arXiv:2601.01880v1 [math.CA] 5 Jan 2026

极大平均与非横截性

JIN BONG LEE、JUYOUNG LEE、JEONGTAE OH 和 SEWOOK OH

Abstract. 我们研究与 $\mathbb{R}^d$ 中解析超曲面相关的极大函数的 L^p 映射性质，特别关注横截性的作用。在非横截点附近，我们证明，对于所有 $p > 2$，相关的极大函数在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上有界，而不论曲面测度的傅里叶变换衰减如何。相反，在远离 *non-transversal* 点的区域，我们证明，极大算子的 L^p 界意味着曲面测度的傅里叶变换以 $1/q$ 的速率衰减，其中 $q > p$。结合这两种情形，我们表明，在解析情形下，Stein 和 Iosevich–Sawyer 关于极大函数的猜想{可{重新}表述为只关注横截点。}此外，我们的结果完全解决了某些情形下该猜想的精细化形式。

1. Introduction

设 Γ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个光滑紧超曲面，其中 $d \geq 2$。对于 Γ 上的诱导勒贝格测度 μ，我们定义测度 μ 的各向同性膨胀 μ_t 如下：

$$\langle \mu_t, f\rangle = \int_\Gamma f(tx)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

接下来，考虑由下式给出的相关极大函数：

$$M_\Gamma f(x) := \sup_{t>0} |A_\Gamma f(t,x)| := \sup_{t>0} |\mu_t * f(x)|.$$

过去几十年来，人们对极大平均 M_Γ 进行了广泛研究。特别是，许多工作致力于研究 Γ 为超曲面的情形。本文旨在阐明极大函数的 L^p 估计与使此类估计成立的曲面几何条件之间的联系。这里所说的几何条件之一，是曲面上的测度的傅里叶变换具有衰减性。此外，我们将 μ 的傅里叶衰减率为 ρ 记作

$$|\widehat{\mathrm{d}\mu}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-\rho}, \quad \text{for some } C > 0. \tag{1.1}$$

系统研究与子流形相关的极大函数始于 E. M. Stein [30]，他首先研究了维数为 $d \geq 3$ 的空间中球面上的极大平均。Greenleaf [12] 证明，若一个超曲面至少有 k 个非零主曲率，那么 Stein 基于曲面测度傅里叶衰减的 L^2 方法可为 $k \geq 2$ 得出类似结果。后来，Rubio de Francia [25] 进一步将其推广至满足 (1.1) 且衰减率为 $\rho > 1/2$ 的测度。对于 $\Gamma = \mathbb{S}^1$ 中的 $\mathbb{R}^2$，(1.1) 在 $\rho = 1/2$ 时成立。这由 Bourgain 证明。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 42B25, 42B20。*Key words and phrases.* 极大平均，超曲面，傅里叶衰减，非横截性。

[3] 圆形极大函数在 $L^p(\mathbb{R}^2)$上有界，其中 $p > 2$，从而确立了精确范围。

然而，对于一般的超曲面，确定极大算子尖锐界的问题仍远未解决。目前最完整的图景出现在凸情形中。在这一背景下，Nagel–Seeger–Wainger [23], 在 Bruna–Nagel–Wainger 的开创性工作基础上 [4], 详细阐明了极大算子的有界性与 L^p 曲面的几何特征之间的对应关系。后来，Iosevich–Sawyer [18] 证实了当衰减不等式（1.1）以速率 $\rho \leq 1/2$成立时，这种关系也成立。此外，作者们 [18] 提出了以下猜想，该猜想现称为 Iosevich–Sawyer–Stein 猜想。

猜想 1.1 ([18, 猜想 2], [14])**.** 设 Γ 是一个光滑超曲面，测度 μ 定义在 Γ上，且满足 (1.1)，其中 $0 < \rho \leq 1/2$。那么，相应的极大算子在 L^p 上对于 $p > 1/\rho$ 有界。

该猜想最初由 Stein 针对以下情形提出： $\rho = 1/2$，随后由 Iosevich–Sawyer 将其推广至 [18] $0 < \rho \leq 1/2$。请注意，该猜想只涉及 $p > 2$；当 $p \leq 2$ 的极大估计还受到其多种几何特征 Γ 的影响，而不仅仅取决于傅里叶衰减（见 [23, 18, 19, 13, 5, 6]）。关于一般超曲面在 $p > 2$情形下的结果，可参见 Sogge–Stein [29]以及最后一位作者 [24], 的工作，其中给出了一些部分结果。然而，对于一个特定情形 $\rho = 1/2$，最后一位作者 [24] 证明了该猜想，这就是 Stein 猜想。

上述猜想断言，1.1是 L^p 的 M_Γ有界性的一项充分条件。我们自然会问，1.1是否也是这种有界性的必要条件。遗憾的是，1.1远非必要条件，在某些情况下甚至会以极其显著的方式失效。对于 $\mathbb{R}^3$中的解析超曲面，Zimmermann [32] 证明了 M_Γ 在 $L^p(\mathbb{R}^3)$上有界，其中 $p > 2$ 只要 Γ包含原点，而原点是 Γ的唯一退化点。在这类情形下，即使傅里叶衰减极弱， $p > 2$的极大估计仍然成立。这表明，除傅里叶衰减外，另一项几何条件也会影响极大平均的 L^p 有界性。事实上， Γ 中 [32] 的原点是我们所说的非横截性的最简单实例。

定义 1.2。 若点 x 位于 Γ上，且其仿射切空间 $x + T_x\Gamma$ 不经过原点，则称其为横截点。否则，称 x 为非横截 点。

在 $\mathbb{R}^3$中，Ikromov–Kempe–M¨uller [14] 研究了只由横截点组成的超曲面。在横截性假设下，作者证明了光滑有限型超曲面的 1.1猜想，其中 $\mathbb{R}^3$。后来，Greenblatt [10, 11]证明，即使不存在横截性， [14] 的极大估计仍然成立。尽管 [10, 11], 的极大估计涵盖了非横截点，却仍不足以捕捉 Zimmer- mann 结果 [32] 所展现的现象。

本文通过以如下方式表述猜想1.1，给出了在 Γ 为允许存在非横截点的解析超曲面时的显式充要条件，从而弥补了这一空白。我们还证明了针对 $\rho = 1/2$的这一重新表述的猜想。该重新表述背后的关键洞见是：相关的障碍本质上与非横截性密切相关。

1.1. **与非横截性相关的极大估计**。 在 $\mathbb{R}^2$中，Iosevich[16]证明了猜想1.1 对有限型曲线成立。随后，Iosevich–Sawyer [17]将 Iosevich [16] 的结果推广到齐次超曲面的情形。对于必要性部分， [17] 中证明了 M_Γ 在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上有界，当且仅当 $d(\cdot, H)^{-1} \in L^{1/p}_{\mathrm{loc}}(\Gamma, \mu)$ 对所有不经过原点的超平面 H 成立，因此，在非横截点处与 Γ 相切的超平面被排除在外。在 [18],中，作者猜想对于 $p > 2$，上述必要条件实际上也是确保 L^p M_Γ有界性的充要条件。

Iosevich–Sawyer 猜想表明 M_Γ 在 L^p 上有界，且 p 的取值范围更广，只要 Γ 局部化在一个非横截点附近。这在某些特定情形下确实可以得到验证：当 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条曲线，或是 $\mathbb{R}^d$中的一个凸有限线型超曲面时，依据 [16, 18] 中的论证（参见附录A）。然而，对于一般超曲面，目前尚无结果能够说明存在非横截点时会有此类改进。此前关于非横截情形的已知结果仅适用于特殊类别的超曲面（[17, 18]），或非横截点为原点的情形（[32, 22]）。本文证明，对于每个 M_Γ，只要 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 且 $p > 2$，并且 Γ 表示一个包含非横截点的充分小解析超曲面，那么它在 L^p 上有界。

设 $\gamma\colon [-2,2]^{d-1} \to \mathbb{R}$ 是一个解析函数，且 Γ 是图形 $\{(y, \gamma(y)) \in \mathbb{R}^d : y \in [-2,2]^{d-1}\}$。对于满足 $\mathrm{supp}(\psi) \subset \{y \in \mathbb{R}^{d-1} : |y| \le 1/2\}$ 的光滑函数 ψ，设 $\mu[\psi]$ 是定义在 Γ 上的测度，由下式给出

$$\langle \mu[\psi], f\rangle = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(y,\gamma(y))\psi(y)\,\mathrm{d}y. \tag{1.2}$$

如前所述， $\mu[\psi]$ 的 $t > 0$ 倍伸缩 $\mu_t[\psi]$ 定义如下。然后我们定义

$$M_\Gamma[\psi]f(x) := \sup_{t>0} |A_\Gamma[\psi]f(t,x)| := \sup_{t>0} |\mu_t[\psi] * f(x)|.$$

下面的定理是我们关于 $M_\Gamma[\psi]$的第一个主要结果。

定理 1.3. 设 $d \ge 2$ 和 Γ 是解析超曲面。假设点$(y_{nt}, \gamma(y_{nt}))$ 是非横截的。若 ψ 在 y_{nt} 附近的支集足够小，则对 $p > 2$， $M_\Gamma[\psi]$ 在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上有界。

定理 1.3 为非横截情形给出了确定性结果。尤其是，它将 Zimmermann [32] 的结果推广到了任意维数和任意非横截点。通过考虑有限型平面曲线的柱面延拓可知，取值范围 $p > 2$ 是尖锐的。此外，结合 [14, 推论 1。8], 定理 1.3解决了 Iosevich–Sawyer [18, 猜想 1] 在 $\mathbb{R}^3$ 中解析曲面的情形。定理 1.3 中的解析条件至关重要，因为 Zimmermann的例子 [32] 表明，定理 1.3 不能推广到一般的光滑超曲面。然而，确定定理1.3 仍然成立时所适用的光滑函数的精确类别，仍是一个开放问题。

值得注意的是，定理 1.3 的证明既不依赖于奇点消解，也不依赖于牛顿图；而这些工具在相关文献中一直至关重要[14, 32, 5, 11]。相反，我们根据 Γ的退化性将曲面 γ分解成若干部分，并利用与解析函数相关的 o-极小结构，发掘每个分解部分中的有利结构性质。

在早期的研究中，经典缩放论证在验证分解后各部分的良好性质方面发挥了重要作用。同样的思想也证明了

在 [18], 中很有用，因为有限直线型的凸光滑函数可以用混合齐次多项式来逼近（见 [27]）。然而，缩放方法难以应用于一般的超曲面。相比之下，我们的方法有效地取代了缩放的作用：即使不存在缩放结构，它也能直接分析任意解析超曲面的每个分解部分。我们还指出，当 Γ 具有内在的缩放结构时，可以给出定理1.3 的一个简单证明（见附录A）。

分解的另一个令人惊讶的结果是，可以对 L^2 的估计进行改进 $M_\Gamma[\psi]$，而如果不对 $\rho = 1/2$施加傅里叶衰减条件（1.1），通常无法获得这一结果。证明极大估计的一种标准方法依赖于 $A_\Gamma[\psi]$的正则性性质，并通过 Sobolev 嵌入引理实现。然而，直接应用该方法无法得到 L^2 极大估计，因为 L^2的正则性性质由（1.1）决定。这一困难通过根据超曲面 Γ的退化性进行分解得以克服。在 Γ的每个局部块上，该分解优化了通常由 Sobolev 嵌入引理所导致的正则性损失，使这种损失与相关平均算子的局部 L^2 正则性恰好达到平衡。这种补偿源于非横截性以及实代数几何中发展起来的 Łojasiewicz 不等式 [21] 。另一方面，当 $p > 2$充分大时，我们采用 [24] 的平滑估计，因为每个子曲面都因分解过程而具有锥性。

1.2. **Iosevich–Sawyer–Stein 猜想的重新表述。** 定理1.3揭示了超曲面几何所扮演角色中的一个鲜明二分。具体而言，解析曲面在非横截点附近的局部行为，事实证明与 L^p 相关极大算子的有界性无关，只要$p > 2$。相较之下，在横截点附近，傅里叶衰减对于确定 L^p 极大平均的有界性起着关键作用，正如先前的研究所示[16, 17, 18, 14]。从这个意义上说，我们重新表述了关于解析超曲面的 Iosevich–Sawyer–Stein 猜想。

猜想 1.4。 设 $p_{cr} \geq 2$ 和 Γ 是一个紧致解析超曲面。那么，以下陈述等价。

(1) M_Γ 在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上有界，对所有 $p > p_{cr}$均成立。*(2)* 对于 $\sigma \in C^\infty(\Gamma)$ 以及 $p > p_{cr}$，存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$|\mathcal{F}[\sigma \, \mathrm{d}\mu](\xi)| \leq C|\xi|^{-1/p},$$

前提是 σ 在包含 Γ 所有非横截点的某个开集上消失。

可以注意到，在猜想 1.4 中，预期傅里叶衰减为 $1/p$，其中 $p > p_{cr}$，而不只是 $1/p_{cr}$。这一点至关重要。根据 [15], , 在 $\mathbb{R}^3$ 中存在一个解析有限型曲面，其测度 μ 满足锐衰减估计，

$$|\widehat{\mathrm{d}\mu}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\frac{1}{2}} \log(2 + |\xi|), \quad |\xi| \geq 1.$$

结合 [24, 定理 1。3], 的局部平滑估计，相应的极大函数在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上有界，对所有 $p > 2$ 均成立。由此例可知，猜想1.4 的第 (2) 条对于精细表述是必要的。

得益于定理 1.3，猜想 1.1 与蕴含关系 (2) $\to$（1）猜想1.4对于解析超曲面是等价的。特别地，根据以下结果

[16, 18, 14], 方向 (2) → （1）猜想 1.4 成立，其中 Γ 是$\mathbb{R}^2$中的一条曲线 $\mathbb{R}^3$、是 $\mathbb{R}^d$中的一个曲面，或是 $\mathbb{R}^d$中的有限直线型凸超曲面。

本文的第二个主要结果包含了对猜想 →1.4 的关系式 (2) 的证明1.4。

定理 1.5。设 $p_{cr} \geq 1$ 和 Γ 是一个紧致解析超曲面。假设M_Γ 在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上有界，其中 $p > p_{cr}$ ，且 $\sigma \in C^\infty(\Gamma)$ 在包含 Γ所有非横截点的某个开集上为零。则存在一个常数 $C_{p,\ \sigma}$ 使得

$$|\mathcal{F}[\sigma\, \mathrm{d}\mu](\xi)| \leq C_{p,\sigma}|\xi|^{-1/p}, \quad \forall p > p_{cr}.$$

为了证明定理 1.5，我们先回到 Iosevich 的必要条件 – Sawyer [18]:

$$\int_\Gamma d(x,H)^{-1/p}\chi(x)\ \mathrm{d}\mu(x) < \infty, \quad p > p_{cr} \tag{1.3}$$

对于所有不经过原点的超平面 H 。注意， χ 表示用于局部可积性的截断函数。我们证明，在假设在 ($\mathbb{R}^d$) 上有界的条件下，(1.3) 对的选取一致成立。简单应用切比雪夫不等式可知，距离函数的可积性给出了与的定义函数相关的次水平集估计。随后，我们改造了 Basu–Guo–Zhang–Zorin-Kranich [1] 借助模型论发展出的驻点集方法。驻点集方法帮助我们通过一个中间层级集估计来控制振荡积分，而这是一种次水平集估计。因此，整体论证大致按照以下蕴含关系展开：(1) → (1.3) → 猜想 1.4 的 (2)1.4。

作为定理 1.5的推论，我们证明了猜想 1.4 对 $p_{cr} = 2$成立。

推论 1.6。 猜想 *1.4* 对 $p_{cr} = 2$成立。

注意，(1) → (2) 可由定理 1.5结合 $p_{cr} = 2$得到，而猜想 → (1) 的 (2)1.4 则由 [24] 和定理 1.3得到。对于 (2) →(1)，应用定理 [24, 1.3]中的局部平滑估计与平凡 L^2 界进行插值，从而得到范围 $p > 2$。

