arXiv:2601.01881v1 [math-ph] 5 Jan 2026

高阶色散与五次非线性效应下光纤中初始脉冲的光学色散冲击波

Hua-Ying Ren、Rui Guo*、Jian-Wen Zhang

太原理工大学数学学院，太原 *030024*，中国

摘要

本文通过对高阶 Chen-Lee-Liu（HO- CLL）方程应用 Whitham 调制理论，探究非线性光学系统中的色散冲击波（DSW）理论。我们系统地推导了单相周期解及相应的惠特姆方程。针对所有可行的初始间断条件，我们依据黎曼不变量的初始分布，对演化过程中的波结构进行了分类，涵盖凸情形和非凸情形。分类结果表明，与凸情形相比，非凸情形下演化形成的波结构还包含一个额外且更复杂的区域接触色散冲击波区域。因此，我们分析了该区域的传播行为。此外，我们还考虑了波破碎瞬间的初始波可由 $x^{\frac{1}{3}}$ 的立方根函数近似这一问题，并详细分析了高阶色散和五次非线性作用下光子在光纤中的传播。

关键词：色散激波；高阶 Chen-Lee-Liu 方程；Whitham 调制理论；初始间断条件；立方根函数；

1 引言

色散冲击波（DSW） [1–3] 是非线性波理论中一种具有代表性的现象，广泛存在于经典力学、量子力学

*通讯作者：gr81@sina.com

、非线性光学等领域 [4–8]。它由非线性波系统中的色散效应与非线性效应相互作用而产生。众所周知，若忽略介质的耗散效应和色散效应，非线性效应会因初始脉冲传播速度存在差异而使其逐渐陡峭。最终，某一点会出现斜率趋于无穷大的破裂奇异性，波动方程的解也会呈现多值性。然而，这种忽略色散效应的解并无物理意义。自然地，引入色散效应能够抑制这种非物理行为，并以快速非线性振荡区域取代原先的多值区域。在前沿处，色散效应与非线性效应相互平衡，从而形成一系列孤子；而后沿处的振荡幅度则会逐渐减弱。这一快速振荡区域称为色散冲击波。

关于色散冲击波理论的研究，Gurevich 和 Pitaevskii 于1974年作出了奠基性贡献。他们以 Whitham 提出的非线性波调制理论为基础 [9, 10]——该理论采用平均化思想，推导出 Whitham 方程，用以描述调控非线性调制波振荡的参数的缓慢演化——并将其发展为描述色散冲击波结构的理论 [11–13]。此后，这一理论框架被广泛用于研究各种波动力学的演化，其中最经典、研究最为广泛的是黎曼问题，即初始间断的演化问题。

在 Whitham理论的范畴内，黎曼问题也称为 Gurevich-Pitaevskii（GP）问题，其初始条件假设为分段常数函数，并在原点处出现间断。最简单的情形是原点处的单调阶跃激发 Korteweg-de Vries（KdV）方程，最终演化为稀疏波（RW）或谐色散冲击波 [12]。文献 [14], 研究了非线性薛定谔（NLS）方程初始间断的演化。研究表明，具有初始间断的非线性薛定谔（NLS）方程在非线性演化过程中会形成若干基本波结构的组合，并讨论了六种可能的分类情形。随着有限带积分方法的发展 [15], ，更广泛的一类可积方程所对应的 GP 问题已得到成功解决 [16–19]。

对于 KdV 或 NLS 类型的经典凸色散流体动力学方程，其对应的 Whitham 调制方程具有严格双曲性和真非线性 [20, 21]。然而，对于修正 KdV（mKdV）方程 [22, 23], Gardner 方程 [24, 25] 和导数NLS方程 [26], 等非凸方程，Whitham 调制方程并不满足这些条件。或者说，它们只有在特定参数范围内才满足严格双曲性和真非线性的判据。因此，除经典波结构外，还会出现其他结构，包括

扭结波、接触色散激波和组合色散激波。

在非线性光学领域，非线性薛定谔（NLS）方程通常用于描述脉冲在光纤中传播的动力学过程。它是一个最低阶近似模型，包含二次正色散和克尔非线性 [27–31]。然而，实际问题中的许多其他因素也会对脉冲传播产生重大影响。包含自陡峭效应的导数非线性薛定谔（DNLS）方程 [32]被广泛用于描述等离子体中的阿尔fvén波，以及超短脉冲在单模光纤中的传播 [33, 34]。DNLS方程共有三种类型：Kaup-Newell（KN）方程 [35, 36], 、Chen-Lee-Liu（CLL）方程 [37, 38], 和Gerdjikov-Ivanov（GI）方程 [39–41]。它们通常统称为DNLSI、DNLSII和DNLSIII方程。值得注意的是，这三种方程可以通过规范变换相互转化。随着高速光纤技术的发展，高阶非线性项日益重要，在研究脉冲于非线性光纤中的传播时已不可忽略。本文考虑非线性光脉冲在光纤中的传播，并用高阶CLL（HOCLL）方程对其进行描述

$$u_t + u_{xxx} + \frac{3}{2}i|u|^2u_{xx} - \frac{3}{4}|u|^4u_x + \frac{3}{2}iu_x^2u^* = 0, \tag{1.1}$$

其中包含三阶色散项和五次非线性项。由于该方程具有精确可积性，我们能够利用Whitham调制理论，通过非线性波的缓慢调制推导出色散冲击波结构，并预测初始间断条件下的波演化。

除了初始间断导致色散冲击波形成这一高度特定的情形外，我们还考虑了另一种情况。在文献 [42], 中，研究了玻色-爱因斯坦凝聚体（BEC）向静止介质传播过程中的波破碎，重点考察了初始剖面可近似表示为 $-x^{\frac{1}{n}}$ 形式的幂函数、且在破碎时刻满足 [43–45]的情形。本研究考虑 $n = 3$时的情况，即脉冲在波破碎时刻可近似为立方根函数，并推导出色散冲击波两条边界的运动规律。

本文结构安排如下：第二节讨论单相周期解和惠特姆方程。第三节推导方程的无色散极限。第四节介绍一般波形中的基本波结构。第五节给出黎曼问题解的完整分类。第六节考察波破碎时刻形成的三次初值条件下色散冲击波的演化，并分析色散冲击波在小振幅边缘和孤子边缘处的运动规律。第七节为结论。

2 单相周期解与惠特姆方程

本节详细阐述方程 (1.1) 的单相周期解及相应惠特姆方程的推导。方程 (1.1) 的 Lax 对由 [46] 给出如下:

$$\Psi_x = \begin{pmatrix} F & G \\ H & -F \end{pmatrix} \Psi, \quad \Psi_t = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \Psi,$$

其中,

$$F = i\lambda^2 + \frac{1}{4}i|u|^2, G = i\lambda u, H = -i\lambda u^*,$$

$$A = A_1\lambda^6 + A_2\lambda^4 + A_3\lambda^2 + A_4, B = B_1\lambda^5 + B_2\lambda^3 + B_3\lambda, C = C_1\lambda^5 + C_2\lambda^3 - C_3\lambda,$$

$$A_1 = 4i, A_2 = 2i|u|^2, A_3 = -uu_x^* + u_xu^* + \frac{1}{2}i|u|^4,$$

$$A_4 = \frac{1}{16}i|u|^6 + \frac{1}{4}i|u_x|^2 + \frac{3}{8}|u|^2\left(u_xu^* - uu_x^*\right) - \frac{1}{4}i\left(uu_{xx}^* + u_{xx}u^*\right),$$

$$B_1 = 4iu, B_2 = 2u_x + i|u|^2u^*, B_3 = \frac{1}{4}iu|u|^2 + \frac{3}{2}|u|^2u_x - \frac{1}{2}u^2u_x^* - iu_{xx},$$

$$C_1 = -4iu, C_2 = 2u_x^* - i|u|^2u^*, C_3 = \frac{1}{4}i|u|^2u^* - \frac{3}{2}|u|^2u_x^* + \frac{1}{2}u_x\left(u^*\right)^2 - iu_{xx}^*.$$

假设 $(\phi_1, \phi_2)^T$ 和 $(\psi_1, \psi_2)^T$ 是 Lax 对的两个线性无关基本解（上标 T 表示矩阵转置）。我们构造平方波函数如下:

$$f = -\frac{i}{2}(\phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1), \quad g = \phi_1\psi_1, \quad h = -\phi_2\psi_2, \tag{2.1}$$

因此， f、 g 和 h 满足以下线性方程

$$\begin{aligned} &f_x = -iHg + iGh,\ g_x = 2iGf + 2Fg,\ h_x = -2iHf - 2Fh, \\ &f_t = -iCg + iBh,\ g_t = 2iBf + 2Ag,\ h_t = -2iCf - 2Ah. \end{aligned} \tag{2.2}$$

可以证明，量 $P(\lambda) = f^2 - gh = (-1/4)(\phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1)$ 与 x 和 t 无关。一般而言， f、 g 和 h 也被假定为 λ 的多项式，而单相解对应于具有以下形式的多项式:

$$f = f_2\lambda^4 - f_1\lambda^2 + f_0,\ g = -i\lambda u(\lambda^2 - \mu),\ h = i\lambda u^*(\lambda^2 - \mu^*), \tag{2.3}$$

其中星号 * 表示复共轭。将式 (2.3) 代入各式 (2.2)

并比较各幂次项的系数，得到

$$
\begin{aligned}
&f_2=1,\ f_{0x}=0,\ f_{1x}=i\rho\left(\mu-\mu^*\right),\\
&f_{1t}=\rho\left(i\left(4f_0-4f_1^2\right)\left(\mu-\mu^*\right)\right)-\rho^2\left(i\left(\mu-\mu^*\right)\left(6f_1-2\mu-2\mu^*\right)\right)-\rho^3\left(\frac{3i}{2}\left(\mu-\mu^*\right)\right),\\
&u_x=\frac{i}{2}u\left(4f_1-4\mu+\rho\right),\ \mu_x=2i\left(f_0-\mu\left(f_1-\mu\right)\right),\ \mu_x^*=-2i\left(f_0-\mu^*\left(f_1-\mu^*\right)\right),\\
&u_t=iu\left(\frac{5}{4}\rho^3+\left(9f_1-6\mu-3\mu^*\right)\rho^2+\left(-8f_0+18f_1^2+6\mu\mu^*+4\mu^2-4f_1\left(5\mu+2\mu^*\right)\right)\rho\right)\\
&+iu\left(-16f_0f_1+8f_1^3+8f_0\mu-8f_1^2\mu^*\right).
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

多项式 $P(\lambda)$ 可写为

$$
\left(\lambda^4+f_1\lambda^2+f_0\right)^2-\lambda^2\left|u\right|^2\left(\lambda^2-\mu\right)\left(\lambda^2-\mu^*\right)=\lambda^8-s_1\lambda^6+s_2\lambda^4-s_3\lambda^2+s_4=\prod_{i=1}^{4}\left(\lambda^2-\lambda_i^2\right),
\tag{2.5}
$$

其中,

$$
s_1=\sum_i\lambda_i^2,\ s_2=\sum_{i<j}\lambda_i^2\lambda_j^2,\ s_3=\sum_{i<j<k}\lambda_i^2\lambda_j^2\lambda_k^2,\ s_4=\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2\lambda_4^2.
\tag{2.6}
$$

根据公式（2.5），比较两边 λ^i 的系数可得

$$
s_1=2f_1+\rho,\ s_2=2f_0+f_1^2+\rho\left(\mu+\mu^*\right),\ s_3=2f_0f_1+\rho\mu\mu^*,\ s_4=f_0^2.
\tag{2.7}
$$

由公式（2.7）可得

$$
\mu=\frac{1}{8\rho}\left(s_1^2-4s_2\pm8\sqrt{s_4}-2s_1\rho+\rho^2-i\sqrt{-R\left(\rho\right)}\right),
\tag{2.8}
$$

其中,

$$
\begin{aligned}
R\left(\rho\right)=&\rho^4+4s_1\rho^3+\left(6s_1^2-8s_2\pm48\sqrt{s_4}\right)\rho^2+\left(4s_1^3-16s_1s_2+64s_3\pm32s_1\sqrt{s_4}\right)\rho\\
&+\left(-s_1^2+4s_2\pm8\sqrt{s_4}\right)^2.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

多项式 $R(\rho)$ 的根与 $P(\lambda)$ 的根相关：公式（2.9）中的上号（+）对应以下关系

$$
\begin{aligned}
\rho_1=\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4\right)^2,\ \rho_2=\left(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4\right)^2,\\
\rho_3=\left(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\right)^2,\ \rho_4=\left(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\right)^2,
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

而下方的符号（–）对应以下关系

$$
\begin{aligned}
\rho_1=\left(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4\right)^2,\ \rho_2=\left(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4\right)^2,\\
\rho_3=\left(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4\right)^2,\ \rho_4=\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\right)^2.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

由式（2.7）可得以下方程

$$\rho_x = -2i\rho\left(\mu-\mu^*\right) = \frac{1}{2}\sqrt{-R\left(\rho\right)},\ \rho_t = \rho_x\left(\frac{3}{2}s_1^2 - 2s_2\right), \tag{2.12}$$

这表明 ρ 取决于相位 $\xi = x - Vt$，我们得到

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{1}{2}\sqrt{-R\left(\rho\right)},\ V = -\frac{3s_1^2}{2} + 2s_2. \tag{2.13}$$

由于对于 $\rho \in [\rho_1,\rho_2]\cup[\rho_3,\rho_4]$，$-R(\rho) > 0$，$\rho$ 在这些区间内振荡。

