arXiv:2601.01894v1 [math.NA] 5 Jan 2026

尖锐界面极限附近带时空白噪声的随机Allen-Cahn方程的显式格式

Yingsong Jiang, Chenxu Pang,Xiaojie Wang *湖南省数学与统计学院分析数学基础学科研究中心、HNP-LAMA，中南大学，湖南长沙410083，中国

摘要

本文研究了尖锐界面极限 $\epsilon \to 0$附近由时空白噪声驱动的Allen–Cahn型随机偏微分方程（SPDEs）的时间离散近似，其中小参数 ϵ 是弥散界面厚度。针对所考虑的问题，我们提出了一种带修正非线性项的显式且易于实现的指数积分器。我们建立了该格式关于时间和ϵ的一致矩估计，并证明了数值格式的分布与SPDE在 $[0,T]$上的分布之间的全变差距离收敛速率为 $O\big(T\cdot \mathrm{Poly}(\epsilon^{-1})\tau^{\gamma}\big)$，$\gamma<\frac{1}{2}$。不同于标准论证所导致的指数依赖性，我们得到的误差界关于 ϵ^{-1} 和 T 呈多项式依赖。通过引入精心选择的方法参数，我们对时间步长 τ仅需一个温和且与 ϵ无关的限制，从而摆脱了文献中严格的限制 $\tau = O(\epsilon^{\sigma})$ $\sigma \geq 1$ 。此外，对于固定的 ϵ（例如 $\epsilon = 1$），我们得到关于时间一致的 $O(\tau^{\gamma})$ $\gamma<\frac{1}{2}$阶误差界；该结果改进了文献中的已有结果，并与全局Lipschitz情形下的经典弱收敛速率相匹配。由于所考虑问题的低正则性、非全局Lipschitz漂移项的超线性增长、全变差度量中固有的非光滑观测量，以及小界面参数$\epsilon \to 0$的存在，误差分析极具挑战性。为应对这些困难，我们引入了一种新的非线性项修正策略，并在非光滑测试函数的背景下，为相应的辅助过程的柯尔莫哥洛夫方程建立了精细的正则性估计。数值实验验证了所提出格式的理论收敛性及其界面捕捉能力。

1 引言

本文始终关注希尔伯特空间 $H := L^2(\mathcal{D};\mathbb{R})$ 中由时空白噪声驱动的以下抛物型随机偏微分方程（SPDEs）：

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = -AX(t)\,\mathrm{d}t + \epsilon^{-1}F(X(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t), \quad t>0, \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

*所有作者的贡献均相同。本研究得到国家自然科学基金（12471394、12071488、12371417）和中国博士后科学基金会博士后资助计划（GZB2025715）的资助。电子邮箱：x.j.wang7@csu.edu.cn（通讯作者）、yingsong@csu.edu.cn、c.x.pang@csu.edu.cn。

其中， $\mathcal{D} := (0,1)$，小参数 $\epsilon > 0$ 表示弥散界面厚度， $-A$ 是具有齐次狄利克雷边界条件的拉普拉斯算子， F 是与实值函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 相关联的非线性涅米茨基算子，满足 $F(u)(x) := f(u(x))$ $x \in \mathcal{D}$，且 $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ 是一个柱状 I-Wiener 过程（详见下文假设 2.1-2.3）。所考虑的方程包含随机 Allen–Cahn 方程这一特例，该方程描述热涨落作用下的随机相分离或界面运动。当 $\epsilon \to 0$时，解趋于分段常数，在两个体相区域中分别取接近稳定平衡态 ± 1的值，而这两个区域由厚度为 $O(\epsilon)$ [36]的弥散界面层分隔。这种极限行为通常称为尖锐界面极限，随机 Allen–Cahn 动力学形式上收敛于随机平均曲率流 [23]。然而，要数值解析 $O(\epsilon)$ 厚的过渡层并准确捕捉这些薄界面颇具挑战。尤其是，要有效捕捉薄界面层，必须采用极精细的分辨率，且计算成本很高（例如参见 $[11, 13, 16\text{–}19, 35]$ 及其中的参考文献）。

对于固定的 $\epsilon > 0$ （例如 $\epsilon = 1$），相关模型的数值分析已在文献中得到广泛研究（例如参见 $[4, 7\text{–}9, 12, 16, 21, 25, 26, 29, 32\text{–}34],$，仅举数例）。相反，尖锐界面极限 $\epsilon \to 0$ 下的数值分析研究较少。在这一情形下，标准的收敛论证会得出关于 ϵ^{-1} 指数依赖的误差界，进而对时间步长施加严格限制，因为 ϵ 趋于零。因此，一个自然且有趣的问题随之产生：

（Q）。对于尖锐界面极限 $\epsilon \to 0$附近的随机偏微分方程 (1.1) 数值近似，能否给出关于 ϵ^{-1} 多项式依赖的误差界？

近期， [13] 和 [14] 的作者对这一问题给出了肯定的回答。更确切地说， [13] 的作者为方程 (1.1) 提出了一种分裂方法，其中非线性项为 F 的参数化非线性常微分方程的相流需要精确计算。作为 [13], 的主要研究重点，作者在光滑测试函数 $\varphi \in \mathcal{C}_b^2$（$H$）的背景下，建立了分裂格式的弱收敛速率；在步长满足严格限制 $\tau = O$（ϵ）的条件下，得到了关于 ϵ^{-1} 多项式依赖的误差界。对于具有迹类噪声（比时空白噪声更光滑）的随机偏微分方程， [14] 的作者提出了一种全离散驯化欧拉格式，并在一种涉及利普希茨连续测试函数的截断 L^1-Wasserstein 距离下，推导出关于 ϵ^{-1} 多项式依赖的误差界，其所需的限制 $\tau = O$（ϵ^σ） $\sigma > 1$更加严格。

在本文中，我们将研究范围限定为由时空白噪声驱动的随机偏微分方程 (1.1)，旨在在全变差距离下，为新的显式格式推导误差界。这些误差界对 ϵ^{-1} 仅呈多项式依赖，且不会对步长施加严格限制 $\tau = O(\epsilon^\sigma)$ $\sigma \geq 1$ 。更确切地说，我们引入以下时间步进格式：

$$X_{t_{m+1}}^\tau = E(\tau) X_{t_m}^\tau + \tau E(\tau) \epsilon^{-1} F_\tau\big(X_{t_m}^\tau\big) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} E(t_{m+1} - s)\, \mathrm{d}W(s), \quad X_0^\tau = X_0, \tag{1.2}$$

对于 $m \in \mathbb{N}_0$，其中 $F_\tau\colon\ L^{4q-2}(\mathcal{D}) \to H$, $q > 1$，定义为

$$F_\tau(u)(x) := f_\tau(u(x)),\ x \in \mathcal{D}, \quad \text{with} \quad f_\tau(v) := \frac{f(v)}{\left(1 + \beta\tau^\theta |v|^{\frac{2q-2}{\alpha}}\right)^\alpha}, \quad v \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

其中 β、 $\theta > 0$、 $\alpha \in (0, \frac{1}{\theta}]$ 是方法参数， $2q-1$ 是 f 的多项式增长阶。据我们所知，这种时间步进格式是全新的，即使对于确定性的 Allen-Cahn 方程也是如此。这样的修正 (1.3) 得到了一种完全显式且易于实现的

格式，它同时保持了 f 的耗散性（见命题 3.2），因此在时间步长满足限制 $\tau = O\big(\beta^{\frac{\alpha}{1-\theta\alpha}}\epsilon^{\frac{1}{1-\theta\alpha}}\big)$ 的条件下，有助于我们建立数值解关于时间和 ϵ 的一致矩估计（定理 4.2 ）。在 $O\big(t_m \cdot \text{Poly}(\beta) \cdot \text{Poly}(\epsilon^{-1})\tau^{\gamma}\big)$、 $\gamma < \frac{1}{2}$ 阶的全变差（ TV ）距离收敛已得到证明，该结论适用于 $X^{\tau}_{t_m}$ 的分布与 $X(t_m)$ 的分布之间，其中 X 关于 ϵ^{-1} 和 T 呈多项式依赖（定理 6.4）。此外，对于固定的 $\epsilon = 1$，还得到了 $O(\tau^{\gamma})$ $\gamma < \frac{1}{2}$ 阶的一致时间误差界（推论 6.5 ）。这些结果改进了 [13] 中已有的 $\frac{\gamma}{2}$ 阶全变差收敛速率，并与全局 Lipschitz 情形下经典的弱收敛速率 [3, 5] 相匹配。数值实验中另一个有趣的发现是，降低格式中的次数 α 似乎能提高计算精度。此外，数值结果表明，所提出的格式在界面捕捉方面表现良好。

与 [13], 提出的分裂格式不同，新的格式 (1.2)-(1.3) 易于实现且更直接，因为无需精确求解非线性项为 F 的非线性常微分方程的相流。此外，我们强调，此处的驯化格式在计算上比 [14], 中介绍的截断格式更高效，因为后者每个时间步都需要计算 Sobolev范数 $\|\cdot\|_{\vartheta}$。具体而言，我们通过在驯化因子中引入灵活的次数 $\alpha \in (0, \frac{1}{\theta})$（而非文献中采用的固定次数 $\frac{1}{2}$ 或 1）以及方法参数 β，提出了一种不同的驯化策略。通过谨慎选择方法参数，该策略可以显著放宽所需的限制 $\tau = O\big(\beta^{\frac{\alpha}{1-\theta\alpha}}\epsilon^{\frac{1}{1-\theta\alpha}}\big)$.。更准确地说，取 $\beta^{\alpha} = \epsilon^{-1}$ 后，我们得到一个与 ϵ 无关的限制 $\tau = O(1)$，同时误差界仍对 ϵ^{-1} 呈多项式依赖（详见定理 6.4）。这实质上克服了文献 [13, 14] 中的严格限制 $\tau = O(\epsilon^{\sigma})$ $\sigma \geq 1$。

不同于基于光滑测试函数的弱收敛分析以及采用L^1-Wasserstein距离等其他度量，全变差距离本质上涉及非光滑性，因此相应的分析更具挑战性。在全局Lipschitz情形下， [4] 的作者通过柯尔莫哥洛夫方程，推导了由时空白噪声驱动的随机偏微分方程的加速指数Euler格式的全变差收敛性。分析中的一个关键步骤，是将分布$(X^{\tau}_{t_m})$与分布$(X(t_m))$之间的全变差误差视为非光滑测试函数情形下的弱误差分析。然而， ϵ^{-1} 的存在以及非全局Lipschitz非线性项给格式的构造及其误差分析带来了重大困难。为克服这些困难，我们引入辅助过程 $\mathbb{X}^{\delta}$ ，其定义如下

$$\mathbb{X}^{\delta}(t) = E(t)\mathbb{X}^{\delta}_0 + \int_0^t E(t-s)\epsilon^{-1}F_{\delta}(\mathbb{X}^{\delta}(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t E(t-s)\,\mathrm{d}W(s),\ t \geq 0, \tag{1.4}$$

并将弱误差分解为以下两部分：

$$|\mathbb{E}[\varphi(X(t_m))] - \mathbb{E}[\varphi(X^{\tau}_{t_m})]| \leq \underbrace{|\mathbb{E}[\varphi(X(t_m))] - \mathbb{E}[\varphi(\mathbb{X}^{\delta}(t_m))]|}_{=:\text{Error}_1} + \underbrace{|\mathbb{E}[\varphi(\mathbb{X}^{\delta}(t_m))] - \mathbb{E}[\varphi(X^{\tau}_{t_m})]|}_{=:\text{Error}_2}, \tag{1.5}$$

其中，非光滑测试函数 $\varphi \in \mathcal{C}^0_b(H)$ 满足 $\|\varphi\|_0 \leq 1$，这是根据全变差距离 (2.3) 的定义得出的。这里，修正 F_{δ} 的定义与 (1.3) 类似，具体是将其中的参数 α, β, θ 和 τ 替换为 δ。由于修正 F_{δ} 是全局 Lipschitz 连续的（参见引理 5.1 ），因此可以利用柯尔莫哥洛夫方程估计 (1.5) 中的两个误差项。一个主要的技术障碍来自在非光滑测试函数的背景下，对相关柯尔莫哥洛夫方程解 ν^{δ} 的正则化估计，以及

尖锐界面极限。直接使用 Bismut-Elworthy-Li公式，可得 $D\nu^\delta(t,x)$ 的粗略界，其阶为 $O\Big(\frac{\exp(\epsilon^{-1}t_m)}{t^{1/2}}\Big)$（见引理 5.3）。尽管该界对 t 和 ϵ^{-1} 均呈指数依赖，但注意到误差 $\text{Error}_1 = \big|\mathbb{E}\big[\nu^\delta\big(0, X(t_m)\big)\big] - \mathbb{E}\big[\nu^\delta\big(t_m, X_0\big)\big]\big| = O\big(\exp(\epsilon^{-1}t_m)\sqrt{\delta}\big)$ 在 $\delta \to 0$ 时趋于零，因此该粗略界足以处理 (1.5) 中的第一项误差。利用 $D\nu^\delta(t,x)$ 的粗略界，并结合对 (1.4) 的遍历性所作的更精细估计，可以得到对 $D\nu^\delta$ 的改进正则化估计，且其对 ϵ^{-1} 呈多项式依赖（命题 5.5）。因此，对 $D\nu^\delta(t,x)$ 的精细正则化估计使我们能够得到 (1.5) 中 Error_2 的良好估计，其阶为 $O(\text{Poly}(\epsilon^{-1})\tau^{\gamma\wedge\theta})$（见定理 6.4）。

我们的主要贡献可概括如下：

- 我们为具有非全局利普希茨非线性项和时空白噪声的随机偏微分方程设计了一种新颖且易于实现的显式时间步进格式。即使对于确定性 Allen-Cahn 方程，该格式也是全新的。我们建立了该格式的一致时间矩估计和一致 ϵ 矩估计。如前所述，通过仔细选择合适的方法参数，新提出格式的分析仅依赖于一个与 ϵ 无关的时间步长 τ 限制，而非文献中的严格限制 $\tau = O(\epsilon^\sigma)$ $\sigma \geq 1$。
- 在尖锐界面极限附近，我们建立了全变差误差界 $\epsilon \to 0$ （定理 6.4），其对 ϵ^{-1} 和时间长度 t_m 呈多项式依赖：

$$d_{\text{TV}}(\text{law}(X^\tau_{t_m}), \text{law}(X(t_m))) = O\big(t_m \cdot \text{Poly}(\epsilon^{-1})\tau^\gamma\big), \quad \gamma \in (0, \tfrac{1}{2}). \tag{1.6}$$

  对于任意 $\gamma < \frac{1}{2}$，该误差界都具有 γ 阶的收敛速率，是 [13, 定理 5.6] 中全变差距离收敛速率的两倍。
- 针对 $\epsilon = 1$，得到了一个关于时间一致的误差界（推论 6.5）：

$$d_{\text{TV}}(\text{law}(X^\tau_{t_m}), \text{law}(X(t_m))) = O\big(\tau^\gamma\big), \quad \gamma \in (0, \tfrac{1}{2}). \tag{1.7}$$

  这样的关于时间一致的误差界将全局 Lipschitz 条件下已有的结果[3, 5] 推广到了非全局 Lipschitz 情形。

本文其余部分安排如下。下一节介绍一些预备知识。第 3 节引入显式时间步进格式，并在第 4 节证明所提出格式关于时间一致的矩界。第 5 节引入一个辅助过程，并建立其柯尔莫哥洛夫方程的正则性估计。随后，我们在第 6 节给出全变差距离下的主要收敛结果。第 7 节通过数值实验验证理论结果。

2 设定与所考虑的随机偏微分方程

2.1 记号

令 $\mathbb{N}$ 为所有正整数的集合，并记 $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$。定义 $a \wedge b := \min\{a, b\}$，$a \vee b := \max\{a, b\}$，其中 $a, b \in \mathbb{R}$。用 $L^r(\mathcal{D}; \mathbb{R})$（$L^r(\mathcal{D})$，或简记为 L^r）表示由以下函数构成的巴拿赫空间：

r-可积函数，赋以范数 $\|\cdot\|_{L^r}$。特别地，令 $H:=L^2(\mathcal{D};\mathbb{R})$ 为实可分希尔伯特空间，配备内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和范数 $\|\cdot\|:=\langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$。此外，我们用 $\mathcal{L}(H)$ 表示 H 上有界线性算子构成的巴拿赫空间，并赋以算子范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H)}$。用 $\mathcal{L}_2(H)\subset\mathcal{L}(H)$（简记为 $\mathcal{L}_2$）表示由从 H 到 H 的所有希尔伯特–施密特算子构成的子空间。该空间也是可分希尔伯特空间，赋以内积 $\langle\Gamma_1,\Gamma_2\rangle_{\mathcal{L}_2(H)}:=\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle\Gamma_1\eta_n,\Gamma_2\eta_n\rangle$，以及范数 $\|\Gamma\|_{\mathcal{L}_2(H)}:=\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\|\Gamma\eta_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，且与正交基 $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of H 的选取无关。此外，我们用 $V:=C(\mathcal{D},\mathbb{R})$ 表示连续函数构成的巴拿赫空间，并赋以通常的范数 $\|\cdot\|_V$。用 $\mathbb{1}_S$ 表示集合 S 的示性函数。我们还说明弗雷歇导数的记号：对于映射 $\phi:H\to\mathbb{R}$，其一阶导数 $D\phi(x)\in\mathcal{L}(H,\mathbb{R})$ 和二阶导数$D^2\phi(x)\in\mathcal{L}(H,\mathcal{L}(H,\mathbb{R}))$ 定义如下：

$$D\phi(x).h:=\langle D\phi(x),h\rangle \text{ and } D^2\phi(x).(h,k):=\langle D^2\phi(x).h,k\rangle,\quad \forall\, h,k\in H.$$

全文中，我们用 C 表示一个通用的正数常量，该常量可能随行变化，其对参数的依赖关系将通过记号 $C(\cdot)$注明。除非另有说明，所有此类常量均与 ϵ 和步长 τ无关。

