\in\mathcal{B}_{T,\ \Lambda}$。则有如下估计

$$\|\mathcal{P}(\omega_1,v_1,\varphi_1)-\mathcal{P}(\omega_2,v_2,\varphi_2)\|_{\mathcal{Y}_T}\leq C(\Lambda,g_0,f_0,\psi_0)T^{\frac{1}{2+\alpha}}\|(\omega_1,v_1,\varphi_1)-(\omega_2,v_2,\varphi_2)\|_{\mathcal{Y}_T}$$

当 $T>0$ 足够小时。

证明。记 $(g_i,f_i,\psi_i)=\mathcal{P}(\omega_i,v_i,\varphi_i)$，其中 $i=1,2$，并令 $\delta g=g_1-g_2$、$\delta f=f_1-f_2$ 和 $\delta\psi=\psi_1-\psi_2$。则 $(\delta g,\delta f,\delta\psi)$ 满足偏微分方程组

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\delta g}{\partial t}-g_0^{kl}\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l\delta g&=(\omega_1^{kl}-g_0^{kl})\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l(\omega_1-\omega_2)+(\omega_1^{kl}-\omega_2^{kl})\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l\omega_2\\
&\quad+\mathcal{F}(\omega_1,v_1,\varphi_1)-\mathcal{F}(\omega_2,v_2,\varphi_2)
\end{aligned}\tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\delta f}{\partial t}+\left(1-\frac{|\psi_0|^2}{\tau}\right)\Delta_{g_0}\delta f&=-\left(1-\frac{|\psi_0|^2}{\tau}\right)(\Delta_{g_1}-\Delta_{g_0})(v_1-v_2)-\left(1-\frac{|\psi_0|^2}{\tau}\right)(\Delta_{g_1}-\Delta_{g_2})v_2\\
&\quad+\mathcal{G}(g_1,f_1,\psi_1)-\mathcal{G}(g_2,f_2,\psi_2)
\end{aligned}\tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}-A(\psi_0)^{kl}\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l\delta\psi&=(A(\varphi_1)^{kl}-A(\psi_0)^{kl})\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l(\varphi_1-\varphi_2)+(A(\varphi_1)^{kl}-A(\varphi_2)^{kl})\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l\varphi_2\\
&\quad+\mathcal{H}(g_1,v_1,\varphi_1)-\mathcal{H}(g_2,v_2,\varphi_2)\\
\delta g(\cdot,0)&=0\\
\delta\psi(\cdot,0)&=0\\
\delta f(\cdot,T)&=0.
\end{aligned}\tag{4.33}$$

对 (4.31) 应用抛物型 Schauder 估计，得到

$$\begin{aligned}
&\|\delta g\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\\
&\leq C(\Lambda)\Big(\|\omega_1-g_0\|_{\alpha,\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\|\omega_1-\omega_2\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}+\|\omega_1-\omega_2\|_{\alpha,\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\|\omega_2\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\\
&\quad+\|\mathcal{F}(\omega_1,v_1,\varphi_1)-\mathcal{F}(\omega_2,v_2,\varphi_2)\|_{\alpha,\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\Big).
\end{aligned}\tag{4.34}$$

注意到 $\omega_i(\cdot,\ 0)=g_0$，我们可以将引理 A.1 应用于上述 Schauder估计，继而得到

$$\|\delta g\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]} \le C(\Lambda)T^{\frac{1}{2+\alpha}}\|(\omega_1,v_1,\varphi_1)-(\omega_2,v_2,\varphi_2)\|_{\mathcal{Y}_T}. \tag{4.35}$$

接下来注意到，$\mathcal{H}(g,\ v,\ \varphi)$ 取决于 g 的最高阶导数，但对 $v,\ \varphi$ 仅涉及一阶导数。类似地，将引理 A.1 应用于 (4.33) 中的抛物型 Schauder 估计，可得

$$\begin{aligned}&\|\delta\psi\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\\ &\le C(\Lambda)\|\delta g\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}+C(\Lambda)T^{\frac{1}{2+\alpha}}\|(\omega_1,v_1,\varphi_1)-(\omega_2,v_2,\varphi_2)\|_{\mathcal{Y}_T}.\end{aligned} \tag{4.36}$$