首先，对于 $\rho_1 < \rho < \rho_2$，经过计算可得单相周期性解 解 n

$$\rho = \frac{\rho_2\left(\rho_4-\rho_1\right) - \rho_4\left(\rho_2-\rho_1\right)\mathrm{cn}^2\left(\omega,m\right)}{\rho_4-\rho_2+\left(\rho_2-\rho_1\right)\mathrm{sn}^2\left(\omega,m\right)}, \tag{2.14}$$

其中，

$$\begin{aligned} L &= \frac{8K\left(m\right)}{\sqrt{\left(\rho_3-\rho_1\right)\left(\rho_4-\rho_2\right)}} = \frac{2K\left(m\right)}{\sqrt{\left(\lambda_3-\lambda_1\right)\left(\lambda_4-\lambda_2\right)}}, \\ \omega &= \frac{1}{4}\sqrt{\left(\rho_3-\rho_1\right)\left(\rho_4-\rho_2\right)}\xi,\ m = \frac{\left(\rho_4-\rho_3\right)\left(\rho_2-\rho_1\right)}{\left(\rho_4-\rho_2\right)\left(\rho_3-\rho_1\right)}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

其中，函数 cn 和 sn 是雅可比椭圆函数，$K(m)$ 是第一类完全椭圆积分。当 $\rho_3 \to \rho_2$ ($i.e.,\ m \to 1$) 时，解 (2.14) 变为亮孤子

$$\rho = \frac{\rho_1\left(\rho_4-\rho_2\right) + \rho_4\left(\rho_2-\rho_1\right)\mathrm{sech}^2\left(\omega\right)}{\rho_4-\rho_2+\left(\rho_2-\rho_1\right)\tanh^2\left(\omega\right)}. \tag{2.16}$$

当 $m \to 0$ 时，我们可以从两种方式考察单相周期解的退化：如果 $\rho_2 \to \rho_1$，该解将退化为一个常数 $\rho = \rho_1$。如果 $\rho_3 \to \rho_4$，则得到非线性三角函数解

$$\rho = \frac{\rho_1\left(\rho_4-\rho_2\right) + \rho_4\left(\rho_2-\rho_1\right)\cos^2\left(\omega\right)}{\rho_4-\rho_2+\left(\rho_2-\rho_1\right)\sin^2\left(\omega\right)}. \tag{2.17}$$

其次，对于 $\rho_3 < \rho < \rho_4$，单相周期解的形式如下

$$\rho = \frac{\rho_3(\rho_1-\rho_4) + \rho_1(\rho_4-\rho_3)\,\mathrm{cn}^2(\omega,m)}{\rho_1-\rho_3+\left(\rho_3-\rho_4\right)\mathrm{sn}^2(\omega,m)}. \tag{2.18}$$

在孤子极限 $\rho_2 \to \rho_3$ ($i.e.,\ m \to 1$) 下，我们得到

$$\rho = \frac{\rho_3\left(\rho_1-\rho_4\right) - \rho_1\left(\rho_3-\rho_4\right)\mathrm{sech}^2\left(\omega\right)}{\rho_1-\rho_4+\left(\rho_4-\rho_3\right)\tanh^2\left(\omega\right)}. \tag{2.19}$$

若 $\rho_4 \to \rho_3$，解变为常数 $\rho = \rho_3$。若 $\rho_2 \to \rho_1$，则可得到非线性三角函数解

$$\rho = \frac{\rho_3\left(\rho_1-\rho_4\right) - \rho_1\left(\rho_3-\rho_4\right)\cos^2\left(\omega\right)}{\rho_1-\rho_4+\left(\rho_4-\rho_3\right)\sin^2\left(\omega\right)}. \tag{2.20}$$

利用方程（2.2）可得到以下方程

$$\left(\frac{G}{g}\right)_t = \left(\frac{B}{g}\right)_x, \ \left(\frac{H}{h}\right)_t = \left(\frac{C}{h}\right)_x. \tag{2.21}$$

对方程（2.21）取平均，并对函数 f, g 和 h 进行归一化，得

$$\left(\frac{f}{\sqrt{P(\lambda)}}\right)^2 - \left(\frac{g}{\sqrt{P(\lambda)}}\right)\left(\frac{h}{\sqrt{P(\lambda)}}\right) = 1. \tag{2.22}$$

将 Lax 对中的 B 和 G 代入方程（2.21），可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{P(\lambda)}\frac{1}{\lambda^2-\mu_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{P(\lambda)}\left(2s_1 + 4\lambda^2 + \frac{\frac{3}{2}s_1^2 - 2s_2}{\lambda^2-\mu_1}\right)\right) = 0. \tag{2.23}$$

对该方程在一个波长范围内取平均

$$L = \oint \frac{d\mu}{-2\sqrt{-P\left(\sqrt{\mu}\right)}} \tag{2.24}$$

根据公式

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{1}{L}\int_0^L \mathcal{F}\, dx, \tag{2.25}$$

可得到平均守恒律

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\sqrt{P(\lambda)}}{L}\oint \frac{d\mu}{-2(\lambda^2-\mu)\sqrt{-P\left(\sqrt{\mu}\right)}}\right] - \\ &\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{P(\lambda)}\left(2s_1 + 4\lambda^2 + \frac{\frac{3}{2}s_1^2 - 2s_2}{L}\oint \frac{d\mu}{-2(\lambda^2-\mu)\sqrt{-P\left(\sqrt{\mu}\right)}}\right)\right] = 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

取极限 $\lambda \to \lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$，得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda_i^2}{\partial t}\oint \frac{d\mu}{-2(\lambda_i^2-\mu)\sqrt{-P\left(\sqrt{\mu}\right)}} - \\ &\frac{\partial \lambda_i^2}{\partial x}\left[\left(2s_1 + 4\lambda_i^2\right)L + \left(\frac{3}{2}s_1^2 - 2s_2\right)\oint \frac{d\mu}{-2(\lambda_i^2-\mu)\sqrt{-P\left(\sqrt{\mu}\right)}}\right] = 0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

简化后，方程（2.27）变为以下形式

$$\frac{\partial \lambda_i^2}{\partial t} + v_i\frac{\partial \lambda_i^2}{\partial x} = 0, \tag{2.28}$$

其中，

$$v_i = -\left(\frac{\left(s_1 + 2\lambda_i^2\right) L}{-\frac{\partial L}{\partial \lambda_i^2}} + \frac{3}{2}s_1^2 - 2s_2\right), i = 1, 2, 3, 4. \tag{2.29}$$

我们定义一组新的黎曼不变量 $l_i = \lambda_i^2$ (i = 1，2，3，4)，并按$0 \le l_1 \le l_2 \le l_3 \le l_4$ 对 $0 \le \lambda_1^2 \le \lambda_2^2 \le \lambda_3^2 \le \lambda_4^2$. 进行排序。因此，周期解中的参数 ρ_i 可用 l_i表示

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \left(\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2} + \sqrt{l_3} - \sqrt{l_4}\right)^2, \ \rho_2 = \left(\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2} - \sqrt{l_3} + \sqrt{l_4}\right)^2, \\
\rho_3 &= \left(\sqrt{l_1} - \sqrt{l_2} + \sqrt{l_3} + \sqrt{l_4}\right)^2, \ \rho_4 = \left(-\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2} + \sqrt{l_3} + \sqrt{l_4}\right)^2,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

and

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \left(-\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2} + \sqrt{l_3} - \sqrt{l_4}\right)^2, \ \rho_2 = \left(\sqrt{l_1} - \sqrt{l_2} + \sqrt{l_3} - \sqrt{l_4}\right)^2, \\
\rho_3 &= \left(\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2} - \sqrt{l_3} - \sqrt{l_4}\right)^2, \ \rho_4 = \left(\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2} + \sqrt{l_3} + \sqrt{l_4}\right)^2.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

然后，波长为

$$L = \frac{2K(m)}{\sqrt{(l_2 - l_4)(l_1 - l_3)}}, \quad m = \frac{(l_1 - l_2)(l_3 - l_4)}{(l_1 - l_3)(l_2 - l_4)},$$

Whitham 调制方程可表示为 l_i

$$\frac{\partial l_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial l_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{2.32}$$

其中，Whitham 速度 v_i 的显式表达式为

$$\begin{aligned}
v_1 &= 2\sum_{i<j}^{4} l_i l_j - \frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} l_i\right)^2 - \frac{2(l_1 - l_2)(l_1 - l_4)(3l_1 + l_2 + l_3 + l_4)K(m)}{(l_4 - l_2)E(m) + (l_1 - l_4)K(m)}, \\
v_2 &= 2\sum_{i<j}^{4} l_i l_j - \frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} l_i\right)^2 - \frac{2(l_1 - l_2)(l_2 - l_3)(l_1 + 3l_2 + l_3 + l_4)K(m)}{(l_1 - l_3)E(m) + (l_3 - l_2)K(m)}, \\
v_3 &= 2\sum_{i<j}^{4} l_i l_j - \frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} l_i\right)^2 - \frac{2(l_3 - l_4)(l_2 - l_3)(l_1 + l_2 + 3l_3 + l_4)K(m)}{(l_4 - l_2)E(m) + (l_2 - l_3)K(m)}, \\
v_4 &= 2\sum_{i<j}^{4} l_i l_j - \frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} l_i\right)^2 - \frac{2(l_1 - l_4)(l_4 - l_3)(l_1 + l_2 + l_3 + 3l_4)K(m)}{(l_3 - l_1)E(m) + (l_1 - l_4)K(m)}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

对于 $m \to 1$ ($l_2 \to l_3$) 的情况，Whitham 速度简化为

$$v_2 = v_3 = \frac{1}{2}\left(-3l_1^2 - 8l_3^2 - 4l_3 l_4 - 3l_4^2 - 2l_1(2l_3 + l_4)\right),$$

$$v_1=-\frac{3}{2}\left(5l_1^2+2l_1l_4+l_4^2\right),\ v_4=-\frac{3}{2}\left(5l_4^2+2l_1l_4+l_1^2\right).$$

在 $m\to 0$ ($l_2\to l_1$) 的极限下，Whitham 速度为

$$v_1=v_2=-\frac{48l_1^3-6l_1\left(l_3-l_4\right)^2-24l_1^2\left(l_3+l_4\right)-3\left(l_3-l_4\right)^2\left(l_3+l_4\right)}{4l_1-2\left(l_3+l_4\right)},$$

$$v_3=-\frac{3}{2}\left(5l_3^2+2l_3l_4+l_4^2\right),\ v_4=-\frac{3}{2}\left(5l_4^2+2l_3l_4+l_3^2\right).$$

而在另一种情况 $m\to 0$ ($l_3\to l_4$) 下，我们得到

$$v_3=v_4=\frac{1}{2}\left(-3l_1^2-3l_2^2-4l_2l_4-8l_4^2-2l_1\left(2l_4+l_2\right)\right)+\frac{4\left(l_1-l_4\right)\left(l_4-l_2\right)\left(l_1+l_2+4l_4\right)}{l_1+l_2-2l_4},$$

$$v_1=-\frac{3}{2}\left(5l_1^2+2l_1l_2+l_2^2\right),\ v_2=-\frac{3}{2}\left(5l_2^2+2l_1l_2+l_1^2\right).$$

3 无色散极限

使用 Madelung 变换

$$u\left(x,t\right)=\sqrt{\rho\left(x,t\right)}e^{i\varphi(x,t)},\varphi_x\left(x,t\right)=\nu\left(x,t\right),\tag{3.1}$$

其中 $\rho(x,t)$ 和 $\nu(x,t)$ 是实函数，分别表示流体动力学中的密度和速度。我们得到方程 (1.1) 的流体动力学表示

$$\begin{cases}\rho_t-\left(\frac{1}{4}\rho^3+3\rho^2\nu+3\rho\nu^2\right)_x=\left(\rho_{xx}-\frac{3\rho_x^2}{4\rho}\right)_x,\\ \nu_t-\left(\nu^3+3\rho\nu^2+\frac{3}{4}\rho^2\nu\right)_x=\left(-\frac{3\rho_x^2\nu}{4\rho^2}+\frac{3\nu\rho_{xx}}{2\rho}+\frac{3\rho_x\nu_x}{2\rho}+\frac{3}{4}\rho_{xx}+\nu_{xx}\right)_x.\end{cases}\tag{3.2}$$

在无色散极限下，我们可以忽略方程 (3.2) 中的色散项，系统可简化为如下流体动力学形式

$$\begin{pmatrix}\rho\\ \nu\end{pmatrix}_t-\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\rho^2+6\rho\nu+3\nu^2 & 3\rho^2+6\rho\nu\\ 3\nu^2+\frac{3}{2}\rho\nu & \frac{3}{4}\rho^2+6\rho\nu+3\nu^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho\\ \nu\end{pmatrix}_x=0,\tag{3.3}$$

可以很容易地将其变换为对角形式

$$\frac{\partial l_+}{\partial t}+v_+\frac{\partial l_+}{\partial x}=0,\ \frac{\partial l_-}{\partial t}+v_-\frac{\partial l_-}{\partial x}=0,\tag{3.4}$$

通过引入黎曼不变量

$$l_\pm=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\rho}\pm\sqrt{2\nu}\right)^2,\tag{3.5}$$

其中，公式 (3.4) 中的速度 $v_{\pm}$ 用黎曼不变量表示为

$$v_+ = -\frac{3}{2}\left(5l_+^2 + 2l_+l_- + l_-^2\right),\ v_- = -\frac{3}{2}\left(5l_-^2 + 2l_+l_- + l_+^2\right). \tag{3.6}$$

