关于源代数为分段遗传代数的同调满射的札记

TAKUMA AIHARA

Abstract. 我们研究 proper 微分分次代数之间的同调满射，并证明：若源代数是有限维分段遗传代数，则目标代数导出等价于某个分段遗传代数。

arXiv:2601.01883v1 [math.RT] 5 Jan 2026

1. 引言与主要结果 Introduction and results

设 Λ是代数闭域 K 上的有限维代数，且 S 是 Λ的完美导出范畴 $\mathrm{K^b(proj}\,\Lambda)$ 中的一个（基本）预倾斜对象。那么存在一个 recollement（$\mathrm{D}(\mathcal{A})$，$\mathrm{D}(\Lambda)$，Tria S），其中 D(–) 表示（无界）导出范畴，而 $\mathcal{A}$ 是 Λ 在 $\mathrm{K^b(proj}\,\Lambda)$/ 的微分分次增强中的微分分次自同态代数 S[AH, KY]。一个问题是微分分次代数 $\mathcal{A}$ 是什么。我们知道，对每个 i，上同调 $H^i(\mathcal{A})$都是 K上的有限维向量空间。例如，若 $S = e\Lambda$ 对应于 Λ的一个幂等元 e，且 $\widetilde{\ \ \ \

$(S_1, \cdots, S_r)$；也就是说，S_i 是预倾斜砖模，并且对于 $1 \leq j < i \leq r$ 及所有整数 t，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(S_i, S_j[t]) = 0$。于是，存在一个半正交分解 $\mathcal{T} = \mathcal{D} * \mathcal{C}$，其中 $\mathcal{C} := \text{厚}\, S$，且 $\mathcal{D} := {}^{\perp}\mathcal{C}$。由于我们有三角范畴的正合序列 $0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{T} \to \mathrm{per}(\mathcal{A}) \to 0$（例如参见 [AH]），因此得到一个三角等价 $\mathrm{per}(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{D}$。

通过对 r 进行归纳，我们证明 $\mathcal{D}$ 具有一个倾斜对象 M，且 $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M)$ 是分段遗传的。若 $r = 1$，则根据经典 Bongartz 引理，存在一个（经典的）倾斜对象 $S \oplus M$，使得 $M \in \mathcal{D}$；另见 [A，命题 2.16]。由于 M 是部分倾斜的，我们看到 $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M)$ 是分段遗传的；参见 [AHKL，推论 5.10]。

设 $r > 1$ 和 $S' := S_1 \oplus \cdots \oplus S_{r-1}$。由于 $(S_1, \cdots, S_{r-1})$ 是一个例外序列，我们有一个半正交分解 $\mathcal{T} = \mathcal{D}' * \mathcal{C}'$，其中 $\mathcal{C}' := \mathrm{thick}\, S'$，且 $\mathcal{D}' := {}^{\perp}\mathcal{C}'$。根据归纳假设，我们注意到 $\mathcal{D}'$ 具有一个倾斜对象 M'，且 $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M')$ 是分段遗传的。由于 S_r 是 $\mathcal{D}'$ 的成员，并且在 $\mathcal{D}'$ 中是例外的，存在一个半正交分解 $\mathcal{D}' = {}^{\perp_{\mathcal{D}'}}\mathcal{E} * \mathcal{E}$，其中 $\mathcal{E} = \mathrm{thick}_{\mathcal{D}'} S_r$，且 ${}^{\perp_{\mathcal{D}'}}\mathcal{E}$ 具有一个倾斜对象 M，使得 $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M)$ 是分段遗传的。不难验证 ${}^{\perp_{\mathcal{D}'}}\mathcal{E} = \mathcal{D}$（$:= {}^{\perp}(\mathrm{thick}\ S)$），因此结论得证。

最后，假设 Λ 是 Dynkin 型。由于 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ 是 silting 离散的，由 [AH，定理 2.15] 可得，$\mathrm{per}(\mathcal{A}) \simeq \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M))$ 也是 silting 离散的。这意味着 $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M)$ 是 Dynkin 型。

