arXiv:2601.01899v1 [math.AP] 5 Jan 2026

黎曼流形上某些带梯度依赖反应项的 $(p,\ q)$-拉普拉斯方程的刘维尔型定理

YOUDE WANG§ 和 LIQIN ZHANG†

Abstract. 本文结合Bochner公式、Saloff-Coste的Sobolev不等式和Nash-Moser迭代法，研究定义在完备黎曼流形 $(M,\ g)$ 上的非线性椭圆方程 $\Delta_p u+\Delta_q u+h(u,\ |\nabla u|^2)\ =\ 0$ 的解的局部和整体性质，其中 $q\geq p>1$、 $h\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 以及 $\Delta_z u=\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{z-2}\nabla u\right)$，在 $z\in\{p,\ q\}$的情况下，是通常的 z-拉普拉斯算子。在关于 p、 q 和 $h(x,\ y)$ 的某些假设下，我们推导出上述方程解的简洁梯度估计，进而获得一些刘维尔型定理。特别地，我们利用积分估计方法证明：若 u 是定义在具有非负里奇曲率且$\dim M=n\geq 2$的完备非紧黎曼流形 M 上的 $\Delta_p u+\Delta_q u=0$ $(n\leq p\leq q)$ 的非负整体解，则 u 是平凡常数解。

关键词：梯度估计；*Nash-Moser*迭代；刘维尔型定理

MSC[2020] 主要分类号 58J05，35B53，35J92；次要分类号 35B45，35B08，35B09。

目录

1. 引言 1**1.1. 研究历史与动机** 2**1.2. 主要结果** 4**1.3. 论文结构** 6**2. 预备引理** 6**3. 定理 1.1 的证明** 7**4. 定理 1.2 的证明** 9**4.1. p-Laplace $+$ q-Laplace 算子的线性化算子的估计** 9**4.2. 推导主要积分不等式。** 11**4.3. L^{β_1}- 界：测地球内 (1.1) 的解的梯度** 14**4.4. 对方程 (1.1) 18 的解进行莫泽迭代 4.5. 定理 1.2 的证明** 20**5. 若干进一步应用** 21**参考文献** 22

1. 引言

梯度估计是研究黎曼流形上偏微分方程的一项基础技术。事实上，我们可以利用梯度估计推出刘维尔型定理（[37, 49, 28]）、导出哈纳克不等式（[40, 49, 28]）、研究流形几何（[46, 28]）等。

本文研究定义在配备度量 g 的完备黎曼流形 (M,g) 上的以下 (p,q)-方程

$$\Delta_p u+\Delta_q u+h(u,|\nabla u|^2)=0, \tag{1.1}$$

§ 通讯作者：1. 广州大学数学与信息科学学院；2. 数学科学国家重点实验室（SKLMS）、数学与系统科学研究院及中国科学院大学数学科学学院，北京 100190，中国。电子邮箱：wyd@math.ac.cn。

‡ 广州大学数学与信息科学学院，广州 510006，中华人民共和国。电子邮箱：1061837643@qq.com。

其中 $q \geq p > 1$, $h \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 和 $\Delta_z u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{z-2}\nabla u\right)$，其中 $z \in \{p, q\}$，是通常的 z-拉普拉斯算子。该方程是一个退化拟线性椭圆方程，并涵盖了一些著名方程，例如 Hamilton-Jacobi 方程（见 [29]）。

1.1. **历史与研究动机**。

鉴于本文内容与双相问题密切相关，我们先简要介绍其背景。双相问题 (1.1) 的研究动机源于数理物理中的众多模型。例如，我们可以参考出现在电磁学中的 Born-Infeld方程 [12]:

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1-2|\nabla u|^2}}\right) = h(u) \quad \text{in } \Omega,$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域，具有 C^2-边界 $\partial\Omega$。事实上，根据泰勒公式，我们有 e

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x}} = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \cdots + \frac{(2m-3)!!}{(m-1)!}x^{m-1} + \cdots.$$