文章结构。 在第 2 节中，我们通过一种基于 L^2 的导数大小的分解，将定理 γ1.3 化归为精细的 o估计和平滑估计。我们还引入了 $\mathbb{R}$的 -极小展开，以便利用该分解的有用性质。通过第 3 节和第4 节，我们分别通过验证精细的 L^2 估计和平滑估计来证明定理 1.3。在第 5 节中，我们揭示极大估计、次水平集估计和傅里叶衰减之间的关系，从而证明定理 1.5 。在附录中，我们针对超曲面具有特定缩放结构的情形，为定理 1.3给出一个简单的证明。

记号。

(1) 我们同时用 $\mathcal{F}$ 和 $\widehat{\ }$ 表示傅里叶变换。(2) 记号 $A \lesssim B$ 表示对于某个无关紧要的常数 C，有 $A \leq CB$ 。(3) 令 $\mathbb{B}_r^N(p)$ 表示在 $\mathbb{R}^N$中以 p 为中心、半径为 r 的球。当中心未确定时，我们有时用$\mathbb{B}_r^N$表示任意半径为 r 的球。(4) 对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数 β_0 ，若其在 $[-1,1]$ 上满足 $\beta_0 \equiv 1$ 且在 $[-2,2]^\complement$上满足$\beta_0 \equiv 0$ ，我们令 $\beta_1 = \beta_0(\cdot/2) - \beta_0(\cdot)$，使得 $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \beta_1(s/2^\ell) = 1$对 $s \neq 0$成立。

2. Preliminaries

假设 $x_{nt} = (y_{nt},\ \gamma(y_{nt}))$ 是 Γ 的非横截点，且 ψ 的支集包含于 $\mathbb{B}^{d-1}_{1/2}(0)$。不失一般性，经过适当的旋转后，我们可以假设

$$\gamma(y_{nt}) = 0, \quad \nabla\gamma(y_{nt}) = 0. \tag{2.1}$$

值得注意的是，当 x_{nt} 是横截点时，可以取 $y_{nt} = 0$，并且不失一般性地假设 $\gamma(0) = c \neq 0$、$\nabla\gamma(0) = 0$；然而，在非横截点处无法进行这种简化。此外，我们假设 γ 是有限型的，也就是说，对于每个 $y \in \mathbb{B}^{d-1}_1(0)$，都存在一个多重指标 $\alpha = \alpha(y)$，满足 $|\alpha| \geq 2$，使得 $|\partial^\alpha\gamma(y)| \neq 0$。事实上，如果 γ 不是有限型的，那么解析性与 (2.1) 一起意味着 γ 恒等于零。在这种情况下，定理 1.3 立即由 $\mathbb{R}^{d-1}$ 中的 Hardy–Littlewood极大函数的 L^p-有界性得出。

由 γ的光滑性和有限型条件，我们可以得到 γ 的导数的定量上界，以及 γ 的 k阶导数的下界，其中 $k \geq 2$为某个值。更确切地说，我们可以假设存在一个常数 C_*，使得

$$\sup_{y\in\mathbb{B}_1(0)} |\partial^\alpha\gamma(y)| \leq C_*, \quad \text{for all } |\alpha| \leq N, \tag{2.2}$$

当 N充分大时。将 supp(ψ)缩小到 y_{nt}的一个充分小邻域后，我们还可以假设存在一个整数 $k \geq 2$，使得

$$\sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha\gamma(y)| \geq C_*^{-1}, \quad \text{for } y \in \operatorname{supp}(\psi). \tag{2.3}$$

当 $k = 2$时，相应的 L^p 极大算子的有界性由 Sogge 已知 [28]。因此，在定理1.3的证明中，我们假设（2.1）、（2.2）对充分大的 N成立，并且（2.3）在 $k \geq 3$ 下成立。

本节回顾实代数几何和模型论中的一些有用结果。这些结果使我们能够根据非横截点附近的几何结构分解超曲面，并获得解析函数的实用性质。作为推论，定理1.3 归结为在这些条件下对局部化算子的研究。

2.1. 该 Łojasiewicz 不等式与解析超曲面的分解。

在此，我们介绍一个技术引理，其中函数的解析性至关重要。

引理2.1 ([21]，Łojasiewicz 不等式）。设 U 是 $\mathbb{R}^{d-1}$ 中的一个开集，且$f\colon U \to \mathbb{R}$ 是一个解析函数。对于每个点 $x_0 \in U$，存在一个邻域V，它是 x_0的邻域；存在一个指数 $\theta \in [1/2, 1)$ 以及一个常数 C，使得

$$|f(x) - f(x_0)|^\theta \leq C|\nabla f(x)|, \quad \forall x \in V.$$

取 $x_0 = y_{nt} \in \mathbb{B}^{d-1}_{1/2}(0)$和 $f(y) = \gamma(y)$。考虑（2.1），存在一个邻域 U_1，它是 y_{nt}的邻域；存在一个指数 $\theta_1 \in [1/2, 1)$和一个常数 C_1，使得

$$|\gamma(y)| \leq |\gamma(y) - \gamma(y_{nt})|^{\theta_1} \leq C_1|\nabla\gamma(y)|$$

在 U_1上成立。如果我们对 $\nabla\gamma$的每个分量应用 Łojasiewicz 不等式，那么存在 U_1的一个子集 $U_2 \ni y_{nt}$、一个指数 $\theta_2 \in [1/2, 1)$和一个常数 C_2

使得对于 $y \in U_2$

$$|\nabla\gamma(y)| \le |\nabla\gamma(y) - \nabla\gamma(y_{nt})|^{\theta_2} \le C_2|D^2\gamma(y)|.$$

这里， $|M|$ 表示 $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$的希尔伯特-施密特范数。因此，对于 $y \in U_2$，可得

$$|\gamma(y)| \le C_1|\nabla\gamma(y)| \le C_1C_2|D^2\gamma(y)|. \tag{2.4}$$

由于我们可以将截断函数的支集 ψ 取得足够小，因此假设 $\mathrm{supp}(\psi) \subset U_2$。于是，只需在假设 (1.3 在 supp(2.4) 上成立的条件下证明定理 ψ)。

从现在起，我们根据 γ的导数大小对截断函数 ψ 进行分解。为此，我们定义如下量:

$$\mathfrak{D}^m\gamma(y) := \Big(\sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha\gamma(y)|^2\Big)^{1/2}.$$

注意， $|\nabla\gamma(y)|$ 和 $|D^2\gamma(y)|$ 分别等价于

$$\Big(\sum_{|\alpha|=1} |\partial^\alpha\gamma(y)|^2\Big)^{1/2}, \quad \Big(\sum_{|\alpha|=2} |\partial^\alpha\gamma(y)|^2\Big)^{1/2},$$

分别由此可见，根据 (2.4)， γ 的导数在γ的零点之外不会消失，并且 $\mathfrak{D}^k\gamma(y) \sim 1$ 对于假设 ($y \in$supp(ψ) 中的所有 2.3) 均成立。

现在，我们根据 $\mathfrak{D}^m\gamma$, $m = 2,\dots,k$ 的大小来分解 $\mathrm{supp}(\psi)$。令$\vec{\ell} = (\ell_2,\cdots,\ell_k) \in \mathbb{Z}^{k-1}$。然后，我们如下定义 $\psi_{\vec{\ell}}$:

$$\psi_{\vec{\ell}}(y) = \psi(y)\prod_{m=2}^{k} \beta_1(\mathfrak{D}^m\gamma(y)/2^{\ell_m}).$$

根据（2.2），存在一个常数 $C > 0$ ，使得 $\psi_{\vec{\ell}} = 0$ 除非 $\ell_m \le C$ 对所有$m = 2,\dots,k$均成立。因此，有

$$\psi(y) = \sum_{\vec{\ell}:\ell_m\le C} \psi_{\vec{\ell}}(y), \tag{2.5}$$

对于满足 $\mathfrak{D}^m\gamma(y) \neq 0$ 对所有 $m = 2,\cdots,k$ 均成立的 $y \in$supp(ψ)。可以验证，集合 $\cup_{m=2}^k\{y \in$supp(ψ) : $\mathfrak{D}^m\gamma(y) = 0\}$ 的测度为零。

由于（2.5）除一个零测集外均成立，因此 $M_\Gamma[\psi] \le \sum_{\vec{\ell}} M_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}]$。因此，要证明定理1.3，只需证明以下结果，因为 ℓ_m 均由一个固定常数从上界控制。

命题 2.2。 对于 $p > 2$，存在一个正的常数 c ，使得对所有$\vec{\ell} \in \mathbb{Z}^{k-1}$,

$$\|M_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}]f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim 2^{c(\ell_2+\cdots+\ell_k)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

设 P_λ 是投影到 $\{\xi \in \mathbb{R}^d$ 上的频率投影算子： $\lambda \le |\xi| \le 4\lambda\}$ 定义为$\widehat{P_\lambda g}(\xi)$ $= \beta_1(|\xi|/\lambda)\widehat{g}(\xi)$。要证明命题 2.2，只需考虑局部极大函数 $\sup_{1<t<2}|A[\psi_{\vec{\ell}}]P_\lambda f|$的估计。然后，利用插值和 Littlewood–Paley 理论，通过以下两个结果即可得到命题 2.2 。该论证是标准的，这里仅参见 [26] 或 [2, 引理 3。4], 例如。第3 节和第4节致力于证明以下两个命题。

命题 2.3。对于 $\lambda \geq 1$ 和 $\vec{\ell} \in \mathbb{Z}^{k-1}$，有

$$\Big\| \sup_{1<t<2} |A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}] P_\lambda f| \Big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

命题 2.4。设 $\lambda \geq 1$、$\vec{\ell} \in \mathbb{Z}^{k-1}$ 和 $p \geq 4(k-1)$。那么存在正数常量 c 和 ε，使得

$$\Big\| \sup_{1<t<2} |A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}] P_\lambda f| \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim 2^{c(\ell_2+\cdots+\ell_k)} \lambda^{-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

在命题 2.3 和命题 2.4的证明中，我们可以假设

$$2^{\ell_k} \sim 1,$$

因为对所有 $y \in \operatorname{supp}(\psi)$，$\mathfrak{D}^k \gamma(y) \sim 1$。注意，当某个正数常量 C 满足 $\ell_k \leq -C$ 时，$\psi_{\vec{\ell}} = 0$。在这种情况下，这些命题显然成立。

在本节余下部分，我们将对 $\operatorname{supp}(\psi_{\vec{\ell}})$ 建立一个大小估计，这在上述两个命题的证明中起着关键作用。在 [24],中，人们观察到集合 $\operatorname{supp}(\psi_{\vec{\ell}}) \cap \mathbb{B}_\epsilon$ 的大小有如下界

$$\delta_{\vec{\ell}} := \min_{m=2,\cdots,k-1} 2^{\ell_m - \ell_{m+1}}, \tag{2.6}$$

如果 ϵ 足够小。为了达到我们的目的，我们需要一个无需对 ϵ作任何小性假设也成立的类似大小估计。为验证这一点，我们将利用 $\mathbb{R}$ 的某些 o-极小扩张的性质，并在下一小节中简要回顾这些性质。

2.2. **o-极小的 $\mathbb{R}$扩张**。本小节聚焦于实有序域 $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, (0, 1), (+, \cdot) \leq)$ 的两个著名扩张。第一个是

$$\mathbb{R}_{an} = (\mathbb{R}, (0,1), (+, \cdot, \text{all restricted analytic functions}), \leq),$$

众所周知，它是 o-极小的。第二个是

$$\mathbb{R}_{an,exp} = (\mathbb{R}, (0,1), (+, \cdot, \text{all restricted analytic functions}, \exp), \leq),$$

其 o-极小性由 [9] 证明。这里，exp 是指数符号。若存在一个包含 $[-1,1]^n$ 的开集 U，以及一个解析函数 $g\colon U \to \mathbb{R}$，使得 $f = g$ 在 $[-1,1]^n$ 上成立，且在其他地方为 $f = 0$，则称函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为受限解析函数。

我们主要考虑在上述两个结构中可定义的函数。关于可定义性和 o-极小结构的精确定义，请读者参见 [1, 第 2] 节。本文只用到以下基本性质：

(1) 所有受限解析函数和多项式在 $\mathbb{R}_{an}$ 中都是可定义的。(2) 若函数 f 在 $\mathbb{R}_{an}$ 中可定义，则它在 $\mathbb{R}_{an,\ exp}$ 中也可定义。(3) 可定义函数的集合在加法和乘法运算下封闭。(4) 若 f 可定义，则 $g = \mathbb{1}_{\{f \geq 0\}}$ 也可定义，其中 $\mathbb{1}_U$ 表示支集为 U 的示性函数。

此外，由于 [7]，我们有以下命题。

命题 2.5 ([20], 命题 3.6). 设 $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 在$\mathbb{R}_{an}$中是可定义的。若 $f(\cdot, y)$ 对所有 y均可积，则

$$y \in \mathbb{R}^m \mapsto g(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, \mathrm{d}x$$

在$\mathbb{R}_{an,exp}$中是可定义的。

根据这些性质，我们可以给出可定义函数的例子。例如，对于每个多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}_0^{d-1}$，$\partial^\alpha \gamma \mathbb{1}_{[-1,1]^{d-1}}$ 在 $\mathbb{R}_{an}$ 中是可定义的。此外，

$$(w,r,\delta) \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \mathbb{1}_W(y,w,r,\delta)\ \mathrm{d}y$$

在 $\mathbb{R}_{an,\ exp}$ 中是可定义的，其中

$$W = \{(y,w,r,\delta) \in [-1,1]^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |\gamma(y) + w \cdot y - r| \le \delta\}.$$

这类在 o-极小结构中可定义的函数，具有一个重要性质：其单调性变化的次数一致有界。更确切地说，有如下结论。

命题 2.6 ([1], 命题 2.8)。设 $h\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}_{an,\ exp}$ 中的可定义函数，并且 $N(y)$ 是映射 $r \mapsto h(r,y)$ 单调性变化的次数。那么，$\sup_y N(y) < \infty$ 成立。

这个命题表明，可定义函数与多项式具有某些共同性质。在 [24]，中，为了估计 $|\mathrm{supp}(\psi_{\vec{\ell}})|$，需要限制在一个小球上，因为这样 γ 就可以用多项式逼近。相比之下，可定义函数的优良性质使我们无需对支集施加任何限制，就能估计 $\mathrm{supp}(\psi_{\vec{\ell}})$ 的大小，如下一个命题所述。这个命题直接推出

$$|\mathrm{supp}(\psi_{\vec{\ell}})| \lesssim \delta_{\vec{\ell}} \tag{2.7}$$

成立，后文将频繁用到。

命题 2.7. 设 γ 是定义在 $[-2,2]^{d-1}$ 上的解析函数，且 $m \in \mathbb{N}$。对于所有正数常量 c_m，有

$$|\{y \in [-1,1]^{d-1} : \mathfrak{D}^m\gamma(y) \le c_m, \mathfrak{D}^{m+1}\gamma(y) \ge c_{m+1}\}| \lesssim c_m/c_{m+1}.$$

这里，隐含常数仅依赖于 m 和 γ。

证明。定义一个集合

$$U := \{y \in [-1,1]^{d-1} : \mathfrak{D}^m\gamma(y) \le c_m, \mathfrak{D}^{m+1}\gamma(y) \ge c_{m+1}\}.$$

由于 $c_{m+1}^{-1}\mathfrak{D}^{m+1}\gamma \ge 1$ 在 U 上，可以验证

$$|U| \le \int_U c_{m+1}^{-1}\mathfrak{D}^{m+1}\gamma(y)\ \mathrm{d}y.$$

考虑到 $\mathfrak{D}^{m+1}\gamma \sim \sum_{|\alpha|=m+1} |\partial^\alpha\gamma|$，只需证明

$$\int_U |\partial^\alpha\gamma| \lesssim c_m, \quad \text{for} \quad |\alpha| = m+1.$$