因此， ρ 和 ν 的函数很容易求得

$$\rho = \left(\sqrt{l_+} \pm \sqrt{l_-}\right)^2,\ \nu = \frac{1}{2}\left(\sqrt{l_+} \mp \sqrt{l_-}\right)^2, \tag{3.7}$$

其中，黎曼不变量为正，且满足 $l_+ > l_- > 0$。

简单波的特征是只有一个黎曼不变量发生变化，其余不变量保持不变。如果不变量 $l_- = constant$，则方程组（3.4）中的第二个方程自然成立。同时，第一个方程化为 Hopf 方程。

可以看到，当 $\rho \geq 0$ 和$\nu \geq 0$时，黎曼不变量和特征速度均为实数，也就是说，这些条件定义了平面（ν， ρ）中的双曲性区域。此外，黎曼不变量 l_- 沿直线$\rho = 2\nu$ 达到最小值，该直线将双曲性区域分为两个单调区域。在 $\rho > 2\nu$ 的区域内，它单调递减；在 $\rho < 2\nu$的区域内，它单调递增。如果方程组（3.3）的解穿过这条曲线，物理变量与黎曼不变量之间的对应关系将不再是一一对应，这会显著影响由不连续初始条件产生的波结构。接下来，我们将讨论由不连续初始条件演化而来的基本波结构。

4 基本波结构

本节将探讨一般不连续阶跃初值条件下 HOCLL 方程的基本波结构

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho^L, & x < 0, \\ \rho^R, & x > 0, \end{cases} \quad \text{and} \quad v(x,0) = \begin{cases} v^L, & x < 0, \\ v^R, & x > 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 ρ^R， ρ^L， v^R 和 v^L 是四个任意实常数，且根据方程（3.5），黎曼不变量 l_-^R， l_-^L， l_+^R 和 l_+^L 的取值可在间断两侧匹配。

4.1 稀疏波

接下来将对稀疏波解进行详细研究。通过引入自相似变量 $z = x/t$，Whitham 方程（3.4）可转化为

$$(v_+ - z)\frac{\partial l_+}{\partial z} = 0,\ (v_- - z)\frac{\partial l_-}{\partial z} = 0. \tag{4.2}$$

显然，这些方程的解中，一个黎曼不变量为常数，即 $l_+ = const$ 或 $l_- = const$ ，另一个则根据方程（4.2）变化。下面推导两类稀疏波解：

$$\begin{aligned}(i)\ \ & l_- = \text{const} \equiv l_-^0,\ v_+ = -\frac{3}{2}\left(5l_+^2 + 2l_+l_- + l_-^2\right) = z,\\ (ii)\ \ & l_+ = \text{const} \equiv l_+^0,\ v_- = -\frac{3}{2}\left(5l_-^2 + 2l_+l_- + l_+^2\right) = z.\end{aligned} \tag{4.3}$$

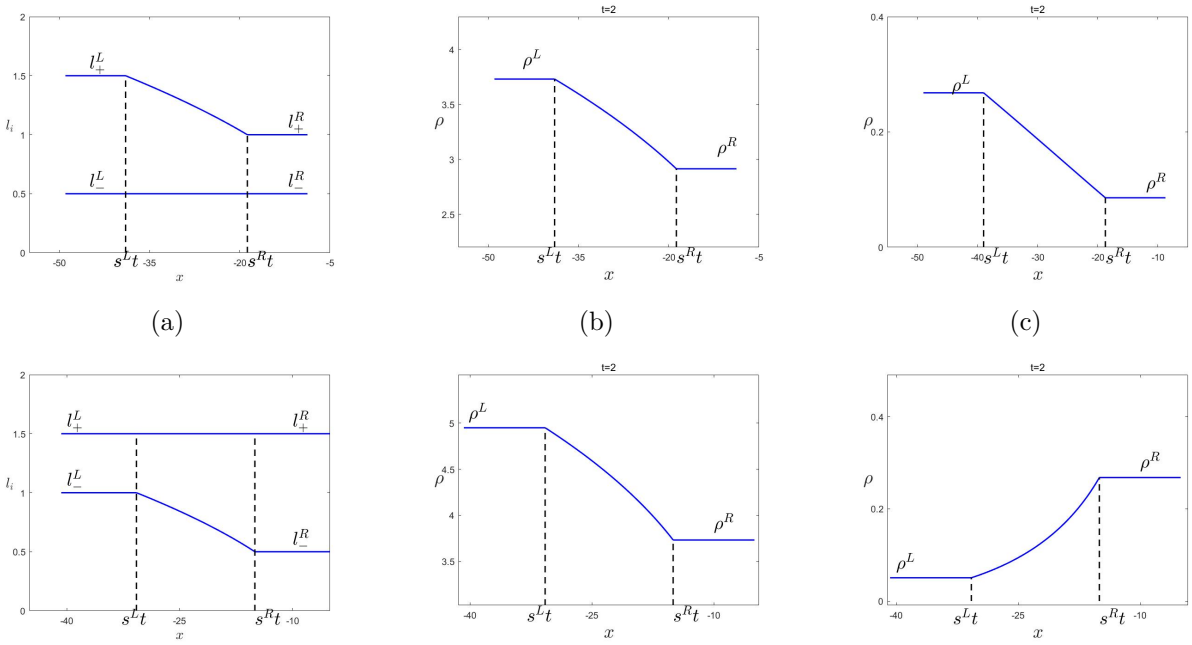


图 1。 HOCLL方程稀疏波解的黎曼不变量 $l_\pm$ 以及两组对应密度的函数 ρ 在 $t = 2$处的分布。

对于情形（i），变量 ρ 和 ν 可表示为

$$\rho = \left(\sqrt{-l_-^0 + \sqrt{-4l_-^{02} + \frac{2z}{3}}} \pm \sqrt{l_-^0}\right)^2,\ \nu = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-l_-^0 + \sqrt{-4l_-^{02} + \frac{2z}{3}}} \mp \sqrt{l_-^0}\right)^2, \tag{4.4}$$

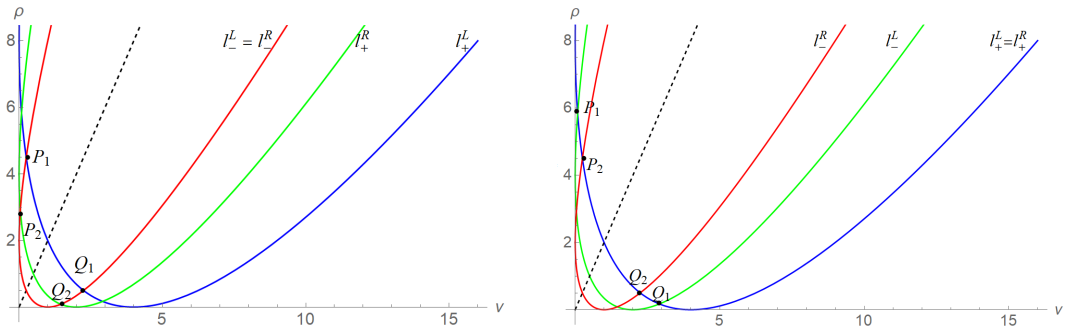
对于情形（ii），可通过以下方式得到

$$\rho = \left(\sqrt{-l_+^0 + \sqrt{-4l_+^{02} + \frac{2z}{3}}} \mp \sqrt{l_+^0}\right)^2,\ \nu = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-l_+^0 + \sqrt{-4l_+^{02} + \frac{2z}{3}}} \pm \sqrt{l_+^0}\right)^2. \tag{4.5}$$

黎曼不变量的分布以及稀疏波的基本结构如图1所示，其中边缘速度可表示为：

$$
\begin{aligned}
&(i)\, s^L = -\frac{3}{2}\left(5l_-^{02} + 2l_+^L l_-^0 + l_+^{L2}\right),\ \ s^R = -\frac{3}{2}\left(5l_-^{02} + 2l_+^R l_-^0 + l_+^{R2}\right),\\
&(ii)\, s^L = -\frac{3}{2}\left(5l_+^{02} + 2l_+^0 l_-^L + l_-^{L2}\right),\ \ s^R = -\frac{3}{2}\left(5l_+^{02} + 2l_+^0 l_-^R + l_-^{R2}\right).
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

图2展示了变量 ρ 和 ν的表达式，且它们的左端点和右端点必须位于 $\rho = 2\nu$的同一侧。对于由 $l_- = const$ 表征的稀疏波（如图2(a)中的红线所示），其两个边缘处的状态可确定为这条红色抛物线与另外两条抛物线的交点；后两条抛物线分别表示对应于常数值 l_+^R 和 l_+^L的曲线。由此，我们得到两对点 $P_1\ (\rho^L) \to P_2\ (\rho^R)$ 和 $Q_1\ (\rho^L) \to Q_2\ (\rho^R)$，分别对应图1(b)和图1(c)所示的两种稀疏波。类似地，图1(e)和图1(f)所示、涉及黎曼不变量 $l_+ = const$ 为常数的情形，则由图2(b)中的抛物线表示。



(a) (b)

图2。黎曼不变量保持不变时，密度 ρ 随速度 ν 的演化，其中：(a) 对应情形 (i)，此时 l_- 保持不变；(b) 对应情形 (ii)，此时 l_+ 保持不变。中间的黑色虚线为 $\rho = 2\nu$。抛物线的交点 P 和 Q 表示黎曼不变量的初始状态。

4.2 椭圆余弦色散冲击波

本节重点研究由式 (2.32) 所示的惠特姆系统控制的色散冲击波结构。引入自相似变量$z = x/t$后，惠特姆方程可化为

$$
(v_i - z)\frac{\partial l_i}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,
\tag{4.7}
$$

并且色散冲击波的结构满足以下边值条件：

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \ l_1 = l_-^L, \quad l_3 = l_-^R, \quad l_4 = l_+^L, \quad v_2\left(l_-^L, l_2, l_-^R, l_+^L\right) = z,\\
&(ii)\ \ l_1 = l_-^R, \quad l_2 = l_+^L, \quad l_4 = l_+^R, \quad v_3\left(l_-^R, l_+^L, l_3, l_+^R\right) = z.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

这两种黎曼不变量结构如图3(a)和图3(d)所示。其边缘的运动（即振荡区域的前沿和后沿）由下式给出

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \ s^L = -\frac{1}{2}\left(-3l_-^{L2} - 8l_-^{R2} - 4l_-^R l_+^L - 3l_+^{L2} - 2l_-^L\left(2l_-^R + l_+^L\right)\right),\\
&\qquad s^R = -\frac{48l_-^{L3} - 6l_-^L\left(l_-^R - l_+^L\right)^2 - 24l_-^{L2}\left(l_-^R + l_+^L\right) - 3\left(l_-^R - l_+^L\right)^2\left(l_-^R + l_+^L\right)}{4l_-^L - 2\left(l_-^R + l_+^L\right)},\\
&(ii)\ \ s^L = \frac{3\left(l_-^{R3} + l_+^{L3} - l_-^{R2}\left(l_+^L - 2l_+^R\right) + 2l_+^{L2}l_+^R + 8l_+^L l_+^{R2} - 16l_+^{R3} - l_-^R\left(l_+^{L2} + 4l_+^L l_+^R - 8l_+^{R2}\right)\right)}{2l_-^R + 2l_+^L - 4l_+^R},\\
&\qquad s^R = \frac{1}{2}\left(-3l_-^{R2} - 8l_+^{L2} - 4l_+^L l_+^R - 3l_+^{R2} - 2l_-^R\left(2l_+^L + l_+^R\right)\right).
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

将黎曼不变量的解代入周期解（2.14）和（2.18），即可得到 x 上的色散冲击波，其直观表示如图3所示。黎曼不变量到物理参数存在两种映射，这与上文所述稀疏波的情况类似。因此，每种黎曼不变量结构都对应两种不同的波状色散激波。

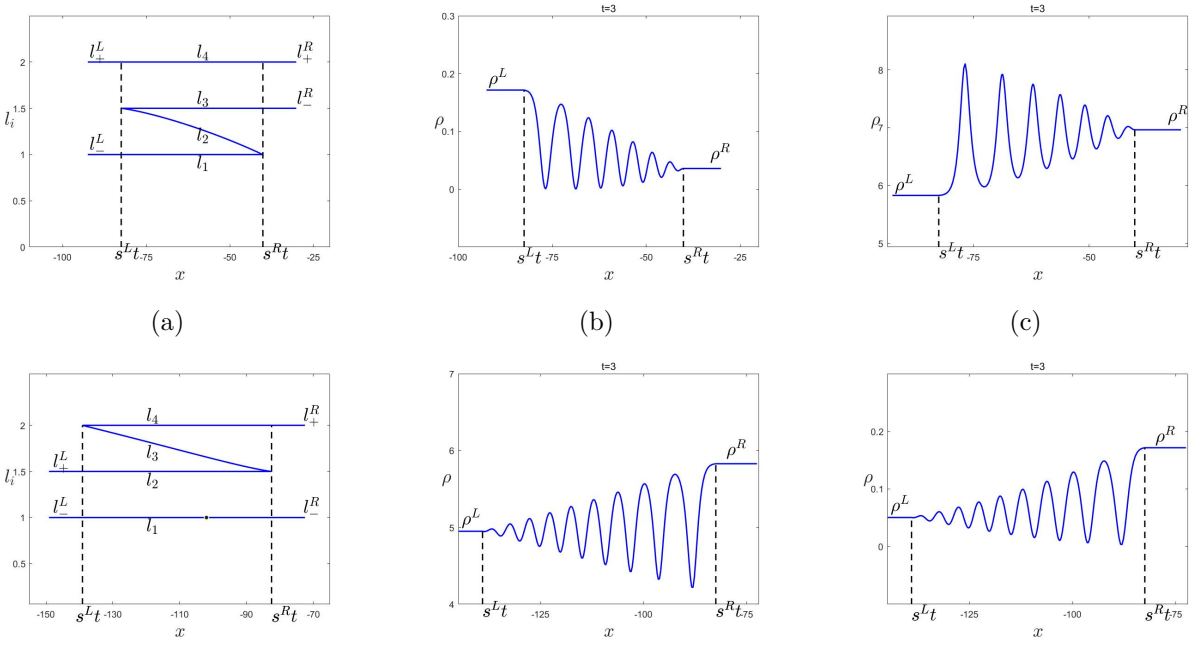


图3。 HOCLL方程色散激波解的黎曼不变量函数 $l_\pm$，以及在 $t=3$处对应的两组密度图 ρ。

显然，摆线型色散激波也要求无色散黎曼不变量属于具有相同单调性的区域。这些条件可以用相同的

图2中的稀疏波图示来描述，但需将“左”和“右”状态互换，即$P_2(\rho^L) \to P_1(\rho^R)$ 和 $Q_2(\rho^L) \to Q_1(\rho^R)$。