接下来，我们回顾 H上两个博雷尔概率分布 μ_1 和 μ_2 之间的全变差距离，其定义为

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu_1,\mu_2):=\sup_{\varphi\in\mathcal{B}_b(H),\|\varphi\|_0\le 1}\left|\int\varphi(x)\mu_1(\mathrm{d}x)-\int\varphi(x)\mu_2(\mathrm{d}x)\right|,\tag{2.1}$$

其中，我们用 $\mathcal{B}_b(H)$表示从 H 到 $\mathbb{R}$的所有有界可测映射构成的集合，并令$\|\varphi\|_0:=\sup_{x\in H}|\varphi(x)|$。用 $\mathcal{C}_b^0(H)$表示从H到 $\mathbb{R}$ 的有界连续映射构成的集合，用 $\mathcal{C}_b^1(H)$表示 $\mathcal{C}_b^0(H)$中由所有一阶导数有界的函数构成的子空间。由于每个有界可测函数 $\varphi\in\mathcal{B}_b(H)$都可以由 $\mathcal{C}_b^0(H)$中的一个序列$(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 逐点逼近，其中$\sup_{k\in\mathbb{N}}\sup_{x\in H}|\varphi_k(x)|<\infty$ 且 $\varphi_k(x)\to\varphi(x)$在 $k\to\infty$时成立，对所有 $x\in H$均如此，因此两个博雷尔概率分布 μ_1 和 μ_2 之间的全变差距离也可以等价地改写为（参见例如 [4, 5]）：

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu_1,\mu_2)=\sup_{\varphi\in\mathcal{C}_b^0(H),\|\varphi\|_0\le 1}\left|\int\varphi(x)\mu_1(\mathrm{d}x)-\int\varphi(x)\mu_2(\mathrm{d}x)\right|.\tag{2.2}$$

给定一个取值于 H 的随机变量 X，以及 H 上的博雷尔概率测度 μ， X 的分布（记为 $\mathrm{law}(X)$）与 μ 之间的全变差距离为

$$\begin{aligned}d_{\mathrm{TV}}(\mathrm{law}(X),\mu)&=\sup_{\varphi\in\mathcal{B}_b(H),\|\varphi\|_0\le 1}\left|\mathbb{E}[\varphi(X)]-\int\varphi(x)\mu(\mathrm{d}x)\right|\\&=\sup_{\varphi\in\mathcal{C}_b^0(H),\|\varphi\|_0\le 1}\left|\mathbb{E}[\varphi(X)]-\int\varphi(x)\mu(\mathrm{d}x)\right|.\end{aligned}\tag{2.3}$$

2.2 随机偏微分方程的主要假设与适定性

本文始终聚焦于希尔伯特空间 H 中的以下抛物型随机偏微分方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}X(t)=-AX(t)\,\mathrm{d}t+\epsilon^{-1}F(X(t))\,\mathrm{d}t+\mathrm{d}W(t),\quad t>0,\\X(0)=X_0,\end{cases}\tag{2.4}$$

其中， $\epsilon \in (0,1]$ 为弥散界面厚度， A、 F、 W 和 X_0 如下所述。为确保（2.4）的适定性并便于后续分析，我们作出以下假设。

假设 2.1（线性算子 A）。设 $\mathcal{D} := (0,1)$，且设 $H := L^2(\mathcal{D};\mathbb{R})$。设 $-A$: $Dom(A) \subset H \to H$ 为定义在 $\mathcal{D}$ 上的拉普拉斯算子，并满足齐次狄利克雷边界条件，即 $-Au = \Delta u, u \in Dom(A) := H^2(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})$。

在该假设下，算子 A 在 H 中具有一个特征系 $\{\lambda_j, e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，满足 $Ae_j = \lambda_j e_j$，其中 $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 为递增序列，并且满足 $\lambda_j \sim j^2$。此外，有

$$\left\|A^{\frac{\gamma-1}{2}}\right\|_{\mathcal{L}_2(H)} < \infty, \quad \text{for any } \gamma < \tfrac{1}{2}. \tag{2.5}$$

此外， $-A$ 生成一个解析压缩半群，记为 $E(t) := e^{-At}$， $t \geq 0$。借助谱分解，我们定义 $\dot{H}^{\vartheta} = Dom\left(A^{\frac{\vartheta}{2}}\right)$ $\vartheta \in \mathbb{R}$ 的分数幂，即对于附录 B.[24, 2]。记插值空间为: **( )**，这些空间是配备内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\vartheta} := \langle A^{\frac{\vartheta}{2}}\cdot, A^{\frac{\vartheta}{2}}\cdot\rangle$ 和范数 $\|\cdot\|_{\vartheta} := \|A^{\frac{\vartheta}{2}}\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\vartheta}^{1/2}$ 的可分希尔伯特空间。以下正则性是众所周知的（参见例如 [28]）：对于任意 $t > 0$， $\vartheta \geq 0$， $\varsigma \in [0,1]$,

$$\|E(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq e^{-\lambda_1 t}, \quad \left\|A^{\vartheta}E(t)\right\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Ct^{-\vartheta}, \quad \left\|A^{-\varsigma}(I - E(t))\right\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Ct^{\varsigma}. \tag{2.6}$$

如 [2, **(2.4)**] 和 [31, **(6.2)**], 所示，对于任意 $t > 0$,

$$\|E(t)x\|_V \leq C(1 \wedge t)^{-\frac{1}{4}} e^{-ct}\|x\|, \ \forall x \in H, \quad \text{and} \quad \|E(t)x\|_V \leq \|x\|_V, \ \forall x \in V. \tag{2.7}$$

假设 2.2（噪声过程）。设 $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ 是相对于滤过概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}, \mathbb{P})$ 的柱状 *I-Wiener* 过程，其形式级数表示为

$$W(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\beta}_n(t) e_n, \quad t \geq 0, \tag{2.8}$$

其中， $\left\{\widetilde{\beta}_n(t)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$， $t \geq 0$ 是关于滤过 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ 适应的相互独立的实值标准布朗运动序列，而 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 H 的完备正交归一基。

假设 2.3（非线性项）。设 $q > 1$ 为任意整数，并设 F: $L^{4q-2}(\mathcal{D}) \to H$ 为由下式给出的非线性涅米茨基算子

$$F(u)(x) := f(u(x)), \quad x \in \mathcal{D}, \tag{2.9}$$

其中 $f(v) = -c_f v^{2q-1} + f_0(v)$ $v \in \mathbb{R}$ 满足 $c_f > 0$ 且 f_0: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 二阶可微。特别地，存在常数 $c_{f,0}$、$c_{f,1} > 0$ 使得

$$|f_0(v)| \leq c_{f,0}(1 + |v|^{2q-2}), \quad \forall v \in \mathbb{R}, \tag{2.10}$$

$$|f_0'(v)| + |f_0''(v)| \leq c_{f,1}(1 + |v|^{2q-3}), \quad \forall v \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

根据假设 2.3，可以找到常数 $L_f \in \mathbb{R}$ 和 c_0、c_1、c_2、c_3、c_4、$c_5 > 0$ 使得，对于任意 u、$v \in \mathbb{R}$,

$$f'(u) \leq L_f, \tag{2.12}$$
$$(u+v)f(u) \leq -c_0|u|^{2q} + c_1|v|^{2q} + c_2, \tag{2.13}$$
$$|f(u)| \leq c_3|u|^{2q-1} + c_4|u| + c_5. \tag{2.14}$$

满足假设 2.3 的一个典型例子是三次非线性项（即情形 $q=2$） $f(u) := a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3$ 其中 $a_3 < 0$, a_0, a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$。具有三次非线性项的此类随机偏微分方程通常称为随机 Allen–Cahn 方程（[7, 12, 16, 20]）。

假设 2.4 (初值)。 设初值 $X_0\colon \Omega \to H$ 是一个 $\mathscr{F}_0/\mathcal{B}(H)$-可测随机变量。对于任意 $p \geq 1$ 以及某个 $\varrho > \frac{1}{2}$，存在常数 $C(\varrho, p) > 0$，它依赖于 ϱ, p，使得

$$\|X_0\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^\varrho)} \leq C(\varrho, p) < \infty. \tag{2.15}$$

下一个引理给出了随机卷积关于时间的一致正则性（例如，见引理 2.2] 的证明 [13, ）。

引理 2.5。 设假设 *2.1*、*2.2* 成立。对于任意 $p \in [2, \infty)$ 和 $\gamma \in \left[0, \frac{1}{2}\right),$，存在常数 $C(p)$ 和 $C(p, \gamma)$，使得随机卷积

$$\mathcal{O}_t := \int_0^t E(t-s)\,\mathrm{d}W(s), \quad t \geq 0 \tag{2.16}$$

满足

$$\sup_{t\geq 0} \left\|\mathcal{O}_t\right\|_{L^p(\Omega;V)} \leq C(p) < \infty, \qquad \sup_{t\geq 0} \left\|\mathcal{O}_t\right\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^\gamma)} \leq C(p,\gamma) < \infty. \tag{2.17}$$

因此，我们得到随机偏微分方程 (2.4) 的温和解的适定性如下（参见，例如，[10, 第 6] 章和 [13, 引理 2.2]）。

定理 2.6。 假设假设 *2.1–2.4* 成立。那么，模型 (2.4) 存在唯一的温和解 $\{X(t)\}_{t\geq 0}$，其连续样本路径定义如下：

$$X(t) = E(t)X_0 + \int_0^t E(t-s)\epsilon^{-1}F(X(s))\,\mathrm{d}s + \mathcal{O}_t,\ t \geq 0,\ \mathbb{P}\text{-}a.s. \tag{2.18}$$

此外，对于任意 $p \geq 2$，存在常数 $C(p, q) > 0$，使得

$$\sup_{t\geq 0} \|X(t)\|_{L^p(\Omega;V)} \leq C(p,q)(1 + \|X_0\|_V). \tag{2.19}$$

由于 I-Wiener 过程的非退化性，随机偏微分方程 (2.18) 指数收敛至平衡态（参见，例如，[13, 引理 4.6]）。

命题 2.7。 设假设 *2.1-2.3*成立。记由 $X(t, x)$ $t \geq 0$ 表示从 $x \in H$开始的 (2.18) 的唯一解。则存在一个与 ϵ^{-1} 无关的常数 $C > 0$，使得对于任意 $\varphi \in \mathcal{B}_b(H)$、 $t \geq 0$以及 $x_1, x_2 \in V \cap H^\gamma$，均有

$$|\mathbb{E}\left[\varphi(X(t, x_1))\right] - \mathbb{E}\left[\varphi(X(t, x_2))\right]| \leq C\|\varphi\|_0 e^{-rt}, \tag{2.20}$$

$_{wh}$这里的速率为 $r := -\frac{1}{2}\log(1-\vartheta)$，其中 $e^{-\widetilde{C}\frac{1}{\epsilon^2}} \leq \vartheta \leq e^{-\widetilde{c}\frac{1}{\epsilon^2}}$，对于某个 $\widetilde{C} \geq \widetilde{c} \geq 0$.

3 所提出的显式时间步进格式

本节旨在设计一种显式时间步进格式，对底层问题 (2.4) 进行时间离散近似。对于均匀步长 $\tau > 0$，我们提出如下格式：

$$X^{\tau}_{t_{m+1}} = E(\tau)X^{\tau}_{t_m} + \tau E(\tau)\epsilon^{-1}F_{\tau}\big(X^{\tau}_{t_m}\big) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} E(t_{m+1}-s)\,\mathrm{d}W(s), \quad X^{\tau}_0 = X(0), \tag{3.1}$$

其中，我们记 $t_m := m\tau, m \in \mathbb{N}_0$。这里，$F_{\tau}\colon L^{4q-2}(\mathcal{D}) \to H$ 是与函数 $f_{\tau}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$相关联的涅米茨基算子：

$$F_{\tau}(u)(x) := f_{\tau}(u(x)), \quad x \in \mathcal{D}, \quad f_{\tau}(v) := \frac{f(v)}{\big(1+\beta\tau^{\theta}|v|^{\frac{2q-2}{\alpha}}\big)^{\alpha}}, \quad v \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

其中 $\beta,\ \theta > 0, \alpha \in (0, \frac{1}{\theta}]$。对于方法参数的不同选择，所提出的非线性项修正$f_{\tau}$ 可化为随机常微分方程（SODEs）中已有的几种修正。例如，取 $\alpha = 1/2$ 时，修正 f_{τ} 与 [27] 中的修正类似；而取$\alpha = 1$ 时，修正 f_{τ} 与 [1,30]中考虑的驯化欧拉方法类似。

全文中，我们对时间步长 τ、弥散界面厚度 ϵ 以及正则化参数 $\beta,\ \theta,\ \alpha$ 施加一个附加条件，以满足 f_{τ} (3.2)，具体如下：

$$2c_3^2\tau^{1-\theta\alpha} \le c_0\beta^{\alpha}\epsilon, \tag{3.3}$$

其中，参数 $c_0,\ c_3$ 源自 (2.13)-(2.14)。我们提到，[13,14]中也要求一个类似于 (3.3) 的条件。乍看之下，这种依赖于小参数 ϵ的限制相当严格。然而，通过恰当选择方法参数，可以显著放宽这一严格限制，只需一个与 ϵ无关的限制即可（见下文注 3.1 和定理 6.4）。

注 3.1。限制条件 (3.3) 说明步长 τ 应如何相对于 ϵ 、正则化参数 α、 β 以及收敛速率 θ进行缩放。特别地，当 β 和θ 固定时，参数 α 可以灵活选取，以放宽锐界面模拟中对 τ 的限制。值得注意的是，如定理 *6.4* 所示，取 $\beta^{\alpha} = O(\epsilon^{-1})$后，我们只需施加一个与 ϵ无关的限制 $2c_3^2\tau^{1-\theta\alpha} \le c_0$ ，即可保证误差估计仍然对 ϵ^{-1}呈多项式依赖。

在条件 (3.3) 下，修改后的函数 f_{τ}具有若干关键性质。

命题 3.2。设假设 *2.3* 和条件 (3.3) 成立。对于 $\tau > 0$，修改后的函数f_{τ}(3.2) 满足以下条件：存在常数 $\widetilde{c}_1$、$\widetilde{c}_2 > 0$，它们与 β、θ、τ和 ϵ^{-1}无关，使得对于任意 u、$v \in \mathbb{R}$，

$$2(u+v)f_{\tau}(u) + \tau\epsilon^{-1}|f_{\tau}(u)|^2 \le -\tfrac{c_0}{2(1+\beta\tau^{\theta})^{2\alpha}}|u|^2 + \widetilde{c}_1(1+|v|^{2q}) + \widetilde{c}_2\beta^{\alpha}\tau^{\theta\alpha}, \tag{3.4}$$

$$|f_{\tau}(u)| \le |f(u)|, \tag{3.5}$$

$$|f_{\tau}(u) - f(u)| \le \alpha\beta\tau^{\theta}|u|^{\frac{2q-2}{\alpha}}|f(u)|, \tag{3.6}$$

其中，c_0 由(2.13) 给出，而 β、$\theta > 0$、$\alpha \in (0, \frac{1}{\theta}]$ 来自(3.2)。

证明。 通过引入

$$\Theta(x) := (1+\beta\tau^\theta x)^{-\alpha}, \quad x \geq 0, \tag{3.7}$$

我们将 f_τ 改写为

$$f_\tau(u) = f(u)\Theta(|u|^{\frac{2q-2}{\alpha}}), \quad u \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

对于所有的 $|\Theta(x)| \leq 1$ $x \geq 0$，断言 (3.5) 立即成立。注意到 $\Theta(0) = 1$ 是一个 d

$$|\Theta'(x)| = \left|\frac{\alpha\beta\tau^\theta}{(1+\beta\tau^\theta x)^{\alpha+1}}\right| \leq \alpha\beta\tau^\theta, \quad x \geq 0, \tag{3.9}$$

我们可以推知

$$|f_\tau(u) - f(u)| = |f(u)| \cdot \left|\Theta(|u|^{\frac{2q-2}{\alpha}}) - \Theta(0)\right| \leq \alpha\beta\tau^\theta |u|^{\frac{2q-2}{\alpha}} |f(u)| \tag{3.10}$$

因此，断言 (3.6) 得到验证。现在只需验证 (3.4)，这需要更多工作。由 (2.13)-(2.14) 可得

$$\begin{aligned}
&2(u+v)f_\tau(u) + \tau\epsilon^{-1}|f_\tau(u)|^2 \\
&= \frac{2(u+v)f(u)}{(1+\beta\tau^\theta|u|^{\frac{2q-2}{\alpha}})^\alpha} + \frac{\tau\epsilon^{-1}|f(u)|^2}{(1+\beta\tau^\theta|u|^{\frac{2q-2}{\alpha}})^{2\alpha}} \\
&\leq \frac{2(-c_0|u|^{2q} + c_1|v|^{2q} + c_2)}{(1+\beta\tau^\theta|u|^{\frac{2q-2}{\alpha}})^\alpha} + \frac{\tau\epsilon^{-1}(c_3|u|^{2q-1} + c_4|u| + c_5)^2}{(1+\beta\tau^\theta|u|^{\frac{2q-2}{\alpha}})^{2\alpha}} \\
&\leq 2c_1|v|^{2q} + 2c_2 + \frac{-2c_0|u|^{2q}(1+\beta\tau^\theta|u|^{\frac{2q-2}{\alpha}})^\alpha + \tau\epsilon^{-1}(c_3|u|^{2q-1} + c_4|u| + c_5)^2}{(1+\beta\tau^\theta|u|^{\frac{2q-2}{\alpha}})^{2\alpha}}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

注意，对于任意 $\alpha \in (0,1]$ (见例如 [22, (3.16)])，$(1+x)^\alpha \geq 2^{\alpha-1}(1+x^\alpha)$ $x \geq 0$；而当 $\alpha > 1$ 时，$(1+x)^\alpha \geq 1 + x^\alpha$， $x \geq 0$。因此，对于 $\tilde{\alpha} := \min\{\alpha, 1\}$，有

$$(1+x)^\alpha \geq 2^{\tilde{\alpha}-1}(1+x^\alpha), \quad \text{for any } x \geq 0, \alpha > 0. \tag{3.12}$$

