几何诱导的例外点脱离费米弧

Yuancheng Zhao[*], [1]、Jia-Xin Zhong[*], [2]、[§]Jing Lin[1]、[#]Yun Jing[2]、[‡]和 Kun Ding[1], [†1] 复旦大学物理系、表面物理国家重点实验室及微纳光子结构重点实验室（教育部），中国上海 *200438*[2] 宾夕法尼亚州立大学声学研究生项目，美国宾夕法尼亚州大学公园 *16802**这些作者贡献相同。§电子邮箱：Jiaxin.Zhong@psu.edu，#电子邮箱：jing_lin@fudan.edu.cn

‡电子邮箱：yqj5201@psu.edu，†电子邮箱：kunding@fudan.edu.cn

摘要

例外点（EP）是非厄米简并中普遍存在的现象，也是能带结构中的核心特征：非厄米费米弧连接例外点，本征值结则环绕例外点。在开放边界条件下，非厄米趋肤效应会迫使动量变为复数，从而产生非布洛赫能带结构，并引入仅存在于开放边界条件下的例外点，其起源取决于边界驱动机制。在此，我们通过理论和实验揭示，在支持几何依赖趋肤效应的互易非厄米Lieb晶格中，几何本身也能诱导此类非布洛赫例外点。通过分析非布洛赫能带结构，我们发现，几何诱导的例外点对应的是鞍点，而非分支点。分支点即使具有开放边界条件本征能量，也不会形成例外点，而是表现为惠特尼尖点这一典型的几何奇点；连接这些尖点的费米弧对于确定本征值结仍至关重要。我们对这些结的测量证实，几何诱导的例外点与费米弧的分支点彼此分离，这与布洛赫系统中二者合一的情形形成对比。我们的研究确立了几何作为设计基于例外点器件的额外自由度，并揭示了几何在塑造非布洛赫能带结构中的根本作用。

引言—例外点（EP）是非厄米系统特有的谱奇点，在此处本征值和本征矢量均发生合并 [1-4]。与厄米简并不同，例外点具有非平庸的本征值拓扑 [5-18]，，由此产生诸多反常的物理效应 [19-24]。例外点在各种平台上的实现引发了广泛关注 [25-33]，，其应用涵盖超灵敏传感 [34-39]、可控激射 [40-42] 以及稳健的拓扑器件 [43,44]。在晶格系统中，大量研究探讨了周期性边界条件下的例外点；它们是布里渊区（BZ）内复本征值流形的分支点，称为布洛赫例外点 [2,3,45]。根据禁戒定理，例外点总是成对出现，并由称为非厄米费米弧（FA）的分支切割相连 [46-48]。这些例外点和非厄米费米弧从根本上决定了复能带的编织拓扑 [7,8,10-12]。

在开放边界条件（OBCs）下，非厄米皮肤效应会彻底重塑能谱 [49-61]，，使布洛赫例外点从开边界条件能谱中消失。非布洛赫能带理论以广义布里渊区（GBZ）取代布里渊区 [49,62]，，能够描述这一机制下的体行为，并揭示前所未有的拓扑结构，包括开边界条件本征值结的编织拓扑 [63,64]。例外点可能仅在开边界条件能谱中以非布洛赫例外点的形式出现 [33,65-67]，，人们通常认为它们与从广义布里渊区视角观察到的黎曼曲面的分支点重合 [68-70]，，而黎曼曲面的分支切割决定了本征值结 [11,19]。然而，近期一项研究表明，若将开放边界条件下的宇称-时间对称性转变点视为例外点，则可从广义布里渊区几何中识别出该点，而且它甚至会出现在单能带情形中 [71]，，这表明有一类非布洛赫例外点并非黎曼曲面的分支点。这一发现对由例外点及其后续形成的本征值结所产生的例外几何提出了挑战，促使人们寻求开放边界所特有的方法，以利用非布洛赫例外点并阐明相关的本征值结。

在此，我们通过理论和实验证明，在高维晶格中，几何形状本身会诱导出并非位于黎曼曲面分支点处的非布洛赫例外点。尽管如此，与之相关的分支切割仍决定着开边界条件本征值结的形成。我们研究了具有几何依赖的皮肤效应和布洛赫例外点的互易Lieb晶格，发现几何形状会在不同于布洛赫例外点的能量处触发非布洛赫例外点。与布洛赫例外点不同，广义布里渊区与分支点的交汇不会产生非布洛赫例外点，而是形成惠特尼尖点——非布洛赫能带结构中的一种典型几何奇点[72-74]，。这些尖点与分支切割密不可分；分支切割被定义为非布洛赫费米弧，既决定广义布里渊区的几何形状，也决定开边界条件本征值结的形成，我们的实验验证了这一点。最后，我们证明，几何诱导的非布洛赫例外点

对应于鞍点而非黎曼曲面上的分支点，在广义布里渊区表面上具有类似的几何形态。我们的发现提供了一种替代性 途径来实现非布洛赫例外点，并凸显了非布洛赫能带结构中新颖几何特征的作用。

几何诱导的例外点——为了将跃迁和失谐等内部参数与开放边界条件下特有的效应区分开来，我们采用一种具有布洛赫例外点的多能带非厄米系统，并仅改变其几何结构，以驱动系统从布洛赫态向非布洛赫态转变。因此，我们采用图1(a)顶部所示的互易利布晶格。其哈密顿量为 $H = \sum$ $_{\boldsymbol{k}}\, i\gamma\, c_{\boldsymbol{k}} \quad _A - i\gamma\, c_{\boldsymbol{k}} \quad _C + \; T_{AB}\, c_{\boldsymbol{k}} \quad _B + T_{AC} c_{\boldsymbol{k}} \quad _C + , ^{\dagger}{}_A c_{\boldsymbol{k}}, , ^{\dagger}{}_C c_{\boldsymbol{k}}, (, ^{\dagger}{}_A c_{\boldsymbol{k}}, , ^{\dagger}{}_A c_{\boldsymbol{k}}, T_{BC}\, c_{\boldsymbol{k}}, {}^{\dagger}{}_B c_{\boldsymbol{k}}, _C + \text{h.c.})$ [75], 其中 $T_{AB} = 2t\cos(k_y/2)$，$T_{BC} = 2t\cos(k_x/2)$，且 $T_{AC} = 4w\cos(k_x/2)\cos(k_y/2)$。图1(b)展示了其在耦合腔体构成的主动声学晶格中的实验实现，其中所需的跃迁和增益/损耗项由可编程麦克风和扬声器精确控制 [76]。布洛赫能带结构 [图1(a)中间面板] 由三个 $\mathrm{Re}(E)$ 黎曼曲面组成，例外点可通过相位刚度消失来确定 $r_j = \psi_j^L \psi_j^R \; \psi_j^R \psi_j^R$，其中 ψ^R (ψ^L) 是第 j 条能带的右（左）本征态 [3,29,77,78]。八个二阶布洛赫例外点是由分支切割（非厄米费米弧）连接的分支点 [2,46-48], , 如图1(a)底部所示。这些二阶例外点按辫子词 $\tau_n^{\pm 1}$ 及其共轭类进行分类，上标表示本征值绕数，下标表示能带间隙 [7-14]。