根据微积分基本定理和富比尼定理，只需证明存在一个仅依赖于 γ 的数 $N > 1$，使得对于所有 $j = 1, \cdots, d-1$、$|\alpha| = m+1$ 和 $y \in [-1,1]^{d-1}$，函数

$$r \in [-1,1] \mapsto \partial^\alpha\gamma(y_1, \cdots, y_{j-1}, r, y_{j+1}, \cdots, y_{d-1}) \tag{2.8}$$

改变其符号的次数至多为 N 次。

为证明这一点，我们使用命题 2.6。固定 j 和 α，满足 $|\alpha| = m$，令h： $\mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ 为一个满足 $h = \partial^\alpha \gamma$ 的函数，在 $[-1,1]^{d-1}$ 上，并且 $h = 0$ 在其他情况下。定义 $\tilde{h}$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-2} \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\tilde{h}(r,z) = h(z_1 \cdots, z_{j-1}, r, z_j, \cdots, z_{d-2}).$$

˜于是， h 是一个受限解析函数，因此它是 $\mathbb{R}_{an}$ 中的可定义函数。由命题 2.6，我们可以得出，˜函数 $r \mapsto h(r,z)$ 的单调性变化次数有一个仅依赖于 γ 的常数上界。因此，存在 $N_{j,\alpha} > 1$，使得对于所有 $y \in [-1,1]^{d-1}$，函数（2.8）至多改变符号 $N_{j,\alpha}$ 次。由于 j 和 α 的数量有限，我们得到了所需的估计。□

3. Proof of Proposition 2.3: L^2 bounds

根据傅里叶反演，我们将 $A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}]P_\lambda f$ 改写为

$$A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}]P_\lambda f = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} m_{\vec{\ell}}(t\xi)\widehat{P_\lambda f}(\xi) \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}\xi,$$

$$m_{\vec{\ell}}(t\xi) = \int \mathrm{e}^{-it\langle \Gamma(y),\xi\rangle} \psi_{\vec{\ell}}(y)\beta_1(|\xi|/\lambda)\, \mathrm{d}y.$$

为了证明命题 2.3，我们将 Sobolev 嵌入引理与适当的乘子估计结合使用。直观地说，通过 Sobolev 嵌入将上确界替换为 L^2-范数，会产生 $\lambda^{1/2}$-损失。然而，在我们的情形中，由于 γ 在 2^{ℓ_2} 的 supp($\psi_{\vec{\ell}}$) 中有上界，损失可以得到改进；但一般情况下这一条件并不成立。事实上，可以观察到

$$\partial_t(m_{\vec{\ell}}(t\xi)) = -i\langle \Gamma(y),\xi\rangle m_{\vec{\ell}}(t\xi), \tag{3.1}$$

且 $\langle \Gamma(y)\ \xi\rangle$ 这一项通常远小于 λ 当 ξ 接近 Γ的法向方向时。这一观察至关重要，因为它能显著改进分析。更准确地说，命题 2.3的证明可归结为 L^∞ 对 $^{m}\vec{\ell}(t\xi)$ 和 ∂_t ($^{m}\vec{\ell}(t\xi)$) 的估计，这要用到下面的 Sobolev 嵌入引理，该引理在文献中广为人知。

引理 3.1. 设 $F \in C^1(\mathbb{R})$ 和 $p > 1$。则

$$\sup_{1<t<2} |F(t)|^p \le |F(1)|^p + p\Big(\int_1^2 |F(t)|^p\, \mathrm{d}t\Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big(\int_1^2 |\partial_t F(t)|^p\, \mathrm{d}t\Big)^{1/p}.$$

不同版本亦可参见 [31, 第 499 页，引理 1] 。

证明。 由微积分基本定理可得

$$|F(t)|^p \le |F(1)|^p + p\int_1^2 |F(t)|^{p-1}|\partial_t F(t)|\, \mathrm{d}t.$$

所需不等式由 H¨older 不等式得出。 □

引理3.1 表明

$$\Big\| \sup_{1<t<2} |A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}]P_\lambda f| \Big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}]P_\lambda f(1,\cdot)\|_{L^2_x} + \prod_{i=0,1} \|\zeta \partial_t^i A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}]P_\lambda f\|_{L^2_{t,x}}^{1/2},$$

其中 ζ 表示一个支集位于 $[1/2,4]$ 内的光滑截断函数，其定义为

$$\zeta(t) = \beta_1(t) + \beta_1(2t).$$

注意到右端的第一项显然有界于 $\|f\|_2$。因此，根据 Plancherel 定理，命题2.3 只需证明

$$\|m_{\vec{\ell}}(t\cdot)\beta_1(|\cdot|/\lambda)\|_{L^\infty}\cdot\|\partial_t m_{\vec{\ell}}(t\cdot)\beta_1(|\cdot|/\lambda)\|_{L^\infty}\lesssim 1.$$

然而，这个估计一般并不成立，因为当 ξ 远离 Γ的法向方向时，(3.1) 中的因子 $\langle\Gamma(y),\xi\rangle$ 可能变得很大。这表明，$m_{\vec{\ell}}(t\cdot)$ 和 $\partial_t m_{\vec{\ell}}(t\cdot)$ 的 L^∞-范数可能由不同的 ξ取得；这是因为通常当 ξ 位于 Γ的法向量附近的一个小邻域内时，$m_{\vec{\ell}}(t\cdot)$ 的 L^∞-范数才会达到。因此，自然的做法是以适当的方式分解 ξ，从而得到所需的乘子估计。为此，我们将ξ 适当地分解为两部分，并分别为每一部分建立相应的估计，从而得到上述估计的一个类似结果。具体分解依据的是与由 $(0,\cdots,0,1)$ 张成的直线之间的夹角；该直线是 $y=y_{nt}$处 Γ 的法向量。

令 $\xi=(\xi',\xi_d)\in\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}$ 且 $\partial_i=\partial_{y_i}$。假设 $\lambda\le|\xi|\le 4\lambda$ 且 $|\xi'|\ge 20C_2\lambda 2^{\ell_2}$，其中 C_2 是 (2.4) 中的常数，则存在一个 $1\le i\le d-1$使得

$$|\partial_i(\langle\Gamma(y),\xi\rangle)|=|\xi_i+\partial_i\gamma(y)\xi_d|>4C_2\lambda 2^{\ell_2}/\sqrt{d-1}. \tag{3.2}$$

事实上，我们有

$$|\xi'+\xi_d\nabla\gamma(y)|\ge|\xi'|-|\xi_d\nabla\gamma(y)|\ge 4C_2\lambda 2^{\ell_2},$$

因此，我们可以找到一个满足 (3.2) 的分量。所以，在 $|\xi'|\ge 20C_2\lambda 2^{\ell_2}$ 的情形下，可以结合分部积分与下界 (3.2) 来改进乘子估计。根据这一观察，我们将频率变量 ξ 分成两部分，利用 P_c 和 P_o 定义为

$$\widehat{P_c g}(\xi)=\beta_0\Big(\frac{|\xi'|}{20C_2\lambda 2^{\ell_2}}\Big)\widehat{g}(\xi),$$
$$\widehat{P_o g}(\xi)=\Big(1-\beta_0\Big(\frac{|\xi'|}{20C_2\lambda 2^{\ell_2}}\Big)\Big)\widehat{g}(\xi).$$

现在，将 $A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}]P_\lambda$ 分成两部分

$$A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}]P_\lambda=A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}]P_\lambda P_c+A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}]P_\lambda P_o.$$

根据三角不等式，要证明命题2.3，只需证明

$$\Big\|\sup_{1<t<2}|A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}]P_\lambda P_c f|\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\lesssim\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{3.3}$$

and

$$\Big\|\sup_{1<t<2}|A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}]P_\lambda P_o f|\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\lesssim\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{3.4}$$

3.1. **对 (3.3) 的证明。** 我们首先考虑 (3.3)。在这种情形下，我们有 $|\xi'|<40C_2\lambda 2^{\ell_2}$，因此对于 $y\in\mathrm{supp}(\psi_{\vec{\ell}})$，有

$$|\langle\Gamma(y),\xi\rangle|\lesssim\lambda 2^{\ell_2},$$

由于 Łojasiewicz 不等式 (2.4)。考虑引理3.1和 (3.1)，不等式 (3.3) 可由下引理直接推出。

引理 3.2。 设 $1/2 \le t \le 4$。则当 ξ 满足$|\xi| \sim \lambda$ 且 $|\xi'| \le 40C_2\lambda 2^{\ell_2}$时，以下不等式成立；

$$|m_{\vec{\ell}}(t\xi)| \lesssim (\lambda 2^{\ell_2})^{-1/2}.$$

证明。 我们首先考察 γ 和 $\psi_{\vec{\ell}}$ 的性质。特别地，在 $\operatorname{supp}(\psi_{\vec{\ell}})$ 中，我们有

$$2^{\ell_2} \le \mathfrak{D}^2\gamma(y) \le 4 \cdot 2^{\ell_2}.$$

因此，对于每个 y，存在一个方向 $v = v(y)$，使得 $D_v^2\gamma(y) \ge d^{-1}2^{\ell_2}$，其中$D_v$ 表示沿 v 的方向导数。另一方面，由于 $\mathfrak{D}^m\gamma$ 在 $\operatorname{supp}(\psi_{\vec{\ell}})$ 的某个小邻域内光滑，我们可以选取一个足够小的数 $c > 0$，使得对于 $2 \le m \le k$，

$$\mathfrak{D}^m\gamma(y) \le 8 \cdot 2^{\ell_m}, \tag{3.5}$$

若 $\operatorname{dist}(y, \operatorname{supp}(\psi_{\vec{\ell}})) \le c\delta_{\vec{\ell}}$。此外，我们可以选取这样一个与 $\vec{\ell}$无关的常数 c。事实上，令 $|y - z| \le c\delta_{\vec{\ell}}$其中某个 $z \in \operatorname{supp}(\psi_{\vec{\ell}})$。那么，由 (2.2)， $2^{\ell_k} \sim 1$，以及以下事实

$$|\partial_j\mathfrak{D}^m\gamma(y)| \le \Big(\sum_{|\alpha|=m} |\partial_j\partial^\alpha\gamma(y)|^2\Big)^{1/2} \le \mathfrak{D}^{m+1}\gamma(y),$$

由中值定理可得 $\mathfrak{D}^k\gamma(y) \le 4 \cdot 2^{\ell_k} + c\delta_{\vec{\ell}}C_*k^d \le (4 + c(C_*k^d)^4)2^{\ell_k}$。这里，我们使用 $2^{\ell_{k-1}} \le C_*k^d$ 和 $(C_*k^d)^{-1} \le 2^{\ell_k} \le C_*k^d$。出于同样的原因，并利用 $2^{\ell_k}\delta_{\vec{\ell}} \le 2^{\ell_{k-1}}$，对 $\mathfrak{D}^k\gamma$ 的估计意味着 $\mathfrak{D}^{k-1}\gamma(y) \le (4 + c(4 + c(C_*k^d)^4))2^{\ell_{k-1}}$。因此，通过归纳可知，对于 $2 \le m \le k$，

$$\mathfrak{D}^m\gamma(y) \le \Big(c^{k+1-m}(C_*k^d)^4 + 4\sum_{j=0}^{k-m} c^j\Big)2^{\ell_m},$$

这使我们可以选择 c，且仅取决于 C_*， k、 d 并满足（3.5）。

现在，我们将 $\psi_{\vec{\ell}}$ 的支集分解为半径为 $c\delta_{\vec{\ell}}$、中心位于 $z \in c\delta_{\vec{\ell}}\mathbb{Z}^{d-1}$的球。如果 c 足够小，则（3.5）结合 $m = 3$ 意味着，对于每个满足 $\operatorname{supp}(\psi_{\vec{\ell}}) \cap \mathbb{B}_{c\delta_{\vec{\ell}}}(z) \ne \emptyset$的 z，存在满足 $\operatorname{supp}(\psi_{\vec{\ell}}) \cap \mathbb{B}_{c\delta_{\vec{\ell}}}(z)$ 的 $z' \in$，使得

$$|D^2_{v(z')}\gamma(y)| > \frac{2^{\ell_2}}{4d} \quad \forall y \in \mathbb{B}_{c\delta_{\vec{\ell}}}(z). \tag{3.6}$$

类似地，(3.5) 对 $y \in \mathbb{B}_{c\delta_{\vec{\ell}}}(z)$ 给出，

$$|\mathfrak{D}^m\gamma(y)| \sim 2^{\ell_m}, \quad m = 2, \dots, k-1.$$

注意，对于所有 $y \in \operatorname{supp}(\psi)$，都有 $\mathfrak{D}^k\gamma(y) \sim 2^{\ell_k}$。

因此，由命题 2.7，此类半径为 $c\delta_{\vec{\ell}}$ 的球的基数有常数倍 $\delta_{\vec{\ell}}^{2-d}$ 的上界。也就是说，

$$\#\Big(\Big\{\mathbb{B}_{c\delta_{\vec{\ell}}}(z) : z \in c\delta_{\vec{\ell}}\mathbb{Z}^{d-1},\ \operatorname{dist}(z, \operatorname{supp}(\psi_{\vec{\ell}})) \le c\delta_{\vec{\ell}}\Big\}\Big) \lesssim \delta_{\vec{\ell}}^{2-d}. \tag{3.7}$$

令 $\{\varphi_z\}_z$ 为从属于球族 $\{\mathbb{B}_{c\delta_{\vec{\ell}}}(z)\}$的单位分解。则对每个 z，由（3.6）、缩放以及沿着 $v(z'$应用范德科普特引理（对某个固定的 $z' \in \mathbb{B}_{c\delta_{\vec{\ell}}}(z)$），可得

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \mathrm{e}^{it\Gamma(y)\cdot\xi}\psi_{\vec{\ell}}(y)\varphi_z(y)\,\mathrm{d}y\Big| \lesssim (\lambda 2^{\ell_2}\delta_{\vec{\ell}}^2)^{-1/2}\delta_{\vec{\ell}}^{d-1}.$$

事实上，我们先作变量替换 $y \to \delta_{\vec{\ell}}\, y$，使得 $|D^2_{v(z')}(\gamma(\delta_{\vec{\ell}}y))| \sim 2^{\ell_2}\delta_{\vec{\ell}}^2$。因此，我们有 $|D^2_{v(z')}t\Gamma(\delta_{\vec{\ell}}\, y)\ \cdot \xi| \gtrsim \lambda 2^{\ell_2}\delta_{\vec{\ell}}^2$并且

$$|\partial_i(\psi_{\vec{\ell}}(\delta_{\vec{\ell}}y)\varphi_z(\delta_{\vec{\ell}}y))| \lesssim \sum_{m=2}^{k} \mathfrak{D}^{m+1}\gamma(y)2^{-\ell_m}\delta_{\vec{\ell}} \lesssim 1.$$

由 van der Corput 引理和缩放常数可得所需的不等式$\delta_{\vec{\ell}}^{d-1}$。结合基数（3.7），可得

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \mathrm{e}^{it\Gamma(y)\cdot\xi}\psi_{\vec{\ell}}(y)\ \mathrm{d}y\Big| \lesssim (\lambda 2^{\ell_2})^{-1/2},$$

这就是乘子的所需界。 □

3.2. **（(3.4)的证明）**现在，我们着重证明估计式（3.4）。在这种情况下，$|\langle\Gamma(y)\ \xi\rangle|$ 的大小取决于 $|\xi'|$的大小。为有效处理这一问题，我们进一步根据 ξ'的大小对 P_o 进行分解。定义算子$P_{o,\ j}$ 为

$$\widehat{P_{o,j}g}(\xi) = \beta_1\Big(\frac{|\xi'|}{20C_2\lambda 2^j}\Big)\widehat{g}(\xi).$$