取 $x = |\nabla u|^2$ 并采用一阶近似，我们得到关于 $p = 2$ 和$q = 4$的问题 (1.1)。此外， m 阶近似问题由多相微分算子驱动

$$-\Delta u - \Delta_4 u - \frac{3}{2}\Delta_6 u - \cdots - \frac{(2m-3)!!}{(m-1)!}\Delta_{2m} u.$$

此外，算子 $\Delta_p + \Delta_q$ 也与以下泛函直接相关:

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega (a(x)|\nabla u|^p + |\nabla u|^q)dx, \quad u \in W^{1,\max\{p,q\}}(\Omega),$$

若 $a(x) \equiv 1$。此类泛函 $\mathcal{F}(u)$ 最早由 Marcellini [33, 34] 和 Zhikov [50, 51], 在变分法与非线性弹性理论问题的背景下进行研究，其中包括拉夫伦季耶夫间隙现象。相应的算子用于描述扩散型过程，在这些过程中，某些子区域与其他区域有所区别。例如，这种结构可用于描述一种复合材料：在 $\{x \in \Omega : a(x) = 0\}$ 上，能量密度具有 q-增长；而在 $\{x \in \Omega : a(x) > 0\}$ 上，能量密度具有 p-增长。

现在让我们回顾一些与本文密切相关的已有结果。Bobkov 和 Tanaka[10] 也研究了 (p, q)-拉普拉斯方程的正解

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = \alpha_1|u|^{p-2}u + \alpha_2|u|^{q-2}u \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

满足狄利克雷边界条件 $u = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上。他们完整描述了（α_1, α_2）平面中与上述问题正解的存在性和不存在性相对应的二维集合。此外，在 [11] 他们最近研究了（p, q）-拉普拉斯方程正解的多重性。

B. Alreshidi、D. D. Hai 和 R. Shivaji 在 [1] 研究了（p, q）-拉普拉斯方程正解的存在性

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda_0 h_0(u), & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

其中，Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域， $h_0 : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ 是连续的，在 ∞ 处是 p-次线性的，并且允许在零点处奇异； $\lambda_0 > 0$ 是一个大参数。S. El Manouni、K. Perera 和 P. Winkert [19] 最近研究了（p, q）-拉普拉斯算子的第一特征值及一些相关问题。

与此同时，对于 (p, q)-拉普拉斯方程的定义域为欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 或黎曼流形的情形，V. Ambrosio [2] 考虑了非线性 (p, q)-薛定谔方程

$$\begin{cases} -\epsilon^p\Delta_p u - \epsilon^q\Delta_q u + V(x)(|u|^{p-2}u + |u|^{q-2}u) = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^n \\ 0 < u \in W^{1,q}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

其中 $\epsilon > 0$ 是一个小参数， $n \geq 3, 1 < p < q < n$, V是一个连续势函数，满足 $V_0 = \inf_{x\in\Lambda} V <$min $_{x\in\partial\Lambda} V$，其中某个有界开集为 $\Lambda \in \mathbb{R}^n$； f 是一个连续的次临界 Berestycki-Lions 型非线性项，满足 $f(t) = 0$，其中 $t \leq 0$。通过变分论证，作者得到了 (p, q)-薛定谔方程的一个解 u_ϵ，并研究了当 $\epsilon \to 0$ 时 u_ϵ 的集中性。此外，对于较小的 $\epsilon > 0$，通过对修正问题的解采用某些一致估计，作者证明了为修正问题构造的解也能导出原问题的解。

此外，V. Ambrosio [3] 研究了以下这类(p, q)-拉普拉斯问题：

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = g(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

其中 $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$，其中 $n \geq 2$、 $1 < p < q \leq n$ 和 g： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 Berestycki-Lions 型非线性项。通过采用适当的变分论证，他得到了基态解的存在性，并证明了存在无穷多个径向对称解。