随后，我们比较矩形几何 [图1(c)] 与平行四边形几何 [图1(d)]，以展示布洛赫例外点和非布洛赫例外点。在矩形几何中，沿 k_x 和 k_y 两个方向均保持谱互易性，因此不会出现趋肤模。相比之下，平行四边形几何破坏了沿 k_x 方向的互易性，但保留了沿 k_b 方向的互易性，从而产生依赖于几何形状的趋肤模 [58,79-82]。为了在实验中定位例外点，我们通过对单个格点进行点激发并记录完整的多格点响应，测量系统整体的格林函数；对其进行对角化即可得到开边界条件能谱和本征态 [76]。

图1(c)和图1(d)展示了测得的开放边界条件谱，并根据各本征态的相位刚度着色，其极小值指示例外点。对于矩形几何 [图1(c)], , 观测到的例外点与图1(a)中的布洛赫例外点重合，这与不存在趋肤模的情况一致；图中展示的代表性本征态以及相同的周期边界条件谱和开放边界条件谱也证实了这一点。相比之下，平行四边形几何 [图1(d)] 呈现出显著的谱变形，表明趋肤模开始出现；插图中的局域开放边界条件本征态证实了这一点。相位刚度的极小值表明，布洛赫例外点（$\sim 1038.0 - 6.0i$ Hz、$1040.0 - 4.2i$ Hz 和 $1040.0 - 7.8i$ Hz）消失，而非布洛赫例外点则出现在不同的

能量处（$\sim 1035.8 - 5.8i$ Hz）。因此，这些新出现的几何诱导例外点属于非布洛赫例外点，需要从非布洛赫视角进行分析。

惠特尼尖点与非布洛赫费米弧—由于趋肤模沿 x 方向存在（沿 b 方向不存在），我们采用非正交的 x 轴和 b 轴，并使用原胞[图2(a)中的虚线框]，，同时将 k_x 延拓为 $\beta = e^{ik_x}$ ，且保持 $k_b \in [0, 2\pi]$ 不变。相应的非布洛赫哈密顿量为

$$h(\beta, k_b) = \begin{pmatrix} i\gamma & T_{AB}^{-} & T_{AC}^{-} \\ T_{AB}^{+} & 0 & T_{BC}^{-} \\ T_{AC}^{+} & T_{BC}^{+} & -i\gamma \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $T_{AB}^{+} = t$（$1 + \beta e^{-ik_b}$）、 $T_{BC}^{+} = t$（$1 + \beta$）、 $T_{AC}^{+} = w$（$1 + \beta + \beta e^{ik_b} + \beta^2 e^{-ik_b}$）和$T^{-} =$（$T^{+}$）*。与布洛赫情形不同，式（1）表明 $\mathrm{h}(\beta^{-1}, k_b) \neq \mathrm{h}(\beta, k_b)$，这意味着沿 x 方向存在趋肤模。鉴于这种复数延拓，$\mathrm{h}(\beta, k_b)$ 的黎曼曲面的分支点是奇点，但不一定位于开边界条件能谱上。我们首先通过结果式 $\mathrm{Res}_E[f(\beta, E),\ \partial_E f(\beta, E)] = 0$，找出所有此类非布洛赫分支点，其中 $f(\beta, E) = \det[\mathrm{h}(\beta) - EI]$ 是特征多项式。由于非零的 w 会破坏非厄米手征对称性 $\Sigma^{-1}\mathrm{h}^{\dagger}(\beta, k_b)\Sigma = -\mathrm{h}(\beta, k_b)$，其中 $\Sigma = \mathrm{diag}(1, -1, 1)$，因此要求结果式的实部和虚部同时为零。由此，非布洛赫分支点在（β, k_b）参数空间中形成连续线[83,84]。图2(b)展示了这些分支点线，并根据辫子词着色，且依据其本征值绕数按右手定则确定方向。布洛赫例外点无疑位于这些线上，其位置与图1(a)中的位置相同。确定非布洛赫分支点后，我们接下来分析广义布里渊区，以考察这些分支点是否显现在开边界条件能谱中。

广义布里渊区通过沿x方向施加驻波条件来预测开放边界条件能谱，从而在（β, k_b）参数空间中形成二维广义布里渊区表面 [49,62]。在多能带系统中，每条能带通常都有其自身的子广义布里渊区；一旦存在分支点，这些子广义布里渊区便会变得不可分割。我们通过令$f(\beta, E)$为零并满足广义布里渊区条件（$|\beta_2| = |\beta_3|$）[62,85,86]，得到方程（1）的这些子广义布里渊区。为了判断非布洛赫分支点是否位于开放边界条件能谱上，我们求取广义布里渊区与非布洛赫分支点线的交点。图2(c)展示了两个这样的子广义布里渊区曲面，即按 $\mathrm{Re}(E)$ 黎曼曲面递增顺序排列的 GBZ_1 和 GBZ_2, 。这些曲面呈现出两种特征几何结构：惠特尼尖点（星号）和鞍点（菱形）。惠特尼尖点锚定非布洛赫费米弧，并决定开放边界条件本征值结的拓扑；鞍点则对应于图1(d)实验观测到的几何诱导非布洛赫例外点。下文将分别详细讨论它们。