结合杨氏不等式，即 $(c_3|u|^{2q-1} + c_4|u| + c_5)^2 \leq 2^{\tilde{\alpha}} c_3^2 |u|^{4q-2} + \hat{c}_5$ 其中某个常数 $\hat{c}_5 > 0$ 取决于 $(2^{\tilde{\alpha}} - 1)^{-1}$，进一步可得

$$\begin{aligned}
&2(u+v)f_\tau(u) + \tau\epsilon^{-1}|f_\tau(u)|^2 \\
&\leq 2c_1|v|^{2q} + 2c_2 + \frac{-2^{\tilde{\alpha}}c_0|u|^{2q}(1+\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}|u|^{2q-2}) + 2^{\tilde{\alpha}}c_3^2\tau\epsilon^{-1}|u|^{4q-2} + \hat{c}_5\tau\epsilon^{-1}}{(1+\beta\tau^\theta|u|^{\frac{2q-2}{\alpha}})^{2\alpha}} \\
&\leq 2c_1|v|^{2q} + 2c_2 + \frac{\hat{c}_5 c_0\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}}{2c_3^2} + \frac{-2^{\tilde{\alpha}}c_0|u|^{2q} - \frac{1}{2}\cdot 2^{\tilde{\alpha}}c_0\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}|u|^{4q-2}}{(1+\beta\tau^\theta|u|^{\frac{2q-2}{\alpha}})^{2\alpha}} \\
&\quad + \frac{-\frac{1}{2}\cdot 2^{\tilde{\alpha}}c_0\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}|u|^{4q-2} + 2^{\tilde{\alpha}}c_3^2\tau\epsilon^{-1}|u|^{4q-2}}{(1+\beta\tau^\theta|u|^{\frac{2q-2}{\alpha}})^{2\alpha}} \\
&\leq 2c_1|v|^{2q} + 2c_2 + \frac{\hat{c}_5 c_0\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}}{2c_3^2} + \left[\frac{-c_0|u|^{2q-2} - \frac{1}{2}c_0\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}|u|^{4q-4}}{(1+\beta\tau^\theta|u|^{\frac{2q-2}{\alpha}})^{2\alpha}}\right]\cdot|u|^2,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

其中，最后一个不等式由 $q>1$ 满足条件 (3.3) 得出，即 $2c_3^2\tau\epsilon^{-1}\le c_0\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}$。

为进一步推进，我们考虑两种情况： $|u|\le 1$ 和 $|u|>1$。对于前一种情况 $|u|\le 1$，由 (3.13) 易得

$$\begin{aligned}2(u+v)f_\tau(u)+\tau\epsilon^{-1}|f_\tau(u)|^2 &\le 2c_1|v|^{2q}+2c_2+\tfrac{\hat{c}_5c_0\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}}{2c_3^2}\\ &\le -\tfrac{c_0}{2(1+\beta\tau^\theta)^{2\alpha}}|u|^2+2c_1|v|^{2q}+2c_2+\tfrac{c_0}{2(1+\beta\tau^\theta)^{2\alpha}}+\tfrac{\hat{c}_5c_0\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}}{2c_3^2},\end{aligned}\tag{3.14}$$

如所需。对于另一种情况 $|u|>1$，我们引入如下定义的辅助函数

$$\Upsilon(x):=\frac{-c_0x-\frac{1}{2}c_0\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}x^2}{(1+\beta\tau^\theta x^{\frac{1}{\alpha}})^{2\alpha}},\quad x\ge 0,\quad \alpha>0,\tag{3.15}$$

因此，方程 (3.13) 可改写为

$$2(u+v)f_\tau(u)+\tau\epsilon^{-1}|f_\tau(u)|^2\le 2c_1|v|^{2q}+2c_2+\tfrac{\hat{c}_5c_0\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}}{2c_3^2}+\Upsilon(|u|^{2q-2})\cdot|u|^2.\tag{3.16}$$

现在只需估计 Υ的上界，我们断言

$$\sup_{x\ge 1}\Upsilon(x)\le\tfrac{-c_0}{2(1+\beta\tau^\theta)^{2\alpha}}.\tag{3.17}$$

为验证断言 (3.17)，可推得

$$\Upsilon'(x)=\frac{-c_0-c_0\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}x+c_0\beta\tau^\theta x^{\frac{1}{\alpha}}}{(1+\beta\tau^\theta x^{\frac{1}{\alpha}})^{1+2\alpha}}.\tag{3.18}$$

对于 $\alpha\ge 1$，可得

$$c_0\beta\tau^\theta x^{\frac{1}{\alpha}}\le c_0\big(1+(\beta\tau^\theta x^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha\big)=c_0+c_0\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}x,\tag{3.19}$$

从而得到 $\Upsilon'(x)\le 0$，因此

$$\sup_{x\ge1}\Upsilon(x)\le\Upsilon(1)=\tfrac{-c_0-\frac{1}{2}c_0\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}}{(1+\beta\tau^\theta)^{2\alpha}}\le\tfrac{-c_0}{(1+\beta\tau^\theta)^{2\alpha}}.\tag{3.20}$$

对于 $\alpha\in$ (0,1)，按照命题 3.3]，中 [22, (3.23)-(3.25) 的相同方法，存在 $x^*>0$ 使得

$$\Upsilon'(x)\le 0\text{ for }x\in[0,x^*],\quad \Upsilon'(x)\ge 0\text{ for }x\ge x^*.\tag{3.21}$$

因此，$\sup_{x\ge1}\Upsilon(x)$ 有界于 $\Upsilon(1)\vee\lim_{x\to\infty}\Upsilon(x)$，即

$$\Upsilon(x)\le\Upsilon(1)\vee\lim_{x\to\infty}\Upsilon(x)=\tfrac{-c_0-\frac{1}{2}c_0\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}}{(1+\beta\tau^\theta)^{2\alpha}}\vee\tfrac{-c_0}{2\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}}\le\tfrac{-c_0}{2(1+\beta\tau^\theta)^{2\alpha}},\tag{3.22}$$

如所述。将此界代入（3.16），即可完成证明。 □

4 数值近似的一致矩界

接下来的误差分析依赖于所提出格式的时间一致矩界。首先，我们将时间步进递推（3.1）改写如下:

$$X^\tau_{t_m} = Y^\tau_{t_m} + \mathcal{O}_{t_m}, \quad \text{with} \quad Y^\tau_{t_m} := E(t_m)X^\tau_0 + \tau\sum_{k=0}^{m-1} E(t_m - t_k)\epsilon^{-1}F_\tau\big(X^\tau_{t_k}\big), \tag{4.1}$$

for $m \in \mathbb{N}_0$ 且 $X^\tau_0 = X_0$。显然，由 $Y^\tau_0 = X_0$ 可得，对于 $m \in \mathbb{N}$ $_0$,

$$Y^\tau_{t_{m+1}} = E(\tau)Y^\tau_{t_m} + \tau E(\tau)\epsilon^{-1}F_\tau(Y^\tau_{t_m} + \mathcal{O}_{t_m}). \tag{4.2}$$

在继续之前，我们先引入 [22, 引理 4.3], 的一个修订版本，以适用于我们的分析，从而改进其中的估计式 (4.9)。

引理 4.1。 设 $\rho \geq 1$ 为任意整数。那么，对于任意 $\mathbb{A}$、 $\mathbb{B} \geq 0$ 以及 r、 $\upsilon > 0$，有

$$(\mathbb{A} + r\mathbb{B})^\rho \leq e^{(\rho-1)\upsilon r}\mathbb{A}^\rho + r\left(r^{\rho-1} + (1 + (\tfrac{2}{\upsilon})^{\rho-1})(1 + r^{\rho-1})e^{\rho-1}\right)\mathbb{B}^\rho. \tag{4.3}$$

证明。 与 [22,引理 4.3], 中 (4.6)–(4.8) 的推导类似，有

$$(\mathbb{A} + r\mathbb{B})^\rho \leq \mathbb{A}^\rho + r^\rho\mathbb{B}^\rho + \tfrac{(\rho-1)\upsilon r}{2}e^{\frac{(\rho-1)\upsilon r}{2}}\mathbb{A}^\rho + \Big(\sum_{j=1}^{\rho-1}\tfrac{(\rho-1)!}{(j-1)!(\rho-j)!}r^j(\tfrac{2}{\upsilon})^{\rho-j}\Big)\mathbb{B}^\rho, \tag{4.4}$$

其中，对于项 $\sum_{j=1}^{\rho-1}\frac{(\rho-1)!}{\cancel{(j-1)!(\rho-j)!}}r^j(\frac{2}{\upsilon})^{\rho-j}$，我们对 [22, (4.9)] 稍作修正，使得

$$\sum_{j=1}^{\rho-1}\tfrac{(\rho-1)!}{(j-1)!(\rho-j)!}r^j(\tfrac{2}{\upsilon})^{\rho-j} \leq \sum_{j=1}^{\rho-1}\tfrac{(\rho-1)^{j-1}}{(j-1)!}r^j(\tfrac{2}{\upsilon})^{\rho-j} \leq r(1 + (\tfrac{2}{\upsilon})^{\rho-1})(1 + r^{\rho-1})e^{\rho-1}. \tag{4.5}$$

进一步利用.....即可立即得到所需结果。

$$\Big(1 + \tfrac{(\rho-1)\upsilon r}{2}e^{\frac{(\rho-1)\upsilon r}{2}}\Big)\mathbb{A}^\rho \leq \big(1 + \tfrac{(\rho-1)\upsilon r}{2}\big)e^{\frac{(\rho-1)\upsilon r}{2}}\mathbb{A}^\rho \leq e^{(\rho-1)\upsilon r}\mathbb{A}^\rho. \tag{4.6}$$

□

下面的定理说明了数值近似 X^τ 关于时间和 ϵ 的一致矩估计。

定理 4.2 (X^τ的一致矩界)。 设假设 *2.1–2.4* 和条件 (3.3)成立。对于任意 $p \geq 1$ 和任意整数 $\rho \geq 1$，存在常数 $C(p, \rho, q, \alpha) > 0$，使得由 (3.1) 生成的数值近似 $X^\tau_{t_m}, m \in \mathbb{N}_0$ 满足

$$\sup_{m\in\mathbb{N}_0}\big\|X^\tau_{t_m}\big\|_{L^p(\Omega;L^{2\rho}(\mathcal{D}))} \leq \big\|X_0\big\|_{L^p(\Omega;L^{2\rho}(\mathcal{D}))} + C(p, \rho, q, \alpha)\cdot\big(1 + (\beta\tau^\theta)^{\alpha(2-\frac{1}{2\rho})}\big). \tag{4.7}$$

证明。 由 (4.1) 和引理 2.5，只需为 $Y^\tau_{t_m}, m\in\mathbb{N}_0$ 推导$L^{2\rho}$-范数下的先验估计。回顾一下，对于任意 $t\geq 0$ 和整数 $\rho\geq 1$，半群算子 $E(t):=e^{-At}, t\geq 0$满足压缩性： $\|E(t)u\|_{L^{2\rho}}\leq\|u\|_{L^{2\rho}}$, $u\in L^{2\rho}(\mathcal{D})$（例如，参见 [22, 命题 4.2]）。因此，由 (4.2) 可得

$$\big\|Y^\tau_{t_{m+1}}\big\|_{L^{2\rho}}=\big\|E(\tau)\big(Y^\tau_{t_m}+\tau\epsilon^{-1}F_\tau(Y^\tau_{t_m}+\mathcal{O}_{t_m})\big)\big\|_{L^{2\rho}}\ \leq\big\|Y^\tau_{t_m}+\tau\epsilon^{-1}F_\tau(Y^\tau_{t_m}+\mathcal{O}_{t_m})\big\|_{L^{2\rho}}. \tag{4.8}$$

牢记 (3.4)，并简记 $\widetilde{c}_0:=\frac{c_0}{4(1+\beta\tau^\theta)^{2\alpha}}$，可得

$$\begin{aligned}
&\big|Y^\tau_{t_m}(\cdot)+\tau\epsilon^{-1}f_\tau(Y^\tau_{t_m}+\mathcal{O}_{t_m})(\cdot)\big|^2\\
&=\big|Y^\tau_{t_m}(\cdot)\big|^2+2\tau\epsilon^{-1}Y^\tau_{t_m}(\cdot)f_\tau(Y^\tau_{t_m}(\cdot)+\mathcal{O}_{t_m}(\cdot))+\tau^2\epsilon^{-2}\big|f_\tau\big(Y^\tau_{t_m}(\cdot)+\mathcal{O}_{t_m}(\cdot)\big)\big|^2\\
&\leq\big|Y^\tau_{t_m}(\cdot)\big|^2+\tau\epsilon^{-1}\Big(-2\widetilde{c}_0\big|Y^\tau_{t_m}(\cdot)+\mathcal{O}_{t_m}(\cdot)\big|^2+\widetilde{c}_1\big(1+\big|\mathcal{O}_{t_m}(\cdot)\big|^{2q}\big)+\widetilde{c}_2\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}\Big)\\
&\leq\big(1-\widetilde{c}_0\tau\epsilon^{-1}\big)\big|Y^\tau_{t_m}(\cdot)\big|^2+2\widetilde{c}_0\tau\epsilon^{-1}\big|\mathcal{O}_{t_m}(\cdot)\big|^2+\tau\epsilon^{-1}\Big(\widetilde{c}_1\big(1+\big|\mathcal{O}_{t_m}(\cdot)\big|^{2q}\big)+\widetilde{c}_2\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}\Big)\\
&\leq e^{-\widetilde{c}_0\tau\epsilon^{-1}}\big|Y^\tau_{t_m}(\cdot)\big|^2+\tau\epsilon^{-1}\Big((2\widetilde{c}_0+\widetilde{c}_1)\big(1+\big|\mathcal{O}_{t_m}(\cdot)\big|^{2q}\big)+\widetilde{c}_2\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}\Big),
\end{aligned}\tag{4.9}$$

这里还用到了杨氏不等式

$$-4\widetilde{c}_0Y^\tau_{t_m}(\cdot)\mathcal{O}_{t_m}(\cdot)\leq\widetilde{c}_0|Y^\tau_{t_m}(\cdot)|^2+4\widetilde{c}_0|\mathcal{O}_{t_m}(\cdot)|^2, \tag{4.10}$$

以及不等式 $1-y\leq e^{-y}$（当 $y>0$ 时），还有以下事实： $|\mathcal{O}_{t_m}(\cdot)|^2\leq 1+|\mathcal{O}_{t_m}(\cdot)|^{2q}$（当 $q>1$ 时）。因此，将 (4.9) 两边取 ρ 次幂，并在 $r=\tau\epsilon^{-1}$、$\upsilon=\widetilde{c}_0$ 以及

$$\mathbb{A}=e^{-\widetilde{c}_0\tau\epsilon^{-1}}|Y^\tau_{t_m}(\cdot)|^2,\quad \mathbb{B}=(2\widetilde{c}_0+\widetilde{c}_1)(1+|\mathcal{O}_{t_m}(\cdot)|^{2q})+\widetilde{c}_2\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}, \tag{4.11}$$

进一步可得

$$\begin{aligned}
&\big|Y^\tau_{t_m}(\cdot)+\tau\epsilon^{-1}F_\tau(Y^\tau_{t_m}+\mathcal{O}_{t_m})(\cdot)\big|^{2\rho}\\
&\leq e^{(\rho-1)\widetilde{c}_0\tau\epsilon^{-1}}\Big(e^{-\widetilde{c}_0\tau\epsilon^{-1}}\big|Y^\tau_{t_m}(\cdot)\big|^2\Big)^\rho\\
&\quad+\tfrac{\tau}{\epsilon}\Big((\tfrac{\tau}{\epsilon})^{\rho-1}+(1+(\tfrac{2}{\widetilde{c}_0})^{\rho-1})(1+(\tfrac{\tau}{\epsilon})^{\rho-1})e^{\rho-1}\Big)\Big((2\widetilde{c}_0+\widetilde{c}_1)\big(1+\big|\mathcal{O}_{t_m}(\cdot)\big|^{2q}\big)+\widetilde{c}_2\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}\Big)^\rho\\
&\leq e^{-\widetilde{c}_0\tau\epsilon^{-1}}\big|Y^\tau_{t_m}(\cdot)\big|^{2\rho}+C\tau\epsilon^{-1}\big(1+(\beta\tau^\theta)^{\alpha(4\rho-3)}\big)\big(1+\big|\mathcal{O}_{t_m}(\cdot)\big|^{2q\rho}\big),
\end{aligned}\tag{4.12}$$

这里用到了条件 (3.3)，即 $\tau\epsilon^{-1}\leq\frac{c_0}{2c_3^2}\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}$，并回顾$\widetilde{c}_0=\frac{c_0}{4(1+\beta\tau^\theta)^{2\alpha}}$。对上述不等式在 $\mathcal{D}$ 上积分，并回顾 (4.8)，由此得到

$$\begin{aligned}
\big\|Y^\tau_{t_{m+1}}\big\|^{2\rho}_{L^{2\rho}}&\leq e^{-\widetilde{c}_0\tau\epsilon^{-1}}\big\|Y^\tau_{t_m}\big\|^{2\rho}_{L^{2\rho}}+C\tau\epsilon^{-1}\big(1+(\beta\tau^\theta)^{\alpha(4\rho-3)}\big)\Big(1+\big\|\mathcal{O}_{t_m}\big\|^{2q\rho}_V\Big)\\
&\leq e^{-(m+1)\widetilde{c}_0\tau\epsilon^{-1}}\big\|Y^\tau_0\big\|^{2\rho}_{L^{2\rho}}+C\tau\epsilon^{-1}\big(1+(\beta\tau^\theta)^{\alpha(4\rho-3)}\big)\sum_{k=0}^m e^{-(m-k)\widetilde{c}_0\tau\epsilon^{-1}}\Big(1+\big\|\mathcal{O}_{t_k}\big\|^{2q\rho}_V\Big).
\end{aligned}\tag{4.13}$$