最近， 本文作者在 [47] 讨论了解的梯度估计，针对以 e
下方程 与上述类型相同的 n (1.2)，即

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = a|u|^{s-1}u + b|u|^{l-1}u$$

定义在里奇曲率有下界的完备非紧黎曼流形上，其中$q > p > 1$、 a、 b、 s 和 l 均为常数，并由此导出一些刘维尔定理。特别地， [47] 证明了，若 u 是定义在 M上的非负 (p, q)-调和函数，即在具有非负里奇曲率且维数为 $M = n \geq 3$ 的完备非紧黎曼流形 M 上，方程$\Delta_p u + \Delta_q u = 0\,(1 < p < q)$的一个非负整体解，并且 $f = |\nabla u|^2 \in L^\beta(M)$，其中 $\beta > \delta(n, p, q) > 0$，那么 u 就是一个平凡常数解。

后来，Yang 和本文作者在 [48] 中指出，若定义在具有非负里奇曲率且维数为 $M = n \geq 3$ 的完备非紧黎曼流形 M 上的方程$\Delta_p u + \Delta_q u = 0\,(1 < p \leq q)$的整体正解 u 满足

$$\lim_{M\ni x\to\infty} \frac{u(x)}{d(x_0, x)} = 0$$

因此 某些 $x_0 \in M$，其中 $d(x_0, x)$ 表示 x_0 与 x之间的距离，那么 u 是一个常数 t.

Shen 和 Zhu 在 [44] 中采用 [27] 中的方法证明了正的（p, q）调和函数的刘维尔定理，前提是

$$\frac{4(p-1)(q-1)}{(p-q)^2} > (n-1).$$

此外，还需指出，近年来已有多项研究致力于相关问题，许多论文探讨了有界区域和无界区域中的（p, q）-拉普拉斯算子问题。相关参考文献例如：Ambrosio 等人 [4], 、Baldelli 等人 [5, 6], 、Baldelli 和 Filippucci [7], 、Cherfils 和 Il'yasov [16], 、C. He 和 G. Li [23]。更多结果参见 [32]，该文简要介绍了近期关于有界区域中含（p, q）-拉普拉斯算子的椭圆方程 Dirichlet问题的存在性与多重性定理。

对于上述与泛函 $\mathcal{F}(u)$ 相关的各向异性 (p, q)-拉普拉斯算子，Liu 和 N.S. Papa- georgiou [31] 研究了一个参数非线性 Dirichlet问题，该问题由双相微分算子驱动，反应项则包含参数"凹"项与"凸"扰动的相互竞争效应（凹凸问题），即

$$-\Delta_p^a u - \Delta_q u = \lambda|u|^{\tau-2}u + f(x, u) \quad \text{in } \Omega$$

¯其狄利克雷边界值为 $u = 0$，定义在 $\partial\Omega$ 上。给定 $a \in C(\Omega \setminus \{0\})$，且对所有 $x \in \Omega$ 都有 $a(x) \geq 0$，我们用 Δ_p^a 表示权重为 $a(x)$的加权 p-拉普拉斯算子，其定义为

$$\Delta_p^a u = \operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

结合使用变分工具、截断与比较技巧以及临界群，我们证明，对于所有充分小的参数值，该问题至少有三个非平凡有界解。关于双相边值问题的更多多重性结果，可参见 [30, 38]及其中的参考文献。Mingione-Radulescu [36] 和 Ragusa-Tachikawa [39]的论文详细介绍了迄今取得的进展。

另一方面，当 $p = q$ 时，方程 (1.1) 化为以下形式

$$\Delta_p u + \frac{1}{2} h(u, |\nabla u|^2) = 0,$$

其中包括著名的 Lane-Emden 方程和 Hamilton-Jacobi 方程，并且早已成为大量文献研究的主题。关于该方程解的局部和整体性质，人们已取得显著进展（见 [9, 13, 14, 20, 24, 26, 29, 43, 49]）。特别是，He、Wang 和 Wei [27]最近证明，以下方程的任意正解 $u \in C^1(B_R(o))$

$$\Delta_p u + u^l = 0$$

with

$$l \in \left(-\infty, \frac{(n+3)(p-1)}{n-1}\right)$$

定义在完备黎曼流形 (M, g) 上的测地球 $B_R(o)$ 内，且其里奇曲率 $\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)\kappa g$满足

$$\sup_{B_{R/2}(o)} \frac{|\nabla u|}{u} \leq C(n, p, l) \frac{1 + \sqrt{\kappa} R}{R}.$$