图2(c)中的插图放大了蓝色星号附近的广义布里渊区曲面，揭示出其几何形态从自交转变为光滑形态——几何上可将其识别为惠特尼尖点（见参考文献[87]第I节）。图3(a)绘出了临界点$k_{\mathrm{WC}} = 2.313$附近三个具有代表性的k_b值对应的广义布里渊区，以及k_{WC}处的 Re(E) 黎曼曲面。随着 k_b 减小，GBZ_l 从位于单一黎曼曲面上，逐渐演变为依次穿越两个黎曼曲面。当$k_b < k_{\mathrm{WC}}$时，GBZ_l（深蓝色）穿过非布洛赫支割，在相邻黎曼曲面上形成一个环绕τ_1 分支点的闭环，随后回到其原先所在的黎曼曲面。连接这些非布洛赫分支点的分支切割恰好就是非布洛赫费米弧，它们对应于 Re(E) 相等的等值线，记作非布洛赫费米弧$_l$, ; 其下标依照相连分支点的辫子群词命名（见参考文献[87]第II节）。这些广义布里渊区和黎曼结构共同表明，在非平凡情形下，分支切割被穿越两次，而分支点被环绕一次。当k_{WC}时，只有 GBZ_l 接近分支点，形成尖锐的尖点，而非两个子广义布里渊区的交点。如图3(c)所示，没有出现任何定性的谱跃迁，这表明蓝色星号虽然位于与图2(b)中的布洛赫例外点[蓝色圆圈相同的分支点线上，k_b~4。212], 本身并非例外点。因此，图1(d)中观测到的几何诱导非布洛赫例外点，并非图1(a)和图1(c)中所标出的蓝色布洛赫例外点（$1038.0 - 6.0i$ Hz）的简单非布洛赫类比，而是由广义布里渊区几何产生的不同奇点。

鞍点作为几何诱导的例外点—为阐明几何诱导的例外点，我们考察另一种特征几何结构，即图2(c)中 $k_b = k_{\mathrm{SP}} = 1.878$ 处的鞍点。图3(b)和图3(d)展示了 k_{SP} 附近三个具有代表性的 k_b 值所对应的广义布里渊区和相应的谱，以及图3(b)中所示 k_{SP} 处的 Re(E) 黎曼曲面。随着 k_b 穿过 k_{SP} 逐渐减小，两个广义布里渊区分支在一个黎曼曲面内合并后又分离，从而驱动谱从 Re(E) 线隙跃迁为 Im(E) 线隙 [3,88,89]。从谱的角度看，这种行为类似于宇称-时间相变，并在 k_{SP} 处出现一个非布洛赫例外点（红色菱形）；这与图1(d)中实验观测到的相位刚度在 E~$1035.8 - 5.8i$ Hz 附近达到最小值相吻合。能隙大小标度 $|k_b - k_{\mathrm{SP}}|^{1/2}$进一步证实了其例外点性质（见参考文献 [87] 第III节）。这一结果阐明了几何诱导的例外点；更重要的是，它表明图2(c)中的广义布里渊区几何 [] 充当基底流形，并从根本上改变了附着的黎曼曲面。

为便于直观理解，图3(e)绘出了Re(E)黎曼曲面随广义布里渊区变量k_x =arg (β)以及k_b 在k_{WC} 和k_{SP}附近的变化。与典型的布洛赫情形不同，图3(e)打破了

图1(a)所示的分支切割、分支点与布洛赫例外点之间的关系。非布洛赫分支点不再是例外点，而黎曼曲面上的鞍点则是非布洛赫例外点。这是因为每条能带都有各自的广义布里渊区，充当基底流形。在布洛赫极限下，所有能带共享同一个环面；但对于图1(d)所定义的平行四边形，该流形会沿k_x方向变形为多个环面。图3(e)右侧示意图展示了两个由非布洛赫费米弧和惠特尼尖点连接在一起的子广义布里渊区，而几何诱导的非布洛赫例外点则位于单个子广义布里渊区上。在非布洛赫能带结构中，例外点与费米弧脱离，这对传统表征方案提出了挑战，因为在布洛赫系统中，识别例外点与费米弧的分支点是一回事，其根源在于本征值编辫。

测得的开边界条件本征值结—为了解析这些结，我们采用开边界条件本征值结，通过改变 $\arg(\beta)$ 来追踪开边界条件能量的演化。图 4 展示了五个具有代表性的 k_b 值对应的开边界条件本征值结（底部面板），以及定义参数回路的两个子广义布里渊区（顶部面板）。当 $k_b > k_{\mathrm{WC}}$ [图 4(a)], 中两个子广义布里渊区彼此断开时，所得本征值结也彼此分离。随着 k_b 降至 k_{WC} [图 4(b) 和图 4(c)], 以下，广义布里渊区$_1$ 和广义布里渊区$_2$ 仍彼此分离，但各自都穿过一个非布洛赫费米弧，使得开边界条件本征值结发生 I 型里德迈斯特变换[19], ，如图 4(c2) 所示。比较图 4(a2) 和图 4(c2) 可见，结图中的交叉总数发生了变化，而所有本征值绕数仍为零，因为开边界条件能谱不包围任何区域。这与布洛赫例外点的情形不同，也体现了这样一种对应关系：辫子词中的上标实际上对应的是本征值结的缠绕数 Wr，而非其绕数（参见文献 [87] 第 IV 节）。

当进一步将 k_b 减小至 k_{SP}时，GBZ$_1$ 与 GBZ$_2$ 在同一黎曼曲面上相交，产生几何诱导的非布洛赫例外点 [图 4(d) 中的红色菱形标记] ，并导致开边界条件本征值结合并为未定义构型[图 4(d2)]。当$k_b < k_{\mathrm{SP}}$时，非布洛赫例外点消失，两个子广义布里渊区再次彼此分离，在结图中留下 Im(E) 线隙 [图 4(e)]。因此，测量开边界条件本征值结可以提供一种实验途径，用于识别非布洛赫费米弧、分支点和例外点。

因此，我们采用非布洛赫超胞框架对非布洛赫能带结构进行实验探测 [90] （见参考文献 [87] 的第五节）。利用所得数据，我们展示了 k_b 三个代表性取值对应的子广义布里渊区和本征值结，如图4中的圆圈和球体所示。图4(a)和图4(c)在实验上确定了非布洛赫费米弧，而图4(c)和图4(e)共同证实，图1(d)中观察到的几何诱导的例外点