此外，注意到

$$\tau\epsilon^{-1}\sum_{k=0}^m e^{-(m-k)\widetilde{c}_0\tau\epsilon^{-1}}=\frac{\tau\epsilon^{-1}(1-e^{-\widetilde{c}_0\tau\epsilon^{-1}(m+1)})}{1-e^{-\widetilde{c}_0\tau\epsilon^{-1}}}\leq\frac{\tau\epsilon^{-1}}{1-e^{-\widetilde{c}_0\tau\epsilon^{-1}}}\leq\tfrac{1}{\widetilde{c}_0}+\tau\epsilon^{-1}\leq C\big(1+(\beta\tau^\theta)^{2\alpha}\big), \tag{4.14}$$

其中我们用到了不等式：对所有 $y > 0$，$\frac{y}{1-e^{-y}} \le 1+y$，并再次结合条件 (3.3) 以及 $\widetilde{c}_0 = \frac{c_0}{4(1+\beta\tau^\theta)^{2\alpha}}$。利用事实 $Y_0^\tau = X_0$ 和引理 2.5，可得对任意 $p \ge 1$ 和 $m \in \mathbb{N}$，

$$\big\|Y_{t_m}^\tau\big\|_{L^p(\Omega;L^{2\rho}(\mathcal{D}))} \le \big\|X_0\big\|_{L^p(\Omega;L^{2\rho}(\mathcal{D}))} + C(p,\rho,q,\alpha)\cdot\big(1+(\beta\tau^\theta)^{\alpha(2-\frac{1}{2\rho})}\big). \tag{4.15}$$

结合引理 2.5 可得

$$\sup_{m\in\mathbb{N}_0}\big\|X_{t_m}^\tau\big\|_{L^p(\Omega;L^{2\rho}(\mathcal{D}))} \le \big\|X_0\big\|_{L^p(\Omega;L^{2\rho}(\mathcal{D}))} + C(p,\rho,q,\alpha)\cdot\big(1+(\beta\tau^\theta)^{\alpha(2-\frac{1}{2\rho})}\big), \tag{4.16}$$

如所需。 □

5 柯尔莫哥洛夫方程的正则性估计

后续的弱收敛分析依赖于与随机动力学相关的柯尔莫哥洛夫方程。对于所考虑的随机偏微分方程 (2.4)，漂移项呈超线性增长，因此不满足利普希茨连续性，这使得无法直接使用柯尔莫哥洛夫方程。为解决这一问题，我们构造一个辅助过程，并对其漂移项进行修正，使其全局 Lipschitz 连续，从而使相应的柯尔莫哥洛夫方程适定。这使我们能够建立后续弱收敛分析所必需的正则性估计。

5.1 辅助过程及其一致矩界

受 (3.2) 中所述对 F 的修正方案启发，我们引入以下辅助过程：

$$\mathbb{X}^\delta(t) = E(t)\mathbb{X}_0^\delta + \int_0^t E(t-s)\epsilon^{-1}F_\delta(\mathbb{X}^\delta(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t E(t-s)\,\mathrm{d}W(s), \quad X_0^\delta \in H,\ t \ge 0, \tag{5.1}$$

其中，$F_\delta\colon L^{4q-2}(\mathcal{D}) \to H$ 是一个非线性涅米茨基算子，使得 $F_\delta(u)(x) := f_\delta(u(x))$，其中 $f_\delta\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f_\delta(u) := \frac{f(u)}{1+\sqrt{\delta}|u|^{2q-2}}, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

其中，我们令 $\delta \in (0,1]$ 足够小。此外，对于任意 $\upsilon,\ \psi \in L^{4q-2}(\mathcal{D})$，定义

$$\big(F_\delta'(\upsilon)(\psi)\big)(x) := f_\delta'(\upsilon(x))\psi(x), \quad x \in \mathcal{D}. \tag{5.3}$$

注意，修正 (5.2) 是 (3.3) 在 $\alpha = \beta = 1$ 和 $\theta = \frac{1}{2}$ 下的一个特例。在这一特定情形下，条件 (3.3) 的对应条件简化为 $2c_3^2\sqrt{\delta} \le c_0\epsilon$；由于 $\delta \to 0$，该条件最终总是可以满足。因此，这样的正则化非线性项 f_δ (5.2) 具有与命题 3.2 中所建立的类似性质，其中固定的 $\alpha = \beta = 1$，$\theta = \frac{1}{2}$ 和 τ 被 δ 所替代。

下面的引理给出了导数 f_δ' 的其他性质。

引理 5.1. 设假设 *2.3* 成立，且满足 $q>1$，并令 f_δ 由(5.2)定义。那么存在~ ~常数 L_f 和 l_f，它们与 δ 无关，使得

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} f'_\delta(u) \le \widetilde{L}_f, \tag{5.4}$$

$$|f'_\delta(u)| \le \widetilde{l}_f\big(1+(|u|^{2q-2}\wedge\delta^{-\frac{1}{2}})\big). \tag{5.5}$$

证明。 记号函数 $\mathrm{sgn}(u):=\mathbb{1}_{\{u\ge0\}}-\mathbb{1}_{\{u<0\}}$ 对 $u\in\mathbb{R}$。不难推得

$$f'_\delta(u)=\frac{f'(u)\big(1+\sqrt{\delta}|u|^{2q-2}\big)-f(u)(2q-2)\sqrt{\delta}|u|^{2q-3}\mathrm{sgn}(u)}{(1+\sqrt{\delta}|u|^{2q-2})^2}. \tag{5.6}$$

由假设 2.3，我们有

$$f'(u)\le -c_f(2q-1)u^{2q-2}+c_{f,1}(1+|u|^{2q-3}),\quad |f(u)|\le c_f|u|^{2q-1}+c_{f,0}(1+|u|^{2q-2}), \tag{5.7}$$

从而得到

$$\begin{aligned} f'_\delta(u) &\le \frac{\big(-c_f(2q-1)|u|^{2q-2}+c_{f,1}(1+|u|^{2q-3})\big)(1+\sqrt{\delta}|u|^{2q-2})}{(1+\sqrt{\delta}|u|^{2q-2})^2}\\ &\quad+\frac{\big(c_f|u|^{2q-1}+c_{f,0}(1+|u|^{2q-2})\big)(2q-2)\sqrt{\delta}|u|^{2q-3}}{(1+\sqrt{\delta}|u|^{2q-2})^2}\\ &=\frac{-c_f(2q-1)|u|^{2q-2}+c_{f,1}(1+|u|^{2q-3})}{(1+\sqrt{\delta}|u|^{2q-2})^2}\\ &\quad+\frac{-c_f\sqrt{\delta}|u|^{4q-4}+c_{f,1}\sqrt{\delta}(1+|u|^{2q-3})|u|^{2q-2}+c_{f,0}\sqrt{\delta}(1+|u|^{2q-2})(2q-2)|u|^{2q-3}}{(1+\sqrt{\delta}|u|^{2q-2})^2}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

在继续之前，我们知道，对于所有 $u\in\mathbb{R}$，存在常数 $C_1,C_2>0$，其与 δ 无关，但依赖于 $c_{f,1}$,$c_{f,0}$, q，使得

$$\begin{aligned} -c_f(2q-1)|u|^{2q-2}+c_{f,1}(1+|u|^{2q-3})&\le C_1,\\ -c_f|u|^{4q-4}+c_{f,1}(1+|u|^{2q-3})|u|^{2q-2}+c_{f,0}(1+|u|^{2q-2})(2q-2)|u|^{2q-3}&\le C_2. \end{aligned} \tag{5.9}$$

因此，对于任意 $u\in\mathbb{R}$ 和 $\delta>0$,

$$f'_\delta(u)\le \tfrac{C_1}{(1+\sqrt{\delta}|u|^{2q-2})^2}+\tfrac{C_2\sqrt{\delta}}{(1+\sqrt{\delta}|u|^{2q-2})^2}\le C_1+C_2, \tag{5.10}$$

如所断言。此外，假设 2.3 保证

$$|f'(u)|\le c_f(2q-1)|u|^{2q-2}+c_{f,1}(1+|u|^{2q-3}), \tag{5.11}$$

结合 (5.6)-(5.7)，可得对任意 $u\in\mathbb{R}$,

$$|f'_\delta(u)|\le \tfrac{C(1+|u|^{2q-2}+\sqrt{\delta}|u|^{4q-4})}{(1+\sqrt{\delta}|u|^{2q-2})^2}. \tag{5.12}$$

因此，对任意 $u \in \mathbb{R}$，有

$$|f'_\delta(u)| \le C(1+|u|^{2q-2}) + \tfrac{C\sqrt{\delta}|u|^{4q-4}}{1+\sqrt{\delta}|u|^{2q-2}} \le C(1+|u|^{2q-2}), \tag{5.13}$$

and

$$|f'_\delta(u)| \le C\Big(1+\delta^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{|u|^{2q-2}}{1+\sqrt{\delta}|u|^{2q-2}}\Big) \le C(1+\delta^{-\frac{1}{2}}). \tag{5.14}$$

Th所需结果 (5.5) 随即得证。证明至此完成 . □

由于 (5.2) 中的 f_δ 是在 $\alpha=\beta=1$ 和 $\theta=\frac{1}{2}$ 条件下对 (3.2) 中修正 f_τ 的一个特例，因此在条件 $2c_3^2\sqrt{\delta} \le c_0\epsilon$ 下， f_δ 仍满足强制性性质 (3.4)。因此，$\mathbb{X}^\delta$ 满足以下一致矩界。

引理 5.2. 设假设 *2.1–2.4* 成立，且 $\mathbb{X}^\delta(t)$ $t \ge 0$ 由 (5.1) 定义。对于任意 $p \ge 1$ 和任意整数 $\rho \ge 1$，存在常数 $C(p,q,\rho)$ 和 $C(p,q)$，它们与 δ 无关，使得

$$\sup_{t\ge 0} \big\|\mathbb{X}^\delta(t)\big\|_{L^p(\Omega;L^{2\rho})} \le \|\mathbb{X}_0^\delta\|_{L^p(\Omega;L^{2\rho})} + C(p,q,\rho), \tag{5.15}$$

$$\sup_{t\ge 0} \big\|\mathbb{X}^\delta(t)\big\|_{L^p(\Omega;V)} \le \|\mathbb{X}_0^\delta\|_{L^p(\Omega;V)} + C(p,q)\epsilon^{-1}\Big(1+\|\mathbb{X}_0^\delta\|^{2q-1}_{L^{(2q-1)p}(\Omega;L^{4q-2})}\Big). \tag{5.16}$$

证明. 令 $\mathbb{Y}^\delta(t) := \mathbb{X}^\delta(t) - \mathcal{O}_t, t \ge 0$，可得

$$\frac{\partial \mathbb{Y}^\delta(t)}{\partial t} = -A\mathbb{Y}^\delta(t) + \epsilon^{-1}F_\delta\big(\mathbb{Y}^\delta(t)+\mathcal{O}_t\big),\ t>0, \quad \mathbb{Y}^\delta(0) = \mathbb{X}_0^\delta. \tag{5.17}$$

Applying 通过分部积分和假设 2.1，我们推得，对所有 $t>0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\|\mathbb{Y}^\delta(t)\|^{2\rho}_{L^{2\rho}}}{\mathrm{d}t} &= 2\rho\int_{\mathcal{D}} \big(\mathbb{Y}^\delta(t)(x)\big)^{2\rho-1}\frac{\partial \mathbb{Y}^\delta(t)(x)}{\partial t}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\rho\int_{\mathcal{D}} (\mathbb{Y}^\delta(t)(x))^{2\rho-1}\cdot\big(-A\mathbb{Y}^\delta(t)(x) + \epsilon^{-1}f_\delta(\mathbb{Y}^\delta(t)(x)+\mathcal{O}_t(x))\big)\,\mathrm{d}x \\
&= -2\rho\langle(\mathbb{Y}^\delta(t))^{2\rho-1}, A\mathbb{Y}^\delta(t)\rangle \\
&\quad + 2\rho\int_{\mathcal{D}} (\mathbb{Y}^\delta(t)(x))^{2\rho-2}\cdot\epsilon^{-1}(\mathbb{Y}^\delta(t)(x))f_\delta(\mathbb{Y}^\delta(t)(x)+\mathcal{O}_t(x))\,\mathrm{d}x \\
&\le -2\rho(2\rho-1)\langle(\mathbb{Y}^\delta(t))^{2\rho-2}\nabla(\mathbb{Y}^\delta(t)), \nabla(\mathbb{Y}^\delta(t))\rangle \\
&\quad + \rho\epsilon^{-1}\int_{\mathcal{D}} (\mathbb{Y}^\delta(t)(x))^{2\rho-2}\big(-2\widetilde{c}_{0,\delta}|\mathbb{Y}^\delta(t)(x)+\mathcal{O}_t(x)|^2 + \widetilde{c}_1(1+|\mathcal{O}_t(x)|^{2q}) + \widetilde{c}_2\sqrt{\delta}\big)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{5.18}$$

其中，最后一个不等式由条件 $2c_3^2\sqrt{\delta} \le c_0\epsilon$ 下 f_δ 的强制性估计得出：

$$2(u+v)f_\delta(u) \le -2\widetilde{c}_{0,\delta}|u|^2 + \widetilde{c}_1(1+|v|^{2q}) + \widetilde{c}_2\sqrt{\delta}, \quad \text{for all } u,v\in\mathbb{R}, \tag{5.19}$$

其中 $\widetilde{c}_{0,\ \delta} := \frac{c_0}{4(1+\sqrt{\delta})^2}$。由于 $\langle(\mathbb{Y}^\delta(t))^{2\rho-2}\nabla(\mathbb{Y}^\delta(t))\ \nabla(\mathbb{Y}^\delta(t))\rangle \ge 0$，进一步利用杨氏不等式

$$-4\widetilde{c}_{0,\delta}\mathbb{Y}^\delta(t)(x)\mathcal{O}_t(x) \le \widetilde{c}_{0,\delta}|\mathbb{Y}^\delta(t)(x)|^2 + 4\widetilde{c}_{0,\delta}|\mathcal{O}_t(x)|^2 \tag{5.20}$$

可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\|\mathbb{Y}^\delta(t)\|_{L^{2\rho}}^{2\rho}}{\mathrm{d}t} &\le \rho\epsilon^{-1}\int_{\mathcal{D}}(\mathbb{Y}^\delta(t)(x))^{2\rho-2}\big(-\widetilde{c}_{0,\delta}|\mathbb{Y}^\delta(t)(x)|^2+2\widetilde{c}_{0,\delta}|\mathcal{O}_t(x)|^2+\widetilde{c}_1(1+|\mathcal{O}_t(x)|^{2q})+\widetilde{c}_2\sqrt{\delta}\big)\,\mathrm{d}x\\ &\le \int_{\mathcal{D}}-\tfrac{\rho\widetilde{c}_{0,\delta}\epsilon^{-1}}{2}(\mathbb{Y}^\delta(t)(x))^{2\rho}+C\epsilon^{-1}\big(1+|\mathcal{O}_t(x)|^{2q\rho}+\delta^{\frac{\rho}{2}}\big)\,\mathrm{d}x\\ &= -\tfrac{\rho\widetilde{c}_{0,\delta}\epsilon^{-1}}{2}\|\mathbb{Y}^\delta(t)\|_{L^{2\rho}}^{2\rho}+C\epsilon^{-1}\Big(1+\|\mathcal{O}_t\|_V^{2q\rho}+\delta^{\frac{\rho}{2}}\Big),\end{aligned}\tag{5.21}$$

其中，第二个不等式的推导也用到了杨氏不等式。将上述不等式两边乘以 $e^{\frac{\rho\widetilde{c}_{0,\delta}\epsilon^{-1}t}{2}}$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}\big(e^{\frac{\rho\widetilde{c}_{0,\delta}\epsilon^{-1}t}{2}}\|\mathbb{Y}^\delta(t)\|_{L^{2\rho}}^{2\rho}\big)}{\mathrm{d}t}\le Ce^{\frac{\rho\widetilde{c}_{0,\delta}\epsilon^{-1}t}{2}}\epsilon^{-1}\Big(1+\|\mathcal{O}_t\|_V^{2q\rho}+\delta^{\frac{\rho}{2}}\Big).\tag{5.22}$$

由 Gronwall不等式可得

$$\begin{aligned}e^{\frac{\rho\widetilde{c}_{0,\delta}\epsilon^{-1}t}{2}}\|\mathbb{Y}^\delta(t)\|_{L^{2\rho}}^{2\rho} &\le \|\mathbb{Y}^\delta(0)\|_{L^{2\rho}}^{2\rho}+C\epsilon^{-1}\int_0^t e^{\frac{\rho\widetilde{c}_{0,\delta}\epsilon^{-1}s}{2}}\Big(1+\sup_{s\ge0}\|\mathcal{O}_s\|_V^{2q\rho}+\delta^{\frac{\rho}{2}}\Big)\,\mathrm{d}s\\ &= \|\mathbb{X}_0^\delta\|_{L^{2\rho}}^{2\rho}+\tfrac{2C}{\rho\widetilde{c}_{0,\delta}}\Big(e^{\frac{\rho\widetilde{c}_{0,\delta}\epsilon^{-1}t}{2}}-1\Big)\Big(1+\sup_{s\ge0}\|\mathcal{O}_s\|_V^{2q\rho}+\delta^{\frac{\rho}{2}}\Big).\end{aligned}\tag{5.23}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\|\mathbb{Y}^\delta(t)\|_{L^p(\Omega;L^{2\rho})} &\le e^{\frac{-\widetilde{c}_{0,\delta}\epsilon^{-1}t}{4}}\|\mathbb{X}_0^\delta\|_{L^p(\Omega;L^{2\rho})}+C(1+\sqrt{\delta})^{\frac{1}{\rho}}\Big(1+\sup_{s\ge0}\|\mathcal{O}_s\|_{L^p(\Omega;V)}^q+\delta^{\frac14}\Big)\\ &\le e^{\frac{-\widetilde{c}_{0,\delta}\epsilon^{-1}t}{4}}\|\mathbb{X}_0^\delta\|_{L^p(\Omega;L^{2\rho})}+C(p,q,\rho),\end{aligned}\tag{5.24}$$