不久之后，Han、He 和 Wang 在 [21, 22] 中证明，以下粘性 Hamilton-Jacobi 方程的任意解 $u \in C^1(B_R(o))$

$$\Delta_p u - |\nabla u|^r = 0$$

其中 $r > p - 1$ 定义在完备黎曼流形 (M, g) 上的测地球 $B_R(o)$ 内，且其里奇曲率 $\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)\kappa g$ 满足

$$\sup_{B_{R/2}(o)} |\nabla u| \leq C(n, p, r) \left(\frac{1 + \sqrt{\kappa} R}{R}\right)^{\frac{1}{r-p+1}},$$

这改进了 [8, 29] 中的结论。

现在，我们回到 (p, q)-拉普拉斯方程。如果 $h(u, |\nabla|^2) = a|\nabla u|^r$，其中 a 是一个常数，则 (1.1) 化为以下方程

$$\Delta_p u + \Delta_q u + a|\nabla u|^r = 0, \tag{1.3}$$

该方程可视为上述 Hamilton-Jacobi 方程的自然推广。在 (1.3) 中 $a = 0$ 的情形下，我们称 (1.3) 为 (p, q)-调和函数方程。

对于上述方程 (1.3)，我们想提出以下两个问题:

(1) 一个根本且重要的问题是：在具有非负里奇曲率的完备非紧黎曼流形 M 上，关于 (p, q)-调和函数的刘维尔定理是否仍然成立？(2) 另一个自然问题是：对于上述方程 (1.3) 的解，是否存在与 *Hamilton-Jacobi* 方程类似的梯度估计？

对于上述问题 (1)，除非 [44, 47, 48], provided $p \neq q$，本文作者不了解任何关于 (p, q)-调和函数的结果。对于第二个问题，据作者所知，相关文献似乎很少。

本文旨在部分回答上述两个问题。为此，由于 (p, q)-拉普拉斯算子比 p-拉普拉斯算子更复杂，我们需要克服一些新的困难，并采用一些新的技巧。

1.2. **主要结果**。

在（任意）区域 Ω 中，方程 (1.1) 的一个解 u 是指一个解 $u \in C^1(\Omega) \cap C^3(\tilde{\Omega})$，其中 $\tilde{\Omega} = \{x \in \Omega : |\nabla u(x)| \neq 0\}$。值得一提的是，若 (1.1) 的系数满足某些适当条件，则众所周知，(1.1) 的任意解都满足 $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$，其中某个 $\alpha \in (0, 1)$（例如，参见 [18, 25, 41, 45]）。

现在我们可以陈述主要结果。首先，我们研究定义在维数为 $\dim M = n \geq 2$ 的流形 (M, g) 上的拟线性椭圆微分不等式的非负解。受.....启发，

[14] 我们采用积分估计方法证明如下关于 (p,q)-调和函数的刘维尔定理。

定理 1.1. 设$(M,\ g)$是一个具有非负里奇曲率的完备非紧黎曼流形。若 $u \in C^1(M)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta_p u + \Delta_q u \le 0, & in\ M, \\ u \ge 0, & in\ M, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $n \le p \le q$，则 u 是一个非负常数。特别地，若 u 是下列方程的一个非负解

$$\Delta_p u + \Delta_q u = 0,$$

则 u 是一个平凡常数解。

其次，受 [21, 22, 46, 47] 的启发，我们将结合 Bochner公式、Saloff-Coste 的 Sobolev 不等式和 Nash-Moser迭代方法，研究定义在完备黎曼流形上的上述方程 (1.1) 的梯度估计和刘维尔性质。在对 h 作出一些假设的条件下，我们可以给出 (1.1) 的解的梯度估计，这可以视为对 [21] 中结果的推广。