我们考虑公式（2.31）对应关系的一种特殊情况。通过周期解（2.14）可知 ρ 的最小值为ρ_1。如果初始条件（4.1）的黎曼不变量满足 $l_+^R = l_+^L > l_-^R > l_-^L$ 和 $l_+^R - l_-^R \geq l_-^R - l_-^L$，那么波内将存在一点，使 ρ 的最小值等于 0。我们称该点为真空点，且该点处的相速度 V 为零。

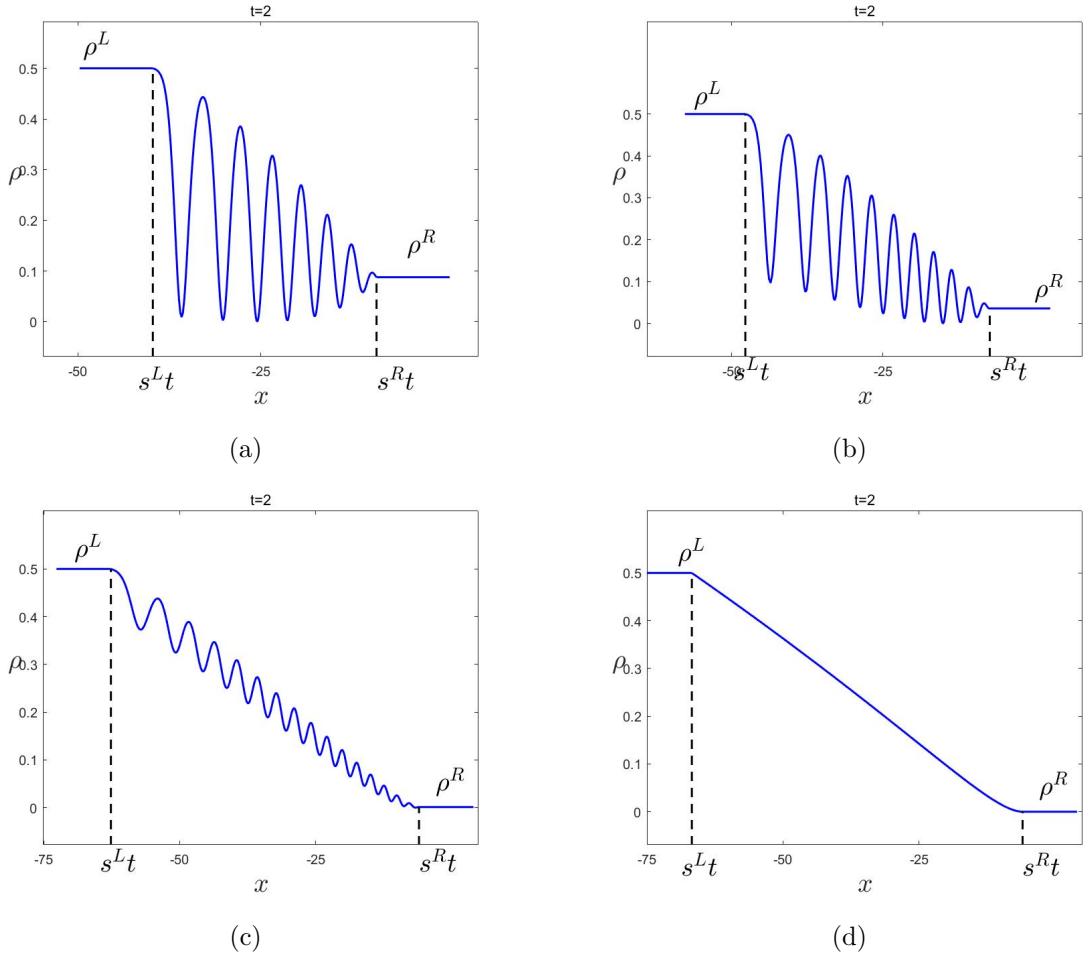


图 4. 存在真空点时 HOCLL方程的色散激波解。(a) 真空点出现在孤子边缘。(b) 色散冲击波内部的真空点。(c) 小振幅色散冲击波。(d) 右边界处密度为零时，色散冲击波转变为稀疏波。边值条件遵循方程 (4.8(i))。

在真空点存在的条件下，进一步而言，若 $l_+^R - l_-^R = l_-^R - l_-^L$，真空点将趋向孤子边缘，如图4(a)所示。若 $l_-^R \to l_+^R$，真空点将趋向小振幅谐波波的边缘，如图4(d)所示，且色散冲击波转变为稀疏波。

若与初始条件 (4.1) 对应的黎曼不变量满足 $l_+^R > l_+^L > l_-^R = l_-^L$ 且 $l_+^R - l_+^L \geq l_+^L - l_-^L$，也会出现真空点，色散冲击波如图5所示。

下一节中，我们将讨论连接 $\rho = 2\nu$ 两侧黎曼不变量状态并穿越不同单调区域的波。

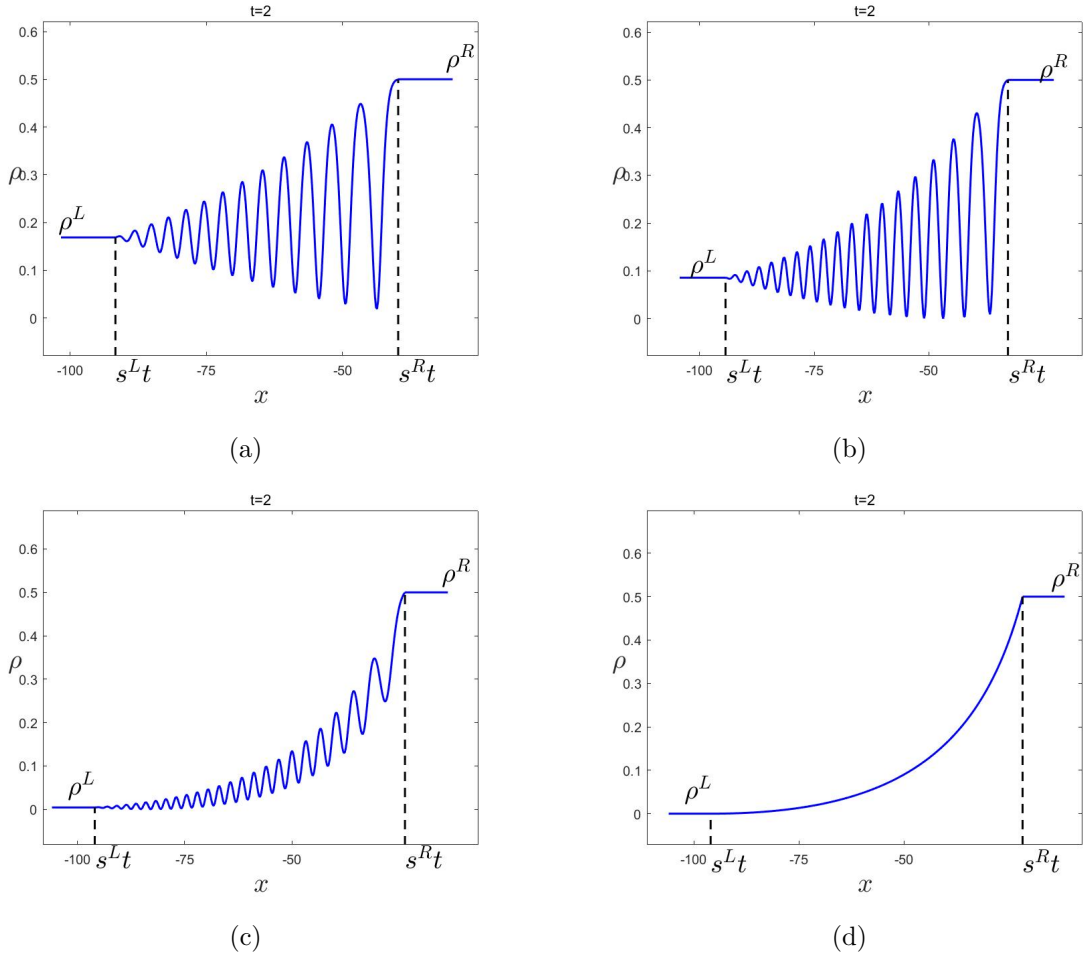


图 5. 满足边值条件且服从式（4.8(ii)）时，存在真空点的 HOCLL 方程色散激波解。(a) 孤子边缘处出现真空点。(b) 色散冲击波内部的真空点。(c) 小振幅色散冲击波。(d) 右边界处零密度时，色散冲击波转变为稀疏波。

4.3 接触型色散激波波

在接下来的分析中，我们首先考虑边界处的黎曼不变量取值相同，即如图6(a)所示的 $l_+^L = l_+^R$ 和 $l_-^L = l_-^R$。边界处黎曼不变量相等，并不意味着左右边界

点具有相同的动力学状态。相反，它们位于无色散黎曼不变量单调性不同的区域中。这自然会产生接触型色散激波。这对于解决不同单调区域之间存在一般初始间断的情形至关重要。

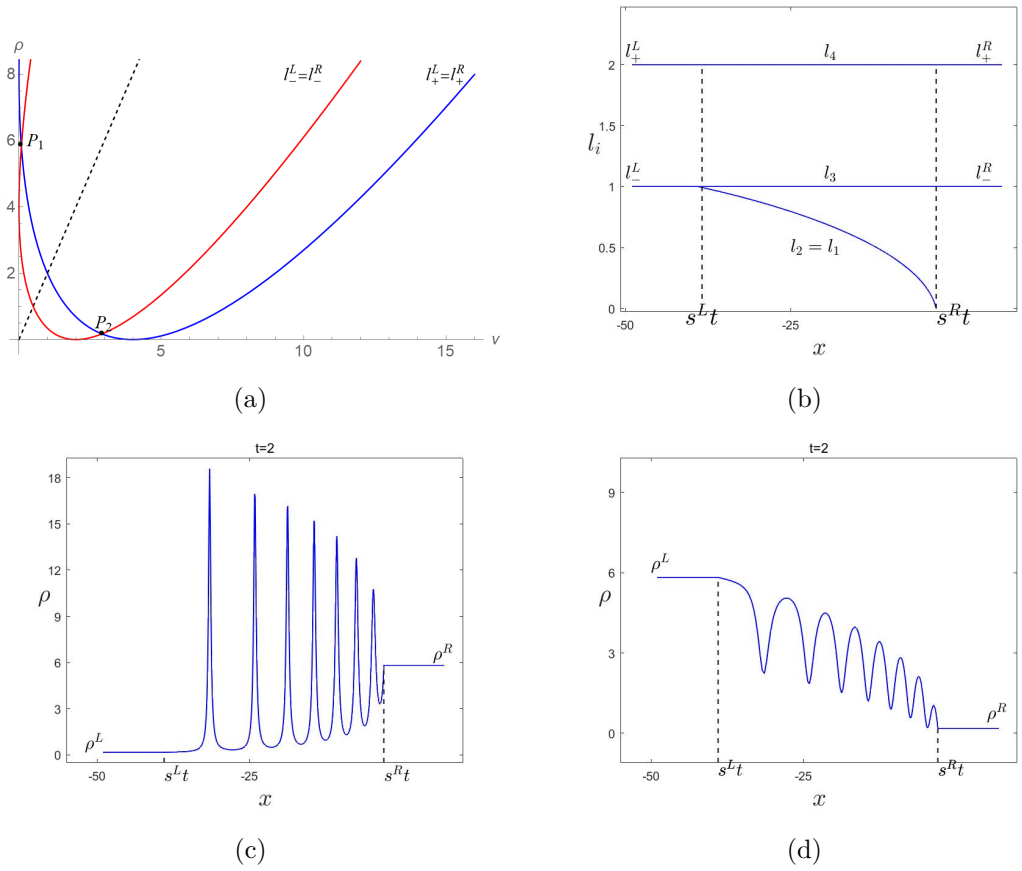


图 6. 接触型色散激波示意图。(a) 黎曼不变量保持不变时，密度随速度的变化。图中标出的交点对应于初始条件。(b) 接触型色散激波的黎曼不变量结构，以及图中接触型色散激波两侧的黎曼不变量值；两侧的值相等。(c) $t=2$ 处的接触型色散激波，显示密度 ρ 与 x 之间的分布。这里，密度与黎曼不变量通过公式（2.30）相关联。(d) 密度与黎曼不变量通过公式（2.31）相关联。