这里，(4.36) 右端的额外项 $\|g_1-g_2\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}$ 源于 $\mathcal{H}(g,v,\varphi)$ 对 g 的二阶依赖。将 (4.35) 和 (4.36) 合并，得到

$$\|\delta g\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}+\|\delta\psi\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]} \le C(\Lambda)T^{\frac{1}{2+\alpha}}\|(\omega_1,v_1,\varphi_1)-(\omega_2,v_2,\varphi_2)\|_{\mathcal{Y}_T}. \tag{4.37}$$

最后，将抛物型 Schauder 估计与引理 A.1 应用于 (4.32)，并注意到 $\mathcal{G}(g,v,\varphi)$ 对 g,φ 具有最高阶依赖，而对 v 的依赖至多为一阶。由此得到

$$\begin{aligned}&\|\delta u\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\\ &\le C(\Lambda)\Big(\|\delta g\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}+\|\delta\psi\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\Big)+C(\Lambda)T^{\frac{1}{2+\alpha}}\|(\omega_1,v_1,\varphi_1)-(\omega_2,v_2,\varphi_2)\|_{\mathcal{Y}_T}\\ &\le C(\Lambda)T^{\frac{1}{2+\alpha}}\|(\omega_1,\ v_1,\ \varphi_1)-(\omega_2,\ v_2,\ \varphi_2)\|_{\mathcal{Y}_T}.\end{aligned} \tag{4.38}$$

这就证明了该引理。

□

由此引理可得

推论 4.9。当 $T>0$ 足够小时，映射 $\mathcal{P}:\ \mathcal{B}_{T,\ \Lambda}\to\mathcal{B}_{T,\ \Lambda}$ 是压缩映射。

定理 4.10。当 $T=T(g_0,\ f_0,\ \psi_0)>0$ 足够小时，方程组 *(3.5)-(3.7)* 有解。证明。设 $(g,\ f,\ \psi)\in\mathcal{B}_{T,\ \Lambda}$ 是 $\mathcal{P}$ 的不动点。根据 $\mathcal{P}$ 的定义，它们满足偏微分方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t}&=g^{kl}\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l g+\mathcal{F}(g,f,\psi)\\ \frac{\partial f}{\partial t}&=-\left(1-\frac{|\psi_0|^2}{\tau}\right)\Delta_g f+\mathcal{G}(g,f,\psi)\\ \frac{\partial\psi}{\partial t}&=A(\psi)^{kl}\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l\psi+\mathcal{H}(g,f,\psi)\\ g(\cdot,0)&=g_0\\ \psi(\cdot,0)&=\psi_0\\ f(\cdot,T)&=f_0,\end{aligned}$$

根据 4.19 中 $\mathcal{F},\ \mathcal{G},\ \mathcal{H}$ 的定义可知，$(g,\ f,\ \psi)$ 是方程组 (4.1)-(4.3) 的一个解。这是因为 $|\psi|^2=|\psi_0|^2$ 在 (4.3) 下保持不变。最后，我们定义一个向量场

$$X=W(g,g_0)-\frac{2}{\tau}V_f+\nabla f,$$

并令 $\Phi_t:\ M\to M$ 为由下式生成的单参数微分同胚族

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t=-X\circ\Phi_t\\ \Phi_0=\mathrm{id}\end{cases}.$$

于是，$(\tilde{g},\tilde{f},\tilde{\psi})=(\Phi_t^*g,\Phi_t^*f,\Phi_t^*\psi)$ 是 (3.5)-(3.7) 的一个解。例如，由于 $V_f=U+\frac{|\psi|^2}{2}\nabla f$，所以 $\mathrm{div}(V_f)=\mathrm{div}\ U+\frac{|\psi|^2}{2}\Delta f$，并且

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} &= \Phi_t^* \frac{\partial f}{\partial t} - \langle \nabla \tilde{f}, X \circ \Phi_t \rangle \\ &= \Phi_t^* \Big(-\Delta f - R + \frac{\lambda n}{2\tau} + \frac{4}{\tau} \mathrm{Tr}_g S_{g,f,\psi} + \frac{2}{\tau} \operatorname{div} V_f + \langle \nabla f, W - \frac{2}{\tau} V_f + \nabla f \rangle \Big) \\ &\quad - \langle \nabla \tilde{f}, (W - \frac{2}{\tau} V_f + \nabla f) \circ \Phi_t \rangle \\ &= \Phi_t^* \Big(-\Delta f - R + \frac{\lambda n}{2\tau} + \frac{4}{\tau} \mathrm{Tr}_g S_{g,f,\psi} + \frac{2}{\tau} \operatorname{div} V_f \Big).\end{aligned}$$