其中我们回忆起 $\widetilde{c}_{0,\delta}:=\frac{c_0}{4\,1+\sqrt{\delta}\sigma}$ 结合引理 2.5，立即可得 (5.15)。此外，利用 (2.7) 可得

$$\begin{aligned}&\sup_{t\ge0}\|\mathbb{X}^\delta(t)\|_{L^p(\Omega;V)}\le\sup_{t\ge0}\left[\|E(t)\mathbb{X}_0^\delta\|_{L^p(\Omega;V)}+\left\|\int_0^t E(t-s)\epsilon^{-1}F_\delta(\mathbb{X}^\delta(s))\,\mathrm{d}s\right\|_{L^p(\Omega;V)}+\|\mathcal{O}_t\|_{L^p(\Omega;V)}\right]\\ &\le\|\mathbb{X}_0^\delta\|_{L^p(\Omega;V)}+C\epsilon^{-1}\sup_{t\ge0}\int_0^t e^{-\frac12\lambda_1(t-s)}(t-s)^{-\frac14}\Big(1+\|\mathbb{X}^\delta(s)\|_{L^{(2q-1)p}(\Omega;L^{4q-2})}^{2q-1}\Big)\,\mathrm{d}s+C(p)\\ &\le\|\mathbb{X}_0^\delta\|_{L^p(\Omega;V)}+C(p,q)\epsilon^{-1}\Big(1+\|\mathbb{X}_0^\delta\|_{L^{(2q-1)p}(\Omega;L^{4q-2})}^{2q-1}\Big),\end{aligned}\tag{5.25}$$

其中，我们用到了 $\int_0^t e^{-\frac12\lambda_1(t-s)}(t-s)^{-\frac14}\mathrm{d}s$ 关于时间一致有界这一事实。证明至此完成。

□

5.2 柯尔莫哥洛夫方程与正则性估计

为进行弱误差分析，对于所有 $\varphi\in\mathcal{C}_b^0(H)$，引入函数 $\nu^\delta(t,\ x)$，其中 $t\ge0,\ x\in H$ 定义为

$$\nu^\delta(t,x):=\mathbb{E}[\varphi(\mathbb{X}^\delta(t,x))],\tag{5.26}$$

其中， $\mathbb{X}^\delta(t,\ x)$ 以 x 为初值求解 (5.1)。由于 $F_\delta\colon\ H\to H$ 是全局 Lipschitz 连续的，其 Lipschitz常数取决于 δ，如 (5.5) 所示，因此由 [6, 第 2] 节可知， ν^δ 是满足以下条件的柯尔莫哥洛夫方程的唯一经典解

$$\begin{cases} \partial_t\nu^\delta(t,x) = D\nu^\delta(t,x).(-Ax+\epsilon^{-1}F_\delta(x)) + \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{N}} D^2\nu^\delta(t,x).(e_j,e_j), \\ \nu^\delta(0,\cdot) = \varphi(\cdot), \end{cases} \tag{5.27}$$

其中 $t\geq 0,\ x\in H$。下文首先对 ν^δ 的导数给出一个较为粗略的估计，随后再将其改进为所需的估计，从而将其对 ϵ^{-1} 的依赖由指数级降低为多项式级（如命题 5.5 所示）。

引理 5.3。 在假设 *2.1–2.4* 下，设 $\varphi\in\mathcal{C}_b^0(H)$ 和 $\nu^\delta(t,x)$ 由 (5.26) 给出。那么，对所有 $t>0$ 以及 $x,y\in H$，

$$|D\nu^\delta(t,x).y| \leq e^{\epsilon^{-1}\widetilde{L}_f t}t^{-\frac{1}{2}}\|\varphi\|_0\|y\|. \tag{5.28}$$

证明。 回忆一下， $\nu^\delta(0,\cdot)=\varphi(\cdot)$，其中 $\varphi\in\mathcal{C}_b^0(H)$。于是，由 Bismut-Elworthy-Li公式（例如参见 [10]）可得

$$D\nu^\delta(t,x).y = t^{-1}\mathbb{E}\left[\varphi(\mathbb{X}^\delta(t,x))\int_0^t\langle\xi_y^\delta(s,x),\mathrm{d}W(s)\rangle\right], \tag{5.29}$$

其中 $\xi_y^\delta(t,\ x)\ t\geq 0$ 由下式给出:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\xi_y^\delta(t,x) = -A\xi_y^\delta(t,x)\,\mathrm{d}t + \epsilon^{-1}F_\delta'(\mathbb{X}^\delta(t,x))\xi_y^\delta(t,x)\,\mathrm{d}t, \quad t>0, \\ \xi_y^\delta(0,x) = y. \end{cases} \tag{5.30}$$

由 (5.3) 和 (5.4) 可得

$$\langle F_\delta'(x)y,y\rangle \leq \widetilde{L}_f\|y\|^2, \quad \forall x,y\in H. \tag{5.31}$$

于是，由假设 2.1 可知

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\|\xi_y^\delta(t,x)\|^2}{\mathrm{d}t} &= 2\Big\langle\frac{\mathrm{d}\xi_y^\delta(t,x)}{\mathrm{d}t},\xi_y^\delta(t,x)\Big\rangle \\ &= 2\langle -A\xi_y^\delta(t,x),\xi_y^\delta(t,x)\rangle + 2\epsilon^{-1}\langle F_\delta'(\mathbb{X}^\delta(t,x))\xi_y^\delta(t,x),\xi_y^\delta(t,x)\rangle \\ &\leq 2\epsilon^{-1}\widetilde{L}_f\|\xi_y^\delta(t,x)\|^2. \end{aligned} \tag{5.32}$$

由此进一步得到Gronwall不等式

$$\|\xi_y^\delta(t,x)\| \leq e^{\epsilon^{-1}\widetilde{L}_f t}\|y\|. \tag{5.33}$$

利用 H¨older 不等式、Itˆo 等距性以及（5.33），可得

$$\begin{aligned} |D\nu^\delta(t,x).y| &\leq t^{-1}\|\varphi\|_0\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\langle\xi_y^\delta(s,x),\mathrm{d}W(s)\rangle\right|\right] \\ &\leq t^{-1}\|\varphi\|_0\left(\int_0^t\mathbb{E}[\|\xi_y^\delta(s,x)\|^2]\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq e^{\epsilon^{-1}\widetilde{L}_f t}t^{-\frac{1}{2}}\|\varphi\|_0\|y\|, \end{aligned} \tag{5.34}$$

对所有 $t>0$ 以及所有 $x,y\in H$。证明至此完成。 □

根据上述引理，可得到以下结果，该结果展示了原问题 X 与辅助过程 $\mathbb{X}^\delta$ 之间的误差。

命题 5.4。 在假设 *2.1–2.4* 下，设 $X(t,X_0)\ t\geq 0$ 为模型 (2.18) 的温和解， $\mathbb{X}^\delta(t,X_0)\ t\geq 0$ 为由 (5.1) 定义且初值为$\mathbb{X}_0^\delta = X_0$的辅助过程。那么对所有 $\varphi\in\mathcal{B}_b(H)$，

$$\Big|\mathbb{E}\big[\varphi\big(X(t,X_0)\big)\big]-\mathbb{E}\big[\varphi(\mathbb{X}^\delta(t,X_0))\big]\Big|\leq C\epsilon^{-1}e^{\epsilon^{-1}\widetilde{L}_f t}t^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_0\Big(1+\|X_0\|_V^{4q-3}\Big)\sqrt{\delta}. \tag{5.35}$$

证明。 为简洁起见，我们记 $X(s):=X(s,X_0),\ s\in[0,t]$。回顾 $\nu^\delta(t,x)=\mathbb{E}[\varphi(\mathbb{X}^\delta(t,x))]$，并利用伊藤公式以及相应的柯尔莫哥洛夫方程 (5.27)，可得

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbb{E}\big[\varphi\big(X(t,X_0)\big)\big]-\mathbb{E}\big[\varphi(\mathbb{X}^\delta(t,X_0))\big]\Big|\\
&=\big|\mathbb{E}\big[\nu^\delta\big(0,X(t)\big)\big]-\mathbb{E}\big[\nu^\delta\big(t,X_0\big)\big]\big|\\
&=\mathbb{E}\bigg[\int_0^t-\Big(D\nu^\delta\big(t-s,X(s)\big).\big(-AX(s)+\epsilon^{-1}F_\delta\big(X(s)\big)\big)+\frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{N}}D^2\nu^\delta\big(t-s,X(s)\big).(e_j,e_j)\Big)\,\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_0^t\bigg(D\nu^\delta\big(t-s,X(s)\big).\big(-AX(s)+\epsilon^{-1}F(X(s))\big)+\frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{N}}D^2\nu^\delta\big(t-s,X(s)\big).(e_j,e_j)\bigg)\,\mathrm{d}s\bigg]\\
&=\mathbb{E}\bigg[\int_0^t D\nu^\delta\big(t-s,X(s)\big).\big(\epsilon^{-1}F(X(s))-\epsilon^{-1}F_\delta\big(X(s)\big)\big)\,\mathrm{d}s\bigg].
\end{aligned}\tag{5.36}$$

利用引理 5.3 以及与命题 3.2 中类似地得到的性质 $|f_\delta(u)-\bar{f}(u)|\leq\sqrt{\delta}|u|^{2q-2}|f(u)|$，可进一步推出

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbb{E}\big[\varphi\big(X(t,X_0)\big)\big]-\mathbb{E}\big[\varphi(\mathbb{X}^\delta(t,X_0))\big]\Big|\\
&\leq\epsilon^{-1}\|\varphi\|_0\mathbb{E}\bigg[\int_0^t e^{\epsilon^{-1}\widetilde{L}_f(t-s)}(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|F(X(s))-F_\delta(X(s))\|\,\mathrm{d}s\bigg]\\
&\leq\sqrt{\delta}\epsilon^{-1}\|\varphi\|_0\mathbb{E}\bigg[\int_0^t e^{\epsilon^{-1}\widetilde{L}_f(t-s)}(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|X(s)\|_V^{2q-2}\|F(X(s))\|\,\mathrm{d}s\bigg]\\
&\leq C\epsilon^{-1}e^{\epsilon^{-1}\widetilde{L}_f t}t^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_0\Big(1+\|X_0\|_V^{4q-3}\Big)\sqrt{\delta},
\end{aligned}\tag{5.37}$$

其中假 设 2.3 和界 (2.19) 得到了应用。证明完毕 d. □

尽管其对 t 和 ϵ^{-1} 均呈指数依赖，但引理 5.3 中为 $D\nu^\delta$ 建立的这一粗略估计仅用于估计 X 与 $\mathbb{X}^\delta$ 之间的误差，该误差为 $O(\sqrt{\delta})$，因此当 $\delta\to 0$ 时趋于零。在下一个命题中，我们将推导出 $D\nu^\delta$ 的一个精细界，其对 ϵ^{-1} 呈多项式依赖。

命题 5.5. 设假设 *2.1–2.4* 成立。则对所有 $\varphi\in\mathcal{C}_b^0(H)$、 x、 $y\in H$，满足 $t>0$ 的情形，存在正常数 $C(\vartheta,q)\ C(\widetilde{L}_f,t,\epsilon^{-1})$ 满足 $\vartheta\in[0,\frac{3}{4})$，使得

$$
\begin{aligned}
|D\nu^\delta(t,x).y| \le{}& C(\vartheta,q)\|\varphi\|_0 e^{-rt}(1+(t\wedge\epsilon)^{-\frac{1}{2}-\vartheta})\Big(1+\|x\|^{2q-2}_{L^{4q-4}}\Big)\|A^{-\vartheta}y\| \\
&+ C(\widetilde{L}_f,t,\epsilon^{-1})\|\varphi\|_0\|y\|\Big(1+\sup_{s\ge0}\|\mathbb{X}^\delta(s,x)\|^{4q-3}_{L^{8q-6}(\Omega;V)}\Big)\sqrt{\delta},
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

其中 $r>0$ 来自命题 *2.7*。

证明。 下面，我们将证明分为两部分： $t\in(0,2\epsilon]$ 和 $t>2\epsilon$。

- 第一部分： $t\in(0,2\epsilon]$。

设 $(P_t^\delta)_{t\ge0}$ 为与 (5.1) 中的 $\mathbb{X}^\delta$ 相关联的马尔可夫半群，因此 $P_t^\delta\varphi(x)=\nu^\delta(t,x)$。记 $\|\varphi\|_1:=\sup_{x\in H}\sup_{h\in H,\|h\|\le1}|D\varphi(x).h|$，对任意 $\varphi\in\mathcal{C}_b^1(H)$。由引理 5.3 可直接得知，对任意 $t>0$ 和 $\varphi\in\mathcal{C}_b^0(H)$，有 $P_t^\delta\varphi\in\mathcal{C}_b^1(H)\subset\mathcal{C}_b^0(H)$，并且

$$
\|P_t^\delta\varphi\|_1\le e^{\epsilon^{-1}\widetilde{L}_f t}t^{-\frac{1}{2}}\|\varphi\|_0. \tag{5.39}
$$

此外，(5.1) 的马尔可夫性质意味着，对所有 $t>0$ 和 $x\in H$，

$$
\nu^\delta(t,x)=\mathbb{E}\left[\nu^\delta\left(\tfrac{t}{2},\mathbb{X}^\delta(\tfrac{t}{2},x)\right)\right]=P^\delta_{\frac{t}{2}}\nu^\delta\left(\tfrac{t}{2},\cdot\right)\left(\mathbb{X}^\delta(\tfrac{t}{2},x)\right), \tag{5.40}
$$

根据 (5.39) 和引理 5.3，可知函数 $\nu^\delta(t,\ \cdot)$ 和 $\mathbb{X}^\delta(t,\ \cdot)$ 对于 $t>0$ 均连续可微，这意味着 $\nu^\delta\left(\frac{t}{2},\ \mathbb{X}^\delta(\frac{t}{2},\ x)\right)$ 也连续可微。因此，将链式法则应用于 (5.40)，得到

$$
D\left(\nu^\delta(\tfrac{t}{2},\mathbb{X}^\delta(\tfrac{t}{2},x))\right)y=D\nu^\delta(\tfrac{t}{2},\mathbb{X}^\delta(\tfrac{t}{2},x))\,\xi^\delta_y(\tfrac{t}{2},x),\quad\forall x,y\in H, \tag{5.41}
$$

其中 ξ_y^δ 满足变分方程 (5.30)，由此可得

$$
|D\nu^\delta(t,x).y|\le\|P^\delta_{\frac{t}{2}}\varphi\|_1\mathbb{E}[\|\xi^\delta_y(\tfrac{t}{2},x)\|]\le\sqrt{2}e^{\epsilon^{-1}\widetilde{L}_f t}t^{-\frac{1}{2}}\|\varphi\|_0\mathbb{E}[\|\xi^\delta_y(\tfrac{t}{2},x)\|]. \tag{5.42}
$$

记

$$
\widetilde{\xi}^\delta_y(t,x):=\xi^\delta_y(t,x)-E(t)y,\quad t\ge0, \tag{5.43}
$$

并利用 (5.30)，可得

$$
\mathrm{d}\widetilde{\xi}^\delta_y(t,x)=(-A+\epsilon^{-1}F'_\delta(\mathbb{X}^\delta(t,x)))\widetilde{\xi}^\delta_y(t,x)\,\mathrm{d}t+\epsilon^{-1}F'_\delta(\mathbb{X}^\delta(t,x))E(t)y\,\mathrm{d}t. \tag{5.44}
$$

因此，

$$
\widetilde{\xi}^\delta_y(t,x)=\int_0^t\Gamma(t,s)\epsilon^{-1}F'_\delta(\mathbb{X}^\delta(s,x))E(s)y\,\mathrm{d}s, \tag{5.45}
$$

其中 $\Gamma(t,\ s)$ 是与线性方程相关的演化算子

$$
\frac{\partial\Gamma(t,s)u}{\partial t}=(-A+\epsilon^{-1}F'_\delta(\mathbb{X}^\delta(t,x)))\Gamma(t,s)u,\quad\Gamma(s,s)u=u\in H. \tag{5.46}
$$

显然，按照与 (5.32)–(5.33) 类似的方法，可以推导出

$$
\|\Gamma(t,s)y\|\le e^{\epsilon^{-1}\widetilde{L}_f(t-s)}\|y\|. \tag{5.47}
$$

因此，接下来可以证明，对于任意 $\vartheta \in [0, \frac{3}{4})$，

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\xi}_y^\delta(t,x)\| &= \left\| \int_0^t \Gamma(t,s)\epsilon^{-1} F_\delta'(\mathbb{X}^\delta(s,x))E(s)y \,\mathrm{d}s \right\| \\ &\le \epsilon^{-1}\int_0^t e^{\epsilon^{-1}\widetilde{L}_f(t-s)}\|F_\delta'(\mathbb{X}^\delta(s,x))\|\|E(s)y\|_V \,\mathrm{d}s \\ &\le C\epsilon^{-1}\int_0^t (1+\|\mathbb{X}^\delta(s,x)\|_{L^{4q-4}}^{2q-2}) e^{\epsilon^{-1}\widetilde{L}_f(t-s)}(s\wedge 1)^{-\frac{1}{4}-\vartheta} e^{-cs}\,\mathrm{d}s \|A^{-\vartheta}y\|,\end{aligned} \tag{5.48}$$