由此得到图6(b)所示的黎曼不变量图，其中两个最小的黎曼不变量相等，即 $l_1=l_2$。因此，可得 $m=0$，Whitham 方程的解由以下表达式确定

$$v_1=v_2=-\frac{48l_1^3-6l_1\left(l_-^L-l_+^L\right)^2-24l_1^2\left(l_-^L+l_+^L\right)-3\left(l_-^L-l_+^L\right)^2\left(l_-^L+l_+^L\right)}{4l_1-2\left(l_-^L+l_+^L\right)}=z. \tag{4.10}$$

边缘的速度为

$$s^L = -\frac{3\left(5l_-^{L2} + 2l_-^L l_+^L + l_+^{L2}\right)}{2},\ s^R = -\frac{3\left(l_-^L - l_+^L\right)^2}{2}. \tag{4.11}$$

图 6(c) 和图 6(d) 展示了分别对应映射 (2.30) 和 (2.31) 的两个接触色散激波，其边缘状态分别表示为 $P_1(\rho^L) \to P_2(\rho^R)$ 和 $P_2(\rho^L) \to P_1(\rho^R)$。

4.4 组合激波

现在我们考虑穿过黎曼不变量不同单调区域的一般基本波结构。如图 7 所示，存在两种情况：其中一个黎曼不变量保持不变，而另一个黎曼不变量的边界值不同：$l_-^L < l_-^R$ 或 $l_-^L > l_-^R$。

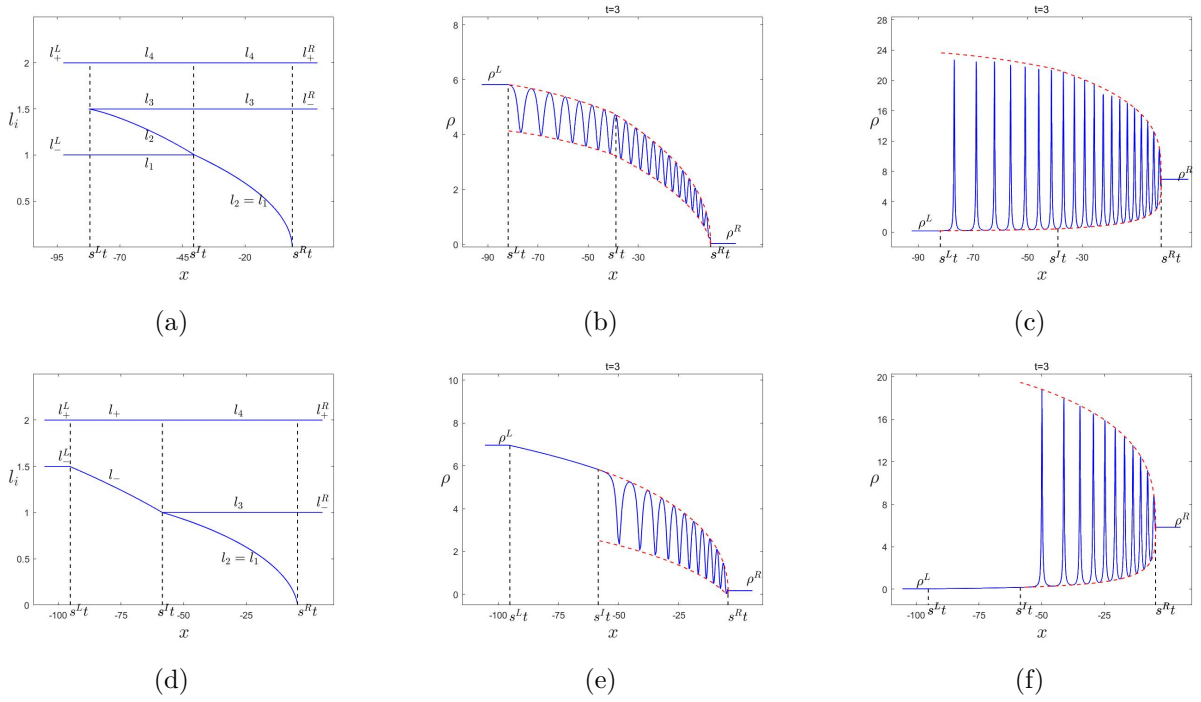


图 7。 组合波结构示意图。(a) 表示色散冲击波和接触型色散激波的黎曼不变量结构。(b) 和 (c) 是与 (a) 对应的密度 ρ 对 x 图。(d) 描绘了稀疏波和接触型色散激波的黎曼不变量结构。(e) 和 (f) 是与 (d) 对应的密度 ρ 对 x 图。

如我们所见，在第一种情况下，振荡区域由通过两种映射组合而成的波结构构成——一个波状色散激波和一个接触型色散激波。波状色散激波的孤子边缘与左侧平台相匹配，而带有 $m = 0$ degenerates 的边缘则退化为接触波

色散冲击波。Whitham 速度可表示为

$$\begin{aligned} s^L &= -\frac{48l_-^{L3} - 6l_-^L\left(l_-^R - l_+^L\right)^2 - 24l_-^{L2}\left(l_-^R + l_+^L\right) - 3\left(l_-^R - l_+^L\right)^2\left(l_-^R + l_+^L\right)}{4l_-^L - 2\left(l_-^R + l_+^L\right)}, \\ s^I &= -\frac{1}{2}\left(-3l_-^{L2} - 8l_-^{R2} - 4l_-^R l_+^L - 3l_+^{L2} - 2l_-^L\left(2l_-^R + l_+^L\right)\right), s^R = -\frac{3\left(l_-^R - l_+^R\right)^2}{2}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

类似地，在第二种情况下，我们有一个与稀疏波相结合的接触色散激波区域。边缘速度可表示为

$$s^L = -\frac{3}{2}\left(5l_-^{L2} + 2l_+^L l_-^L + l_+^{L2}\right),\ s^I = -\frac{3}{2}\left(5l_-^{R2} + 2l_+^R l_-^R + l_+^{R2}\right), s^R = -\frac{3\left(l_-^R - l_+^R\right)^2}{2}. \tag{4.13}$$

5 所有可行初始间断条件的分类

按照前述设定，由方程 (4.1) 描述的初始间断条件由四个参数参数化： ν_L、 ρ_L、 ν_R 和 ρ_R，它们分别对应于左右边界处黎曼不变量 l_-^L、 l_+^L、 l_-^R 和 l_+^R 的值。由方程 (3.5) 可得变量 ν 和 ρ 之间的关系。

接下来，我们将对HOCLL方程的黎曼问题进行完整分类。具体而言，直线 $\rho = 2\nu$ 将 (ν、 ρ) 平面分成具有不同单调性特征的两个区域。我们首先研究两个边界点（分别对应左右状态）位于坐标轴 $\rho = 2\nu$同一侧时的分类问题。固定左边界的值后，可以看出，图8中的 (ν、 ρ) 平面上存在六个区域，记为

$$\begin{aligned} &A:\ l_-^R < l_+^R < l_-^L < l_+^L, \\ &B:\ l_-^R < l_-^L < l_+^R < l_+^L, \\ &C:\ l_-^L < l_-^R < l_+^R < l_+^L, \\ &D:\ l_-^R < l_-^L < l_+^L < l_+^R, \\ &E:\ l_-^L < l_-^R < l_+^L < l_+^R, \\ &F:\ l_-^L < l_+^L < l_-^R < l_+^R. \end{aligned} \tag{5.1}$$

图9展示了黎曼不变量的六种结构类型的特征，直观地呈现了流场中的波结构。黎曼不变量对应两种密度映射，因此这六种情况会产生从初始间断演化而来的十二种波结构。如图10所示，流场明显划分为五个具有不同特征的区域。其中，左侧（区域I）和右侧（区域V）的均匀平台区域代表流场的初始边界状态。在这两个

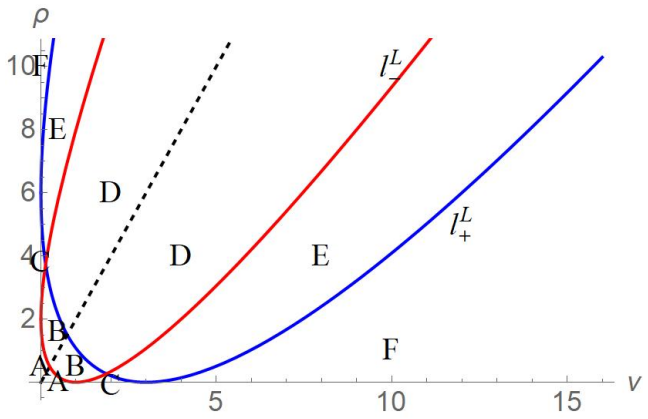


图 8. 初始间断条件下不同波结构演化对应的区域分类（六类）。黑色虚线表示 $\rho = 2\nu$。

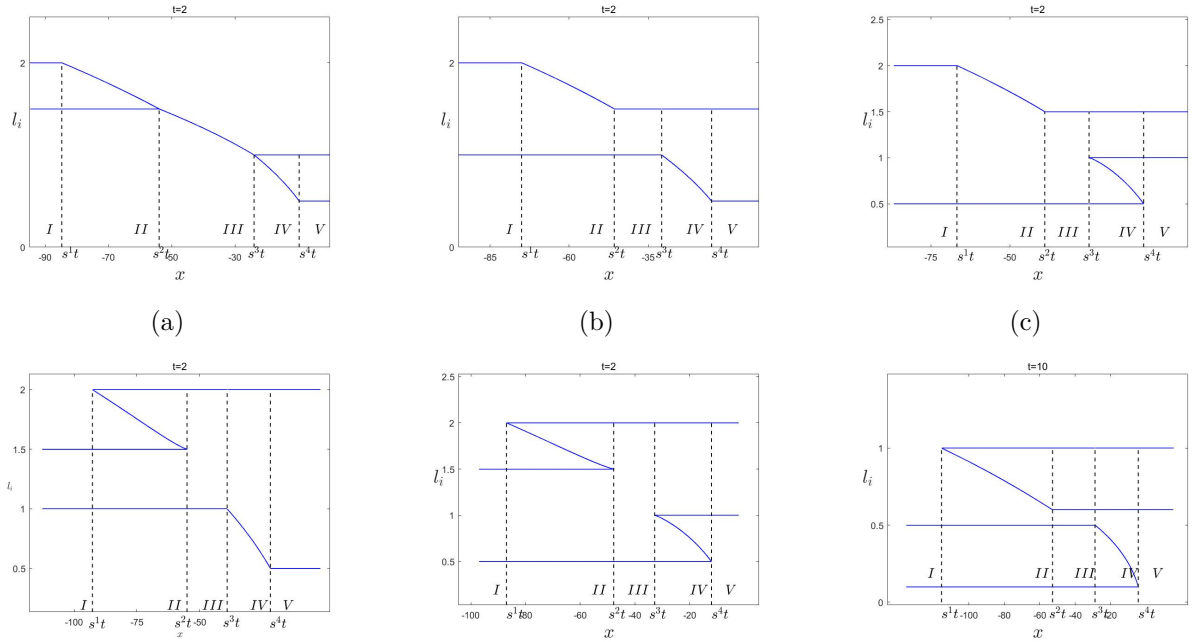


图 9. 当边界值（对应左右状态）均位于坐标轴 $\rho = 2\nu$ 同一侧时，与六类情况相对应的不同初始间断条件下黎曼不变量的结构。

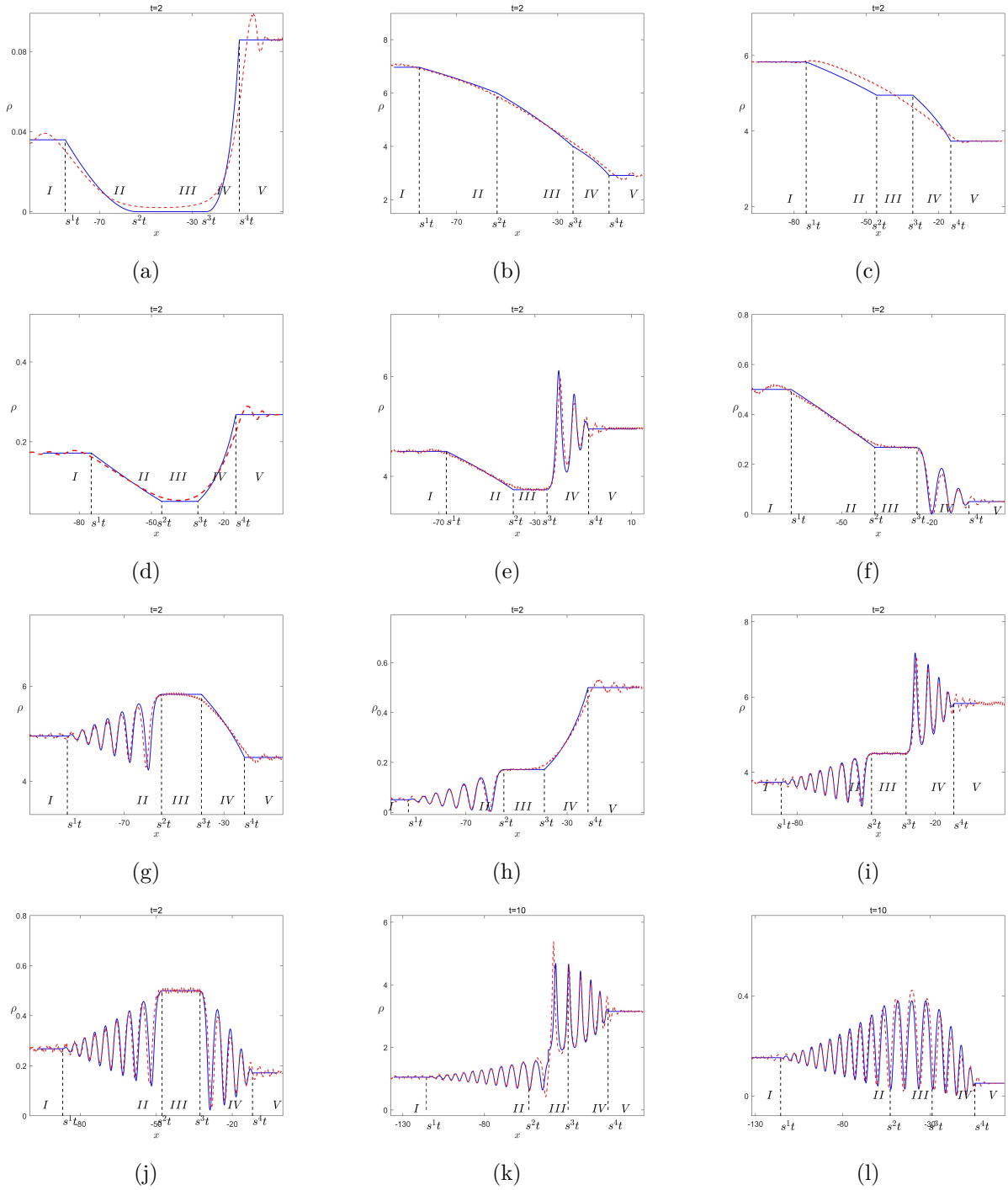


图 10. 图 7 中六种黎曼不变量结构对应的十二个密度波随 x 的演化，其中一种黎曼不变量结构通过方程（2.30）和（2.31）对应两个密度波。红色虚线表示数值模拟结果。