由下述恒等式可得，

$$\beta_1(|\xi|\lambda^{-1})\Big(1-\beta_0\Big(\frac{|\xi'|}{20C_2\lambda 2^{\ell_2}}\Big)\Big) = \beta_1(|\xi|\lambda^{-1})\sum_{j\geq\ell_2}\beta_1\Big(\frac{|\xi'|}{20C_2\lambda 2^j}\Big),$$

容易验证$P_o = \sum_{\ell_2\leq j\leq 0} P_{o,\ j}$。注意到 ℓ_2 是一个负数，且j 的基数为 $|\ell_2|$。根据这一分解和三角不等式，只需证明存在常数 $c>0$ 使得

$$\|\sup_{1\leq t\leq 2}|A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}]P_\lambda P_{o,j}f|\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \lesssim 2^{c\ell_2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \text{ for all } \ell_2\leq j\leq 0. \tag{3.8}$$

当 $1<|\xi'|/20C_2\lambda 2^j<4$ 对于一个 $\ell_2\leq j\leq 0$时，由于 $|\xi_d\gamma(y)|\lesssim\lambda 2^{\ell_2}$，可以看出

$$|\langle\Gamma(y),\xi\rangle| \lesssim \lambda 2^j \quad \text{for } y\in\mathrm{supp}(\psi_{\vec{\ell}}).$$

与 $A[\psi_{\vec{\ell}}]P_\lambda P_c$的情形一样，所需的估计（3.8）是以下引理的直接推论。

引理 3.3。设 $\ell_2\leq j\leq 0$ 和 $1/2\leq t\leq 4$。则存在一个常数 $c>0$，使得

$$|m_{\vec{\ell}}(t\xi)| \lesssim 2^{c\ell_2}(\lambda 2^j)^{-1/2},$$

当 $\lambda\leq|\xi|\leq 4\lambda$ 和 $20C_2\lambda 2^j\leq|\xi'|\leq 80C_2\lambda 2^j$时。

证明。我们利用相位 $\xi'\cdot y+\xi_d\gamma(y)$的梯度下界进行分部积分。首先，我们验证相位的下界。由于我们有

$$20C_2\lambda 2^j<|\xi'|<80C_2\lambda 2^j, \quad \text{and} \quad |\partial_i\gamma(y)\xi_d|\leq 16C_2\lambda 2^{\ell_2}\leq 16C_2\lambda 2^j,$$

经过适当的旋转后，有 $|\xi_1+\partial_1\gamma(y)\xi_d|\sim\lambda 2^j$。利用分部积分和支撑条件 $|\mathrm{supp}(\psi_{\vec{\ell}})|\lesssim\delta_{\vec{\ell}}$，可得

$$|m_{\vec{\ell}}(t\xi)| \lesssim \min\{(\lambda 2^j)^{-1},\delta_{\vec{\ell}}\} \leq (\lambda 2^j)^{-1/2}\delta_{\vec{\ell}}^{1/2}.$$

分部积分除了主项（$\lambda 2^j$）$^{-1}$之外，还产生了一个额外因子 $\delta_{\vec{\ell}}^{-1}$，因为导数作用在 $\psi_{\vec{\ell}}$上。不过，因子 $\delta_{\vec{\ell}}^{-1}$ 得到了补偿

由支集大小 $|\mathrm{supp}(\psi_{\vec{\ell}})| \lesssim \delta_{\vec{\ell}}$所补偿。因此，根据观察到的 $\delta_{\vec{\ell}}^{k-2} \le 2^{\ell_2-\ell_3} \times \cdots \times 2^{\ell_{k-1}-\ell_k} \sim 2^{\ell_2}$，所需的不等式成立。□

4. Proof of Proposition 2.4: Smoothing estimates

我们通过考察以下两种情况来证明命题 2.4:

- $2^{\ell_m} < \lambda^{-1/2}$ 对于某些 $m = 2, \dots, k-1$。
- $2^{\ell_m} \ge \lambda^{-1/2}$ 对于所有 m。

在第一种情况下，$\mathrm{supp}(\psi_{\vec{\ell}})$ 足够小，因此对于任意 $p \ge 2$，我们可以根据 $\mathrm{supp}(\psi_{\vec{\ell}})$ 的大小，在频率局部化极大函数的 L^p 估计中获得足够的衰减。另一方面，在第二种情况下，需要进行精细的频率分解，最终得到所需的平滑估计。

4.1. $2^{\ell_m} < \lambda^{-\frac{1}{2}}$**对于某个** $m = 2, \dots, k-1$。回顾（2.6）和（2.7）。设 $2^{\ell_{m_0}} < \lambda^{-\frac{1}{2}}$ 对于某个 $2 \le m_0 \le k-1$。那么，我们有

$$\delta_{\vec{\ell}} \le (2^{\ell_{m_0}-\ell_{m_0+1}} \times \cdots \times 2^{\ell_{k-1}-\ell_k})^{\frac{1}{k-m_0}}.$$

由于 $2^{\ell_k} \sim 1$，我们有

$$|\mathrm{supp}(\psi_{\vec{\ell}})| \lesssim \lambda^{-\frac{1}{2(k-m_0)}} \le \lambda^{-\frac{1}{2(k-2)}}. \tag{4.1}$$

再次使用 $2^{\ell_k} \sim 1$，我们还得到

$$\delta_{\vec{\ell}} \le 2^{c(\ell_2-\ell_3)} 2^{2c(\ell_3-\ell_4)} \times \cdots \times 2^{(k-2)c(\ell_{k-1}-\ell_k)} \lesssim 2^{c(\ell_2+\cdots+\ell_k)}, \tag{4.2}$$

其中 $c + 2c + \cdots + (k-2)c = 1$。因此，我们有 $c = \frac{2}{(k-1)(k-2)}$。另一方面，根据闵可夫斯基不等式，我们得到

$$\|\zeta A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}] P_\lambda f\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1})} \lesssim |\mathrm{supp}(\psi_{\vec{\ell}})| \, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

其中 $\zeta(t) = \beta_1(t) + \beta_1(2t)$ 如前。对（4.1）和（4.2）取平均，得到

$$\|\zeta A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}] P_\lambda f\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1})} \lesssim \lambda^{-\frac{1}{4(k-2)}} 2^{\frac{c}{2}(\ell_2+\cdots+\ell_k)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

对于任意 $p \ge 1$。注意，引理 3.1 在处理局部极大平均的 $\lambda^{1/p}$-范数时，本质上会产生 L^p 损失

$$\sup_{1<t<2} |A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}] P_\lambda f|.$$

因此，根据平滑估计和引理 3.1，我们得到

$$\Big\| \sup_{1<t<2} |A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}] P_\lambda f| \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim \lambda^{-\varepsilon(p)} 2^{\frac{c}{2}(\ell_2+\cdots+\ell_k)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

对于某个 $\varepsilon(p) > 0$ 当 $p > 4(k-2)$ 时，这就给出了在此情形下的命题 2.4。

4.2. $2^{\ell_m} \ge \lambda^{-\frac{1}{2}}$**对所有** $m = 2, \dots, k-1$。对 t 变量进行傅里叶变换，我们将 $A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}] f(x, t)$ 写为

$$(2\pi)^{-d-1} \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} \Big(\iint_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-is(\langle \Gamma(y), \xi\rangle + \tau)} \psi_{\vec{\ell}}(y) \, \mathrm{d}y \mathrm{d}s \Big) \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{i(\langle x, \xi\rangle + t\tau)} \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau.$$

滥用记号，对于一般的符号 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(y, s, \xi, \tau) \in C_c^\infty(\mathbb{B}^{d-1}(0,1) \times (1/2,4) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$，我们记作

$$A_\Gamma[\mathfrak{a}] f(x,t) = \iint_{\mathbb{R}^{d+1}} \Big(\iint_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-is(\langle \Gamma(y), \xi\rangle + \tau)} \mathfrak{a} \, \mathrm{d}y \mathrm{d}s \Big) \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{i(\langle x, \xi\rangle + t\tau)} \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau.$$

那么，对于 $\mathfrak{a}_{\vec{\ell}}(y,s,\xi,\tau) = \psi_{\vec{\ell}}(y)\zeta(s)$，有 $\zeta A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}]f = A_\Gamma[\mathfrak{a}_{\vec{\ell}}]f$。

回忆一下，我们考虑的是 $A_\Gamma[\psi_{\vec{\ell}}]P_\lambda f(x,\ t)$，使得 $|\xi| \sim \lambda$。因此，若对某个常数 $C_\circ > 0$有 $\tau > C_\circ\lambda$，则有 $|\langle\Gamma(y)\ \xi\rangle+\tau| > \lambda$。于是，相应的核具有足够快的衰减，这使得对 $p \geq 1$可以得到任意的平滑估计。因此，我们将 τ限制在 $[-C_\circ\lambda, C_\circ\lambda]$内，只需考虑 $A_\Gamma[\mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}]f$，其中

$$\mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}(y,s,\xi,\tau) = \psi_{\vec{\ell}}(y)\zeta(s)\beta_1(\lambda^{-1}|\xi|)\beta_0((C_\circ\lambda)^{-1}\tau). \tag{4.3}$$

由引理 3.1、命题 2.4 可将问题归结为以下结果。

命题 4.1。对于 $p > 4(k-1)$ 以及 $\varepsilon > 0$，存在常数 $C > 0$ 和 $c > 0$，它们与 λ 和 ℓ无关，使得

$$\|A_\Gamma[\mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}]f\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1})} \leq C\lambda^{-\frac{2}{p}+\varepsilon}2^{c(\ell_2+\cdots\ell_k)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

为证明命题 4.1，我们考虑两部分，$A_\Gamma[\mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}\eta_\lambda]$ 和 $A_\Gamma[\mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}(1-\eta_\lambda)]$,其中

$$\eta_\lambda(y,\xi,\tau) = \beta_0\left(\lambda^{-\varepsilon_1}(\Gamma(y),1)\cdot(\xi,\tau)\right) \times \prod_{i=1}^{d-1}\beta_0\left(\lambda^{-\frac{1}{2}-\varepsilon_1}\partial_i\Gamma(y)\cdot\xi\right), \tag{4.4}$$

对于充分小的 ε_1，稍后选定。注意，$\mathfrak{D}^m\gamma$ 总是大于$\lambda^{-\frac{1}{2}}$，且 ε_1 可以仅依赖于 ε 和 d (见下文 (4.5)) 选取。于是有

$$A_\Gamma[\mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}] = A_\Gamma[\mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}\eta_\lambda] + A_\Gamma[\mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}(1-\eta_\lambda)].$$

我们将符号记为

$$\mathfrak{a}^{\mathrm{in}}_{\vec{\ell},\lambda} = \mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}\eta_\lambda, \quad \mathfrak{a}^{\mathrm{out}}_{\vec{\ell},\lambda} = \mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}(1-\eta_\lambda),$$

相应的乘子记为

$$\mathfrak{m}^*_{\vec{\ell},\lambda}(\xi,\tau) = \iint \mathrm{e}^{-is(\Gamma(y)\cdot\xi+\tau)}\mathfrak{a}^*_{\vec{\ell},\lambda}\ \mathrm{d}y\mathrm{d}s, \quad * = \mathrm{in},\ \mathrm{out}.$$

命题 4.1 直接由下文的引理 4.2 和引理 4.3 得出；这两个引理分别处理 外-符号和内-符号。对于 外-符号，我们利用 $(\Gamma,1)\cdot(\xi,\tau)$ 和 $\partial_j\Gamma\cdot\xi$的下界，从而得到该符号的振荡积分估计。对于 内-符号，我们将应用 [24], 中发展的平滑估计，该估计利用了局部化频率变量的几何性质。

引理 4.2. 设 $p \geq 2$ *and* $2^{\ell_m} \geq \lambda^{-1/2}$对所有 $m = 2,\ldots,k$均成立。那么，对于某个 $c > 0$，有

$$\left\|A_\Gamma[\mathfrak{a}^{out}_{\vec{\ell},\lambda}]f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1})} \lesssim \lambda^{-\frac{2}{p}}2^{c(\ell_2+\cdots+\ell_k)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

引理 4.3. 设 $p > 4(k-1)$ 且 $2^{\ell_m} \geq \lambda^{-1/2}$对所有 $m = 2,\ldots,k$均成立。那么存在 $C = C(d)$ $c = c(k,p) > 0$ 使得

$$\left\|A_\Gamma[\mathfrak{a}^{in}_{\vec{\ell},\lambda}]f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1})} \lesssim \lambda^{-\frac{2}{p}+C\varepsilon_1}2^{c(\ell_2+\cdots+\ell_k)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

注意，ε_1 是出现在（4.4）中的参数。因此，命题4.1 由引理 4.2 和 4.3 在选取

$$\varepsilon_1 = \varepsilon/C(d). \tag{4.5}$$

4.3. **引理 4.2 的证明**。引理 4.2的证明可通过在 L^2 和 L^∞ 估计之间进行插值来完成，而这两个估计分别由$\mathfrak{m}^{\text{out}}_{\vec{\ell}}$，$\lambda$ 的 L^∞-界以及关于（$\mathfrak{m}^{\text{out}}_{\vec{\ell}\lambda}$，）$^\vee$的 L^1-估计推出。也就是说，我们证明

$$\|A_\Gamma[\mathfrak{a}^{\text{out}}_{\vec{\ell},\lambda}]f\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})} \lesssim \lambda^{-1}2^{c(\ell_2+\cdots+\ell_k)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{4.6}$$

$$\|A_\Gamma[\mathfrak{a}^{\text{out}}_{\vec{\ell},\lambda}]f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{d+1})} \lesssim 2^{c(\ell_2+\cdots+\ell_k)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.7}$$

我们将在以下小节中给出这两个估计的证明。

4.3.1. 证明 (4.6)：L^∞-界，对于 $\mathfrak{m}^{out}_{\vec{\ell}\lambda}$，。我们将 $\mathfrak{a}^{\text{out}}_{\vec{\ell}}$，$\lambda$ 分解为两部分，具体取决于对某个$1 \le i \le d-1$，$|\Gamma(y)\cdot\xi+\tau| > \lambda^{\varepsilon_1}$还是 $|\partial_i\Gamma(y)\cdot\xi| > \lambda^{\frac12+\varepsilon_1}$。为此，定义

$$\mathfrak{a}^{\text{out},1}_{\vec{\ell},\lambda} = \mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}\cdot\big(1-\beta_0(\lambda^{-\epsilon_1}(\Gamma(y),1)\cdot(\xi,\tau))\big),$$
$$\mathfrak{a}^{\text{out},2}_{\vec{\ell},\lambda} = \mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}\cdot\big(\beta_0\left(\lambda^{-\varepsilon_1}(\Gamma(y),1)\cdot(\xi,\tau)\right)-\eta_\lambda(y,\xi,\tau)\big).$$

注意到$\mathfrak{a}^{\text{out}}_{\vec{\ell}\lambda} = \mathfrak{a}^{\text{out}}_{\vec{\ell}^{\,1}\lambda} + \mathfrak{a}^{\text{out}}_{\vec{\ell}^{\,2}\lambda}$。于是，(4.6)可化为证明

$$\|A_\Gamma[\mathfrak{a}^{\text{out},j}_{\vec{\ell},\lambda}]f\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})} \lesssim \lambda^{-1}2^{c(\ell_2+\cdots+\ell_k)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad j=1,2. \tag{4.8}$$