源自鞍点。这些结果有力地表明，几何诱导的非布洛赫例外点并不位于非布洛赫费米弧的分支点处。

结论——简言之，我们揭示了几何能够诱导非布洛赫例外点，而这些例外点可与非布洛赫费米弧分离；后者仍决定着开放边界条件本征值结。以互易非厄米 Lieb 晶格为原型，我们表明，在不同几何形状下，广义布里渊区表面的形变会产生几何诱导的例外点。我们在非布洛赫能带结构和广义布里渊区表面中均发现了不同的代数几何特征，包括与恰好位于广义布里渊区上的非布洛赫分支点相关的惠特尼尖点，以及对应非布洛赫例外点的鞍点。分支点即使携带开放边界条件本征能量，也不同于非布洛赫例外点；这与它们在布洛赫能带结构中相统一的对应情形不同。通过分析开放边界条件本征值结的转变，我们进一步发现，非布洛赫分支点会在结图中产生I型里德迈斯特变换，而非布洛赫例外点则驱动结发生线隙类型转变。这些发现凸显了基底流形在非布洛赫能带结构中的关键作用，并由此产生了非厄米皮肤效应晶格所特有的例外点和惠特尼尖点。因此，几何诱导的例外点为调控基于例外点的功能引入了额外的几何控制参数，使非厄米器件能够仅通过机械形变或边界塑形，在不改变材料组成的情况下重新配置其拓扑与谱特征。

致谢

感谢马冠聪教授的宝贵讨论。本研究得到国家重点研发计划（项目编号：2022YFA1404500、2022YFA1404701）、国家自然科学基金（项目编号：12347144）和上海市科技创新行动计划（项目编号：24Z510205936）的支持。Y. J. 感谢宾夕法尼亚州立大学提供的启动经费以及美国国家科学基金会的资助（项目编号：2039463 和 195122）。

参考文献

[1] Y. Ashida、Z. Gong 和 M. Ueda，《高级物理》69，249-435（2020年）。[2] E. J. Bergholtz、J. C. Budich 和 F. K. Kunst，《现代物理评论》93，015005（2021年）。[3] K. Ding、C. Fang 和 G. Ma，《自然·物理评论》4，745-760（2022年）。[4] N. Okuma 和 M. Sato，《凝聚态物理年度评论》14，83-107（2023年）。[5] Q. Zhong、M. Khajavikhan、D. N. Christodoulides 和 R. El-Ganainy，《自然·通讯》9，4808（2018年）。[6] C. Chen、L. Jin 和 R.-B. Liu，《新物理学杂志》21，083002（2019年）。[7] C. C. Wojcik、X.-Q. Sun、T. Bzdušek 和 S. Fan，物理评论 B 101，205417（2020年）。[8] H. Hu 和 E. Zhao，《物理评论快报》126，010401（2021年）。[9] K. Wang、A. Dutt、K. Y. Yang、C. C. Wojcik、J. Vučković 和 S. Fan，《科学》371，1240- 1245（2021年）。[10] K. Wang、A. Dutt、C. C. Wojcik 和 S. Fan，《自然》（伦敦）598，59-64（2021年）。[11] H. Hu、S. Sun 和 S. Chen，《物理评论研究》4，L022064（2022年）。[12] Y. S. S. Patil、J. Höller、P. A. Henry、C. Guria、Y. Zhang、L. Jiang、N. Kralj、N. Read 和 J. G. E. Harris，《自然》（伦敦）607，271-275（2022年）。[13] C. C. Wojcik、K. Wang、A. Dutt、J. Zhong 和 S. Fan，物理评论 B 106，L161401（2022年）。[14] C.-X. Guo、S. Chen、K. Ding 和 H. Hu，《物理评论快报》130，157201（2023年）。[15] W. B. Rui、Y. X. Zhao 和 Z. D. Wang，物理评论 B 108，165105（2023年）。[16] J. Hu、R.-Y. Zhang、Y. Wang、X. Ouyang、Y. Zhu、H. Jia 和 C. T. Chan，《自然·物理》19，1098-1103（2023年）。[17] C. Lv 和 Q. Zhou，物理评论 D 110，084039（2024年）。[18] H. Jia、J. Hu、R.-Y. Zhang、Y. Xiao、D. Wang、M. Wang、S. Ma、X. Ouyang、Y. Zhu 和 C. T. Chan，《物理评论快报》134，206603（2025年）。[19] Z. Li、K. Ding 和 G. Ma，《物理评论研究》5，023038（2023年）。[20] Q. Zhang、Y. Li、H. Sun、X. Liu、L. Zhao、X. Feng、X. Fan 和 C. Qiu，《物理评论快报》130，017201（2023年）。[21] Q. Zhang、L. Zhao、X. Liu、X. Feng、L. Xiong、W. Wu 和 C. Qiu，《物理评论研究》5，L022050（2023年）。[22] Y. Long、Z. Wang、C. Zhang、H. Xue、Y. X. Zhao 和 B. Zhang，《物理评论快报》132，236401（2024年）。[23] Z. Rao、C. Meng、Y. Han、L. Zhu、K. Ding 和 Z. An，《自然·物理》20，1904-1911（2024年）。[24] H. Zhang、T. Liu、Z. Xiang、K. Xu、H. Fan 和 D. Zheng，《PRX量子》6，020328（2025年）。