在各区域中，流速和密度保持不变，而连接这两个均匀区域的是中间演化区。

案例 A 对应的黎曼不变量分布如图9(a)所示，映射后的密度分布如图10(a)和图10(b)所示。图10(a)由两个稀疏波（区域II和区域IV）以及一个特殊真空区域（区域 III）组成。与图10(a)中的结构不同，图10(b)中流场的中间第三个区域并非真空，而是另一个稀疏波。各区域的边界速度为

$$\begin{aligned} s^1 &= -\frac{3}{2}\left(5l_+^{L2}+2l_+^L l_-^L+l_-^{L2}\right),\ s^2=-12l_-^{L2},\\ s^3 &= -12l_+^{R2},\ s^4=-\frac{3}{2}\left(5l_-^{R2}+2l_+^R l_-^R+l_+^{R2}\right). \end{aligned} \tag{5.2}$$

案例 B 中黎曼不变量的结构如图9(b)所示，十分清晰。值得注意的是，该示意图显示，两个稀疏波（区域II和区域IV）由一个平台区域（区域 III）连接，这一点可见于图10(c)和图10(d)。各区域的速度为

$$\begin{aligned} s^1 &= -\frac{3}{2}\left(5l_+^{L2}+2l_+^L l_-^L+l_-^{L2}\right),\ s^2=-\frac{3}{2}\left(5l_+^{R2}+2l_+^R l_-^L+l_-^{L2}\right),\\ s^3 &= -\frac{3}{2}\left(5l_-^{L2}+2l_+^R l_-^L+l_+^{R2}\right),\ s^4=-\frac{3}{2}\left(5l_-^{R2}+2l_+^R l_-^R+l_+^{R2}\right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

案例 C 呈现的色散冲击波结构如图9(c)所示。在这里，色散冲击波（区域IV）通过平台（区域 III）与稀疏波（区域II）相连。图10(e)和图10(f)中的相应密度波可以更清晰地揭示区域IV的细节：该区域的左边界为孤子边缘，分别表现为亮孤子或暗孤子；而右边界为小振幅谐波边缘。这些边缘的速度由惠特姆方程得出

$$\begin{aligned} s^1 &= -\frac{3}{2}\left(5l_+^{L2}+2l_+^L l_-^L+l_-^{L2}\right),\ s^2=-\frac{3}{2}\left(5l_+^{R2}+2l_+^R l_-^L+l_-^{L2}\right),\\ s^3 &= -\frac{1}{2}\left(-3l_-^{L2}-8l_-^{R2}-4l_-^R l_+^R-3l_+^{R2}-2l_-^L\left(2l_-^R+l_+^R\right)\right),\\ s^4 &= -\frac{48l_-^{L3}-6l_-^L\left(l_-^R-l_+^R\right)^2-24l_-^{L2}\left(l_-^R+l_+^R\right)-3\left(l_-^R-l_+^R\right)^2\left(l_-^R+l_+^R\right)}{4l_-^L-2\left(l_-^R+l_+^R\right)}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

案例 D 与案例 C 非常相似，黎曼不变量的结构如图9(d)所示，主要区别在于色散冲击波和稀疏波的位置互换了。具体而言，在案例 D 中，色散冲击波的左边界（对应区域 II）是小振幅谐波的边缘，而其右边界是孤子的边缘，呈现为暗孤子。特征可参见

图10(g)和图10(h)中的示例。速度分别为

$$
\begin{aligned}
s^1 &= -\frac{1}{2}\left(3l_-^{L2}+3l_+^{L2}+4l_+^Ll_+^R+8l_+^{R2}+2l_-^L\left(2l_+^L+l_+^R\right)\right)+\frac{4\left(l_-^L-l_+^R\right)\left(l_+^R-l_+^L\right)\left(l_-^L+l_+^L+4l_+^R\right)}{l_-^L+l_+^L-2l_+^R},\\
s^2 &= \frac{1}{2}\left(-3l_-^{L2}-8l_+^{L2}-4l_+^Ll_+^R-3l_+^{R2}-2l_-^L\left(2l_+^L+l_+^R\right)\right),\\
s^3 &= -\frac{3}{2}\left(5l_-^{L2}+2l_+^Rl_-^L+l_+^{R2}\right),\ s^4=-\frac{3}{2}\left(5l_-^{R2}+2l_+^Rl_-^R+l_+^{R2}\right).
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

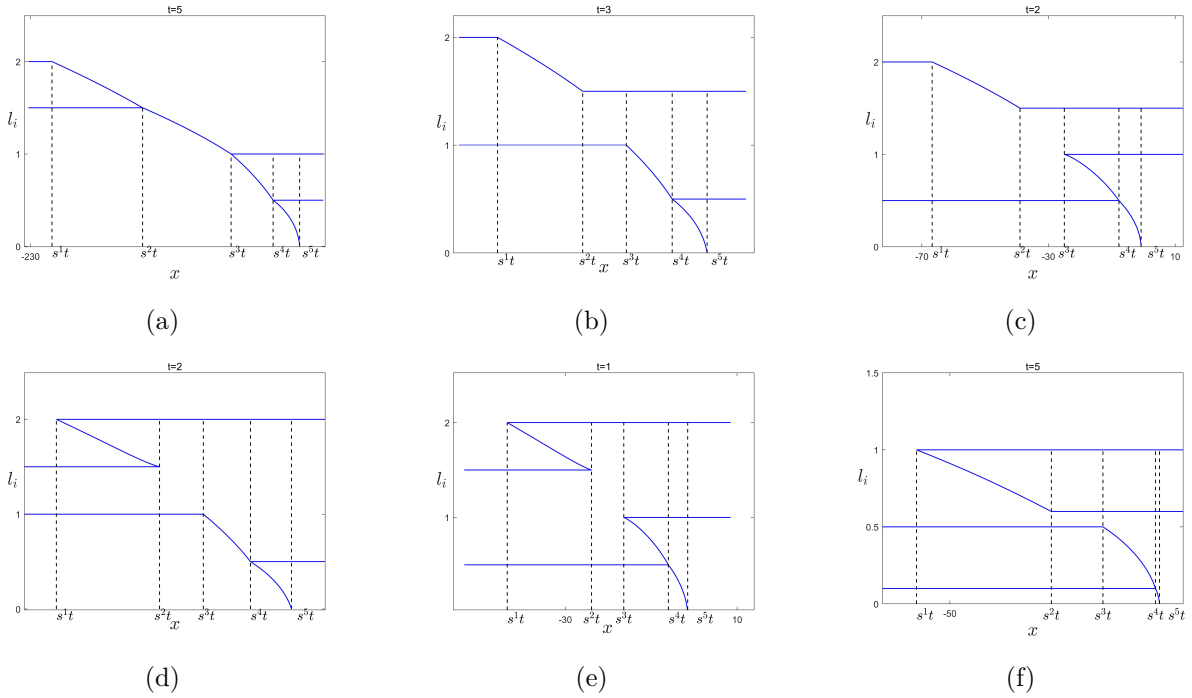


图 11. 对应于边界点（对应于左右状态）位于坐标轴 $\rho = 2\nu$ 两侧时的情形中，六类不同初始间断条件下黎曼不变量的分布。

情形E表明，两个色散冲击波由一个平台连接（如图9(e)所示），对应于两种密度情形。区域II和区域IV为色散冲击波区域，其余部分为平台区域。在图 10(i)中，区域II的左边界和区域IV的右边界是小振幅谐波的边缘，而它们另一侧的边缘则是孤子的边缘。在图 10(j) 中，色散冲击波的边缘与图 10(i) 中的相同，但区域 IV 中的亮孤子变为暗孤子。速度

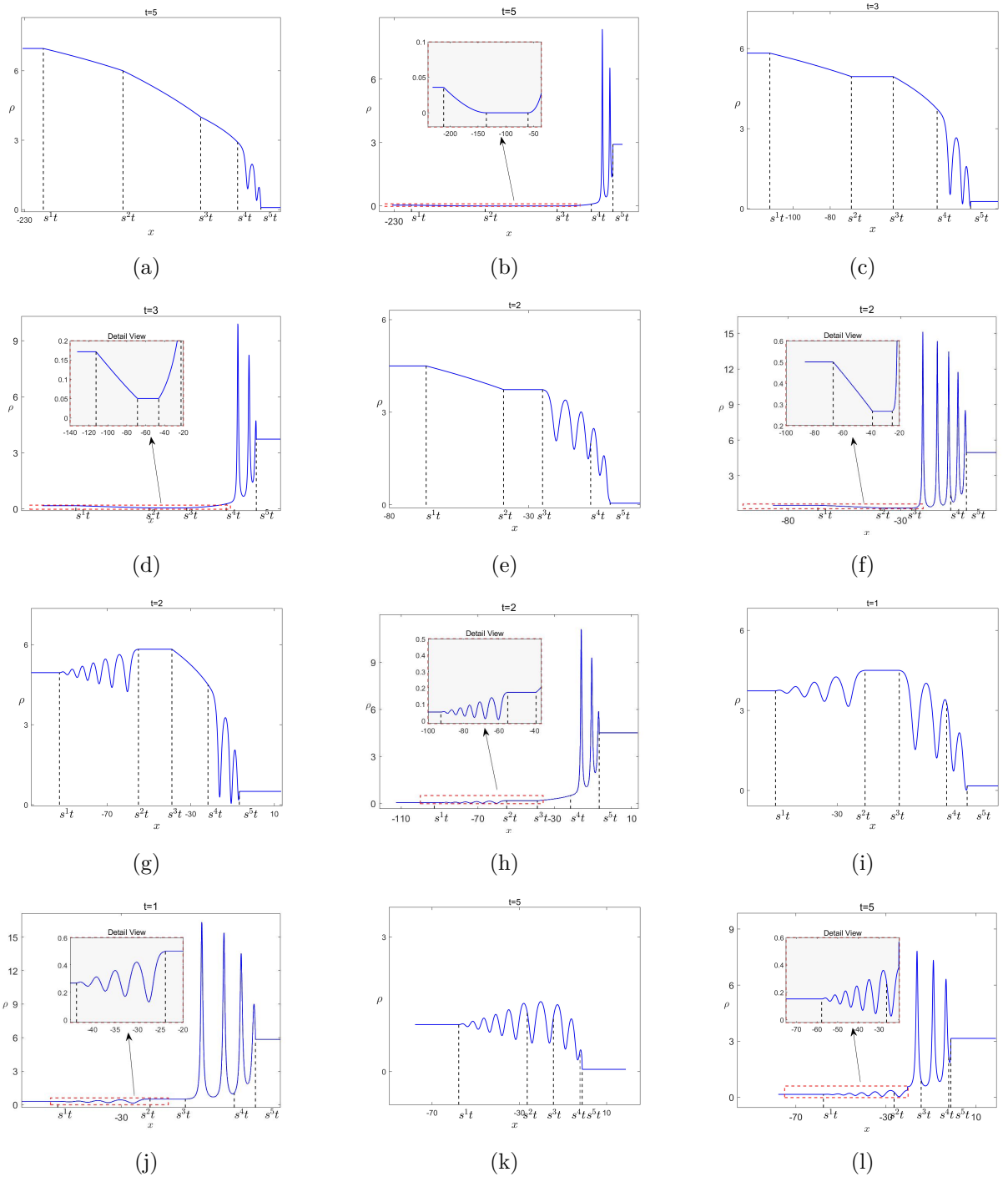


图 12. 图 9 中六种黎曼不变量结构所对应的十二个密度波随 x 的演化，其中一种黎曼不变量结构通过方程（2.30）和（2.31）对应两个密度波。嵌入的小图展示了红框内区域的放大视图。