其中我们还使用了 (2.6)、(2.7) 和 (5.5)。结合 (5.43) 和 (5.48)，可得对于 $t \le 2\epsilon$ 和 $p \ge 1$,

$$\begin{aligned}\|\xi_y^\delta(t,x)\|_{L^p(\Omega;H)} &\le \|E(t)y\| + \|\widetilde{\xi}_y^\delta(t,x)\|_{L^p(\Omega;H)} \\ &\le C(\vartheta)e^{2\widetilde{L}_f}(1+t^{-\vartheta})\Big(1+\sup_{s\in[0,t]}\|\mathbb{X}^\delta(s,x)\|_{L^{p(2q-2)}(\Omega;L^{4q-4})}^{2q-2}\Big)\|A^{-\vartheta}y\|.\end{aligned} \tag{5.49}$$

因此，由 (5.42) 和 (5.49) 可知，对于 $t \le 2\epsilon$,

$$\begin{aligned}|D\nu^\delta(t,x).y| &\le C(\vartheta)(1+t^{-\frac{1}{2}-\vartheta})\|\varphi\|_0\Big(1+\sup_{s\in[0,t]}\|\mathbb{X}^\delta(s,x)\|_{L^{2q-2}(\Omega;L^{4q-4})}^{2q-2}\Big)\|A^{-\vartheta}y\| \\ &\le C(\vartheta)e^{2r\epsilon}e^{-rt}(1+t^{-\frac{1}{2}-\vartheta})\|\varphi\|_0\Big(1+\sup_{s\in[0,t]}\|\mathbb{X}^\delta(s,x)\|_{L^{2q-2}(\Omega;L^{4q-4})}^{2q-2}\Big)\|A^{-\vartheta}y\|,\end{aligned} \tag{5.50}$$

如上所述。

- 第 2 部分：$t > 2\epsilon$。

记 $\nu(t,x) := \mathbb{E}[\varphi(X(t,x))], t \ge 0, x \in H$，对所有 $\varphi \in \mathcal{C}_b^0(H)$ 均成立。马尔可夫性质（参见例如 [10]）保证 $\nu(t,x) = \mathbb{E}[\nu(t-\epsilon, X(\epsilon,x))]$ 对 $t > \epsilon$ 成立。根据命题 2.7，(2.18) 存在唯一的不变测度 μ_X（参见例如 [15]），并且有

$$\left|\nu(t-\epsilon,x) - \int \varphi \,\mathrm{d}\mu_X\right| \le Ce^{-r(t-\epsilon)}\|\varphi\|_0. \tag{5.51}$$

记 $\phi(x) := \nu^\delta(t-\epsilon,x) - \int \varphi \,\mathrm{d}\mu_X$，以及 $\nu_\phi^\delta(t,x) := \mathbb{E}[\phi(\mathbb{X}^\delta(t,x))]$。利用命题 2.7 和命题 5.4 可得

$$\begin{aligned}|\phi(x)| &\le |\nu^\delta(t-\epsilon,x) - \nu(t-\epsilon,x)| + \left|\nu(t-\epsilon,x) - \int \varphi \,\mathrm{d}\mu_X\right| \\ &\le \left|\mathbb{E}\big[\varphi(\mathbb{X}^\delta(t-\epsilon,x))\big] - \mathbb{E}\big[\varphi(X(t-\epsilon,x))\big]\right| + Ce^{-r(t-\epsilon)}\|\varphi\|_0 \\ &\le C\epsilon^{-1}e^{\epsilon^{-1}\widetilde{L}_f(t-\epsilon)}(t-\epsilon)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_0\big(1+\|x\|_V^{4q-3}\big)\sqrt{\delta} + Ce^{-r(t-\epsilon)}\|\varphi\|_0.\end{aligned} \tag{5.52}$$

注意到 $\nu^\delta(t,x) = \mathbb{E}[\phi(\mathbb{X}^\delta(\epsilon,x))] + \int \varphi \,\mathrm{d}\mu_X$。结合 (5.29)、(5.33) 和 (5.52)，并采用与引理 5.3 中类似的论证，可得

$$\begin{aligned}&|D\nu^\delta(t,x).y| = |D\nu_\phi^\delta(\epsilon,x).y| \\ &= \left|\epsilon^{-1}\mathbb{E}\left[\phi(\mathbb{X}^\delta(\epsilon,x))\int_0^\epsilon \langle \xi_y^\delta(s,x), \mathrm{d}W(s)\rangle\right]\right| \\ &\le \epsilon^{-1}\left(\mathbb{E}[|\phi(\mathbb{X}^\delta(\epsilon,x))|^2]\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\epsilon \mathbb{E}[|\xi_y^\delta(s,x)|^2]\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C\epsilon^{-\frac{1}{2}}e^{\widetilde{L}_f}\|y\|\Big(\epsilon^{-1}e^{\epsilon^{-1}\widetilde{L}_f(t-\epsilon)}(t-\epsilon)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_0\Big(1+\|\mathbb{X}^\delta(\epsilon,x)\|_{L^{8q-6}(\Omega;V)}^{4q-3}\Big)\sqrt{\delta} + Ce^{-r(t-\epsilon)}\|\varphi\|_0\Big)\end{aligned} \tag{5.53}$$

对于 $t>\epsilon$。因此，对于所有 $t>\epsilon$,

$$\|D\nu^{\delta}(t,x)\| \le Ce^{-rt}\|\varphi\|_0\epsilon^{-\frac{1}{2}} + C(\widetilde{L}_f,t,\epsilon^{-1})\|\varphi\|_0\Big(1+\|\mathbb{X}^{\delta}(\epsilon,x)\|^{4q-3}_{L^{8q-6}(\Omega;V)}\Big)\sqrt{\delta}. \tag{5.54}$$

鉴于 (5.33)、(5.41) 和 (5.49)，可得对所有 $t>2\epsilon$，即 $t-\epsilon>\epsilon$,

$$\begin{aligned}
&|D\nu^{\delta}(t,x).y|\\
&\le \|D\nu^{\delta}(t-\epsilon,\mathbb{X}^{\delta}(\epsilon,x))\|_{L^2(\Omega;H)}\|\xi^{\delta}_y(\epsilon,x)\|_{L^2(\Omega;H)}\\
&\le \Big(Ce^{-rt}\|\varphi\|_0\epsilon^{-\frac{1}{2}} + C(\widetilde{L}_f,t,\epsilon^{-1})\|\varphi\|_0\Big(1+\sup_{s\ge0}\|\mathbb{X}^{\delta}(s,x)\|^{4q-3}_{L^{8q-6}(\Omega;V)}\Big)\sqrt{\delta}\Big)\|\xi^{\delta}_y(\epsilon,x)\|_{L^2(\Omega;H)}\\
&\le C(\vartheta)e^{-rt}\|\varphi\|_0\epsilon^{-\frac{1}{2}-\vartheta}\Big(1+\sup_{s\in[0,\epsilon]}\|\mathbb{X}^{\delta}(s,x)\|^{2q-2}_{L^{4q-4}(\Omega;L^{4q-4})}\Big)\|A^{-\vartheta}y\|\\
&\quad + C(\widetilde{L}_f,t,\epsilon^{-1})\|\varphi\|_0\Big(1+\sup_{s\ge0}\|\mathbb{X}^{\delta}(s,x)\|^{4q-3}_{L^{8q-6}(\Omega;V)}\Big)\|y\|\sqrt{\delta}.
\end{aligned} \tag{5.55}$$

结合 (5.50) 和 (5.55)，应用引理 5.2 即可得到所需结果。 □

6 收敛性分析

本节旨在对所提出的显式离散格式进行误差分析。对于近尖锐界面极限 $\epsilon\to0$，我们建立了以全变差距离衡量的误差界，且其对界面参数 ϵ 的依赖仅为多项式形式（见定理 6.4）。此外，推论 6.5 还给出了 $\epsilon=1$ 固定时的一致时间误差界。

为进行收敛性分析，我们引入时间步进格式 (3.1) 的连续版本，定义如下:

$$X^{\tau}(t) = E(t)X^{\tau}_0 + \int_0^t E(t-\lfloor s\rfloor_{\tau})\epsilon^{-1}F_{\tau}(X^{\tau}(\lfloor s\rfloor_{\tau}))\,\mathrm{d}s + \mathcal{O}_t, \quad X^{\tau}_0 = X(0), \tag{6.1}$$

其中 $t\ge0$，且 $\lfloor s\rfloor_{\tau}:=t_k$ 对于 $s\in[t_k,t_{k+1})$ $k\in\mathbb{N}_0$，而 $\mathcal{O}_t$ 由引理 2.5 给出。此外，我们注意到过程 (6.1) 满足 $X^{\tau}(t)=X^{\tau}_{t_k}$ 对于 $t=t_k$，$k\in\mathbb{N}_0$ 并且

$$\mathrm{d}X^{\tau}(t) = -AX^{\tau}(t)\,\mathrm{d}t + E(t-\lfloor t\rfloor_{\tau})\epsilon^{-1}F_{\tau}(X^{\tau}_{\lfloor t\rfloor_{\tau}})\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t), \quad t>0. \tag{6.2}$$

下面给出过程 (6.1) 在 $L^{2\rho}(\mathcal{D})$、V 和 $\dot{H}^{\gamma}$ 范数下的时间一致矩界，这些界将在后续的收敛性分析中使用。

命题 6.1。设假设 *2.1–2.4* 和条件 (3.3) 成立。设 $X^{\tau}(t)$ $t\ge0$ 由(6.1)定义。对于任意 $p\ge1$、$\gamma<\frac{1}{2}$ 以及任意整数 $\rho\ge1$，存在正常数 $C(p,\rho,q,\alpha)$、$C(p,q,\alpha)$ 和 $C(p,q,\alpha,\gamma)$，它们与 τ、β 无关，使得

$$\big\|X^{\tau}(t)\big\|_{L^p(\Omega;L^{2\rho})} \le C(\beta\tau^{\theta})^{\alpha}\|X_0\|^{2q-1}_{L^{p(2q-1)}(\Omega;L^{2\rho(2q-1)})} + C(p,\rho,q,\alpha)\cdot\big(1+(\beta\tau^{\theta})^{\alpha(4q-1-\frac{1}{2\rho})}\big), \tag{6.3}$$

$$\big\|X^{\tau}(t)\big\|_{L^p(\Omega;V)} \le e^{-\epsilon^{-1}t}\|X_0\|_{L^p(\Omega;V)} + C(p,q,\alpha)\epsilon^{-\frac{1}{4}}\Big(1+(\beta\tau^{\theta})^{\alpha}\|X_0\|^{2q-1}_{L^{(2q-1)p}(\Omega;L^{4q-2})} + (\beta\tau^{\theta})^{(4q-\frac{3}{2})\alpha}\Big), \tag{6.4}$$

$$\big\|X^{\tau}(t)\big\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^{\gamma})} \le e^{-\epsilon^{-1}t}\|X_0\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^{\gamma})} + C(p,q,\alpha,\gamma)\epsilon^{-\frac{\gamma}{2}}\Big(1+(\beta\tau^{\theta})^{\alpha}\|X_0\|^{2q-1}_{L^{(2q-1)p}(\Omega;L^{4q-2})} + (\beta\tau^{\theta})^{(4q-\frac{3}{2})\alpha}\Big). \tag{6.5}$$

证明。 我们将证明分为三个步骤。

步骤 1： $L^{2\rho}$**-估计**。

注意，对于任意 $t \geq 0$,

$$X^\tau(t) = E(t-\lfloor t\rfloor_\tau)X^\tau(\lfloor t\rfloor_\tau) + (t-\lfloor t\rfloor_\tau)E(t-\lfloor t\rfloor_\tau)\epsilon^{-1}F_\tau(X^\tau(\lfloor t\rfloor_\tau)) + \int_{\lfloor t\rfloor_\tau}^t E(t-s)\,\mathrm{d}W(s). \tag{6.6}$$

由压缩性 $\|E(t)u\|_{L^{2\rho}} \leq \|u\|_{L^{2\rho}}$、 $u \in L^{2\rho}(\mathcal{D})$、 $t \geq 0$，根据引理 2.5、定理 4.2 和条件 (3.3) 可知

$$\begin{aligned}\|X^\tau(t)\|_{L^p(\Omega;L^{2\rho})} &\leq \|X^\tau(\lfloor t\rfloor_\tau)\|_{L^p(\Omega;L^{2\rho})} + \tau\epsilon^{-1}\|X^\tau(\lfloor t\rfloor_\tau)\|^{2q-1}_{L^{p(2q-1)}(\Omega;L^{2\rho(2q-1)})} + C(p)\\ &\leq C\beta^\alpha\tau^{\theta\alpha}\|X_0\|^{2q-1}_{L^{p(2q-1)}(\Omega;L^{2\rho(2q-1)})} + C(p,\rho,q,\alpha)\cdot\big(1+(\beta\tau^\theta)^{(4q-1-\frac{1}{2\rho})\alpha}\big).\end{aligned} \tag{6.7}$$

步骤 2： V**-估计**。

首先，将 (6.2) 改写为：对于 $t > 0$,

$$\mathrm{d}X^\tau(t) = -\big(A+\epsilon^{-1}I\big)X^\tau(t)\,\mathrm{d}t + \epsilon^{-1}\big[E\big(t-\lfloor t\rfloor_\tau\big)F_\tau\big(X^\tau(\lfloor t\rfloor_\tau)\big) + X^\tau(t)\big]\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t). \tag{6.8}$$

根据性质 (2.7)，我们得到

$$\begin{aligned}\|X^\tau(t)\|_{L^p(\Omega;V)} &\leq e^{-\epsilon^{-1}t}\|E(t)X_0^\tau\|_{L^p(\Omega;V)} + \left\|\int_0^t e^{-\epsilon^{-1}(t-s)}\epsilon^{-1}E(t-\lfloor s\rfloor_\tau)F_\tau(X^\tau(\lfloor s\rfloor_\tau))\,\mathrm{d}s\right\|_{L^p(\Omega;V)}\\ &\quad + \left\|\int_0^t e^{-\epsilon^{-1}(t-s)}E(t-s)\epsilon^{-1}X^\tau(s)\,\mathrm{d}s\right\|_{L^p(\Omega;V)} + \left\|\int_0^t e^{-\epsilon^{-1}(t-s)}E(t-s)\,\mathrm{d}W(s)\right\|_{L^p(\Omega;V)}\\ &\leq e^{-\epsilon^{-1}t}\|X_0^\tau\|_{L^p(\Omega;V)} + C\epsilon^{-1}\int_0^t e^{-\epsilon^{-1}(t-s)}(t-s)^{-\frac14}\Big(1+\sup_{r\in[0,t]}\|X^\tau(\lfloor r\rfloor_\tau)\|^{2q-1}_{L^{(2q-1)p}(\Omega;L^{4q-2})}\Big)\,\mathrm{d}s\\ &\quad + C\epsilon^{-1}\int_0^t e^{-\epsilon^{-1}(t-s)}(t-s)^{-\frac14}\Big(1+\sup_{r\in[0,t]}\|X^\tau(r)\|_{L^p(\Omega;H)}\Big)\,\mathrm{d}s + C\sup_{s\in[0,t]}\|\mathcal{O}_s\|_{L^p(\Omega;V)}\\ &\leq e^{-\epsilon^{-1}t}\|X_0^\tau\|_{L^p(\Omega;V)} + C(p)\\ &\quad + C(p,q,\alpha)\epsilon^{-1}\int_0^t e^{-\epsilon^{-1}(t-s)}(t-s)^{-\frac14}\Big(1+(\beta\tau^\theta)^\alpha\|X_0^\tau\|^{2q-1}_{L^{(2q-1)p}(\Omega;L^{4q-2})} + (\beta\tau^\theta)^{(4q-\frac32)\alpha}\Big)\,\mathrm{d}s\\ &\leq e^{-\epsilon^{-1}t}\|X_0\|_{L^p(\Omega;V)} + C(p,q,\alpha)\epsilon^{-\frac14}\Big(1+(\beta\tau^\theta)^\alpha\|X_0\|^{2q-1}_{L^{(2q-1)p}(\Omega;L^{4q-2})} + (\beta\tau^\theta)^{(4q-\frac32)\alpha}\Big) + C(p),\end{aligned} \tag{6.9}$$

其中我们还利用了以下事实： $\epsilon^{-1}\int_0^t e^{-\epsilon^{-1}\ (t-s)}\ (1\wedge(t-s))^{-\frac14}\mathrm{d}s \leq C\epsilon^{-\frac14}$。

步骤 3： $\dot{H}^\gamma$**-估计**。

该论证与**步骤 2**类似，但我们使用 $\|E(t)x\|_{\dot{H}^\gamma} \leq C\,t^{-\gamma/2}e^{-ct}\|x\|$, $t > 0$, $x \in$

H，由（2.6）可得，从而得到

$$\begin{aligned}
\|X^\tau(t)\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^\gamma)} &\le e^{-\epsilon^{-1}t}\|E(t)X_0^\tau\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^\gamma)} + \left\| \int_0^t e^{-\epsilon^{-1}(t-s)}\epsilon^{-1}E(t-\lfloor s\rfloor_\tau)F_\tau(X^\tau(\lfloor s\rfloor_\tau))\,\mathrm{d}s\right\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^\gamma)} \\
&\quad + \left\| \int_0^t e^{-\epsilon^{-1}(t-s)}E(t-s)\epsilon^{-1}X^\tau(s)\,\mathrm{d}s\right\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^\gamma)} + \left\| \int_0^t e^{-\epsilon^{-1}(t-s)}E(t-s)\,\mathrm{d}W(s)\right\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^\gamma)} \\
&\le e^{-\epsilon^{-1}t}\|X_0^\tau\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^\gamma)} + C\epsilon^{-1}\int_0^t e^{-\epsilon^{-1}(t-s)}(t-s)^{-\frac{\gamma}{2}}\Big(1+\sup_{r\in[0,t]}\|X^\tau(\lfloor r\rfloor_\tau)\|^{2q-1}_{L^{(2q-1)p}(\Omega;L^{4q-2})}\Big)\,\mathrm{d}s \\
&\quad + C\epsilon^{-1}\int_0^t e^{-\epsilon^{-1}(t-s)}(t-s)^{-\frac{\gamma}{2}}\Big(1+\sup_{r\in[0,t]}\|X^\tau(r)\|_{L^p(\Omega;H)}\Big)\,\mathrm{d}s + C\sup_{s\in[0,t]}\|\mathcal{O}_s\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^\gamma)} \\
&\le e^{-\epsilon^{-1}t}\|X_0\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^\gamma)} + C(p,q,\alpha,\gamma)\epsilon^{-\frac{\gamma}{2}}\Big(1+(\beta\tau^\theta)^\alpha\|X_0\|^{2q-1}_{L^{(2q-1)p}(\Omega;L^{4q-2})} + (\beta\tau^\theta)^{(4q-\frac{3}{2})\alpha}\Big) + C(p,\gamma),
\end{aligned} \tag{6.10}$$

证明至此完成。 □

接下来我们 如下给出其在负 Sobolev 空间中的 H¨older 正则性性质 ws.