[25] C. Dembowski, H. D. Gräf, H. L. Harney, A. Heine, W. D. Heiss, H. Rehfeld, and A. Richter, 《物理评论快报》**86**, 787-790 (2001年).[26] S.-B. Lee, J. Yang, S. Moon, S.-Y. Lee, J.-B. Shim, S. W. Kim, J.-H. Lee, and K. An, 《物理评论快报》**103**, 134101 (2009年).[27] B. Dietz, H. L. Harney, O. N. Kirillov, M. Miski-Oglu, A. Richter, and F. Schäfer, 《物理评论快报》**106**, 150403 (2011年).[28] T. Gao, E. Estrecho, K. Y. Bliokh, T. C. H. Liew, M. D. Fraser, S. Brodbeck, M. Kamp, C. Schneider, S. Höfling, Y. Yamamoto, F. Nori, Y. S. Kivshar, A. G. Truscott, R. G. Dall, and E. A. Ostrovskaya, 《自然》（伦敦）**526**, 554-558 (2015年).[29] K. Ding, G. Ma, M. Xiao, Z. Q. Zhang, and C. T. Chan, 《物理评论X》**6**, 021007 (2016年).[30] C. Hahn, Y. Choi, J. W. Yoon, S. H. Song, C. H. Oh, and P. Berini, 《自然·通讯》**7**, 12201 (2016年).[31] D. Zhang, X.-Q. Luo, Y.-P. Wang, T.-F. Li, and J. Q. You, 《自然·通讯》**8**, 1368 (2017年).[32] K. Ding, G. Ma, Z. Q. Zhang, and C. T. Chan, 《物理评论快报》**121**, 085702 (2018年).[33] L. Xiao, T. Deng, K. Wang, Z. Wang, W. Yi, and P. Xue, 《物理评论快报》**126**, 230402 (2021年).[34] J. Wiersig, 《物理评论快报》**112**, 203901 (2014年).[35] W. Chen, Ş. Kaya Özde mir, G. Zhao, J. Wiersig, and L. Yang, 《自然》（伦敦）**548**, 192- 196 (2017年).[36] H. Hodaei, A. U. Hassan, S. Wittek, H. Garcia-Gracia, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, and M. Khajavikhan, 《自然》（伦敦）**548**, 187-191 (2017年).[37] Y.-H. Lai, Y.-K. Lu, M.-G. Suh, Z. Yuan, and K. Vahala, 《自然》（伦敦）**576**, 65-69 (2019年).[38] K. Bai, L. Fang, T.-R. Liu, J.-Z. Li, D. Wan, and M. Xiao, 《国家科学评论》**10**, nwac259 (2022年).[39] W. Mao, Z. Fu, Y. Li, F. Li, and L. Yang, 《科学进展》**10**, eadl5037 (2024年).[40] B. Peng, Ş. K. Özdemir, M. Liertzer, W. Chen, J. Kramer, H. Yılmaz, J. Wiersig, S. Rotter, and L. Yang, 《美国国家科学院院刊》**113**, 6845-6850 (2016年).[41] L. Jin and Z. Song, 《物理评论快报》**121**, 073901 (2018年).[42] J. Zhang, B. Peng, Ş. K. Özdemir, K. Pichler, D. O. Krimer, G. Zhao, F. Nori, Y.-x. Liu, S. Rotter, and L. Yang, 《自然·光子学》**12**, 479-484 (2018年).[43] J. Doppler, A. A. Mailybaev, J. Böhm, U. Kuhl, A. Girschik, F. Libisch, T. J. Milburn, P. Rabl, N. Moiseyev, and S. Rotter, 《自然》（伦敦）**537**, 76-79 (2016年).[44] H. Xu, D. Mason, L. Jiang, and J. G. E. Harris, 《自然》（伦敦）**537**, 80-83 (2016年).

[45] F. K. Kunst and V. Dwivedi, 物理评论 B 99, 245116 (2019年).[46] H. Zhou, C. Peng, Y. Yoon, C. W. Hsu, K. A. Nelson, L. Fu, J. D. Joannopoulos, M. Soljačić, and B. Zhen, 《科学》359, 1009-1012 (2018年).[47] V. Kozii and L. Fu, 物理评论 B 109, 235139 (2024年).[48] R. Zheng, J. Lin, J. Liang, K. Ding, J. Lu, W. Deng, M. Ke, X. Huang, and Z. Liu, 《通讯物理》7, 298 (2024年).[49] S. Yao and Z. Wang, 《物理评论快报》121, 086803 (2018年).[50] F. Song, S. Yao, and Z. Wang, 《物理评论快报》123, 170401 (2019年).[51] N. Okuma, K. Kawabata, K. Shiozaki, and M. Sato, 《物理评论快报》124, 086801 (2020年).[52] L. Li, C. H. Lee, S. Mu, and J. Gong, 《自然·通讯》11, 5491 (2020年).[53] S. Weidemann, M. Kremer, T. Helbig, T. Hofmann, A. Stegmaier, M. Greiter, R. Thomale, and A. Szameit, 《科学》368, 311-314 (2020年).[54] T. Helbig, T. Hofmann, S. Imhof, M. Abdelghany, T. Kiessling, L. W. Molenkamp, C. H. Lee, A. Szameit, M. Greiter, and R. Thomale, 《自然·物理》16, 747-750 (2020年).[55] L. Xiao, T. Deng, K. Wang, G. Zhu, Z. Wang, W. Yi, and P. Xue, 《自然·物理》16, 761-766 (2020年).[56] A. Ghatak, M. Brandenbourger, J. van Wezel, and C. Coulais, 《美国国家科学院院刊》117, 29561-29568 (2020年).[57] X. Zhang, Y. Tian, J.-H. Jia ng, M.-H. Lu, and Y.-F. Chen, 《自然·通讯》12, 5377 (2021年).[58] K. Zhang, Z. Yang, and C. Fang, 《自然·通讯》13, 2496 (2022年).[59] Y. O. Nakai, N. Okuma, D. Nakamura, K. Shimomura, and M. Sato, 物理评论 B 109, 144203 (2024年).[60] B.-B. Wang, Z. Cheng, H.-Y. Zou, Y. Ge, K.-Q. Zhao, Q.-R. Si, S.-Q. Yuan, H.-X. Sun, H. Xue, and B. Zhang, 《美国国家科学院院刊》122, e2422154122 (2025年).[61] K. Zhang, C. Shu, and K. Sun, 《物理评论X》15, 031039 (2025年).[62] K. Yokomizo and S. Murakami, 《物理评论快报》123, 066404 (2019年).[63] Y. Li, X. Ji, Y. Chen, X. Yan, and X. Yang, 物理评论 B 106, 195425 (2022年).[64] Y. Fu and Y. Zhang, 物理评论 B 110, L121401 (2024年).[65] K. Wang, T. Li, L. Xiao, Y. Han, W. Yi, and P. Xue, 《物理评论快报》127, 270602 (2021年).[66] Z. Lei, C. H. Lee, and L. Li, 《通讯物理》7, 100 (2024年).[67] M. Xu, Z. Gong, and W. Yi, 物理评论 B 111, 214305 (2025年).[68] K. Yokomizo and S. Murakami, 《物理评论研究》2, 043045 (2020年).[69] Y. Fu and S. Wan, 物理评论 B 105, 075420 (2022年).[70] Y. Fu and Y. Zhang, 物理评论 B 107, 115412 (2023年).