对应各自边界的是

$$
\begin{aligned}
s^1 &= -\frac{1}{2}\left(3l_-^{L2}+3l_+^{L2}+4l_+^L l_+^R+8l_+^{R2}+2l_-^L\left(2l_+^L+l_+^R\right)\right)+\frac{4\left(l_-^L-l_+^R\right)\left(l_+^R-l_+^L\right)\left(l_-^L+l_+^L+4l_+^R\right)}{l_-^L+l_+^L-2l_+^R},\\
s^2 &= \frac{1}{2}\left(-3l_-^{L2}-8l_+^{L2}-4l_+^L l_+^R-3l_+^{R2}-2l_-^L\left(2l_+^L+l_+^R\right)\right),\\
s^3 &= -\frac{1}{2}\left(-3l_-^{L2}-8l_-^{R2}-4l_-^R l_+^R-3l_+^{R2}-2l_-^L\left(2l_-^R+l_+^R\right)\right),\\
s^4 &= -\frac{48l_-^{L3}-6l_-^L\left(l_-^R-l_+^R\right)^2-24l_-^{L2}\left(l_-^R+l_+^R\right)-3\left(l_-^R-l_+^R\right)^2\left(l_-^R+l_+^R\right)}{4l_-^L-2\left(l_-^R+l_+^R\right)}.
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

在案例 F 中，如图 9(f) 所示，仍存在两个色散冲击波。相应的密度分布如图 10(i) 和图 10(j) 所示。值得注意的是，情形E中存在的平台区域（区域 III）已经消失，取而代之的是可用椭圆余弦波表示的非线性波。对于每个边界，速度为

$$
\begin{aligned}
s^1 &= -\frac{1}{2}\left(3l_-^{R2}+3l_+^{L2}+4l_+^L l_+^R+8l_+^{R2}+2l_-^R\left(2l_+^L+l_+^R\right)\right)+\frac{4\left(l_-^R-l_+^R\right)\left(l_+^R-l_+^L\right)\left(l_-^R+l_+^L+4l_+^R\right)}{l_-^R+l_+^L-2l_+^R},\\
s^2 &= v_3\left(l_-^L,\ l_+^L,\ l_-^R,\ l_+^R\right),\ s^3 = v_2\left(l_-^L,\ l_+^L,\ l_-^R,\ l_+^R\right),\\
s^4 &= -\frac{48l_-^{L3}-6l_-^L\left(l_-^R-l_+^R\right)^2-24l_-^{L2}\left(l_-^R+l_+^R\right)-3\left(l_-^R-l_+^R\right)^2\left(l_-^R+l_+^R\right)}{4l_-^L-2\left(l_-^R+l_+^R\right)}.
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

对于上述六种情形，我们为初始条件指定具体数值后进行了数值模拟。如图10所示，数值模拟结果与理论分析结果基本一致。边缘处的轻微振荡主要源于数值方法在间断面附近的局限性。

最后，我们考虑边界点位于直线$\rho = 2\nu$两侧的情形。正如前文所述，当边界点位于不同的单调性区域时，将会出现组合激波结构。这些情形的分类方法与边界点位于同一单调性区域时相同（如图11所示），但会额外出现一个接触型色散激波。与前文讨论一致，六种不同情形对应的速度中，额外的速度 s^5 表示为 $s^5 = -\frac{3}{2}\left(l_-^R-l_+^R\right)$。图12展示了这六种分类下相应的密度演化。

---

6 三次曲线剖面的波破裂

在非线性波的研究中，波破碎的发生通常与破碎点附近初始剖面的局部行为密切相关。本节中，我们进一步

考虑另一种典型的波破碎情况：破碎点处初始剖面的局部行为可用幂函数 $x^{1/n}$ 近似，其中指数 n取正整数。我们可以使用 GP 方法，将 DSW 作为调制周期解进行分析，而惠特姆方程则支配这些调制参数的演化规律。

根据前文第 3 节的内容，我们推导出了黎曼不变量。对于简单波，其中一个黎曼不变量必须保持不变。基于此，我们选取黎曼不变量 l_- 为常数，这样便自然满足方程组 (3.4) 的第二个方程。另一个黎曼不变量 l_+ 的演化方程转化为 Hopf 方程，其解具有以下形式

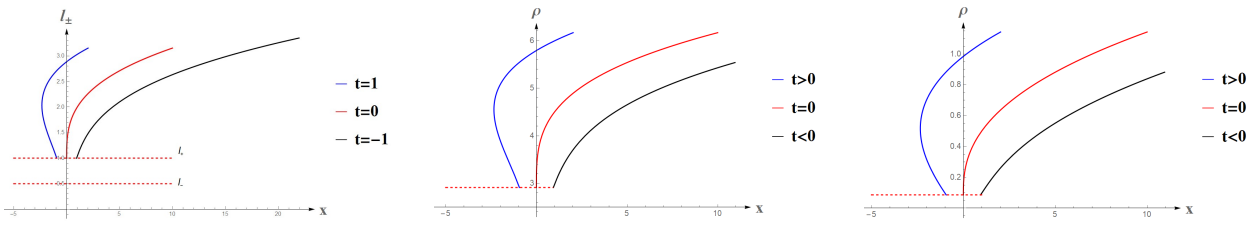
$$x+\frac{3}{2}\left(5l_+^2+2l_+l_-+l_-^2\right)t=w\left(l_+\right), \tag{6.1}$$

其中， $w(l_+)$ 是与初始剖面 l_+ 对应的反函数。

我们将考虑这样一种情形：波破裂时刻黎曼不变量 l_+ 的剖面由一条立方根曲线表示。不失一般性地，建立一个坐标系，使波破裂点位于 $x=0$ 和 $t=0$ 处，由此得到方程组 (3.4) 的解

$$\begin{aligned} &l_-=l_-^L=const,\ l_+^L=const,\\ &x+\frac{3}{2}\left(5l_+^2+2l_+l_-+l_-^2\right)t=\left(l_+-l_+^L\right)^3. \end{aligned} \tag{6.2}$$

图 13 展示了不同时刻黎曼不变量 $l_\pm$ 的函数，以及两组相应密度 ρ 的函数。因此，当 $t<0$ 时不存在奇点；而在 $t=0$ 处出现奇点，随后形成多值区域。



(a) (b) (c)

图 13. 在 $t=-1$、 $t=0$ 和 $t=1$ 处，三次初始情形下黎曼不变量 $l_\pm$ 以及两组对应密度的函数 ρ 的分布。

接下来，我们采用广义霍多orpaϕ方法求解 Whitham 方程（2.32），并得到解的一般形式

$$x-v_i\left(l\right)t=\omega_i\left(l\right),\ i=1,2,3,4, \tag{6.3}$$

其中， $v_i(l)$ 是式（2.33）中给出的 Whitham 速度。对式关于 $l_j\,(i\neq j)$ 求导并消去变量 t，可得 (6.3)

$$\frac{1}{\omega_i-\omega_j}\frac{\partial\omega_i}{\partial l_j}=\frac{1}{v_i-v_j}\frac{\partial v_i}{\partial l_j}, \tag{6.4}$$

可以看出， ω_i 和 v_i 是对称的，且 $\omega_i(l)$的表达式

$$\omega_i\left(l\right)=\left(1-\frac{L}{\partial_i L}\partial_i\right)W. \tag{6.5}$$

于是，方程（6.4）变换为（$i\neq j$）

$$\frac{\partial^2 W}{\partial l_i\partial l_j}=\frac{1}{2\left(l_i-l_j\right)}\left(\frac{\partial W}{\partial l_j}-\frac{\partial W}{\partial l_j}\right). \tag{6.6}$$

我们可以得到生成函数

$$W=\frac{l^2}{\sqrt{\prod_{i=1}^{4}\left(l-l_i\right)}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{W^{(k)}}{l^k}, \tag{6.7}$$

其系　　数由将 W 按 l的负幂展开而得

$$\begin{gathered}W^{(0)}=1,\ W^{(1)}=\frac{\eta_1}{2},\ W^{(2)}=\frac{3\eta_1^2}{8}-\frac{\eta_2}{2},\\ W^{(3)}=\frac{\eta_3}{2}+\frac{5\eta_1^3}{16}-\frac{3\eta_1\eta_2}{4},\end{gathered} \tag{6.8}$$

其中,

$$\begin{gathered}\eta_1=l_1+l_2\ +\ l_3+l_4,\ \eta_2=l_3\ l_4+l_2\left(l_3+l_4\right)+l_1\left(l_2+l_3+l_4\right),\\ \eta_3=\left(l_1+l_2\right)l_3\ l_4+l_1\ l_2\left(l_3+l_4\right).\end{gathered} \tag{6.9}$$

因此， $\omega_i(l)$ 的形式为

$$\omega_i\left(l\right)=\sum_{k=1}^{n}C^{(k)}\omega_i^{(k)}\left(l\right), \tag{6.10}$$

其中

$$\omega_i^{(k)}\left(l\right)=\left(1-\frac{L}{\partial_i L}\partial_i\right)W^{(k)}.$$

为使 DSW 边缘与无色散区域相匹配，必须满足以下条件:

$$\begin{gathered}l_2=l_+,\ l_1=l_-,\ at\ m=0,\\ l_4=l_+,\ l_1=l_-,\ at\ m=1.\end{gathered} \tag{6.11}$$

选择系数 $C^{(k)}$，使其在 $m=1$ 处与 l_+ 匹配，从而满足 $\omega_4=\left(l_-^L-l_4\right)^3$，经简单计算可得

$$\begin{aligned} C^{(0)} &= -\frac{1}{35}\left(35l_+^{L3}+35l_+^{L2}l_-^0-7l_+^Ll_-^{02}+l_-^{03}\right), \\ C^{(1)} &= \frac{2}{35}\left(35l_+^{L2}+14l_+^Ll_-^0-l_-^{02}\right), \\ C^{(2)} &= -\frac{8}{35}\left(7l_+^L+l_-^0\right), C^{(3)}=\frac{16}{35}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

因此，Whitham 方程的解如下

$$x-v_i\left(l\right)t=C^{(3)}\omega_i^{(3)}\left(l\right)+C^{(2)}\omega_i^{(2)}\left(l\right)+C^{(1)}\omega_i^{(1)}\left(l\right)+C^{(0)}\omega_i^{(0)}\left(l\right), \tag{6.13}$$

其中 $i=3$，4。

方程 (6.13) 给出了 $l_3(x,\ t)$ 和 $l_4(x,\ t)$ 的解。图 14(a) 描绘了黎曼不变量 l_+ 和 l_- 相对于 x 的依赖关系。图 14(b) 和图 14(d) 展示了两个参数组 ρ_i 的周期解随 x变化的情况。将四个黎曼不变量代入 HOCLL 方程的周期解后，得到的色散冲击波如图 14(c) 和图 14(e) 所示，数值结果与理论解一致。

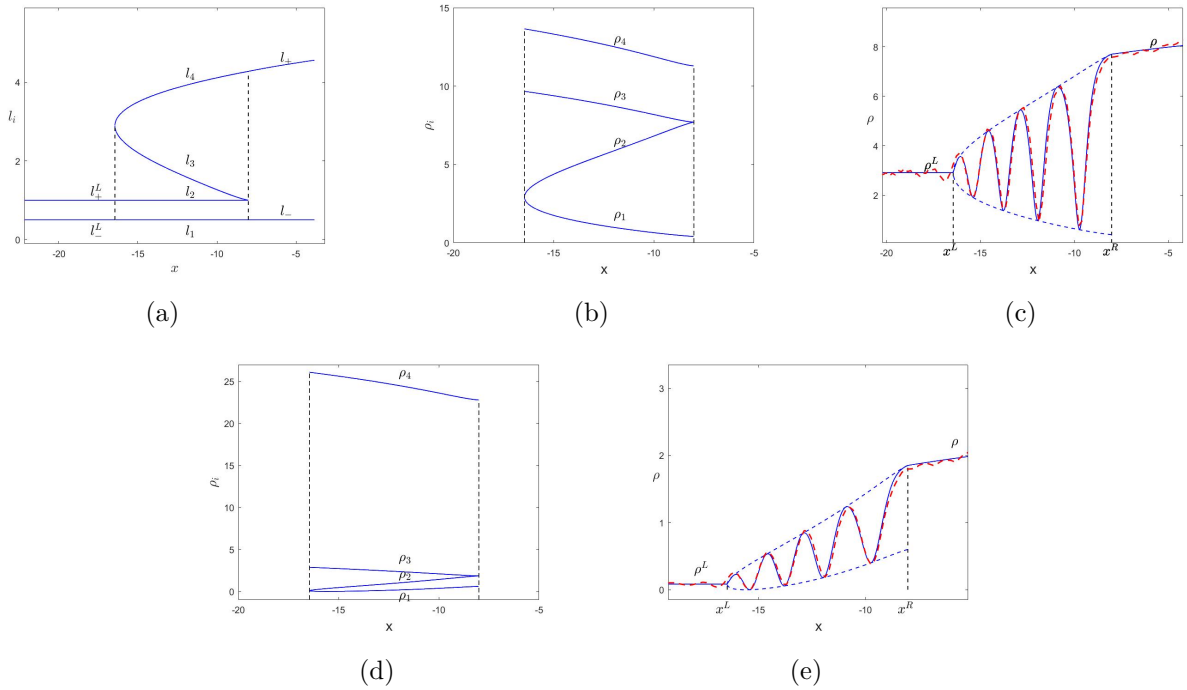


图 14. $t=0.3$处初始三次曲线的色散冲击波解。(a) 黎曼不变量 $l_\pm$ 的分布。(b) (d) 与黎曼不变量对应的周期解中，两组参数 ρ_i 关于 x 的依赖关系。(c) (e) 色散冲击波的两组解析解（蓝色实线）和数值模拟（红色虚线）结果。