3. 评述

(1) 该定理是 Crawly-Boevey 定理 [CB], 的导出范畴版本，也是 Angeleri-Hugel–Koenig–Liu 定理 [AHKL] 的 dg/silting 版本。(2) 若 Λ 是分段遗传代数，则 S 的厚闭包也与某个分段遗传代数的完美导出范畴三角等价。特别地，若存在一个 $\mathcal{X}$ 紧生成的粘合 $(\mathcal{Y}, \mathrm{D}(\Lambda)\ \mathcal{X})$，则它来自分段遗传代数；也就是说，$(\mathcal{Y}, \mathrm{D}(\Lambda)\ \mathcal{X}) \simeq (\mathrm{D}(\Gamma), \mathrm{D}(\Lambda), \mathrm{D}(\Sigma))$。(3) 我们绝不能省略 Λ 为分段遗传代数这一假设。事实上，众所周知，微分分次代数 $\mathcal{A}$ 不一定存在 silting 对象[CJS, Kr, Ka]；这些论文中给出的所有代数 Λ 的整体维数都有限。因此，即使 Λ 的整体维数有限，$\mathcal{A}$ 也不总是与有限维/非正（连通的）微分分次代数导出等价。(4) 粘合中的中心不一定继承两侧的遗传性质。本文最后给出一个例子。

例子。设 $\mathcal{K}$ 为由箭图 $1 \overset{x}{\underset{y}{\rightrightarrows}} 2$ 给出的微分分次代数，其中 $\deg(x) = 0$ 且 $\deg(y) = \ell$（微分为零）。取与顶点 2 对应的 $\mathcal{K}$ 的本原幂等元 e，我们有一个粘合 $(\mathrm{D}(\mathcal{K}/\mathcal{K}e\mathcal{K}), \mathrm{D}(\mathcal{K}), \mathrm{Tria}(e\mathcal{K}))$。可以看出，$\mathrm{D}(\mathcal{K}/\mathcal{K}e\mathcal{K}) \simeq \mathrm{D}(K) \simeq \mathrm{Tria}(e\mathcal{K})$；因此，两侧都是遗传的。然而，除非 $|\ell| \leq 1$ [LY，推论 3.2]，中心并不与某个普通代数导出等价。

若 $|\ell| = 1$，则由 [LY，推论 3.10]，我们得知 $\mathcal{K}$ 与由带有关系 $zy = 0$ 的箭图 $1 \prec \overset{y}{\underset{z}{\rightrightarrows}} \succ 2$ 给出的代数导出等价；它也不是分段遗传的。

应用 Koszul 对偶，设 $\ell \leq 0$。于是我们观察到，按照 Minamoto [M] 的意义，$\mathcal{K}$ 的整体维数为 $1 - \ell$。

References

[A] T. Aihara，倾斜连通对称代数。代数与表示论 16 (2013)，第 3 期，873–894。[AH] T. Aihara and T. Honma，何时能继承 silting 离散性？名古屋数学杂志 256 (2024)，905–927。[AI] T. Aihara and O. Iyama，三角范畴中的 silting 变异。伦敦数学会杂志 (2) 85 (2012)，第 3 期，633–668。[AHKL] L. Angeleri-Hugel, S. Koenig and Q. Liu，分段遗传代数导出模范畴的 Jordan–Hölder 定理。代数学杂志 352 (2012)，361–381。[AHMV] L. Angeleri-Hugel, F. Marks and J. Vitoria，部分 silting 对象与 smashing 子范畴。Math. Z. 296 (2020)，第 3–4 期，887–900。[CJS] W. Chang, H. Jin and S. Schroll，分次 gentle 代数导出范畴的粘合与曲面切割。预印本 (2022)，arXiv: 2206.11196。[CB] W. Crawly-Boevey，箭图表示的例外序列。代数表示（渥太华，ON，1992），117–124，CMS Conf. Proc., 14，美国数学会，普罗维登斯，RI，1993。[Ka] M. Kalck，一个带有幻影的有限维代数（J. Krah 的一个例子的推论）。预印本 (2023)，arXiv: 2304.08417。[KY] M. Kalck and D. Yang，相对奇异范畴 I：Auslander 分解。数学进展 301 (2016)，973–1021。[Kr] J. Krah，有理曲面上的一个幻影。数学发明 235 (2024)，第 3 期，1009–1018。[LY] Q. Liu and D. Yang，具有两个单模的代数的分层。数学论坛 28 (2016)，第 1 期，175–188。[M] H. Minamoto，微分分次模的分解与同调维数。预印本 (2018)，arXiv: 1802.01994。[NS] P. Nicolas and M. Saorin，三角范畴再黏合数据的参数化。代数学杂志 322 (2009)，第 4 期，1220–1250。[O] S. Oppermann，silting 变异的箭图。数学进展 307 (2017)，684–714。[XY] J. Xu and Y. Yang，遗传代数上 silting 复形的 Bongartz 型引理。Arch. Math. (Basel) 114 (2020)，第 4 期，383–389。

Department of Mathematics, Tokyo Gakugei University, 4-1-1 Nukuikita-machi, Ko-ganei, Tokyo 184-8501, Japan电子邮箱地址：aihara@u-gakugei.ac.jp