定理 1.2。 设 $(M,\ g)$ 为一个具有 里奇曲率 $\ge -(n-1)\kappa$ $(\kappa \ge 0,\ n \ge 3)$ 的完备黎曼流形，并设 u 是方程 (1.1) 在 $\Omega = B(o,R) \subset M$中的一个解。假设 $h \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 满足以下两个条件之一

(1) $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \le 0,\quad \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2 \le \mu^2 y^{r-2} \quad and \quad h^2(x,y) \ge \lambda y^r$;

(2) $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \le -\lambda y^{r-\frac{q}{2}} \quad and \quad \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2 \le \mu^2 y^{r-2}$,

其中 $r > q-1 \ge p-1 > 0$、 $\lambda > 0$和 $\mu > 0$。那么，对于任意给定的 $\delta > 0$和 $\theta > 1$，存在一个正的常数 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(n,p,q,\lambda,r,\delta,\theta)$，使得

$$\sup_{B_{R/4}(o)} |\nabla u|^2 \le \widetilde{\mathcal{C}} \left[\left(\frac{1+\kappa R^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{r-p+1}} + \left(\frac{1+\kappa R^2}{R^2} \right)^{\frac{\theta}{r-q+1}} \right],$$

其中 $R > \delta > 0$。特别地，当 R 足够大时， $\mathcal{C}$ 不依赖于 δ。

注 1。 这里我们想就上述推论给出几点评论。

(1) 当 $p = q$ 属于 (1.1) 时，从第 4 节给出的论证很容易看出，可以选择$\theta = 1$ 和 $\delta = 0$。换言之，我们可以得到 [22] 中的结果。(2) 事实上，对于 $\dim(M) = 2$ 的情形，我们也可以得到与 $\dim(M) \ge 3$的情形类似的一些结论。(3) 对函数 $h(x,\ y)$ 的假设 (1) 和 (2) 可以减弱；实际上，只需假设$h(u(x)\ f(x)) \equiv h(u(x)\ |\nabla u(x)|^2)$ 关于 x逐点满足定理 1.2 中所述的上述两个条件之一即可。从第 4 节给出的论证很容易看出这一点。

利用上述定理，我们可以很容易地得到以下刘维尔型定理。

推论 1.3. 设$(M,\ g)$ $(\dim(M) \ge 3)$ 是一个具有非负里奇曲率的完备非紧黎曼流形，且 u 是方程 (1.1) 在 M 中的一个解。假设 $h \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 满足以下两个条件之一

(1) $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \le 0,\quad \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2 \le \mu^2 y^{r-2} \quad and \quad h^2(x,y) \ge \lambda y^r$;

(2) $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \le -\lambda y^{r-\frac{q}{2}} \quad and \quad \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2 \le \mu^2 y^{r-2}$,

其中 $r > q-1 \ge p-1 > 0$、 $\lambda > 0$ 和 $\mu > 0$。那么，要么 u 是常数，要么 u 不存在。

现在，假设在 (1.1) 中 $h(u,|\nabla u|^2) = a|\nabla u|^r$，其中 $a \ne 0$ 和 $r > q-1$，换言之，(1.1) 化简为方程 (1.3):

$$\Delta_p u + \Delta_q u + a|\nabla u|^r = 0.$$

容易看出， $h(x,y)$ 满足定理 1.2 中提出的条件，因此我们得到以下定理。

定理 1.4。 设$(M、\ g)$ 是一个具有里奇曲率 $\geq -(n-1)\kappa$ $(\kappa \geq 0,\ n \geq 3)$且 $1 < p \leq q$的完备黎曼流形。如果 u 是上述方程(1.3) 在 M上的一个解，其中 $a \neq 0$ 且 $r > q-1$，那么，对于$\widetilde{\ \ }$ $\widetilde{\ }$任意给定的 $\delta > 0$和 $\theta > 1$，存在一个正常数 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(n、\ p、\ q、\ \lambda、\ r、\ \delta、\ \theta)$ 使得

$$\sup_{B_{R/4}(o)} |\nabla u|^2 \leq \widetilde{\mathcal{C}} \left[\left(\frac{1+\kappa R^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{r-p+1}} + \left(\frac{1+\kappa R^2}{R^2} \right)^{\frac{\theta}{r-q+1}} \right],$$