此外，在方程 (6.13) 中 $l_3 \to l_2$ 的极限情况下， l_4 的表达式可表示为 t的函数

$$l_4(t) = l_+^L + \frac{7t}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{t\left(4l_-^L + 20l_+^L + 21t\right)}, \tag{6.14}$$

由此可得色散冲击波孤子边缘处的规律

$$x^R(t) = -\frac{49t^3}{4} - t\left(\frac{3l_-^{L2}}{2} + 3l_-^L l_+^L + \frac{15l_+^{L2}}{2} + \frac{7l_-^L t + 35l_+^L t}{2}\right) - \frac{1}{12}\sqrt{\frac{7}{3}}\left(t\left(4l_-^L + 20l_+^L + 21t\right)\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{6.15}$$

在小振幅极限下，即 $l_3 \to l_4$， $x = x^L$(t)的规律

$$x + (12l_4^2 - \frac{2}{3}\left(l_-^L - l_+^L\right)^2)t = -\frac{16\left(l_4 - l_+^L\right)^3\left(8l_4 - 7l_-^L - l_+^L\right)}{35\left(-2l_4 + l_-^L + l_+^L\right)}, \tag{6.16}$$

计算函数 x(l_4)的最大值，得到取决于 l_4 的时间 t ，其表达式为

$$t = -\frac{8\left(l_4 - l_+^L\right)^2\left(16l_4^2 + 7l_-^{L2} + 6l_-^L l_+^L + 3l_+^{L2} - 4l_4\left(5l_-^L + 3l_+^L\right)\right)}{35\left(16l_4^3 - 16l_4^2\left(l_-^L + l_+^L\right) + \left(l_-^L - l_+^L\right)^2\left(l_-^L + l_+^L\right) + 4l_4\left(l_-^L + l_+^L\right)^2\right)}, \tag{6.17}$$

因此，小振幅边的运动规律为

$$\begin{aligned} x^L = &-\frac{4\left(l_4 - l_+^L\right)^2}{35\left(16l_4^3 - 16l_4^2\left(l_-^L + l_+^L\right) + \left(l_-^L - l_+^L\right)^2\left(l_-^L + l_+^L\right) + 4l_4\left(l_-^L + l_+^L\right)^2\right)} \\ &\left(128l_4^3\left(l_4 - l_-^L + l_+^L\right) + 8l_4^2\left(l_-^{L2} - 30l_+^L l_-^L - 19l_+^{L2}\right) + \left(l_-^L - l_+^L\right)^2\left(21l_-^{L2} + 46l_-^L l_+^L + 13l_+^{L2}\right)\right. \\ &\left.-4l_4\left(l_-^{L3} - 23l_-^{L2}l_+^L - 45l_-^L l_+^{L2} + 3l_+^{L3}\right)\right), \end{aligned} \tag{6.18}$$

其中， l_4 是由方程 (6.16) 给出的 t 的函数。当然，也可以类似地求出幂函数 $x^{1/n}$ 在破裂时刻的破裂问题解。

结论

本文利用 Whitham 调制理论，研究了高阶 Chen-Lee-Liu（HOCLL）方程在两种初始条件下的波演化。

首先，我们通过有限带积分方法得到了 HOCLL 方程的单相周期解，然后利用平均法对该方程的守恒律进行平均，从而推导出 Whitham 调制方程。

其次，我们通过 Madelung 变换得到了该方程的流体力学表示，并考虑了无色散极限。

第三，我们全面描述了 HOCLL 方程的黎曼问题，这是色散动力学领域中的一个关键问题。由于 HOCLL 方程是非凸方程，在

黎曼问题中，初始间断演化所产生的波结构比经典黎曼问题的波结构更为复杂。根据两侧边界初始条件对应的黎曼不变量的大小，以及各边界处黎曼不变量所在的单调区域，我们将初始间断问题分为十二类，并得出了二十四种可能产生的波结构，同时考虑了波边界的传播速度。此外，我们还对方程在这些初始条件下的演化进行了数值模拟，理论分析结果与数值模拟结果一致。

最后，我们考察了波破碎时刻形成的三次初始条件下波的演化规律。利用广义霍多orpaϕ方法，我们推导了黎曼不变量的结构，并计算了色散冲击波在孤子边缘和小振幅谐波边缘的运动规律。

致谢

我们衷心感谢讨论组的每位成员提出的建议。本研究得到国家自然科学基金委员会基金项目（项目编号：12575005）、山西省留学回国人员科研活动择优资助项目（项目编号：20220008）以及山西省自然科学基金（项目编号：202303021221031）的资助。

利益冲突

作者未披露任何利益冲突。

参考文献

[1] G. Wallerstein 和 S. Elgar，恒星大气中的激波与海滩上的破碎波。《科学》，**256**（1992）1531-1536。[2] M. A. Hoefer 和 M. J. Ablowitz，色散激波。*Scholarpedia*，**4** （2009）5562。[3] W. X. Yuan 和 R. Guo，物理引导的多阶段神经网络：一种用于阶跃初始值和色散激波现象的物理引导网络。《物理评论*E*》，**110**（2024年）065307。[4] S. Trillo、M. Klein、G. F. Clauss 和 M. Onorato，观测浅水中由初始凹陷演化形成的色散激波。《物理学 *D*》，**333** （2016）276-284。

[5] G. A. El、R. H. J. Grimshaw 和 N. F. Smyth，全非线性浅水理论中的非定常波状涌潮。《流体物理》，**18** （2006）027104。[6]M. A. Hoefer、M. J. Ablowitz、I. Coddington、E. A. Cornell、P. Engels 和 V. Schweikhard，玻色-爱因斯坦凝聚体与气体动力学中的色散激波和经典激波。*Phys. Rev. A*，**74** （2006）023623。[7] L. Romagnani、S. V. Bulanov、M. Borghesi、P. Audebert、J. C. Gauthier、K. Löwen- brück、A. J. Mackinnon、P. Patel、G. Pretzler、T. Toncian 和 O. Willi，激光等离子体实验中无碰撞激波的观测。《物理评论快报》，**101** （2008）025004。[8] G. Xu、A. Mussot、A. Kudlinski、S. Trillo、F. Copie 和 M. Conforti，观测光纤中脉冲非线性传播时光强激波的形成与波破碎。《光学快报》，**41** （2016）2656-2659。[9] G. B. Whitham，《线性波与非线性波》。*Wiley*，纽约，（1974年）。[10] G. B. Whitham，非线性色散波。《伦敦皇家学会学报 *A*》，**283** （1965）238。[11] A. V. Gurevich 和 L. P. Pitaevskii，无碰撞激波的非定常结构。《实验与理论物理学杂志》**65**，（1973）590。[12] A. M. Kamchatnov，Gurevich-Pitaevskii 问题及其发展。《物理-进展》，**64**（2021年）48。[13] G. A. El 和 M. A. Hoefer，色散激波与调制理论。《物理学 *D*》，**333**（2016）11-65。[14] G. A. El、V. V. Geogjaev、A. V. Gurevich 和 A. L. Krylov，散焦非线性薛定谔方程流体动力学中初始间断的衰减。《物理学 *D*》，**87** （1995）186-192。[15] H. Flaschka、M. G. Forest 和 D. W. McLaughlin，Korteweg-de Vries 方程的多相平均与逆谱解。《纯粹与应用数学通讯》，**33**（1980）739-784。[16] Z. J. Wu 和 S. F. Tian，Whitham 调制理论与 Fokas-Lenells 方程黎曼问题解的分类。*Stud. Appl. Math.*，**153** （2024年）e12779。[17] Y. Liu 和 D. S. Wang，高阶 Jaulent-Miodek 方程黎曼问题中的奇异波形：Whitham 调制理论。*Stud. Appl. Math.*，**149** （2022）588–630。

[18] T. Congy、S. K. Ivanov、A. M. Kamchatnov 和 N. Pavloff, 《正色散条件下Kaup-Boussinesq方程黎曼问题中初始间断的演化》, *Chaos*, **127**（2017）083107。[19] G. A. El、R. H. J. Grimshaw 和 M. V. Pavlov, 《可积浅水方程与波状涌潮》。*Stud. Appl. Math.*, **106** （2008）157–186。[20] C. M. Dafermos, 《连续介质物理学中的双曲守恒律》[J]。《Math. Phys. Sci.》, （2002）。[21] P. D. Lax, 《双曲型偏微分方程》。美国数学学会，**14**（2006）。[22] G. A. El、M. A. Hoefer 和 M. Shearer, 《非凸守恒律中的色散激波与耗散-色散激波》。*SIAM Rev.*, **59** （2017）3–61。[23] D. S. Wang、L. Xu 和 Z. Xuan, 《散焦复修正 KdV 方程黎曼问题解的完整分类》。*J. Nonlinear Sci.*, **32** （2022）3。[24] A. M. Kamchatnov、Y. H. Kuo、T. C. Lin、T. L. Horng、S. C. Gou、R. Clift、G. A. El 和 R. H. J. Grimshaw, 《Gardner 方程的波状涌潮理论》。*Phys. Rev. E*, **86** （2012）036605。[25] A. M. Kamchatnov、Y. H. Kuo、T. C. Lin、T. L. Horng、S. C. Gou、R. Clift 和 R. H. Grimshaw, 《分层流体流经地形时的跨临界流：受迫 Gardner 方程分析》。*J. Fluid Mech.*, **736** （2013）495–531。[26] A. M. Kamchatnov, 《DNLS 方程理论中初始间断的演化》。*J.Phys. Commun.*, **2** （2018）025027。[27] J. Nuño、C. Finot、G. Xu、G. Millot、M. Erkintalo 和 J. Fatome, 《光纤中的矢量色散激波》。*Commun. Phys.*, **2** （2019）138。[28] M. Isoard、A. M. Kamchatnov 和 N. Pavloff, 《散焦非线性光学材料中的波破碎与色散激波形成》。*Phys. Rev. A*, **99** （2019）053819。[29] J. E. Rothenberg 和 D. Grischkowsky, 《光纤中脉冲非线性传播时光强激波形成与波破碎的观测》。*Phys. Rev. Lett.*, **62** （1989）531–534。[30] A. Bendahmane、G. Xu、M. Conforti、A. Kudlinski、A. Mussot 和 S. Trillo, 《光子超流体中的活塞黎曼问题》。*Nat. Commun.*, **118** （2022）3137。

[31] G. Xu、M. Conforti、A. Kudlinski、A. Mussot 和 S. Trillomjk, 《光子流体的色散溃坝流》。《物理评论快报》，13（2017）254101。[32] S. H. Han 和 Q. H. Park, 《自陡峭效应对连续波背景中光学孤子的影响》。《物理评论E》，83（2011）066601。[33] C. F. Kennel、B. Buti、T. Hada 和 R. Pellat, 《非线性、色散椭圆偏振阿尔芬波》。《流体物理》，31（1988）1949–1961。[34] S. K. Ivanov 和 A. M. Kamchatnov, 《光子流体的黎曼问题：自陡峭效应》。《物理评论A》，96（2017）053844。[35] H. M. Ahmed、W. B. Rabie 和 M. A. Ragusa, 《光学孤子及Kaup-Newell方程的其他解：Jacobi椭圆函数展开法》。《分析数学与物理》，11（2021）23。[36] Y. P. Sun、Y. S. Zeng 和 S. H. Zhu, 《三阶Kaup-Newell方程的阶跃型初值问题》。《混沌、孤子与分形》，199（2025）116635。[37] M. M. Khater, 《光纤中的脉冲行为分析：扰动Chen-Lee-Liu方程的新型孤立波解》。《现代物理快报B》，37（2023）2350177。[38] S. K. Ivanov, 《广义Chen-Lee-Liu方程的光纤光脉冲黎曼问题》。《物理评论A》，101（2020）053827。[39] E. G. Fan 和 Z. C. Zhang, 《具有非零边界条件的Gerdjikov-Ivanov方程的逆散射变换》。《应用数学与物理杂志》，71（2020）149。[40] C. C. Ding、Y. T. Gao 和 L. Q. Li, 《天体物理等离子体中阿尔芬波Gerdjikov-Ivanov方程周期背景上的呼吸子与怪波》。《混沌、孤子与分形》，120（2019）259–265。[41] H. Gao 和 D. S. Wang, 《五次非线性光子流体黎曼问题中的光学波状涌浪》。《物理评论E》，108（2023）024222。[42] A. M. Kamchatnov, 《玻色–爱因斯坦凝聚体色散流体动力学中的波破碎》。《实验与理论物理学杂志》，127（2018）903–911。[43] Y. H. Huang 和 R. Guo, 《散焦复修正 KdV 方程中的波破碎、色散冲击波与相移》。《Chaos》，34（2024）103103。[44] H. Y. Ren 和 R. Guo, 《五次非线性光纤中光子流体波扰动经奇点形成而破碎》。《核物理B》，1019（2025）117113。

[45] Y. Xiang 和 R. Guo，光子流体的一般三次波破碎问题：三阶色散和自陡峭效应。《物理年刊》，**482** （2025年）170227。

[46] J. Zhang、W. Liu、D. Q. Qiu、Y. S. Zhang、K. Porsezian 和 J. S. He，高阶 Chen-Lee-Liu 方程的怪波解。《物理学报》，**90** （2015）055207。