[71] Y.-M. Hu、H.-Y. Wang、Z. Wang 和 F. Song，《物理评论快报》**132**，050402（2024年）。[72] B. Teissier，《极性簇 II：极性重数、平面截面与惠特尼条件》（施普林格，柏林，1982年）。[73] M. Helmer、G. Papathanasiou 和 F. Tellander，arXiv:2402.14787。[74] M. Helmer 和 R. Mohr，arXiv:2406.17122。[75] Y.-X. Xiao、K. Ding、R.-Y. Zhang、Z. H. Hang 和 C. T. Chan，物理评论 B **102**，245144（2020年）。[76] J.-X. Zhong、J. Kim、K. Chen、J. Lu、K. Ding 和 Y. Jing，物理评论 B **112**，L220301（2025年）。[77] I. Rotter，物理学杂志 A：数学与理论 **42**，153001（2009年）。[78] W. Tang、X. Jiang、K. Ding、Y.-X. Xiao、Z.-Q. Zhang、C. T. Chan 和 G. Ma，《科学》**370**，1077-1080（2020年）。[79] Q. Zhou、J. Wu、Z. Pu、J. Lu、X. Huang、W. Deng、M. Ke 和 Z. Liu，《自然·通讯》**14**，4569（2023年）。[80] T. Wan、K. Zhang、J. Li、Z. Yang 和 Z. Yang，《科学通报》**68**，2330-2335（2023年）。[81] W. Wang、M. Hu、X. Wang、G. Ma 和 K. Ding，《物理评论快报》**131**，207201（2023年）。[82] K. Zhang、Z. Yang 和 K. Sun，物理评论 B **109**，165127（2024年）。[83] K. Kawabata、T. Bessho 和 M. Sato，《物理评论快报》**123**，066405（2019年）。[84] S. Sayyad、M. Stålhammar、L. Rødland 和 F. K. Kunst，《SciPost物理》**15**，200（2023年）。[85] Z. Yang、K. Zhang、C. Fang 和 J. Hu，《物理评论快报》**125**，226402（2020年）。[86] Y.-M. Hu 和 Z. Wang，《物理评论研究》**5**，043073（2023年）。[87] 关于以下内容的详情见补充材料：(I) 惠特尼尖点与惠特尼分层；(II) 惠特尼尖点与非布洛赫费米弧的详情；(III) 几何诱导的例外点附近能隙大小的渐近分析；(IV) 另一个非布洛赫例外点附近的纽结转变；(V) 用于实验测量的非布洛赫超晶胞框架。[88] K. Kawabata、K. Shiozaki、M. Ueda 和 M. Sato，《物理评论X》**9**，041015（2019年）。[89] S. Verma 和 M. J. Park，《通讯物理》**7**，21（2024年）。[90] J.-X. Zhong、J. Lin、K. Chen、J. Lu、K. Ding 和 Y. Jing，arXiv:2510.20160。