引理 6.2. 设假设 *2.1–2.4* 和条件 (3.3) 成立。设 $X^\tau(t)$ $t\ge 0$ 由(6.1)定义。那么，对于任意 $p\in[2,\infty)$、$\eta\in[0,\frac{1}{2}]$、 $\gamma<\frac{1}{2}$和 $t>0$，存在常数$C(X_0$、 α、 p、-q、 η、 γ)>0，其与 τ和 β无关，使得

$$\|X^\tau(t)-X^\tau(\lfloor t\rfloor_\tau)\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^{-\eta})} \le C(X_0,\alpha,p,q,\eta,\gamma)\epsilon^{-\frac{\gamma+\eta}{2}}\tau^{\frac{\gamma+\eta}{2}}\big(1+(\beta\tau^\theta)^{(4q-\frac{3}{2})\alpha}\big). \tag{6.11}$$

证明。 注意，对于任意 $t\ge 0$,

$$\begin{aligned}
&X^\tau(t)-X^\tau(\lfloor t\rfloor_\tau) \\
&= (E(t-\lfloor t\rfloor_\tau)-I)X^\tau(\lfloor t\rfloor_\tau) + (t-\lfloor t\rfloor_\tau)E(t-\lfloor t\rfloor_\tau)\epsilon^{-1}F_\tau(X^\tau(\lfloor t\rfloor_\tau)) + \int_{\lfloor t\rfloor_\tau}^t E(t-s)\,\mathrm{d}W(s).
\end{aligned} \tag{6.12}$$

由 [32, (4.57)] 显然可得

$$\left\|\int_{\lfloor t\rfloor_\tau}^t E(t-s)\,\mathrm{d}W(s)\right\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^{-\eta})} \le C\tau^{\frac{\gamma+\eta}{2}}. \tag{6.13}$$

此外，利用性质 (2.6) 和命题 6.1 可确保

$$\begin{aligned}
&\|(E(t-\lfloor t\rfloor_\tau)-I)X^\tau(\lfloor t\rfloor_\tau)\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^{-\eta})} \\
&\le \|A^{-\frac{\gamma+\eta}{2}}(E(t-\lfloor t\rfloor_\tau)-I)\|_{\mathcal{L}(H)}\,\|X^\tau(\lfloor t\rfloor_\tau)\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^\gamma)} \\
&\le C\epsilon^{-\frac{\gamma}{2}}\tau^{\frac{\gamma+\eta}{2}}\big(1+\|X_0\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^\gamma)} + (\beta\tau^\theta)^\alpha\|X_0\|^{2q-1}_{L^{(2q-1)p}(\Omega;L^{4q-2})} + (\beta\tau^\theta)^{\alpha(4q-\frac{3}{2})}\big).
\end{aligned} \tag{6.14}$$

借助条件 (3.3)，进一步利用命题 3.2 和定理 4.2 可证明

$$\begin{aligned}
&\big\|(t-\lfloor t\rfloor_\tau)E(t-\lfloor t\rfloor_\tau)\epsilon^{-1}F_\tau(X^\tau(\lfloor t\rfloor_\tau))\big\|_{L^p(\Omega;\dot{H}^{-\eta})} \\
&\le \Big\|\tau^{\frac{\gamma+\eta}{2}}(\tau\epsilon^{-1})^{1-\frac{\gamma+\eta}{2}}\epsilon^{-\frac{\gamma+\eta}{2}}F_\tau(X^\tau(\lfloor t\rfloor_\tau))\Big\|_{L^p(\Omega;H)} \\
&\le C\tau^{\frac{\gamma+\eta}{2}}\epsilon^{-\frac{\gamma+\eta}{2}}\big(1+(\beta\tau^\theta)^{\alpha(1-\frac{\gamma+\eta}{2})}\|X_0\|^{2q-1}_{L^{(2q-1)p}(\Omega;L^{4q-2})} + (\beta\tau^\theta)^{\alpha(4q-\frac{3}{2}-\frac{\gamma+\eta}{2})}\big).
\end{aligned} \tag{6.15}$$

所需结果随即由假设 2.4 得出。 □

接下来的引理揭示了非线性项的交换性，这是对 [32, 引理 4.9] 针对 $q=2$ 的直接推广。

引理 6.3。 设非线性算子 $F\colon L^{4q-2}(\mathcal{D}) \to H, q>1$ 满足假设 *2.3*。那么，对于任意 $\varsigma \in (0, \frac{1}{2})$, $\eta > \frac{1}{2}$, 和 $u, v \in V \cap \dot{H}^{\varsigma}$，存在常数 $C(\varsigma, \eta, q) > 0$，其取决于 ς, η, q，使得

$$\|F'(u)v\|_{-\eta} \le C(\varsigma,\eta,q)\Big(1+\max\{\|u\|_V, \|u\|_{\varsigma}\}^{2q-2}\Big)\|v\|_{-\varsigma}. \tag{6.16}$$

在完成上述准备工作后，我们现在可以证明所提出的时间步进格式在 TV 距离下的收敛速率。

定理 6.4 (时间步进格式的收敛速率**)**。 在假设 *2.1–2.4* 下，设$X(t)$ $t \ge 0$ 为 (2.18) 的温和解，且 $X_{t_m}^{\tau}, m \in \mathbb{N}$ 为满足条件 (3.3) 的、由(3.1) 定义的时间步进格式。那么，对于任意 $\gamma < \frac{1}{2}$, $m \in \mathbb{N}$，存在正常数$C(X_0, q, \gamma, \alpha)$，该常数与 τ, ϵ 和 $\bar{}\beta$ 无关，使得

$$d_{\mathrm{TV}}(\mathrm{law}(X_{t_m}^{\tau}), \mathrm{law}(X(t_m))) \le C(X_0,q,\gamma,\alpha)\beta\big(1+(\beta\tau^{\theta})^{\kappa_0}\big)\min\big\{\exp(\epsilon^{-2}), 1+t_m\big\}\epsilon^{-\frac{q+3+2\gamma}{2}}\tau^{\gamma\wedge\theta}, \tag{6.17}$$

其中 κ_0：=最大值{（$4q-4$）+α（$8q^2-6q-1$） α（$16q^2-17q+3$）}。特别地，取 $\beta^{\alpha} = \epsilon^{\pm}$ 和 $\theta = \frac{1}{2}$，从而将严格条件 (3.3) 替换为与 ϵ 无关的限制 $2c_3^2\tau^{1-\theta\alpha} \le c_0$，即可得到

$$d_{\mathrm{TV}}(\mathrm{law}(X_{t_m}^{\tau}), \mathrm{law}(X(t_m))) \le C(X_0,q,\gamma,\alpha)(1+t_m)\epsilon^{-\frac{q+3+2\gamma}{2}-\frac{1+\kappa_0}{\alpha}}\tau^{\gamma}. \tag{6.18}$$

证明。 由（2.2）可知，全变差距离上的收敛等价于建立以下弱误差界：对所有 $\varphi \in C_b^0(H)$ 以及任意 $m \in \mathbb{N}$,

$$d_{\mathrm{TV}}(\mathrm{law}(X_{t_m}^{\tau}), \mathrm{law}(X(t_m))) = \sup_{\varphi\in C_b^0(H), \|\varphi\|_0\le 1}\big|\mathbb{E}\big[\varphi\big(X_{t_m}^{\tau}\big)\big] - \mathbb{E}\big[\varphi(X(t_m))\big]\big|. \tag{6.19}$$

首先，我们引入一个由（5.1）定义的、参数为 $\delta > 0$ 的辅助过程 $\mathbb{X}^{\delta}$，并作如下分解：

$$\begin{aligned}
&\big|\mathbb{E}\big[\varphi\big(X_{t_m}^{\tau}\big)\big] - \mathbb{E}\big[\varphi(X(t_m))\big]\big| \\
&\le \big|\mathbb{E}\big[\varphi\big(X_{t_m}^{\tau}\big)\big] - \mathbb{E}\big[\varphi(\mathbb{X}^{\delta}(t_m))\big]\big| + \big|\mathbb{E}\big[\varphi(\mathbb{X}^{\delta}(t_m))\big] - \mathbb{E}\big[\varphi(X(t_m))\big]\big| \\
&=: I_1^{(\delta)} + I_2^{(\delta)}.
\end{aligned} \tag{6.20}$$

由于 $\mathbb{X}^{\delta}$ 是 X的近似，根据命题 5.4，我们有 $I_2^{(\delta)} \to 0$，当 $\delta \to 0$ 时。因此，剩下的任务是对 δ中的 $I_1^{(\delta)}$ 进行一致估计。通过望远镜求和论证，我们将项 $I_1^{(\delta)}$ 改写如下：

$$\begin{aligned}
I_1^{(\delta)} &= \big|\mathbb{E}\big[\nu^{\delta}\big(0, X_{t_m}^{\tau}\big)\big] - \mathbb{E}\big[\nu^{\delta}\big(t_m, X_0\big)\big]\big| \\
&= \Big|\sum_{k=0}^{m-1}\underbrace{\mathbb{E}\big[\nu^{\delta}\big(t_m - t_{k+1}, X^{\tau}(t_{k+1})\big)\big] - \mathbb{E}\big[\nu^{\delta}\big(t_m - t_k, X^{\tau}(t_k)\big)\big]}_{=:I_1^{(\delta,k)}}\Big|.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

回顾 $\nu^\delta(t,\ x)\ =\ \mathbb{E}[\varphi(\mathbb{X}^\delta(t,\ x))]$ 及其相关的柯尔莫哥洛夫方程，并应用 Itô 公式可得，对于 $I_1^{(\delta,k)}$，$k=0,\ 1,\ \ldots\ldots m-1$,

$$\begin{aligned}
I_1^{(\delta,k)} &= \mathbb{E}\bigg[\int_{t_k}^{t_{k+1}} -\Big(D\nu^\delta\big(t_m-t,X^\tau(t)\big).\big(-AX^\tau(t)+\epsilon^{-1}F_\delta\big(X^\tau(t)\big)\big)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{N}}D^2\nu^\delta\big(t_m-t,X^\tau(t)\big).(e_j,e_j)\Big)\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_{t_k}^{t_{k+1}} D\nu^\delta\big(t_m-t,X^\tau(t)\big).\Big(-AX^\tau(t)+E(t-t_k)\epsilon^{-1}F_\tau(X^\tau(t_k))\Big)\,\mathrm{d}t \qquad (6.22)\\
&\quad+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{N}}D^2\nu^\delta\big(t_m-t,X^\tau(t)\big).(e_j,e_j)\,\mathrm{d}t\bigg]\\
&=\mathbb{E}\bigg[\int_{t_k}^{t_{k+1}} D\nu^\delta\big(t_m-t,X^\tau(t)\big).\Big(E(t-t_k)\epsilon^{-1}F_\tau(X^\tau(t_k))-\epsilon^{-1}F_\delta\big(X^\tau(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t\bigg].
\end{aligned}$$

接下来，我们将项 $I_1^{(\delta,k)}$ 分解为四个部分：

$$I_1^{(\delta,k)}=I_{1,1}^{(\delta,k)}+I_{1,2}^{(\delta,k)}+I_{1,3}^{(\delta,k)}+I_{1,4}^{(\delta,k)},$$

其中记

$$I_{1,1}^{(\delta,k)}:=\mathbb{E}\bigg[\int_{t_k}^{t_{k+1}} D\nu^\delta\big(t_m-t,X^\tau(t)\big).\Big(E(t-t_k)\epsilon^{-1}F_\tau(X^\tau(t_k))-\epsilon^{-1}F_\tau(X^\tau(t_k))\Big)\,\mathrm{d}t\bigg], \qquad (6.23)$$

$$I_{1\,2}^{(\delta,k)}:=\mathbb{E}\bigg[\int_{t_k}^{t_{k+1}} D\nu^\delta\big(t_m-t,X^\tau(t)\big).\Big(\epsilon^{-1}F_\tau(X^\tau(t_k))-\epsilon^{-1}F(X^\tau(t_k))\Big)\,\mathrm{d}t\bigg], \qquad (6.24)$$

$$I_{1,3}^{(\delta,k)}:=\mathbb{E}\bigg[\int_{t_k}^{t_{k+1}} D\nu^\delta\big(t_m-t,X^\tau(t)\big).\Big(\epsilon^{-1}F(X^\tau(t_k))-\epsilon^{-1}F(X^\tau(t))\Big)\,\mathrm{d}t\bigg], \qquad (6.25)$$

$$I_{1,4}^{(\delta,k)}:=\mathbb{E}\bigg[\int_{t_k}^{t_{k+1}} D\nu^\delta\big(t_m-t,X^\tau(t)\big).\Big(\epsilon^{-1}F(X^\tau(t))-\epsilon^{-1}F_\delta(X^\tau(t))\Big)\,\mathrm{d}t\bigg]. \qquad (6.26)$$

我们首先估计项 $I_{1\,1}^{(\delta,k)}$，。结合命题 5.5 和命题 6.1，可得

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\delta\to0}\big|I_{1,1}^{(\delta,k)}\big|\le C(q,\gamma)\epsilon^{-1}\|\varphi\|_0\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big(1+((t_m-t)\wedge\epsilon)^{-\frac{1}{2}-\gamma}\Big)e^{-r(t_m-t)}\\
&\qquad\cdot\mathbb{E}\bigg[\Big(1+\big\|X^\tau(t)\big\|_{L^{4q-4}}^{2q-2}\Big)\big\|A^{-\gamma}(E(t-t_k)-I)F_\tau\big(X_{t_k}^\tau\big)\big\|\bigg]\,\mathrm{d}t\\
&\le C(q,\gamma)\tau^\gamma\epsilon^{-1}\|\varphi\|_0\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big(1+((t_m-t)\wedge\epsilon)^{-\frac{1}{2}-\gamma}\Big)e^{-r(t_m-t)}\\
&\qquad\cdot\Big(1+\|X^\tau(t)\|_{L^{4q-4}(\Omega;L^{4q-4})}^{2q-2}\Big)\big\|F_\tau\big(X_{t_k}^\tau\big)\big\|_{L^2(\Omega;H)}\,\mathrm{d}t\\
&\le C(X_0,q,\alpha,\gamma)\tau^\gamma\epsilon^{-1}\big(1+(\beta\tau^\theta)^{\alpha(8q^2-6q-1)}\big)\|\varphi\|_0\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Big(1+((t_m-t)\wedge\epsilon)^{-\frac{1}{2}-\gamma}\Big)e^{-r(t_m-t)}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned} \qquad (6.27)$$

其中也用到了性质 (2.6)、命题 3.2 和假设 2.3。类似地，对于项 $I_{1\,2}^{(\delta,k)}$，，我们可得

$$\begin{aligned}
\limsup_{\delta\to 0}\left|I_{1,2}^{(\delta,k)}\right| &\le C(q)\epsilon^{-1}\|\varphi\|_0\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(1+((t_m-t)\wedge\epsilon)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{-r(t_m-t)}\\
&\quad\cdot\mathbb{E}\left[\left(1+\left\|X^\tau(t)\right\|_{L^{4q-4}}^{2q-2}\right)\left\|F_\tau\big(X_{t_k}^\tau\big)-F\big(X_{t_k}^\tau\big)\right\|\right]\mathrm{d}t\\
&\le C(X_0,q)\epsilon^{-1}\|\varphi\|_0\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(1+((t_m-t)\wedge\epsilon)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{-r(t_m-t)}\\
&\quad\cdot\left(1+\|X^\tau(t)\|_{L^{4q-4}(\Omega;L^{4q-4})}^{2q-2}\right)\left\|F_\tau\big(X_{t_k}^\tau\big)-F\big(X_{t_k}^\tau\big)\right\|_{L^2(\Omega;H)}\mathrm{d}t\\
&\le C(X_0,q,\alpha)\beta\tau^\theta\epsilon^{-1}\big(1+(\beta\tau^\theta)^{(4q-4)+\alpha(8q^2-6q-1)}\big)\|\varphi\|_0\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(1+((t_m-t)\wedge\epsilon)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{-r(t_m-t)}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}\tag{6.28}$$