其中 $R > \delta > 0$。

此外，根据推论 1.3，我们有如下结论:

推论 1.5。 设 $1 < p \leq q$ 和 M （维数(M) ≥ 3）是一个具有非负里奇曲率的完备非紧黎曼流形。如果 u 是上述方程(1.3) 在 M上的一个解，即 u 满足

$$\Delta_p u + \Delta_q u + a|\nabla u|^r = 0,$$

其中 $a \neq 0$ 和 $r > q-1$，则 u 是一个平凡常数解。

1.3. **论文结构**。O

本文的结构如下:

在第 2 节中，我们首先回顾一些预备知识，然后建立若干重要引理，这些引理将在 Nash-Moser 迭代过程中发挥关键作用。在第 3 节中，我们借助 Bishop-Gromov 体积估计给出定理 1.1 的一个简洁证明，其灵感来自[14]。在第 4 节中，我们使用 Nash-Moser迭代方法证明定理 1.2，这是本文的主体内容。第 5 节介绍了一些进一步应用。

2. 预备引理

本文中，我们将 (M,g) 记为一个 n 维黎曼流形 $(n \geq 3)$，并将 ∇ 记为相应的列维-奇维塔联络。我们将体积形式

$$d\mathrm{vol} = \sqrt{\det(g_{ij})}dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

其中，$(x_1, \cdots, x_n)$ 是局部坐标，为简便起见，我们通常省略 M 上积分的体积形式。

z-拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_z u = \mathrm{div}\left(|\nabla u|^{z-2} \nabla u \right),$$

其中 z 是一个实数。现在我们考虑 z-拉普拉斯算子的线性化算子 $\mathcal{L}_z$：

$$\mathcal{L}_z(\psi) = \mathrm{div}\left(f^{\frac{z}{2}-1} A_z\left(\nabla\psi\right) \right), \tag{2.1}$$

其中 $f = |\nabla u|^2$，并且

$$A_z\left(\nabla\psi\right) = \nabla\psi + (z-2)f^{-1}\langle\nabla\psi, \nabla u\rangle\nabla u. \tag{2.2}$$

我们首先推导 $\mathcal{L}_z(f)$ 的一个有用表达式。

引理 2.1。等式

$$\mathcal{L}_z(f) = \left(\frac{z}{2}-1\right) f^{\frac{z}{2}-2} |\nabla f|^2 + 2f^{\frac{z}{2}-1} \left(|\nabla\nabla u|^2 + \mathrm{Ric}\left(\nabla u, \nabla u\right) \right) + 2\langle \nabla\Delta_z u, \nabla u\rangle$$

在 $\{x \in M:\ f(x)\ > 0\}$ 中逐点成立。

证明。 由 (2.2)，可得

$$A_z\left(\nabla f\right) = \nabla f + (z-2)f^{-1}\langle\nabla f, \nabla u\rangle\nabla u. \tag{2.3}$$

结合（2.1）和（2.3），我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_z(f) = &\left(\frac{z}{2}-1\right) f^{\frac{z}{2}-2}|\nabla f|^2 + f^{\frac{z}{2}-1}\Delta f + (z-2)\left(\frac{z}{2}-2\right) f^{\frac{z}{2}-3}\langle\nabla f, \nabla u\rangle^2 \\ &+ (z-2)f^{\frac{z}{2}-2}\langle\nabla\langle\nabla f, \nabla u\rangle, \nabla u\rangle + (z-2)f^{\frac{z}{2}-2}\langle\nabla f, \nabla u\rangle\Delta u. \end{aligned} \tag{2.4}$$