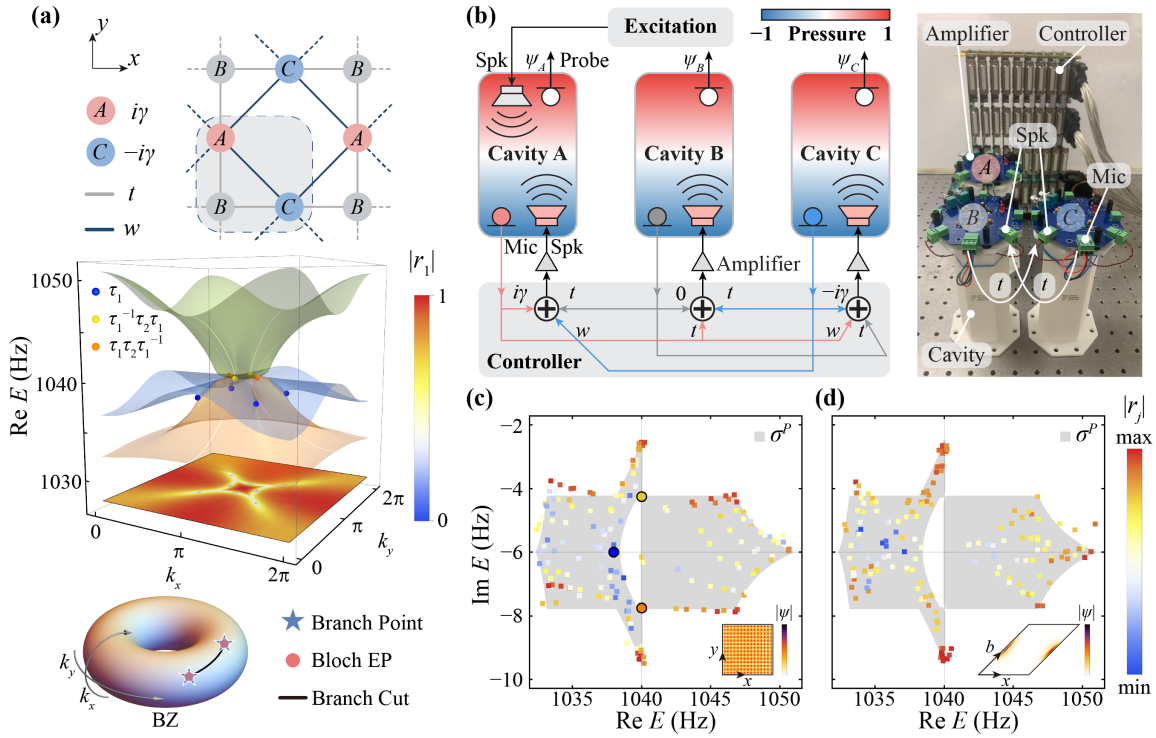


图1。（a）非厄米 Lieb 晶格示意图（上）。A （C）位点具有现场增益$i\gamma$（损耗$-i\gamma$），而最近邻（次近邻）跃迁为t （w）。中间和底部面板分别展示了周期性边界条件下一个具有代表性的 Re(E) 黎曼曲面以及布里渊区环面。黎曼曲面上的球体表示二阶例外点，并标注了对应的辫子群词；下方平面展示了橙色能带的相位刚度。蓝色星形标记和球体分别表示分支点和布洛赫例外点，两者由分支切割（黑线）连接。（b）所设计晶格的实验实现。左侧（右侧）显示晶胞示意图（照片）。每个声学腔体都配有麦克风（Mic）和扬声器（Spk），由实时控制器实现跃迁和现场势。另有一组麦克风和扬声器，用于对系统格林函数进行泵浦-探测测量。（c、d）矩形（c）和平行四边形（d）的实验开放边界条件谱，其中平行四边形的一个内角为$\pi/4$ 。每个开放边界条件本征频率的颜色编码了测量本征态的相位刚度。插图展示了相应的几何形状及一个具有代表性的开放边界条件本征态。各边方向上的晶胞数分别以N_x、 N_y和N_b表示。灰色区域表示周期性边界条件谱范围σ^P。蓝色、黄色和橙色圆圈对应于（a）中标出的布洛赫例外点。实验参数为$\omega_0 = 1040 - 6.0i$ Hz、$t = \gamma = 3.5$ Hz、$w = 0.7$ Hz 和 $N_y = N_b = 6$。两组实验开放边界条件谱$N_x = 4$ 和$N_x = 5$分别叠加显示于（c）和（d）中。

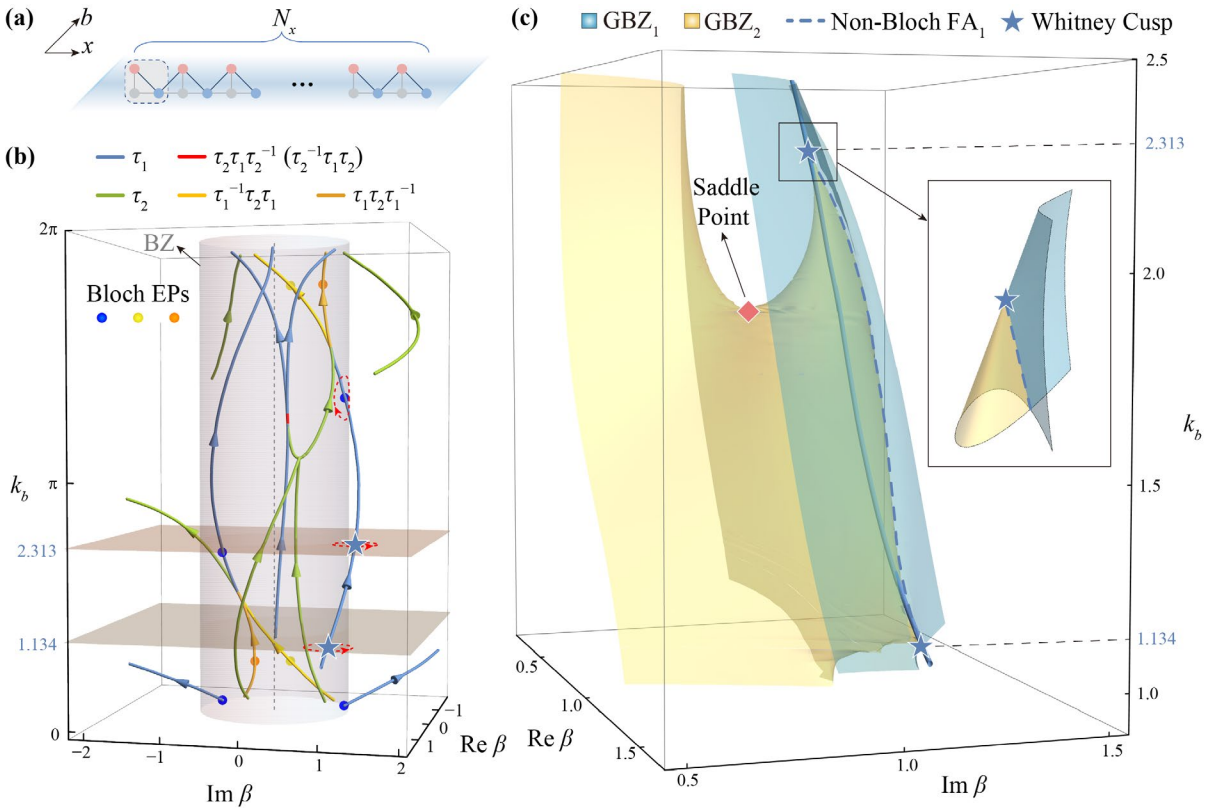


图 2. (a) 沿b方向施加 PBCs（OBCs）（沿x方向）的准一维晶格。(b) 复数β 和k_b 空间中的非布洛赫分支点连续线，颜色表示不同的辫子词。灰色圆柱表示包含八个布洛赫例外点的布里渊区（$|\beta| = 1$）。$k_b = 1.134$ 和 $k_b = 2.313$ 平面上的蓝色星形标记表示非布洛赫分支点与广义布里渊区的交点。(c) 两个子广义布里渊区 GBZ_1 （蓝色）和 GBZ_2 （黄色），以及跨越k_b 范围的分支点线（蓝色实线），该范围覆盖 (b) 中的两个蓝色星形标记。蓝色虚线表示非布洛赫费米弧[1]。红色菱形标示广义布里渊区[2] 曲面上的一个鞍点；插图放大了方框区域，展示了一个典型的惠特尼尖点（蓝色星形标记），即曲面的自交部分终止之处。