我们首先考虑符号 $\mathfrak{a}^{\text{out}}_{\vec{\ell}^{\,1}\lambda}$，并将相应的乘子记为 $\mathfrak{m}^{\text{out}}_{\vec{\ell}^{\,1}\lambda}$，其定义与前面类似。由于 $|\Gamma(y)\cdot\xi+\tau| > \lambda^{\varepsilon_1}$ 在 $\operatorname{supp}(\mathfrak{a}^{\text{out}}_{\vec{\ell}^{\,1}\lambda},)$ 上成立，且s对 $\mathfrak{a}^{\text{out}}_{\vec{\ell}^{\,1}\lambda}$，的导数有界于一个常数，可对 s变量进行分部积分，得到

$$|\mathfrak{m}^{\text{out},1}_{\vec{\ell},\lambda}| \lesssim \lambda^{-\varepsilon_1 N}\left|\operatorname{supp}_{(y,s)}(\mathfrak{a}^{\text{out},1}_{\vec{\ell},\lambda})\right|,$$

其中，我们记 $\operatorname{supp}_{(y,s)}\mathfrak{a} = \cup_{\xi,\tau}\operatorname{supp}(\mathfrak{a}(\cdot,\ \cdot,\ \xi,\ \tau))$。由 Plancherel 定理可得

$$\begin{aligned}\|A_\Gamma[\mathfrak{a}^{\text{out},1}_{\vec{\ell},\lambda}]f\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})} &\lesssim \Big(\int_{|\tau|\lesssim\lambda}\lambda^{-2\varepsilon_1 N}\left|\operatorname{supp}_{(y,s)}(\mathfrak{a}^{\text{out},1}_{\vec{\ell},\lambda})\right|^2\,\mathrm{d}\tau\Big)^{1/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\ &\lesssim \lambda^{-\varepsilon_1 N+\frac12}\left|\operatorname{supp}_{(y,s)}(\mathfrak{a}^{\text{out},1}_{\vec{\ell},\lambda})\right|\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

选取充分大的 N 使得 $\varepsilon_1 N > 3/2$，由支撑集大小估计（2.7）可得

$$\lambda^{-\varepsilon_1 N+\frac12}\left|\operatorname{supp}_{(y,s)}(\mathfrak{a}^{\text{out},1}_{\vec{\ell},\lambda})\right| \le \lambda^{-1}\delta_{\vec{\ell}}.$$

因此，由（4.8）可得所需的界（$_2j=1$，其中 4.2）。

现在我们关注符号 $\mathfrak{a}^{\text{out}}_{\vec{\ell}^{\,2}\lambda}$，。为验证（4.8）对 $j=2$ 成立，我们注意到，在 $\operatorname{supp}(\mathfrak{a}^{\text{out}}_{\vec{\ell}^{\,2}\lambda},)$ 上，

$$|\Gamma(y)\cdot\xi+\tau| \le 2\lambda^{\varepsilon_1} \quad\text{and}\quad |\partial_i\Gamma(y)\cdot\xi| > \lambda^{\frac12+\varepsilon_1} \tag{4.9}$$

对于某个 $1\le i\le d-1$。我们定义微分算子 $\mathcal{D}$ 为

$$\mathcal{D} = \frac{\nabla_y(\Gamma(y)\cdot\xi)\cdot\nabla_y}{|\nabla_y(\Gamma(y)\cdot\xi)|^2}.$$

经过 N 次分部积分后，我们得到

$$\Big|\iint \mathrm{e}^{-is(\Gamma(y)\cdot\xi+\tau)}(\mathcal{D}^*)^N(\mathfrak{a}^{\mathrm{out},2}_{\vec{\ell},\lambda})\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s\Big| \le \sup_{y,s}|(\mathcal{D}^*)^N(\mathfrak{a}^{\mathrm{out},2}_{\vec{\ell},\lambda})| \times |\mathrm{supp}_{(y,s)}(\mathfrak{a}^{\mathrm{out},2}_{\vec{\ell},\lambda})|.$$

利用观察 $|\mathrm{supp}_{(y,s)}(\mathfrak{a}^{\mathrm{out},\vec{\ell}\,\lambda^{2},\cdot})| \lesssim \delta_{\vec{\ell}}$ 以及（4.2），要在 $j=2$的情形下证明（4.8），只需证明

$$|(\mathcal{D}^*)^N(\mathfrak{a}^{\mathrm{out},2}_{\vec{\ell},\lambda})| \lesssim \lambda^{-1}. \tag{4.10}$$

为了估计 $(\mathcal{D}^*)^N(\mathfrak{a}^{\mathrm{out},\vec{\ell}\,\lambda^{2},\cdot})$，回顾（4.3）和（4.4，可得

$$\mathfrak{a}^{\mathrm{out},2}_{\vec{\ell},\lambda} = \mathfrak{b}(s,\xi,\tau)\psi_{\vec{\ell}}(y)\beta_0\left(\lambda^{-\varepsilon_1}(\Gamma(y),1)\cdot(\xi,\tau)\right)\Big(1-\prod_{i=1}^{d-1}\beta_0(\lambda^{-\frac{1}{2}-\varepsilon_1}\partial_i\Gamma(y)\cdot\xi)\Big),$$

其中 $\mathfrak{b}(s,\xi,\tau)=\zeta(s)\beta_1(\lambda^{-1}|\xi|)\beta_0((C_\circ\lambda)^{-1}\tau)$。我们需要检查 $\mathfrak{a}^{\mathrm{out},\vec{\ell}\,\lambda^{2},\cdot}$ 中每个分量的导数，以及 $\mathcal{D}$ 的定义中的项 $\nabla_y(\Gamma(y)\cdot\xi)\times|\nabla_y(\Gamma(y)\cdot\xi)|^{-2}$ 关于 y 的导数。首先有

$$|\partial_y^\alpha\psi_{\vec{\ell}}| \lesssim \delta_{\vec{\ell}}^{-|\alpha|}.$$

其次，我们注意到，在 $\mathrm{supp}(\mathfrak{a}^{\mathrm{out},\vec{\ell}\,\lambda^{2},\cdot})$ 上，

$$|\partial_y^\alpha(\lambda^{-\varepsilon_1}(\Gamma,1)\cdot(\xi,\tau))| \lesssim (\lambda^{-\varepsilon_1}|\nabla_y(\Gamma\cdot\xi)|)^{|\alpha|}, \quad |\alpha|\ge 0, \tag{4.11}$$

$$|\partial_y^\alpha(\lambda^{-\frac{1}{2}-\varepsilon_1}\partial_i\Gamma\cdot\xi)| \lesssim (\lambda^{-\varepsilon_1}|\nabla_y(\Gamma\cdot\xi)|)^{|\alpha|}, \quad |\alpha|\ge 1. \tag{4.12}$$

确实，（4.11）对 $|\alpha|=0$ 是平凡的，1. 对于 $|\alpha|\ge 2$，我们得到

$$|\partial_y^\alpha((\Gamma,1)\cdot(\xi,\tau))| \lesssim \lambda \le (\lambda^{-\varepsilon_1}|\nabla_y(\Gamma\cdot\xi)|)^{|\alpha|}, \tag{4.13}$$

由于 $|(\xi,\tau)|\lesssim\lambda$、（2.2）以及 $|\nabla_y(\Gamma\cdot\xi)|>\lambda^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}$。类似于（4.11），（4.12）可由（4.13）直接推出。因此我们有

$$|\partial_y^\alpha\mathfrak{a}^{\mathrm{out},2}_{\vec{\ell},\lambda}| \lesssim \sum_{\alpha=\alpha_1+\alpha_2}\delta_{\vec{\ell}}^{-|\alpha_1|}\times(\lambda^{-\varepsilon_1}|\nabla_y(\Gamma\cdot\xi)|)^{|\alpha_2|}. \tag{4.14}$$

另一方面，由（4.13），对于 $|\alpha|\ge 0$ 和 $i=1$，我们还得到 $\cdots d-1$，

$$\Big|\partial_y^\alpha\Big(\frac{\partial_i\Gamma\cdot\xi}{|\nabla_y\Gamma\cdot\xi|^2}\Big)\Big| \lesssim \frac{(\lambda^{-\varepsilon_1}|\nabla_y(\Gamma\cdot\xi)|)^{|\alpha|}}{|\nabla_y(\Gamma\cdot\xi)|}. \tag{4.15}$$

现在，可以计算 $\mathfrak{a}^{\mathrm{out},\vec{\ell}\,\lambda^{2},\cdot}$ 的导数，

$$|(\mathcal{D}^*)^N(\mathfrak{a}^{\mathrm{out},2}_{\vec{\ell},\lambda})| \lesssim \sum_{|\alpha_1|+\cdots|\alpha_{N+1}|=N}|\partial_y^{\alpha_{N+1}}\mathfrak{a}^{\mathrm{out},2}_{\vec{\ell},\lambda}|\prod_{i=1}^{N}\Big|\partial_y^{\alpha_i}\Big(\frac{\nabla_y\Gamma\cdot\xi}{|\nabla_y\Gamma\cdot\xi|^2}\Big)\Big|.$$

由（4.14）和（4.15），右侧的被加项小于某个常数倍的

$$\begin{aligned}
&\sum_{\beta_1+\beta_2=\alpha_{N+1}} \delta_{\vec{\ell}}^{-|\beta_1|} \times (\lambda^{-\varepsilon_1}|\nabla_y(\Gamma\cdot\xi)|)^{|\beta_2|} \prod_{i=1}^{N} \left|\partial_y^{\alpha_i}\left(\frac{\nabla_y\Gamma\cdot\xi}{|\nabla_y\Gamma\cdot\xi|^2}\right)\right| \\
\lesssim &\sum_{\beta_1+\beta_2=\alpha_{N+1}} \delta_{\vec{\ell}}^{-|\beta_1|} \times (\lambda^{-\varepsilon_1}|\nabla_y(\Gamma\cdot\xi)|)^{|\beta_2|} \frac{(\lambda^{-\varepsilon_1}|\nabla_y(\Gamma\cdot\xi)|)^{|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_N|}}{|\nabla_y(\Gamma\cdot\xi)|^N} \\
= &\sum_{\beta_1+\beta_2=\alpha_{N+1}} \delta_{\vec{\ell}}^{-|\beta_1|} \lambda^{-\varepsilon_1(N-|\beta_1|)} |\nabla_y(\Gamma\cdot\xi)|^{-|\beta_1|}.
\end{aligned}$$

利用（4.9），可得

$$\delta_{\vec{\ell}}^{-|\beta_1|} \lambda^{-\varepsilon_1(N-|\beta_1|)} |\nabla_y(\Gamma\cdot\xi)|^{-|\beta_1|} \lesssim (\lambda^{\frac{1}{2}}\delta_{\vec{\ell}})^{-|\beta_1|}\lambda^{-\varepsilon_1 N},$$

这意味着

$$|(\mathcal{D}^*)^N(\mathfrak{a}^{\mathrm{out},2}_{\vec{\ell},\lambda})| \lesssim \sum_{|\beta_1|\le N} (\lambda^{\frac{1}{2}}\delta_{\vec{\ell}})^{-|\beta_1|}\lambda^{-\varepsilon_1 N}.$$

由 $\lambda^{-1/2} \le 2^{\ell_m}$ 对所有 $m = 2, \ldots\ldots, k$，我们有 $\delta_{\vec{\ell}} \gtrsim \lambda^{-1/2}$。因此，选择 4.10 后即可得到式（ N 充分大。

4.3.2. （(4.7) 的证明：关于 $\mathfrak{a}^*_{\vec{\ell},\lambda}$ 的核估计。迄今为止，符号的估计只能得到 L^2 估计。所需的 L^p 界可通过基于核估计的 L^∞ 界得到。由于之后还需要 *in* 符号的核估计，我们给出 *in* 符号和 *out* 符号核的 L^1 估计。定义 $K^*_{\vec{\ell},\lambda}$ 对于

$*=$ in、out，如

$$\begin{aligned}
K^*_{\vec{\ell},\lambda}(x,t) &= \int \mathcal{K}[\mathfrak{a}^*_{\vec{\ell},\lambda}](x,t;y)\,\mathrm{d}y, \\
\mathcal{K}[\mathfrak{a}^*_{\vec{\ell},\lambda}](x,t;y) &:= \iiint \mathrm{e}^{2\pi i((x-s\Gamma(y))\cdot\xi+(t-s)\tau)}\mathfrak{a}^*_{\vec{\ell},\lambda}(y,s,\xi,\tau)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

于是 $K^*_{\vec{\ell},\lambda}$ 是乘子 $\mathfrak{m}^*_{\vec{\ell},\lambda}$ 的傅里叶逆变换，并满足以下引理。

引理4.4。对于 $*=$ *in,out*，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^d} |K^*_{\vec{\ell},\lambda}|\,\mathrm{d}x \lesssim |\mathrm{supp}(\psi_{\vec{\ell}})|.$$

根据引理 4.4 和杨氏不等式，可以很容易得到 L^∞ 关于 $*=$in, out 的界，

$$\|A_\Gamma[\mathfrak{a}^*_{\vec{\ell},\lambda}]f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{d+1})} \lesssim |\mathrm{supp}(\psi_{\vec{\ell}})|\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim \delta_{\vec{\ell}}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.16}$$

于是引理4.2 可直接由在 L^2 界（4.8）和L^∞ 界（4.16）之间进行插值，并结合（4.2）得到。

引理的证明 *4.4*。注意 $\mathfrak{a}^{\mathrm{in}}_{\vec{\ell},\lambda} = \mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}\eta_\lambda$，$\mathfrak{a}^{\mathrm{out}}_{\vec{\ell},\lambda} = \mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda} - \mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}\eta_\lambda$，分别如此。要证明引理4.4，只需证明

$$\iint \left|\mathcal{K}[\mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}](x,t;y)\right|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\ \iint \left|\mathcal{K}[\mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}\eta_\lambda](x,t;y)\right|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \lesssim |\mathrm{supp}(\psi_{\vec{\ell}})|.$$

对于核 $\mathcal{K}[\mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}](x,\ t;y)$ 的积分，有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left|\mathcal{K}[\mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}](x,t;y)\right|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ \lesssim&\int\iint\left|\psi_{\vec{\ell}}(y)\zeta(s)\lambda^d\widehat{\beta_1(|\cdot|)}\left(\lambda(x-s\Gamma(y))\right)\lambda\widehat{\beta}_0(C_\circ\lambda(t-s))\right|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\\ \lesssim&\int_{\mathbb{R}^{d-1}}|\psi_{\vec{\ell}}(y)|\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

注意，关于 x 和 s 的积分无关紧要，因为 β_0，β_1 是 C_c^∞函数。

对于 $\iint|\mathcal{K}[\mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}\eta_\lambda]|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$，我们回顾最后一位作者的以下引理 [24]。

引理 4.5 ([24], 引理 2.4。）. 设 $g:\ \mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个满足$|g|\le 1$的函数，并令 $\mathfrak{a}(y,s,\xi,\tau)=g(y,s)\beta_1(\lambda^{-1}|\xi|)\beta_0((C_\circ\lambda)^{-1}\tau)\eta_\lambda(y,\xi,\tau)$。于是有

$$\int|\mathcal{K}[\mathfrak{a}](x,t;y)|\,\mathrm{d}x\lesssim 1.$$

由引理 4.5 结合 $g(y,s)=\zeta(s)\psi_{\vec{\ell}}(y)$，可得

$$\iint|\mathcal{K}[\mathfrak{a}_{\vec{\ell},\lambda}\eta_\lambda]|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\lesssim\int_{\mathbb{R}^{d-1}}|\psi_{\vec{\ell}}(y)|\,\mathrm{d}y$$

如所需。 □

4.4. 引理 4.3的证明。 对于 in-符号 $\mathfrak{a}^{\mathrm{in}}_{\vec{\ell},\ \lambda}$，我们引入 $A_\Gamma[\mathfrak{a}^{\mathrm{in}}_{\vec{\ell},\lambda}]$ 的平滑估计：对于某个 p，用具有关于 ℓ_2，...，ℓ_k衰减的 λ 表示。我们注意到，in-符号的分解使我们能够考虑局部几何意义下受限于锥面上的频率变量（ξ，τ）。因此，利用这种局部几何，我们可以直接应用由解耦不等式导出的某些平滑估计。