□

备注 4.11。 短时存在性结果为研究旋量 Ricci 流作为约束空间$\{(g, f, \psi)$: $\int_M d\Omega_{g,f,\tau} = 1$, $|\psi|^2 \equiv c\}$ 模微分同胚的动力系统的长期行为，提供了解析层面的起点。在前向抛型区域$c > \tau$, DeTurck 规范固定系统在所有变量上都是一个真正的向前拟线性抛物流，而耗散恒等式 (3.8) 表明 $\mathbb{W}_\lambda$ 是一个严格的 Lyapunov 泛函。这提示我们，一旦具备适当的紧性与规范固定条件，便可运用解析梯度流理论中的工具（例如 -Lojasiewicz–Simon 不等式），从而获得稳定性并证明解收敛到临界点（扭曲孤子/特征旋量）。

将经典 Ricci 流视为一个不变子系统也很自然：当初始旋量为 f-调和时，旋量项消失，度量演化便（在微分同胚作用下）约化为 Ricci 流。因此，可以进一步探讨 f-调和区域在更大的旋量流中是否具有动力学稳定性，以及在这种情形下能否利用 $\mathbb{W}_\lambda$ 提取额外的单调性或刚性信息。最后，在混合区域 $c < \tau$ 中，标量方程经过规范固定后变为反向抛物型，这让人联想到 Perelman 耦合方程组中的伴随结构；值得研究的是，如何使这一情形适用于熵或奇点问题，其中 f 起到伴随变量而非演化状态的作用。

注记 4.12。 定理 4.1 给出了旋量 Ricci 流适定的局部演化，因此（通过延拓）可得到通常拟线性抛物型意义下的最大时间解。 $c < \tau$ 与 $c > \tau$ 之间的区别并非仅仅是技术性的：在区域 $c > \tau$ 中，DeTurck 规范固定系统是关于（g, f, ψ）的全正向 拟线性抛物流，而根据耗散恒等式 (3.8)， $\mathbb{W}_\lambda$ 是严格的 Lyapunov 泛函。特别地，对于任何满足 $\mathbb{W}_\lambda$ 有下界的整体解，对 (3.8) 积分可知，约束梯度的平方 $L^2(d\Omega)$-范数在时间上可积，因此存在一些时刻 $t_j \to \infty$ ，使流在如下意义下趋近临界集（扭曲孤子/特征旋量）： L^2-梯度趋于零。自然的下一步是探究这种子列收敛何时能提升为模掉微分同胚后的完全收敛；在正向抛物型情形下，可以尝试结合紧性/正则性工具，以及孤立临界点附近针对 $\mathbb{W}_\lambda$ 的 -Lojasiewicz–Simon 不等式，这也是解析几何梯度流中的标准做法。

Appendix A. Auxiliary estimate

引理 A.1. 设 $E \to M$ 是一个向量丛，且 F: $E \oplus (T^*M \otimes E) \to \mathbb{R}$ 是一个逐纤维的 C^2 映射。设 $\omega_1, \omega_2 \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0,T]; E)$ 满足 $\omega_1(\cdot, 0) = \omega_2(\cdot, 0)$，或者$\omega_1(\cdot, T) = \omega_2(\cdot, T)$。那么

$$\begin{aligned}&\|F(\omega_1, \partial\omega_1) - F(\omega_2, \partial\omega_2)\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} \\ &\leq C(F, \|\omega_i\|_{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]})\, T^{\frac{1}{2+\alpha}}\, \|\omega_1 - \omega_2\|_{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]}\end{aligned}$$

当 $T > 0$ 足够小时。此外，若 $F(0, 0) = 0$，则

$$\|F(\omega, \partial\omega)\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]} \leq C(F, \|\omega\|_{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}; M\times[0,T]})\, T^{\frac{1}{2+\alpha}}$$