另一方面，根据 z-拉普拉斯算子的定义，我们有

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla \Delta_z u, \nabla u\rangle =& (z-2)\left(\frac{z}{2}-2\right) f^{\frac{z}{2}-3}\langle \nabla f, \nabla u\rangle^2 + (z-2) f^{\frac{z}{2}-2}\langle \nabla\langle \nabla f, \nabla u\rangle, \nabla u\rangle \\ &+ (z-2) f^{\frac{z}{2}-2}\langle \nabla f, \nabla u\rangle \Delta u + 2 f^{\frac{z}{2}-1}\langle \nabla \Delta u, \nabla u\rangle. \end{aligned} \tag{2.5}$$

结合（2.4）和（2.5），我们得到

$$\mathcal{L}_z(f) = \left(\frac{z}{2}-1\right) f^{\frac{z}{2}-2}|\nabla f|^2 + f^{\frac{z}{2}-1}\Delta f + 2\langle \nabla \Delta_z u, \nabla u\rangle - 2 f^{\frac{z}{2}-1}\langle \nabla \Delta u, \nabla u\rangle. \tag{2.6}$$

由（2.6）及以下 Bochner公式

$$\tfrac{1}{2}\Delta f = |\nabla \nabla u|^2 + \mathrm{Ric}\,(\nabla u, \nabla u) + \langle \nabla \Delta u, \nabla u\rangle,$$

我们完成了引理 2.1 的证明。 □

后续还将用到另一个工具，即以下引理（证明见 [15]）：

引理 2.2。 假设 $\phi(t)$ 是定义在 $[T_0, T_1]$ 上的正有界函数。若对所有$T_0 \le t < s \le T_1$， ϕ 满足

$$\phi(t) \le \theta_0 \phi(s) + \frac{A}{(s-t)^{\alpha_0}} + B,$$

其中 $\theta_0 < 1$、 A、 B 和 α_0 是一些非负常数。于是，对于任意 $T_0 \le \rho < \tau \le T_1$，存在

$$\phi(\rho) \le C(\alpha_0, \theta_0)\left[\frac{A}{(\tau-\rho)^{\alpha_0}} + B\right],$$

其中 C（α_0， θ_0） 是一个正常数，仅依赖于 α_0 和 θ_0。此外，若令 $\theta_0 = \dfrac{1}{2}$，并使 α_0 在一个有界区间内变化，则存在一个正常数 C_0，使得 C（α_0，$_{1\,2}$） $\le C_0$。 –

最后，我们回顾以下引理，它将在主要定理的证明中发挥关键作用。

引理 2.3。 *(Saloff-Coste* [42]*)* 设（M， g）是一个满足 $Ric \ge -$（$n-1$）κ 的完备流形。对于 $n > 2$，存在一个正常数 C_n，仅依赖于 n，使得对于所有半径为 R 且体积为 V 的 $B \subset M$，当 $h \in C_0^\infty$（B） 时，我们有

$$\|h\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(B)} \le \exp\left\{C_n(1+\sqrt{\kappa}R)\right\} V^{-\frac{2}{n}} R^2 \left(\int_B |\nabla h|^2 + R^{-2}h^2\right).$$

对于 $n = 2$，上述不等式在将 n 替换为任意固定的 $n' > 2$ 后仍成立。

3. 定理 1.1 的证明

本节不采用 Moser迭代法，而是改用积分估计方法，对定理 1.1 给出一个简单证明。

定理 1.1 的证明

证明。 设 $\eta \in C_0^\infty(M)$ 是一个非负函数。将 (1.4) 乘以 $(u+1)^{1-q}\eta^q$，并在M上积分，可得

$$\int_M (\Delta_p u + \Delta_q u)(u+1)^{1-q}\eta^q \le 0.$$

分部积分可得

$$-\int_M \left\langle f^{\frac{p}{2}-1}\nabla u + f^{\frac{q}{2}-1}\nabla u,\ \nabla\left[(u+1)^{1-q}\eta^q\right]\right\rangle \le 0.$$