回顾一下，我们需要证明

$$\left\|A_\Gamma[\mathfrak{a}^{\mathrm{in}}_{\vec{\ell},\lambda}]f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1})}\lesssim\lambda^{-\frac{2}{p}+C\varepsilon_1}2^{c(\ell_2+\cdots+\ell_k)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\tag{4.17}$$

对于 $p>4(k-1)$ 和 $2^{\ell_m}\ge\lambda^{-1/2}$，对所有 $m=2$，...，k，满足 $C=C(d)$ $c=c(k,p)>0$。在 [24, 命题 3.2], 中，已经证明存在一个常数 C，使得（4.17）对 $c=0$ 和 $p>\max\{4(k-1)\ 6\}$ 成立。由于我们假设 $k\ge 3$，因此有 $\max\{4(k-1)\ 6\}=4(k-1)$。另一方面，由（4.2）和（4.16），我们有

$$\left\|A_\Gamma[\mathfrak{a}^{\mathrm{in}}_{\vec{\ell},\lambda}]f\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{d+1})}\lesssim 2^{c(\ell_2+\cdots+\ell_k)}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)},$$

对于某个 $c>0$。因此，将此结果与（4.17）进行插值，结合 $c=0$ 即可得到所需的估计。

注 4.6. 在 [24, 命题3。2] 中出现的一个符号与$\mathfrak{a}^{in}_{\vec{\ell},\ \lambda}$略有不同。具体而言，我们对 ψ 的支集进行分解，使得 $\mathfrak{D}^m\gamma(y)\ \sim\ 2^{\ell_m}$成立；而 [24] 的分解则对应于尺度 $\mathfrak{D}^m\gamma(y)\sim\lambda^{-1/2}2^{\ell_m}$。在 $\lambda^{1/2}2^{\ell_m}$ 的证明中用 2^{ℓ_m} 替代 [24, 命题 32], 即可轻松弥补这一差异，从而得到 (4.17)，其中 $c=0$。

5. Maximal estimates, sublevel sets, and Fourier decay

本节中，我们证明定理 1.5。为此，我们首先研究 L^p 极大函数界与次水平集估计之间的相互作用。此外，我们将由 Iosevich– Sawyer 的一个结果导出的经典次水平集估计加以推广 [17]，使这些估计在任意仿射函数平移下仍一致成立。其次，我们调整 Basu–Guo– Zhang–Zorin-Kranich 的驻点集方法 [1]，以估计解析超曲面上测度的傅里叶变换。结合驻点集方法与推广后的次水平集估计，我们得到所需的振荡积分估计，也就是解析曲面的傅里叶衰减。

如上所述，为了继续推进，我们首先对定理 1.5 作一个简单的约化。由超曲面 Γ 的紧致性，问题归结为 Γ 是解析函数 γ 在开集 $U \subset \mathbb{R}^{d-1}$ 上的图形 $U \to \mathbb{R}$ 这一情形。在此设定下，相应的极大算子为

$$M_\Gamma[\mathbb{1}_U]f(x) := \sup_{t>0} \Big| \int_U f\left(x' - ty, x_d - t\gamma(y)\right) \, \mathrm{d}y \Big|, \quad x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

在 $L^p(\mathbb{R}^d$ 上有界，其中 $p > p_{cr}$，这是由定理 1.5 的假设得到的。在此假设下，要证明定理 1.5，只需证明

$$|\mathcal{F}[\mu[\psi]](\xi)| \lesssim |\xi|^{-1/p},$$

只要 $\psi \in C_c^\infty(U$ 在一个开集上恒为零，该开集包含所有使得 (y $(y, \gamma(y))$ 为非横截的点（定义见 (1.2) 中的 $\mu[\psi]$）。关于ψ 的这一条件，可以等价地用以下量来表示:

$$c_\psi := \inf_{v \in \mathrm{supp}(\psi)} |\nabla\gamma(v) \cdot v - \gamma(v)| > 0.$$

事实上，对于每个 v，该量

$$c_v := -\gamma(v) + \nabla\gamma(v) \cdot v,$$

当且仅当 $(v,$ $\gamma(v))$ 是非横截点时为零，否则非零。因此，要求 ψ 在非横截部分附近为零，等价于假设 $c_\psi > 0$。因此，定理1.5 可由以下定理推出。

定理 5.1。设 $d \geq 2$、$p_{cr} \geq 1$、γ 是开集 $U \subset \mathbb{B}_1^{d-1}(0)$ 上的解析函数，且 $\psi \in C_c^\infty(U)$ 满足 $c_\psi > 0$。假设 $M_\Gamma[\mathbb{1}_U]$ 在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上有界，对于 $p > p_{cr}$ 成立。则对于任意 $p > p_{cr}$，有

$$|\mathcal{F}[\mu[\psi]](\xi)| \lesssim (c_\psi|\xi|)^{-\frac{1}{p}}.$$

在本节余下部分，我们将致力于证明定理 5.1。为此，我们首先利用极大估计建立某些次水平集估计，然后借助这些次水平集估计得到所需的傅里叶衰减。

5.1.**从极大估计到次水平集估计**。Iosevich–Sawyer[17, 定理 2] 表明，$M_\Gamma[\mathbb{1}_U]$ 有界于 L^p 仅当对 Γ 在 $(y_H, \gamma(y_H))$ 处每个不经过原点的切超平面 H，都有 $\mathrm{dist}(\cdot, H)^{-1} \in L^{1/p}{}_{\mathrm{loc}}(\Gamma, \mathrm{d}\mu)$

原点。设 χ 是 y_H 周围的截断函数。那么，$\operatorname{dist}(\cdot, H)^{-1/p}$ 的局部可积性等价于以下不等式：

$$\int |\gamma(y)-\gamma(y_H)-\nabla\gamma(y_H)\cdot(y-y_H)|^{-1/p}\chi(y)\,\mathrm{d}y \le C. \tag{5.1}$$

事实上，考虑一点 $y_H \in \mathbb{B}_1^{d-1}(0)$ 以及一个超平面 H 与 Γ 相切于 $(y_H,\gamma(y_H))$，使得 $(y,y_d)\in H$满足

$$y_d=\gamma(y_H)+\nabla\gamma(y_H)\cdot(y-y_H).$$

对于 Γ上的一点 $(y,\gamma(y))$，函数 $\operatorname{dist}((y,\gamma(y)),H)$ 可表示为

$$|(y-y_H,\gamma(y)-\gamma(y_H))\cdot \boldsymbol{n}_H|,$$

其中 $\boldsymbol{n}_H$ 表示 H的单位法向量。注意到，$\boldsymbol{n}_H$ 是将 $(\nabla\gamma(y_H),-1)$ 归一化后得到的，并且有

$$|(y-y_H,\gamma(y)-\gamma(y_H))\cdot(\nabla\gamma(y_H),-1)| = |\gamma(y)-\gamma(y_H)-\nabla\gamma(y_H)\cdot(y-y_H)|.$$

因此，$\operatorname{dist}((y,\gamma(y)),H)$ 与 $|\gamma(y)-\gamma(y_H)-\nabla\gamma(y_H)\cdot(y-y_H)|$ 仅相差一个依赖于 $|(\nabla\gamma(y_H),-1)|$ 的常数。此外，(5.1) 根据切比雪夫不等式推出以下次水平集估计：

$$|\{y\in\operatorname{supp}(\chi):|\gamma(y)-\gamma(y_H)-\nabla\gamma(y_H)\cdot(y-y_H)|\le\lambda^{-1}\}| \le C\lambda^{-1/p}. \tag{5.2}$$

反之，一般而言并不成立。（见 [8, 第 1 节。1]）

为了获得 $\mu[\psi]$的傅里叶衰减，我们需要对相位为 $\lambda(\gamma(y)+u\cdot y)$的振荡积分给出关于 u的一致衰减估计。本小节的主要目标是将(5.1)和(5.2)推广为下文的(5.3)和(5.10)，它们与一致估计密切相关。为此，我们利用如下观察：极大平均算子的算子范数在以下线性变换下保持不变：L^p 线性变换T：$(y,\ y_d)\mapsto(y,\ y_d+u\cdot y)$。更具体地说，有 $\|f\circ T\|_p=\|f\|_p$并且

$$\|M_\Gamma[\mathbb{1}_U](f\circ T)\|_p = \|M_{\Gamma_u}[\mathbb{1}_U]f\circ T\|_p = \|M_{\Gamma_u}[\mathbb{1}_U]f\|_p,$$

其中，Γ_u表示超曲面 $\{(y,\ \gamma(y)+u\cdot y):\ y\in U\}$。因此，$M_{\Gamma_u}[\mathbb{1}_U]$在 $L^p(\mathbb{R}^d)$上的算子范数与 $M_\Gamma[\mathbb{1}_U]$相同。直观地说，这种不变性反映了映射 T 保持了底层的横截结构，而这会影响 $M_\Gamma[\mathbb{1}_U]$的 L^p 有界性。

利用上述观察，我们证明以下定理，它给出了（5.1）在仿射平移下的一致估计。

定理 5.2。设 $p_0>1$ 和 $U\subset\mathbb{B}_1^{d-1}(0)$ 是一个开集。假设 $M_\Gamma[\mathbb{1}_U]$在 $L^{p_0}(\mathbb{R}^d)$上有界。那么，对于任意 $p>p_0$ 和 $v\in U$，存在 v 的一个邻域U_v，使得对所有 $u\in\mathbb{R}^{d-1}$，

$$\int_{U_v}|\gamma(y)-\gamma(v)-\nabla\gamma(v)\cdot(y-v)+u\cdot(y-v)|^{-1/p}\,\mathrm{d}y \le C|c_v|^{-1/p}, \tag{5.3}$$

其中 C 是一个与 u、v无关的隐含常数。

我们可以应用定理 5.2 ，从而一致地得到（5.3），因为 $|c_v|\ge c_\psi$ 对所有$v\in\operatorname{supp}(\psi)$ 都成立。我们注意到，Iosevich–Sawyer 也证明了（5.3），但其中对仿射项的依赖并未明确给出。也就是说，定理 5.2 给出了关于仿射项 $u\cdot(y-v)$ 的一致上界，这对我们证明定理 5.1至关重要。

证明。由于当 $c_v = 0$时（5.3）是平凡的， $c_v \neq 0$，因此我们假设 $|u| \geq |c_v|/10$ 或 $|u| < |c_v|/10$。证明分为两种情形：令 U_v 为一个以 v 为中心的小球，满足

$$|\nabla\gamma(y) - \nabla\gamma(v)| \leq |c_v|/100, \tag{5.4}$$

对所有 $y \in U_v$ 均成立。由泰勒定理可知，这样的球确实存在。于是， $\gamma(y) - \gamma(v) - (\nabla\gamma(v) - u) \cdot (y - v)$ 关于 y 的梯度满足下界

$$|\nabla\gamma(y) - \nabla\gamma(v) + u| \gtrsim |c_v|,$$

对 $y \in U_v$。由富比尼定理以及梯度的下界，我们可以证明

$$\int_{U_v} |\gamma(y) - \gamma(v) - \nabla\gamma(v) \cdot (y - v) + u \cdot (y - v)|^{-1/p} \, \mathrm{d}y \lesssim \int_{-1}^{1} |c_v t|^{-1/p} \, \mathrm{d}t,$$

由此得到 (5.3)。事实上，由 (5.4)，存在一个单位向量 ω 满足 $|(\nabla\gamma(y) - \nabla\gamma(v) + u) \cdot \omega| \gtrsim |c_v|$ 对所有 $y \in U_v$均成立。经过适当旋转后，可以假设

$$|(\nabla\gamma(y) - \nabla\gamma(v) + u) \cdot e_1| \gtrsim |c_v|. \tag{5.5}$$

对于固定的 $y_2, \cdots, y_{d-1}$，由于集合 $\{y_1 : y \in U_v\}$ 是一个区间，因此存在 y_1^* 满足

$$\inf_{y_1 : y \in U_v} |\gamma_v(y - v) + u \cdot (y - v)| = |\gamma_v(y^* - v) + u \cdot (y^* - v)|,$$

其中 $y^* = (y_1^*, y_2, \cdots, y_{d-1})$， γ_v 由下式给出

$$\gamma_v(y) := \gamma(y + v) - \gamma(v) - \nabla\gamma(v) \cdot y.$$

于是，由（5.5），可得

$$\int_{y_1 : y \in U_v} |\gamma_v(y - v) + u \cdot (y - v)|^{-1/p} \, \mathrm{d}y_1 \lesssim \int_{-2}^{2} |c_v(y_1 - y_1^*)|^{-1/p} \, \mathrm{d}y_1,$$

由此，利用富比尼定理即可得到所需的不等式。

现在，我们关注第二种情形 $|u| < c_v/10$。在这种情形下，我们还假设 U_v 满足 $U_v \subset U$，

$$\begin{aligned} |\gamma_v(y - v)| &\leq |c_v|/100, \\ |y - v| &\leq 1/100, \end{aligned} \tag{5.6}$$

对所有 $y \in U_v$ 均成立。根据泰勒定理，可以选取这样的球 U_v。平移至原点后，可认为 y 包含于 $U_v' := -v + U_v$ 中，其中 $= -v + U_v$是以原点为中心的球。也就是说，我们考虑如下极大算子：

$$\widetilde{M}_{u,v} f(x) = \sup_{t>0} \left| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f\left(x' - t(y + v), x_d - t(\gamma_v(y) + u \cdot (y + v) - c_v)\right) \mathbb{1}_{U_v'}(y) \, \mathrm{d}y \right|.$$

注意，$\|M_{u,v} f\|_{p_0} \leq \|M_{u,v}|f|\|_{p_0} \leq \|M_\Gamma[\mathbb{1}_U]|f|\|_{p_0}$。因此，范数 $\|M_{u,v} f\|_{p_0}$关于 $\|f\|_{p_0}$一致地被 u， v的常数倍所控制。接下来，我们证明（5.3）左边被 $\|M_{u,v} f\|_{p_0}$ 所控制，其中 f为某个特定值。此外，选取合适的 f 并进行仔细分析后，我们得出（5.3）确实成立。

准确地说，我们取

$$f(x', x_d) = |x_d|^{-1/p} \mathbb{1}_{\mathbb{B}_1^{d-1}(0)}(x') \mathbb{1}_{[-1,1]}(x_d/c_v). \tag{5.7}$$

注意，$\|f\|_{p_0}$受 $|c_v|^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}(1-\frac{p_0}{p})^{-1/p_0}$的一个常数倍控制。现在，当 x_d/c_v 为负时，选择

$$t=-x_d/(c_v-u\cdot v).$$

由 $|u|<c_v/10$ 和 $|v|<1$ 可知，$c_v-u\cdot v$ 和 c_v 同号，因此其为正。根据这一观察，对于这样的 x，并取 t，极大$\widetilde{\ }$函数 $M_{u,\ v}f(x)$ 有如下下界：

$$\int_{U_v'}(t|\gamma_v(y)+u\cdot y|)^{-1/p}\mathbb{1}_{\mathbb{B}_1^{d-1}(0)}(x'-t(y+v))\mathbb{1}_{[-1,1]}(-t(\gamma_v(y)+u\cdot y)/c_v)\mathrm{d}y.$$

此外，我们可以证明

$$\widetilde{M}_{u,v}f(x)\geq\mathbb{1}_{\mathbb{B}_{1/2}^{d-1}(0)}(x')\mathbb{1}_{[-10^{-1},0)}(x_d/c_v)\int_{U_v'}(t|\gamma_v(y)+u\cdot y|)^{-1/p}\,\mathrm{d}y. \tag{5.8}$$

事实上，对于 $x_d/c_v\in[-10^{-1},0)$、$y\in U_v'$、$v\in V\subset\mathbb{B}_1^{d-1}(0)$ 和 $u\in\mathbb{B}_{|c_v|/10}^{d-1}(0)$，有