类似地，对于项 $I_{1\,3}^{(\delta,k)}$，，进一步利用性质 (6.16) 和泰勒公式，并结合引理 6.2，可推得

$$\begin{aligned}
\limsup_{\delta\to 0}\left|I_{1,3}^{(\delta,k)}\right| &\le C(q)\epsilon^{-1}\|\varphi\|_0\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(1+((t_m-t)\wedge\epsilon)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}}\right)e^{-r(t_m-t)}\\
&\quad\cdot\left(1+\left\|X^\tau(t)\right\|_{L^{4q-4}(\Omega;L^{4q-4})}^{2q-2}\right)\left(\mathbb{E}\left[\left\|F(X_{t_k}^\tau)-F(X^\tau(t))\right\|_{-\frac{3}{4}}^2\right]\right)^{1/2}\mathrm{d}t\\
&\le C(X_0,q,\gamma)\epsilon^{-1}\big(1+(\beta\tau^\theta)^{\alpha(8q^2-10q+\frac{3}{2})}\big)\|\varphi\|_0\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(1+((t_m-t)\wedge\epsilon)^{-\frac{7}{8}}\right)e^{-r(t_m-t)}\,\mathrm{d}t\\
&\quad\cdot\left(\mathbb{E}\left[\left(1+\left\|X_{t_k}^\tau\right\|_V^{4q-4}+\left\|X_{t_k}^\tau\right\|_\gamma^{4q-4}+\left\|X^\tau(t)\right\|_V^{4q-4}+\left\|X^\tau(t)\right\|_\gamma^{4q-4}\right)\left\|X_{t_k}^\tau-X^\tau(t)\right\|_{-\gamma}^2\right]\right)^{1/2}\mathrm{d}t\\
&\le C(X_0,q,\alpha)\epsilon^{-1-\frac{q-1}{2}}\big(1+(\beta\tau^\theta)^{\alpha(16q^2-21q+\frac{9}{2})}\big)\|\varphi\|_0\\
&\quad\cdot\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(1+((t_m-t)\wedge\epsilon)^{-\frac{7}{8}}\right)e^{-r(t_m-t)}\left\|X_{t_k}^\tau-X^\tau(t)\right\|_{L^4(\Omega;\dot H^{-\gamma})}\mathrm{d}t\\
&\le C(X_0,q,\alpha)\tau^\gamma\epsilon^{-\frac{q+1+2\gamma}{2}}\big(1+(\beta\tau^\theta)^{\alpha(16q^2-17q+3)}\big)\|\varphi\|_0\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(1+((t_m-t)\wedge\epsilon)^{-\frac{7}{8}}\right)e^{-r(t_m-t)}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}\tag{6.29}$$

对于项 $I_{1\,4}^{(\delta,k)}$，，按照 (6.28) 中相同的步骤，并注意到 F_δ 满足与 (3.6) 类似的性质，可得 $I_1^{(\delta,k)}$，$_4\ \to 0$，其中 $\delta\to 0$。因此，综合上述估计可得

$$\limsup_{\delta\to 0}|I_1^{(\delta,k)}|\le C(X_0,q,\gamma,\alpha)\epsilon^{-\frac{q+1+2\gamma}{2}}\beta\big(1+(\beta\tau^\theta)^{\kappa_0}\big)\|\varphi\|_0\tau^{\gamma\wedge\theta}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\big(1+((t_m-t)\wedge\epsilon)^{-\kappa_1}\big)\,e^{-r(t_m-t)}\,\mathrm{d}t,\tag{6.30}$$

其中 $\kappa_0=\max\{(4q-4)+\alpha(8q^2-6q-1)\ \alpha(16q^2-17q+3)\}$，且 $\kappa_1=\max\{\frac{7}{8},\frac{1}{2}+\gamma\}$。对$k$ 求和，并注意到 $r^{-1}=O(\exp(\epsilon^{-2}))$（见命题 2.7），即可得到所需结果。 □

在典型情形 $q=2$ 下，定理 6.4 表明，所提出的显式格式对 ϵ^{-1} 的依赖至多为三次多项式，这与.....所识别的三次标度一致

ϵ^{-1}，该标度是在 [13] 的弱收敛分析中针对光滑测试函数得到的。此外，误差界对终止时间 t_m 呈线性依赖，这可视为界面奇异性与时间累积之间的一种权衡。

由定理 6.4 可直接得到，对于固定的 $\epsilon = 1$，全变差收敛速率关于时间一致；这将全局 Lipschitz 条件 [3, 5] 下已有的结果推广到了非全局 Lipschitz 情形。

推论 6.5（固定 $\epsilon = 1$ 时的一致收敛速率）。设定理 *6.4* 中的所有假设均成立，且 $\epsilon = 1$ 为固定值。令 $X(t)$ $t \geq 0$ 为方程 (2.18) 的温和解，并令 $X^{\tau}_{t_m}, m \in \mathbb{N}$ 为由(3.1) 定义的时间步进格式，其中 $\theta \geq \frac{1}{2}$。那么，对于任意 $\gamma < \frac{1}{2}$，存在正常数 $C(X_0, q, \gamma, \alpha)$，其与 τ, β 及 t_m无关，使得对所有 $m \in \mathbb{N}$,

$$d_{\mathrm{TV}}(\mathrm{law}(X^{\tau}_{t_m}), \mathrm{law}(X(t_m))) \leq C(X_0, q, \gamma, \alpha)\beta\big(1 + (\beta\tau^{\theta})^{\kappa_0}\big)\tau^{\gamma}, \tag{6.31}$$

其中 $\kappa_0 = \max\{(4q-4) + \alpha(8q^2 - 6q - 1) \ \alpha(16q^2 - 17q + 3)\}$。

7 数值实验

本节中，我们进行一些数值实验，以验证前几节的理论结果。考虑以下由时空白噪声驱动的一维随机 Allen-Cahn 方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \epsilon^{-1}u(t,x) - \epsilon^{-1}u^3(t,x) + \dot{W}(t), \quad t \in (0,1], \quad x \in (0,1), \\ u(0,x) = \sin(\pi x), \quad x \in (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad t \in (0,1], \end{cases} \tag{7.1}$$

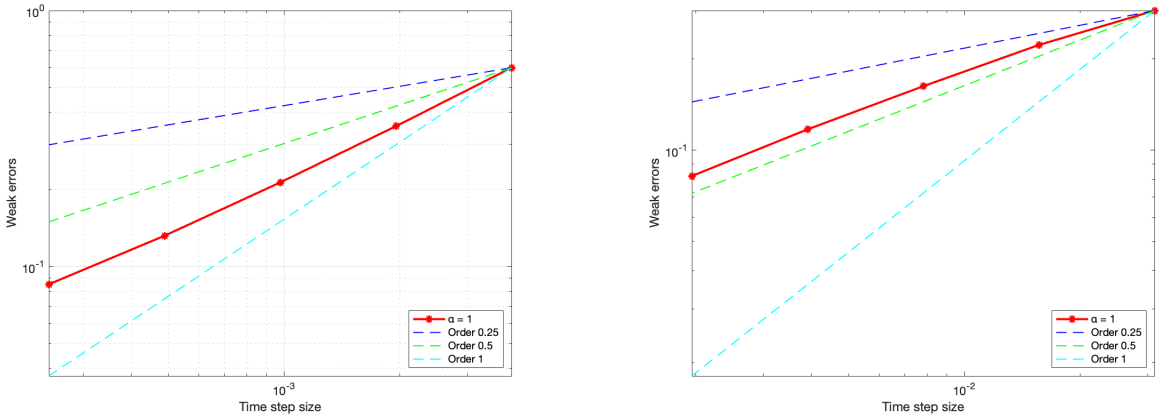
其中，令 $\epsilon = 0.01$ 和 $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ 为假设 2.2 中定义的柱状 Wiener 过程。为了在计算机上进行数值实验，我们采用谱 Galerkin 方法（$N = 2^6$）进行空间离散，并采用所提出的时间步进格式（3.1）进行时间离散。

接下来，我们模拟终点 $T = 1$处的弱收敛，并选取一个参数为 $\theta = \frac{1}{2}$， $\alpha = 1$， $\beta = 5$的典型格式。测试函数 φ选为如下阶跃函数:

$$\varphi(X) = \begin{cases} \sin(a), & \text{if } \|X\| \in [a, a+0.1), \\ \sin(a+0.1), & \text{if } \|X\| \in [a+0.1, a+0.2), \\ \vdots & \vdots \\ \sin(a+0.9), & \text{if } \|X\| \in [a+0.9, a+1), \end{cases} \tag{7.2}$$

其中 $a \in \mathbb{N}_0$ 为任意整数。同时，我们通过对超过 1000 个样本取平均来近似弱误差中出现的期望，并将采用足够小步长的隐式 Euler 方法得到的数值解（$M_{\mathrm{exact}} = 2^{14}$）视为“精确”解。使用五种不同的步长 $M = T\tau^{-1} = 2^i$， $i = 8$，……，12，我们在双对数坐标下绘制了图1(a)中的弱误差。与另外三条参考线的比较表明，收敛速率接近 1 2，与理论结果吻合良好。我们还在表1中列出了误差 -

采用不同 α参数选择的格式。一个有趣的发现是，对于相同的步长，降低次数 α似乎能提高计算精度。此外，我们还测试了 $\beta^{\alpha}=\epsilon^{-1}$的参数选择，其中取 $\alpha=1$，因而 $\beta=100$。我们计算了不同步长（$M=T\tau^{-1}=2^{i}$，$i=5$，.....，9）下的误差。如图1(b)所示，收敛速率也与理论收敛速率一致。



(a) $\beta=5$ (b) $\beta=100$

图1：显式时间步进格式的弱收敛速率

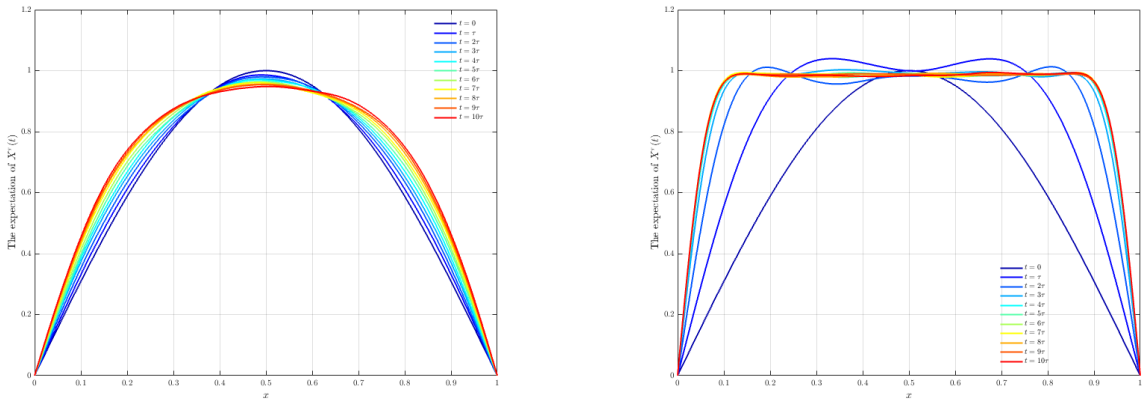
表1：不同 α下数值格式的误差

	$\alpha=1$	$\alpha=\frac{1}{2}$	$\alpha=\frac{1}{3}$	$\alpha=\frac{1}{4}$
$\tau=2^{-8}$	0.5982	0.4184	0.3791	0.3626
$\tau=2^{-9}$	0.3533	0.2347	0.2030	0.1896
$\tau=2^{-10}$	0.2131	0.1283	0.1080	0.0993
$\tau=2^{-11}$	0.1319	0.0765	0.0622	0.0567
$\tau=2^{-12}$	0.0853	0.0477	0.0364	0.0340

最后，我们进行数值实验，以展示所提出时间步进格式的界面捕捉性能。取 $\alpha=1$，$\beta=5$，$\theta=\frac{1}{2}$ 并使用固定的时间步长$\tau=2^{-10}$，我们研究模型 (7.1) 在两种不同界面宽度下的界面轮廓，即 $\epsilon=0.01$ 和 $\epsilon=0.001$。通过对 1000 个样本取平均来近似期望，图2 中展示了数值解在不同时刻的期望值（$\epsilon=0.01$ 对应左图，$\epsilon=0.001$对应右图）。我们观察到，界面轮廓能够得到良好的捕捉。

参考文献

[1] L. Angeli、D. Crisan 和 M. Ottobre. 基于强指数稳定性的随机微分方程数值格式一致时间收敛：欧拉方法、分步格式与截断格式. *ESAIM*：数学建模与数值分析, 59(4):2207– 2251, 2025.



(a) $\epsilon = 0.01$ (b) $\epsilon = 0.001$

图2：显式时间步进格式的界面捕捉

[2] C.-E. Br´ehier. 使用显式截断指数欧拉格式近似一类遍历型随机偏微分方程的不变分布. *ESAIM*：数学建模与数值分析, 56(1):151–175, 2022.[3] C.-E. Br´ehier. 抛物型半线性随机偏微分方程修正的正则性保持欧拉格式分析：数值近似不变分布的全变差误差界. 计算数学基础, 第 1–76 页 , 2024.[4] C.-E. Br´ehier. 加速指数 Euler 格式近似抛物型半线性随机偏微分方程的全变差误差界. *SIAM* 数值分析杂志, 62(3):1171–1190, 2024.[5] C.-E. Br´ehier. 使用标准欧拉格式近似抛物型半线性随机偏微分方程不变分布的全变差误差界. 位势分析, 62(1):101–136, 2025.[6]C.-E. Br´ehier 和 A. Debussche. 非线性扩散系数随机偏微分方程的柯尔莫哥洛夫方程与弱阶分析. 纯粹与应用数学杂志 ´´, 119:193–254, 2018.[7] C.-E. Br´ehier 和 L. Gouden`ege. 随机 Allen–Cahn 方程分裂格式的弱收敛速率. *BIT*, 60(3):543–582, 2020.[8] C.-E. Br´ehier、A. B. Laurent、A. Debussche 和 G. Vilmart. 抛物型半线性随机偏微分方程不变分布高阶采样的预条件. *arXiv* 预印本 *arXiv:2512.17714*, 2025.[9] M. Cai、S. Gan 和 X. Wang. 加性噪声随机 Allen–Cahn 方程显式全离散格式的弱收敛速率. 《科学计算杂志》, 86:1–30, 2021年.

[10] S. Cerrai. 有限与无限维二阶偏微分方程：一种概率方法. Springer, 2001.[11] Q. Cheng, C. Liu, and J. Shen. 基于拉格朗日坐标中的流动力学方法的 Allen-Cahn 型方程新界面捕捉方法 I：一维情形. 计算物理学杂志, 419:109509, 2020.[12] J. Cui, J. Hong, and L. Sun. 非全局 Lipschitz 连续系数抛物型随机偏微分方程全离散格式的弱收敛与不变测度. 《随机过程及其应用》, 134:55–93, 2021.[13] J. Cui and L. Sun. 尖锐界面极限附近随机反应扩散方程的弱逼近. *arXiv* 预印本 *arXiv:2307.08241v2*, 2024.[14] J. Cui and F.-Y. Wang. 改进尖锐界面极限附近随机反应扩散方程的数值误差界. *arXiv* 预印本 *arXiv:2412.12604*, 2024.[15] G. Da Prato. 无限维分析导论. Springer Science & Business Media, 2006.[16] X. Feng, Y. Li, and Y. Zhang. 带梯度型乘性噪声的随机 Allen–Cahn 方程的有限元方法. *SIAM* 数值分析杂志, 55(1):194–216, 2017.[17] T. Funaki. 随机反应扩散方程的奇异极限与随机界面的生成. 数学学报, 15(3):407–438, 1999.[18] M. Hairer, M. Ryser, and H. Weber. 二维随机 Allen-Cahn 方程的平凡性.电子概率学杂志, 17(39):1–14, 2012.[19] M. Hairer and H. Weber. 二维和三维白噪声驱动非线性随机偏微分方程的大偏差. 载于图卢兹数学学院年刊 ´：数学 ´学, 第24卷，第55–92页，2015.[20] C. Huang and J. Shen. 带乘性噪声的随机 Allen–Cahn 方程全离散半隐式格式的稳定性与收敛性分析. 数学计算, 92(344):2685–2713, 2023.[21] A. Jentzen and P. Puˇsnik. 非全局 Lipschitz 连续非线性随机演化方程显式数值逼近方法的强收敛速率. *IMA*数值分析杂志, 40(2):1005–1050, 04 2019.[22] Y. Jiang and X. Wang. 非全局 Lipschitz 系数随机偏微分方程显式全离散格式的一致时间弱误差估计. *arXiv* 预印本 *arXiv:2504.21364*, 2025.[23] K. Kawasaki and T. Ohta. 界面的动力学鼓面模型 I. 理论物理学进展, 67(1):147–163, 1982.

[24] R. Kruse. 半线性随机演化方程的强逼近与弱逼近. Springer, 2014.[25] Z. Liu and J. Shen. 一类新型超线性随机偏微分方程驯化格式的几何遍历性与最优误差估计. *arXiv* 预印本 *arXiv:2502.19117*, 2025.[26] A. K. Majee and A. Prohl. 带乘性噪声的随机 Allen–Cahn 方程时空离散的最优强收敛阶. 《应用数学计算方法》, 18(2):297–311, 2018.[27] A. Neufeld and Y. Zhang. 非凸情形下修正的驯化非调整 Langevin 算法的非渐近收敛界. 《数学分析与应用杂志》, 543(1):128892, 2025.[28] A. Pazy. 线性算子半群及其在偏微分方程中的应用. Springer, 1983.[29] R. Qi and X. Wang. 加性噪声随机 Allen–Cahn 方程 Galerkin 有限元方法的最优误差估计. 《科学计算杂志》, 80:1171–1194, 2019.[30] S. Sabanis. 变系数 Euler 近似：扩散系数超线性增长的情形. 《应用概率年刊》, 26(4):2083–2105, 2016.[31] V. Thom´ee. 抛物问题的 *Galerkin* 有限元方法, 第25卷. Springer Science & Business Media, 2007.[32] X. Wang. 用于随机 Allen–Cahn 方程强逼近的高效显式全离散格式. 《随机过程及其应用》, 130(10):6271–6299, 2020.[33] X. Wang and R. Qi. 关于带加性噪声抛物型随机偏微分方程加速指数 Euler 方法的一则注记. 《应用数学快报》, 46:31–37, 2015.[34] Y. Wang and W. Cao. 通过显式全离散格式逼近随机 Allen–Cahn 方程的不变测度. *arXiv* 预印本 *arXiv:2408.00953*, 2024.[35] H. Weber. 关于随机 Allen–Cahn 方程的短时渐近行为. *IHP*概率论年刊 ´与统计学, 46(4):965–975, 2010.[36] J. Zhang and Q. Du. 尖锐界面极限下 Allen–Cahn 方程离散近似的数值研究. 《*SIAM* 科学计算杂志》, 31(4):3042–3063, 2009.