对于满足 $\omega \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0,T]; E)$ $\omega(\cdot, 0) = 0$ 或 $\omega(\cdot, T) = 0$ 的情形。

证明。 利用中值定理，我们有

$$\begin{aligned}&\|F(\omega_1,\partial\omega_1)-F(\omega_2,\partial\omega_2)\|_{\alpha,\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\\&\le C(F,\|\omega_i\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]})\left(\|\omega_1-\omega_2\|_{\alpha,\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}+\|\partial\omega_1-\partial\omega_2\|_{\alpha,\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\right).\end{aligned}\tag{A.1}$$

取 $u=\omega_1-\omega_2$，则 $u\in C^{2+\alpha,\,1+\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T];E)$，且由假设可得 $u(\cdot,\,0)=0$。利用抛物型 Hölder 插值不等式（参见 [6, 第 8 章8]），可得

$$\begin{aligned}[u]_{\alpha,\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}&\le C\|u\|^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\,|u|^{1-\frac{\alpha}{2+\alpha}}_{0;M\times[0,T]},\\|\partial u|_{0;M\times[0,T]}&\le C\|u\|^{\frac{1}{2+\alpha}}_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\,|u|^{1-\frac{1}{2+\alpha}}_{0;M\times[0,T]},\\[\partial u]_{\alpha,\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}&\le C\|u\|^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\,|u|^{1-\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}_{0;M\times[0,T]}.\end{aligned}\tag{A.2}$$

另一方面，利用 $u(\cdot,\,0)=0$ 这一事实，可得

$$|u(x,t)|\le\int_0^t|u_t(x,s)|ds\le t\,|u_t|_{0;M\times[0,T]}\le T\,\|u\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}$$

对所有 $(x,\,t)\in M\times[0,T]$ 均成立。因此

$$|u|_{0;M\times[0,T]}\le T\,\|u\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}.\tag{A.3}$$

如果我们改为有 $u(\cdot,\,T)=0$，则上述估计同样成立。最后，将 (A.2) 和 (A.3) 代入 (A.1)，得到

$$\begin{aligned}&\|F(\omega_1,\partial\omega_1)-F(\omega_2,\partial\omega_2)\|_{\alpha,\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\\&\le C(F,\|\omega_i\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]})\,T^{\min\{1-\frac{\alpha}{2+\alpha},1-\frac{1}{2+\alpha},1-\frac{1+\alpha}{2+\alpha},1\}}\,\|u\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\\&\le C(F,\|\omega_i\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]})\,T^{\frac{1}{2+\alpha}}\,\|\omega_1-\omega_2\|_{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2};M\times[0,T]}\end{aligned}$$

当 $T>0$ 足够小时。 □

References

[1] Bernd Ammann、Hartmut Weiss 和 Frederik Witt。旋量能量泛函：临界点与梯度流。 *Mathematische Annalen*, 365(3):1559–1602，2016 年 10 月。[2] Julius Baldauf 和 Tristan Ozuch。带权流形上的旋量与质量。 *Communications in Mathematical Physics* 394 3 1153 1172, 2022 , ( ): – 7 月。[3] Julius Baldauf 和 Tristan Ozuch。渐近欧几里得里奇流的旋量能量。 *Advanced Nonlinear Studies* 23 1 2023 , ( ), 1 月。[4] Th. Friedrich。非负标量曲率紧致黎曼流形上狄拉克算子的第一特征值。 *Mathematische Nachrichten*, 97(1):117–146，1980 年 1 月。[5] Fei He 和 Changliang Wang。旋量能量泛函梯度流的正则性估计。 *Mathematical Research Letters* 28 4 1125 1173, 2021 , ( ): – 11 月。

[6] N. V. Krylov。 *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces* 12 *Graduate Studies in Mathematics* , 第 卷。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1996。[7] O. A. Ladyzhenskaya、V. A. Solonnikov 和 N. N. Ural'tseva。 *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type* 23 *Translations of Mathematical Monographs* , 第 卷。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1968 年。[8] Grisha Perelman。里奇流的熵公式及其几何应用。 *preprint*，arXiv:0211159。

Email address: chowtka@ust.hk*Email address*: frederick.fong@ust.hk

Department of Mathematics, Hong Kong University of Science and Technology, Clear Water Bay, Kowloon, Hong Kong SAR.