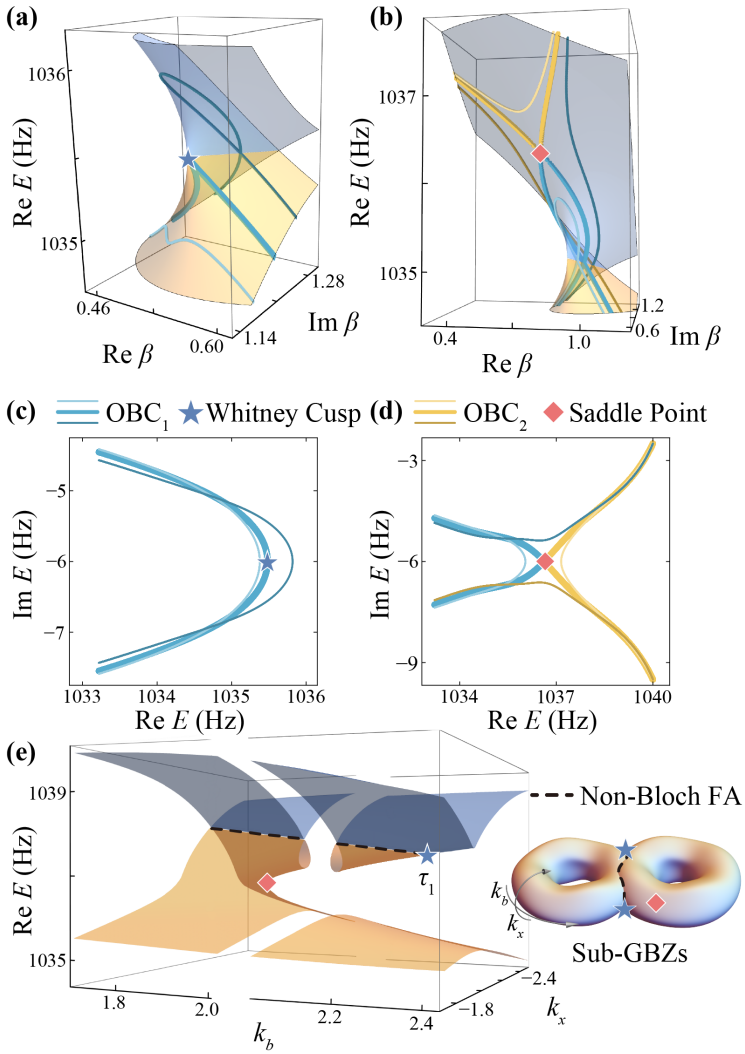


图3. (a,b) 子广义布里渊区（实线）随 k_b 扫过位于$k_{\mathrm{WC}} = 2.313$ 的惠特尼尖点 (a) 和位于 $k_{\mathrm{SP}} = 1.878$ 的鞍点 (b) 时的演化。曲面描绘了这两个临界点处的 Re(E) 黎曼曲面。(c,d) 与 (a,b) 中子广义布里渊区对应的开放边界条件谱。蓝色（黄色）线条在 (a-d) 中分别表示 GBZ_1 和 OBC_1 （GBZ_2 和 OBC_2），颜色越浅表示 k_b 越大。(e) 惠特尼尖点和鞍点附近的非布洛赫能带结构，即 Re(E) 随 k_x和 k_b 的变化。右侧插图将两个子广义布里渊区示意为变形环面，并标出惠特尼尖点（蓝色星形）、鞍点（红色菱形）和非布洛赫费米弧（黑色虚线）。

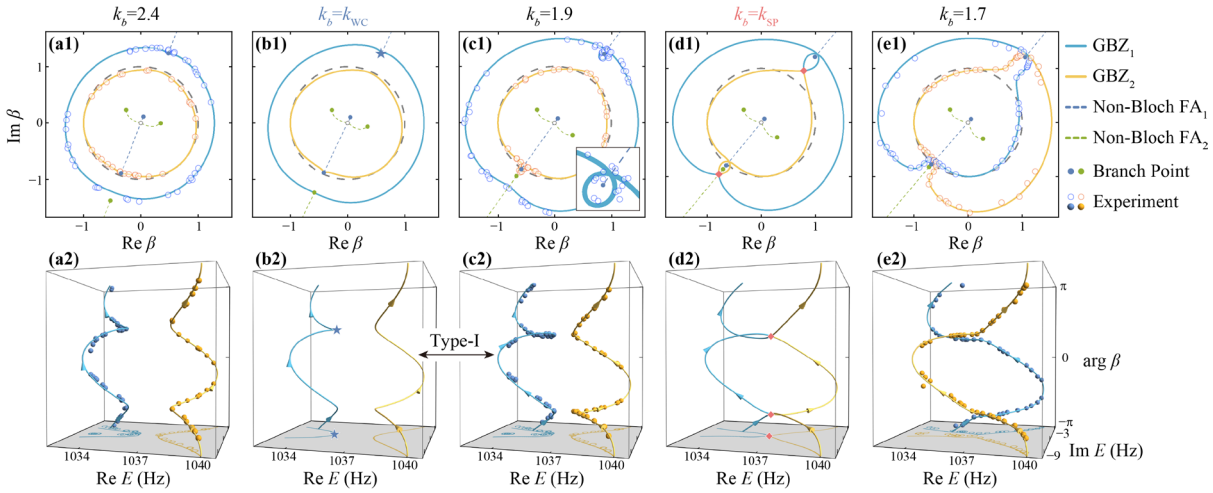


图4. k_b =2.4 (a)、k_{WC} (b)、1.9 (c)、k_{SP} (d) 和 1.7 (e) 对应的子广义布里渊区 (a1-e1) 与开边界条件本征值结图 (a2-e2) 的演化。空心圆 (a1-e1) 和球体 (a2-e2) 表示测量结果，实线表示理论结果。在 (a1-e1) 中，实心圆和虚线标记了图2(a)中确定的非布洛赫分支点和分支切割。(b) 中的蓝色星形标记和 (d) 中的红色菱形标记分别表示惠特尼尖点 ($k_{\mathrm{WC}} = 2.262, E_{\mathrm{WC}} = 1035.4 - 6.0i$ Hz) 和鞍点 ($k_{\mathrm{SP}} = 1.768, E_{\mathrm{SP}} = 1036.6 - 6.0i$ Hz)。(c1) 的插图放大了 GBZ_1 穿过非布洛赫 FA_1，的部分；在此过程中，本征值结会发生 I 型里迈斯特变换，如 (c2) 所示。非布洛赫超胞测量中的所有参数均与图1中开边界条件测量所用参数相同，但 $w = 0.66$ Hz 和 $N_x = 15$ 除外。