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\mathbb{B}_1^{d-1}(0)}(x'-t(y+v))\geq&\mathbb{1}_{\mathbb{B}_{1/2}^{d-1}(0)}(x'),\\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(-t(\gamma_v(y)+u\cdot y)/c_v)\geq&1,\end{aligned} \tag{5.9}$$

因为 $|x_d|/2\leq|c_v|t\leq 2|x_d|$ 且 (5.6) 成立。

在对两边取 L^{p_0}-范数后，由 (5.8) 可得

$$\|\widetilde{M}_{u,v}f\|_{p_0}\gtrsim|c_v|^{1/p_0}(1-\frac{p_0}{p})^{-1/p_0}\int_{U_v'}|\gamma_v(y)+u\cdot y|^{-1/p}\,\mathrm{d}y.$$

根据 $M_\Gamma[\mathbb{1}_U]$ 的有界性，我们有

$$\|\widetilde{M}_{u,v}f\|_{p_0}\leq K\|f\|_{p_0}\lesssim K|c_v|^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}(1-\frac{p_0}{p})^{-1/p_0},$$

其中 K 表示满足 $\|M_\Gamma[\mathbb{1}_U]\|_{p_0\to p_0}\leq K$ 的常数。因此，我们得出

$$\int_{U_v'}|\gamma_v(y)+u\cdot y|^{-1/p}\,\mathrm{d}y\leq CK|c_v|^{-\frac{1}{p}},$$

只要 $u\in\mathbb{B}_{|c_v|/10}^{d-1}(0)$，便可得到 (5.3)。 □

一旦有了 (5.3)，便可直接应用切比雪夫不等式，得到相应的次水平集估计。下文将得到这些估计的一个更强版本，该版本在对原函数作任意常数平移时仍然一致成立。这种关于平移的一致性对于下一节的结果至关重要。

定理 5.3。在定理 5.2的假设下，对于任意 $p>p_0$ 和 $v\in U$，存在 U_v 的一个邻域 v，使得对所有 $\lambda\geq 1$，$u\in\mathbb{R}^{d-1}$以及 $\beta\in\mathbb{R}$，

$$|\{y\in U_v:|\gamma(y)+u\cdot y-\beta|\leq\lambda^{-1}\}|\lesssim|c_v|^{-1/p}\lambda^{-1/p}. \tag{5.10}$$

这里，隐含常数与 λ,u,v,β 无关。

证明。与定理5.2的证明中一样，我们选取 U_v 为一个以 v为球心且满足（5.4）和（5.6）的球。当 $|u+\nabla\gamma（v）|\geq|c_v|/10$时，与定理 5.2 证明的第一部分中相同的论证表明

$$\int_{U_v}|\gamma(y)+u\cdot y-\beta|^{-1/p}\,\mathrm{d}y\lesssim|c_v|^{-1/p}.$$

因此，所需结论由切比雪夫不等式得出。

对于 $|u+\nabla\gamma（v）|<|c_v|/10$，我们按照 $|u|<|c_v|/10$定理5.2证明中的情形进行处理，但对 t作出不同选择。具体而言，令$\widetilde{u}=u+\nabla\gamma（v），并令\ \beta=\beta+c_v-\widetilde{u}\cdot v$，从而有

$$\gamma(y)+u\cdot y-\beta=\gamma_v(y-v)+\widetilde{u}\cdot(y-v)-\widetilde{\beta}. \tag{5.11}$$

在 U_v上，我们注意到 $|\gamma_v（y-v）+\widetilde{u}\cdot（y-v）|<|c_v|/10$。这意味着 $|\{y\in U_v:\ |\gamma（y）+u\cdot y-\beta|\leq\lambda^{-1}\}|=0$ 只要 $|\beta|\geq|c_v|/5$ 且 $\lambda\geq100|c_v|^{-1}$。由于当 5.10为平凡情况时 $\lambda\leq100|c_v|^{-1}$，为了建立所需不等式，只需考虑以下情形

$$|\widetilde{\beta}|<|c_v|/5.$$

在此假设下，我们得到 $|c_v-\widetilde{u}\cdot v-\beta|\sim|c_v|$，这保证了定理5.2 证明中的论证在采用修改后的选择

$$t=-x_d/(c_v-\widetilde{u}\cdot v-\widetilde{\beta}).$$

注意，对于此 t，我们有

$$x_d-t(\gamma_v(y)+\widetilde{u}\cdot(y+v)-c_v)=-t(\gamma_v(y)+\widetilde{u}\cdot y-\widetilde{\beta}).$$

取 t时，对于由 (5.7) 给出的函数 f，我们可以验证 $M_{\widetilde{u},\ v}f$ 大于

$$\mathbb{1}_{\mathbb{B}^{d-1}_{1/2}(0)}(x')\mathbb{1}_{[-10^{-1},0)}(x_d/c_v)\int_{U'_v}(t|\gamma_v(y)+\widetilde{u}\cdot y-\widetilde{\beta}|)^{-1/p}\,\mathrm{d}y.$$

事实上，对于满足 x 的 $x_d/c_v\in[-10^{-1},0)$，有 (5.9) 以及

$$\mathbb{1}_{[-1,1]}(-t(\gamma_v(y)+\widetilde{u}\cdot y-\widetilde{\beta})/c_v)\geq1,$$

只要 $\widetilde{u}\in\mathbb{B}^{d-1}_{|c_v|/10}(0)$、$|\widetilde{\beta}|\leq5^{-1}|c_v|$和 $y\in U'_v$成立。那么，由于 $M_\Gamma[\mathbb{1}_U]$的 L^{p_0}有界性，可得

$$\int_{U'_v}|\gamma_v(y)+\widetilde{u}\cdot y-\widetilde{\beta}|^{-1/p}\,\mathrm{d}y\leq C|c_v|^{-\frac{1}{p}}.$$

将切比雪夫不等式与 (5.11) 结合应用，即可得到所需的次水平集估计。□

5.2. **驻点集方法与定理 5.1 的证明**。本节介绍由 Basu–Guo–Zhang–Zorin-Kranich 提出的一种方法 [1], ，该方法有助于我们根据以下振荡积分的大小进行控制，

$$\int_{[-1,1]^n}e^{i\lambda\phi(x)}\,\mathrm{d}x \tag{5.12}$$

根据中间水平集的大小，

$$|\{x\in[-1,1]^n:|\phi(x)-a|\leq1/\lambda\}|. \tag{5.13}$$

然后，结合定理 5.3，我们证明定理 5.1。

在 [1], 为半代数的情形 ϕ 被考虑，是为了建立关于 ϕ的一致界。相比之下，我们关注形如 ϕ（x）$+w\cdot x$的线性扰动，而我们的目标只是获得关于 w 的一致界，而不是关于 ϕ的一致界。由于我们不寻求关于 ϕ的一致估计， [1] 中的估计可以推广到一般的解析函数 ϕ。更准确地说，有如下结论。

定理 5.4。设 $\phi:\ [-2,2]^n\to\mathbb{R}$ 是一个解析函数。则存在一个常数 $C>0$，使得对于所有的 $\lambda\geq 1$ 和 $w\in\mathbb{R}^n$,

$$\Big|\int_{[-1,1]^n} \mathrm{e}^{i\lambda(\phi(x)+w\cdot x)}\ \mathrm{d}x\Big| \leq C\sup_{a\in\mathbb{R}}|\{x\in[-1,1]^n:|\phi(x)+w\cdot x-a|\leq 1/\lambda\}|.$$

定理 5.4 可由 [20, 定理 3。7], 推出，最后一位作者将其中的结果推广到了 [1]受限解析环境。在特别地，已证明，当5.12可以由5.13控制时， ϕ 是带有可定义扰动的解析函数。因此，定理 5.4 是 [20, 定理 3。7]的直接推论。不过，为方便读者，我们在下文给出一个自包含证明。

在证明定理 5.4之前，我们先证明以下引理，这是该论证中的一个关键观察。

引理 5.5。设 ϕ 是定义在 $[-2,2]^n$ 和 a 上的解析函数，$\delta\in\mathbb{R}$。令W 定义为

$$W:=\{(x,w,a,\delta)\in[-1,1]^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^2:|\phi(x)+w\cdot x-a|\leq\delta\}.$$

我们定义

$$A(a,w,\delta)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_W(x,w,a,\delta)\ \mathrm{d}x,$$

且 $N(w,\delta)$ 是 $a\mapsto A(a,w,\delta)$ 改变单调性的次数。于是$\sup_{w,\delta}N(w,\delta)<\infty$。

证明。该引理是命题2.6的推论。事实上，我们可以将 $\mathbb{1}_W$改写如下:

$$\mathbb{1}_W=\mathbb{1}_{[-1,1]^n}(x)\prod_{*=\pm}\mathbb{1}_{\{f_*\geq 0\}},$$

其中

$$f_\pm=\pm(\phi(x)\mathbb{1}_{[-1,1]^n}+w\cdot x-a)+\delta.$$

因此， $\mathbb{1}_W$ 是 $\mathbb{R}_{an}$中的有限个可定义函数的乘积，这意味着 $\mathbb{1}_W$ 在 $\mathbb{R}_{an}$中可定义。根据命题 2.5，可得 A 在 $\mathbb{R}_{an}$中可定义，exp。因此，命题 2.6 给出了所需结论。□

现在，我们利用引理 5.4 证明定理 5.5。

定理 *5.4* 的证明。我们沿用 Basu–Guo–Zhang–Zorin-Kranich [1]的证明。令 $\phi_w^\lambda(x)$:$=\lambda(\phi(x)+w\cdot x$。则有

$$\Big|\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{ia}\ \mathrm{d}a\times\int_{[-1,1]^n}\mathrm{e}^{i\phi_w^\lambda(x)}\ \mathrm{d}x\Big|\sim\Big|\int_{[-1,1]^n}\mathrm{e}^{i\phi_w^\lambda(x)}\ \mathrm{d}x\Big|.$$

根据富比尼定理，可得

$$\begin{aligned}\Big|\int_{[-1,1]^n} \mathrm{e}^{i\phi_w^\lambda(x)}\,\mathrm{d}x\Big| &\sim \Big|\int_{[-1,1]^n}\int_{\phi_w^\lambda(x)-1}^{\phi_w^\lambda(x)+1} \mathrm{e}^{ia}\,\mathrm{d}a\mathrm{d}x\Big| \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\{x\in[-1,1]^n : |\phi_w^\lambda(x)-a|\le 1\}|\mathrm{e}^{ia}\,\mathrm{d}a.\end{aligned}$$

令 $S_\phi(a;\ w,\ \lambda)$表示高度为 a、厚度为 1 的 ϕ_w^λ 驻定集的大小，

$$S_\phi(a;w,\lambda) = |\{x\in[-1,1]^n : |\phi_w^\lambda(x)-a|\le 1\}|.$$

由引理5.5及 $A(a/\lambda,\ w,\ \lambda^{-1}) = S_\phi(a;\ w,\ \lambda)$，我们知道 $S_\phi(a;\ w,\ \lambda)$关于 a仅改变单调性$O_{d,\ \phi}(1)$次。令 I_j为 $S_\phi(\cdot;\ w,\ \lambda)$单调的互不相交区间。于是，我们证明

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}} S_\phi(a;w,\lambda)\mathrm{e}^{ia}\,\mathrm{d}a\Big| &= \sum_j \Big|\int_{I_j} S_\phi(a;w,\lambda)\mathrm{e}^{ia}\,\mathrm{d}a\Big| \\ &\le C\sup_{a\in\mathbb{R}} S_\phi(a;w,\lambda).\end{aligned}$$

事实上，最后一个不等式可由分部积分得到，因为 $S_\phi(a;\ w,\ \lambda)$在每个 I_j 上的全变差不超过 $2\sup_{a\in\mathbb{R}} S_\phi(a;\ w,\ \lambda)$。因此，我们已经证明

$$\Big|\int_{[-1,1]^n} \mathrm{e}^{i\lambda(\phi(x)+w\cdot x)}\,\mathrm{d}x\Big| \le C\sup_{a\in\mathbb{R}} S_\phi(a;w,\lambda).$$

将 a 替换为 λa即可得到所需结果，因为 $S_\phi(\lambda a;\ w,\ \lambda) = |\{x\in[-1,1]^n :\ |\phi(x) + w\cdot x - a|\le 1/\lambda]\}|$。□

现在，我们证明定理 5.1。

定理 *5.1* 的证明。回忆一下，$\mathcal{F}[\mu[\psi]](\xi',\xi_d)$ 的定义如下

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi',\xi_d)\cdot(y,\gamma(y))}\psi(y)\,\mathrm{d}y.$$

令 $|(\xi',\xi_d)|\sim\lambda$。若有 $|\xi'|\ge C|\xi_d|$，且 C 依赖于 $|\nabla\gamma|$，则通过分部积分即可得到所需的衰减。因此，我们假设 $|\xi'|\lesssim|\xi_d|\sim\lambda$。不失一般性，取 $\lambda=\xi_d$，从而问题归结为证明以下振荡积分估计：

$$\Big|\int \mathrm{e}^{i\lambda(\gamma(x)+u\cdot y)}\psi(y)\,\mathrm{d}y\Big| \lesssim (c_\psi\lambda)^{-1/p},$$

其中 $u=\lambda^{-1}\xi'$。

由定理 5.3，对于 $p>p_0>p_{cr}$，对每个 $v\in\mathrm{supp}(\psi)$ 都存在一个边长为 $r_v>0$ 的立方体，

$$U_v = v + r_v[-1,1]^{d-1},$$

满足（5.10）。然后，我们为 $\{U_{v_i}\}_{i=1}^M$ 选取 $v_i\in\mathrm{supp}(\psi)$的一个有限子覆盖，使得 $\mathrm{supp}(\psi)\subset\cup_{i=1}^M U_{v_i}$。利用从属于 $\{\varphi_{v_i}\}_{i=1}^M$ 的单位分解$\{U_{v_i}\}_{i=1}^M$，只需证明

$$\Big|\int \mathrm{e}^{i\lambda(\gamma(x)+u\cdot y)}\psi(y)\varphi_{v_i}(y)\,\mathrm{d}y\Big| \lesssim (c_\psi\lambda)^{-1/p}.$$

利用 $\psi\varphi_{v_i}$的傅里叶级数，可得

$$\psi\varphi_{v_i}(y)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^{d-1}} c_m \mathrm{e}^{im\cdot y},\quad \text{with}\quad \sum_m |c_m|\lesssim 1.$$

于是我们得到

$$\Big|\int \mathrm{e}^{i\lambda(\gamma(y)+u\cdot y)}\psi(y)\varphi_{v_i}(y)\,\mathrm{d}y\Big|\lesssim \sup_{u\in\mathbb{R}^{d-1}}\Big|\int_{U_{v_i}} \mathrm{e}^{i\lambda(\gamma(y)+u\cdot y)}\,\mathrm{d}y\Big|.$$

由（5.10）及下界 $c_\psi\le|c_{v_i}|$，只需证明对所有 $i=1,\cdots,M$，

$$\Big|\int_{U_{v_i}} \mathrm{e}^{i\lambda(\gamma(y)+u\cdot y)}\,\mathrm{d}y\Big|\lesssim \sup_a |\{y\in U_{v_i}:|\gamma(y)+u\cdot y-a|\le 1/\lambda\}|. \tag{5.14}$$

为验证这一点，固定 i，我们使用变量替换 $y\mapsto r_{v_i}y+v_i$。由此得到

$$\Big|\int_{U_{v_i}} \mathrm{e}^{i\lambda(\gamma(y)+u\cdot y)}\,\mathrm{d}y\Big|=r_{v_i}^{d-1}\Big|\int_{[-1,1]^{d-1}} e^{i\lambda(\gamma(v_i+r_{v_i}y)+u\cdot(r_{v_i}y))}\mathrm{d}y\Big|.$$

应用定理 5.4，并取

$$\phi(y)=\gamma(v+r_{v_i}y),\quad w=r_{v_i}u,$$

我们得到

$$\Big|\int_{U_{v_i}} \mathrm{e}^{i\lambda(\gamma(y)+u\cdot y)}\,\mathrm{d}y\Big|\lesssim r_{v_i}^{d-1}\sup_a|\{y\in[-1,1]^{d-1}:|\phi(y)+w\cdot y-a|\le 1/\lambda\}|.$$

最后，利用集合 $|rE+v|=r^{d-1}|E|$ 的缩放恒等式 $E\subset\mathbb{R}^{d-1}$，我们得出所需的估计 (5.14) 成立。□

Appendix A. Non-transversality with scaling structure

本附录旨在简要证明与定理 1.3 类似的结果，其中超曲面具有某些缩放结构，具体而言，即当 $\Gamma\subset\mathbb{R}^2$ 是光滑有限型曲线，或当 Γ 是光滑凸有限直线型超曲面时。若超曲面 Γ 具有内在的缩放结构，则即使没有解析性，定理 1.3 的类似结论仍然成立。我们首先考虑 $\mathbb{R}^2$的情形。

定理 A.1. 令 $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为有限型光滑函数，且 $(y_{nt},\gamma(y_{nt}))$是 Γ的一个非横截点。若 ψ 的支集充分小且位于 y_{nt}附近，则$M_\Gamma[\psi]$ 在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 上有界，对所有 $p>2$均成立。

证明。经过适当的旋转后，我们可以假设 $\gamma(y_{nt})=0$ 且 $\nabla\gamma(y_{nt})=0$，并且 $\mathrm{supp}(\psi)\subset[y_{nt}-1,y_{nt}+1]$。由于 γ 是有限型的，存在 $k\ge 2$使得

$$\gamma(y)=c_\gamma(y-y_{nt})^k+R(y-y_{nt})$$

对某个 c_γ成立，其中余项 R 满足：当$0\le m\le k+1$ 且 $|y|\le 1$时，$|(d/dy)^mR(y)|\lesssim|y|^{k+1-m}$。通过缩放，可以假设 $c_\gamma=1$。

定义

$$\psi_\ell(y)=\psi(2^{-\ell}y+y_{nt})\beta_1(y).$$

由于 $\mathrm{supp}(\psi) \subset [y_{nt}-1, y_{nt}+1]$，我们有分解 $\psi(y) = \sum_{\ell\geq 0} \psi_\ell(2^\ell(y-y_{nt}))$。该分解和变量替换 $y \mapsto 2^{-\ell}y + y_{nt}$ 得出

$$\begin{aligned} &A_\Gamma[\psi]f(t,x_1,x_2) \\ &\quad= \int f(x_1 - ty, x_2 - t\gamma(y))\psi(y)dy \\ &\quad= \sum_{\ell=0}^{\infty} \int f(x_1 - ty, x_2 - t\gamma(y))\psi_\ell(2^\ell(y-y_{nt}))dy \\ &\quad= \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{-\ell} \int f(x_1 - t(2^{-\ell}y + y_{nt}), x_2 - t(2^{-\ell k}y^k + R(2^{-\ell}y)))\psi_\ell(y)dy. \end{aligned}$$

通过变量替换 $(x_1,\ x_2) \mapsto (2^{-\ell}x_1,\ 2^{-\ell k}x_2)$，可以看出

$$\|M_\Gamma[\psi]\|_{p\to p} \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{-\ell}\|\widetilde{M}_\ell\|_{p\to p},$$

其中

$$\widetilde{M}_\ell f(t,x) = \sup_{t>0} \Big| \int_{|y|\sim 1} f(x_1 - t(y + 2^\ell y_{nt}), x_2 - t(y^k + 2^{\ell k}R(2^{-\ell}y)))\psi_\ell(y)dy\Big|.$$

根据 R 的性质，存在一个正整数 L，使得

$$2^{\ell(k-2)}R''(2^{-\ell}y) \leq \frac{1}{100},$$

对所有 $|y| \leq 2$ 和所有 $\ell \geq L$ 均成立。现在，假设 $\mathrm{supp}(\psi)$ 包含于一个小的$\widetilde{\ }$邻域 $[y_{nt} - 2^{-L}, y_{nt} + 2^{-L}]$中。那么，当 $\ell < L$ 时，$M_\ell = 0$，因此只需证明

$$\sum_{\ell=L}^{\infty} 2^{-\ell}\|\widetilde{M}_\ell\|_{p\to p} \lesssim 1.$$

对于 $\ell \geq L$，函数$y^k + 2^{\ell k}R(2^{-\ell}y)$ 的二阶导数有一个良好的下界。基于这一观察，我们可以应用以下估计（[18,(16)],Sogge 定理的修改版本 [28]），

$$\|M_\Gamma f\|_p \lesssim d(0,\Gamma)^{1/p}\|f\|_p \quad \text{for } p > 2.$$

由于 $\widetilde{M}_\ell = M_{\Gamma_\ell}[\psi_\ell]$ 其中 $\Gamma_\ell = \{(y + 2^\ell y_{nt}, y^k + 2^{\ell k}R(2^{-\ell}y)):\ |y| \sim 1\}$ 且 ψ_ℓ的导数满足一致有界，Sogge 定理意味着

$$\|\widetilde{M}_\ell\|_{p\to p} \lesssim 2^{\ell/p}, \quad \text{for } p > 2.$$

由于 $p > 2$，可推出 $\sum_{\ell=L}^{\infty} 2^{-l}\|\widetilde{M}_\ell\|_{p\to p} \lesssim 1$，从而得到所需的估计。

□

我们还对 $\mathbb{R}^d$中的凸超曲面得到了类似结果。

定理 A.2. 设 $\gamma : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ 是一个有限直线型的光滑凸函数，且$(y_{nt}, \gamma(y_{nt}))$ 是 Γ的一个非横截点。若 ψ 的支集充分小且位于 y_{nt}附近，则对所有 $p > 2$，$M_\Gamma[\psi]$ 在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上有界。

在这里，我们既可以处理光滑超曲面，也可以处理解析曲面。下面的证明沿用 [18] 中的论证。

证明。与 $d=2$的情形一样，我们首先假设 $\gamma(y_{nt})=0$ 且 $\nabla\gamma(y_{nt})=0$。根据Schulz的结果 [27], ，存在一个非平凡的多齐次函数 Q 和一个余项 R ，使得

$$\gamma(y+y_{nt})=Q(y)+R(y).$$

更准确地说，存在整数 $k_1,\cdots,k_{d-1}\geq 2$ 使得

$$Q(T_\ell y)=2^{-\ell}Q(y),$$

并且当 ℓ 充分大且 $|y|\leq 2$ 时， $2^\ell R(T_\ell y)\ll 1$ ，其中各向异性膨胀T_ℓ 定义为

$$T_\ell y=(2^{-\ell/k_1}y_1,\cdots,2^{-\ell/k_{d-1}}y_{d-1}).$$

利用二进分解，对于 $(\tilde{x},x_d)\in\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}$，可得一个类似的恒等式，

$$\begin{aligned}&A_\Gamma[\psi]f(t,\tilde{x},x_d)\\&=\sum_{\ell=1}^{\infty}2^{-\ell(\sum_{i=1}^{d-1}\frac{1}{k_i})}\int f(\tilde{x}-t(T_\ell y+y_{nt}),x_d-t(2^{-\ell}Q(y)+R(T_\ell y)))\psi_\ell(y)dy,\end{aligned}$$

其中

$$\psi_\ell(y)=\psi(T_\ell y+y_{nt})\beta_*(y)$$

且 β_*是一个支集包含于集合 $[-2,2]^{d-1}\setminus[-1,1]^{d-1}$中的光滑函数。通过变量替换 $(\tilde{x},x_d)\mapsto(T_\ell x,2^{-\ell}x_d)$，只需证明存在正整数 L使得

$$\sum_{\ell=L}^{\infty}2^{-\ell(\sum_{i=1}^{d-1}\frac{1}{k_i})}\|\widetilde{M_\ell}\|_{p\to p}\lesssim 1,$$

其中

$$\widetilde{M_\ell}f(x)=\sup_{t>0}|\int f(x-t(y+T_{-\ell}y_{nt}),x_d-t(Q(y)+2^\ell R(T_\ell y)))\psi_\ell(y)dy|.$$

如 [18, 第 3], 节所证明的，当 ℓ 足够大时，图形 $(y+T_{-\ell}y_{nt},\ Q(y)+2^\ell R(T_\ell y))$ 在 $\mathrm{supp}(\psi_\ell)$ 上至少有一个不为零的主曲率。因此，由 Sogge 定理可得

$$\|\widetilde{M_\ell}\|_{p\to p}\lesssim\max_i 2^{\frac{\ell}{pk_i}}.$$

这给出了所需的界，因为

$$\frac{1}{p\min_i k_i}-\sum_{i=1}^{d-1}\frac{1}{k_i}<0$$

对每个 $p>1$ 都成立。 □

Acknowledgement

作者谨向 Alex Iosevich 致谢，感谢他提供宝贵意见。本研究得到韩国国家研究基金会资助（RS-2021-NR061906；J. B. Lee），（RS-2024-00461749；J. B. Lee 和 J. Oh）；以及 KIAS 个人资助（MG098901；J. Lee），（SP089101；S. Oh）。

References

[1] S. Basu, S. Guo, R. Zhang, and P. Zorin-Kranich, *A stationary set method for estimating oscillatory integrals* 2103 08844, , arXiv: . 即将发表于《欧洲数学会杂志》。[2] D. Beltran, J. Hickman, and C. D. Sogge, *Sharp-local smoothing estimates for Fourier integral operators* , 载于《调和分析的几何方面》, P. Ciatti、A. Martini（编）, Springer INdAM Ser, 45 (2021), 29–105。[3] J. Bourgain, *Averages in the plane over convex curves and maximal operators*, 《J. Anal. Math.》47 (1986), 69–85。[4] J. Bruna, A. Nagel, and S. Wainger. *Convex Hypersurfaces and Fourier Transforms*, 《Ann. of Math.》127 (2) (1988), 333–365。[5] S. Buschenhenke, S. Dendrinos, I. A. Ikromov, and D. M ¨ uller, , *Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in* $\mathbb{R}^3$ *with height* $h < 2$*: Part I* , 《Trans. Amer. Math. Soc.》372 (2019), 1363–1406。[6] S. Buschenhenke, I. A. Ikromov, and D. M ¨ uller, *Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in* $\mathbb{R}^3$ *with height* $h < 2$*: part II : A geometric conjecture and its proof for generic 2-surfaces* **26** 2025 1765 1877 , 《Ann. Scuola Norm-Sci.》 ( ), – 。[7] R. Cluckers and D. J. Miller, *Stability under integration of sums of products of real globally subanalytic functions and their logarithms* **156** 2 2011 311 348 , 《Duke Math. J.》 ( ) ( ), – 。[8] T. C. Collins, A. Greenleaf, and M. Pramanik, *A multi-dimensional resolution of singularities with applications to analysis* **135** 5 2013 1179 1252 , 《Amer. J. Math.》 ( ) ( ), – 。[9] L. van den Dries, A. Macintyre, and D. Marker, *The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation* **140** 1994 183 205 , 《Ann. of Math.》 ( ), – 。[10] M. Greenblatt, L^p *boundedness of maximal averages over hypersurfaces in* $\mathbb{R}^3$, 《 Trans. Amer. Math. Soc.》365 (2013), no. 4, 1875–1900. [11] M. Greenblatt, *Smooth and singular maximal averages over 2D hypersurfaces and associated Radon transforms* **377** 2021 107465 , 《Adv. Math.》 ( ), 。[12] A. Greenleaf, *Principal curvature and harmonic analysis*, 《印第安纳大学数学杂志》30 (1981), 519–537。[13] Y. Heo, S. Hong, and C. W. Yang, *Maximal averages over certain non-smooth and non-convex hypersurfaces* **22** 6 2018 1383 1401 , 《Taiwanese J. Math.》 ( ) ( ), – 。[14] I. A. Ikromov, M. Kempe, and D. M ¨ uller, , *Estimates for maximal functions associated with hypersurfaces in* $\mathbb{R}^3$ *and related problems of harmonic analysis* **204** 2010 Math.》 ( ), 151–271。[15] I. A. Ikromov and D. M ¨ uller, , *Uniform estimates for the Fourier transform of surface carried measure in* $\mathbb{R}^3$ *and an application to Fourier restriction* **17** 2011 Anal. Appl.》 ( ), 1292–1332。[16] A. Iosevich, *Maximal operators associated to families of flat curves in the plane*, 《 Duke Math. J. 》 76 (1994), 633–644。[17] A. Iosevich and E. Sawyer, *Oscillatory integrals and maximal averages over homogeneous surfaces* **82** 1996 103 141 , 《Duke Math. J.》 ( ), – 。[18] A. Iosevich and E. Sawyer, *Maximal averages over surfaces*, 《 Adv. Math. 》 132 (1997), 46–119。[19] A. Iosevich, E. Sawyer, and A. Seeger, *Two problems associated with convex finite type domains* **46** 2002 153 177 , 《Publ. Mat.》 ( ), – 。[20] S. Lee and S. Oh, *Damping oscillatory integrals of convex analytic functions*, arXiv:2505:15492。[21] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, 高等科学研究院预印本（1965）。[22] W. Li, H. Wang, and Y. Zhai, *Improving bounds and weighted estimates for maximal functions associated with curvature* **29** 10 2023 63 , 《J. Fourier Anal. Appl.》 ( ) ( ), pp. [23] A. Nagel, A. Seeger, and S. Wainger, *Averages over convex hypersurfaces*, 《Amer. J. Math.》115 (4) (1993), 903–927。[24] S. Oh, *Maximal estimates for averages over degenerate hypersurfaces*, arXiv:2501.00858v1。即将发表于《Trans. Amer. Math. Soc.》。[25] J. L. Rubio de Francia, *Maximal functions and Fourier transforms*, 《Duke Math. J.》53 (1986), 395–404。[26] W. Schlag, L^p *to* L^q *estimates for the circular maximal function*, 博士论文, 加州理工学院, （1996）。

[27] H. Schulz, *Convex hypersurfaces of finite type and the asymptotics of their Fourier transforms* **40** 4 1991 1267 1275 ,

《印第安纳大学数学杂志》 () (), –。[28] C. D. Sogge, *Maximal operators associated to hypersurfaces with one nonvanishing principalcurvature*, 载于《傅里叶分析与偏微分方程》（米拉弗洛雷斯-德拉谢拉，1992），CRC出版社（2018），317–323。[29] C. D. Sogge 和 E. M. Stein, *Averages of functions over hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$*, 《数学发明》**82** （1985），543–556。[30] E. M. Stein, *Maximal functions: spherical means*, 《美国国家科学院院刊》**73** （1976），2174–2175。[31] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real Variable Methods Orthogonality and Oscillatory Integrals* 1993 , ,

普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿。() 。[32] F. Zimmermann, *On L^p-estimates for maximal averages over hypersurfaces not satisfying transversality condition* 2014 , 博士论文，基尔 () 。

Research Institute of Mathematics, Seoul National University, 08826 Gwanak-ro 1, Seoul, Republic of Korea*Email address*: jinblee@snu.ac.krDepartment of Mathematics, Korea Institute for Advanced Study, Seoul 02455, Republic of Korea*Email address*: juyounglee@kias.re.krResearch Institute of Mathematics, Seoul National University, 08826 Gwanak-ro 1,Seoul, Republic of Korea*Email address*: ojt0117@snu.ac.kr
June E Huh Center for Mathematical Challenges, Korea Institute for Advanced Study, Seoul 02455, Republic of Korea*Email address*: sewookoh@kias.re.kr