因此，我们有

$$(q-1)\int_M \left(f^{\frac{p}{2}} + f^{\frac{q}{2}}\right)(u+1)^{-q}\eta^q \le q\int_M \left(f^{\frac{p}{2}-1} + f^{\frac{q}{2}-1}\right)(u+1)^{1-q}\eta^{q-1}\langle \nabla u, \nabla \eta\rangle. \tag{3.1}$$

由绝对值不等式和柯西不等式可得

$$\begin{aligned}
&q\int_M \left(f^{\frac{p}{2}-1}+f^{\frac{q}{2}-1}\right)(u+1)^{1-q}\eta^{q-1}\langle\nabla u,\nabla\eta\rangle\\
\leq& q\int_M \left(f^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}+f^{\frac{q}{2}-\frac{1}{2}}\right)(u+1)^{1-q}\eta^{q-1}|\nabla\eta|\\
\leq&\frac{q-1}{2}\int_M \left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)(u+1)^{-q}\eta^{q}+\frac{q^2}{2(q-1)}\int_M \left(f^{\frac{p}{2}-1}+f^{\frac{q}{2}-1}\right)(u+1)^{2-q}\eta^{q-2}|\nabla\eta|^2.
\end{aligned}$$

将上述不等式代入 (3.1)，得到

$$\frac{(q-1)^2}{q^2}\int_M \left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)(u+1)^{-q}\eta^{q}\leq\int_M \left(f^{\frac{p}{2}-1}+f^{\frac{q}{2}-1}\right)(u+1)^{2-q}\eta^{q-2}|\nabla\eta|^2. \tag{3.2}$$

利用杨不等式和 $p>2$，得到

$$\int_M f^{\frac{p}{2}-1}(u+1)^{2-q}\eta^{q-2}|\nabla\eta|^2\leq\frac{(q-1)^2}{2q^2}\int_M f^{\frac{p}{2}}(u+1)^{-q}\eta^{q}+\mathcal{C}(p,q)\int_M(u+1)^{p-q}\eta^{q-p}|\nabla\eta|^p$$

and

$$\int_M f^{\frac{q}{2}-1}(u+1)^{2-q}\eta^{q-2}|\nabla\eta|^2\leq\frac{(q-1)^2}{2q^2}\int_M f^{\frac{q}{2}}(u+1)^{-q}\eta^{q}+\mathcal{C}(q)\int_M|\nabla\eta|^q.$$

将上述不等式代入 (3.2)，得到

$$\frac{(q-1)^2}{2q^2}\int_M \left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)(u+1)^{-q}\eta^{q}\leq\mathcal{C}(p,q)\int_M(u+1)^{p-q}\eta^{q-p}|\nabla\eta|^p+\mathcal{C}(q)\int_M|\nabla\eta|^q.$$

此外，由 (3.2) 可知，在 $p=2$ 条件下上述不等式同样成立。由于 $p\leq q$和 $u\geq 0$，可得

$$\frac{(q-1)^2}{2q^2}\int_M \left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)(u+1)^{-q}\eta^{q}\leq\mathcal{C}(p,q)\int_M\eta^{q-p}|\nabla\eta|^p+\mathcal{C}(q)\int_M|\nabla\eta|^q.$$

设 $\Phi\in C^\infty(\mathbb{R})$ 是一个非负函数，使得 $0\leq\Phi\leq 1$, $\Phi'\leq 0$, $\Phi=1$ 在 $(-\infty,\ 1]$, $\Phi=0$ 上$[2,+\infty)$ 上成立，且对于某个正数常数 C，有 $|\Phi'|\leq C$。对于任意 $\rho>1$，定义

$$\Psi=\Phi\left(\frac{\log r_0}{\log\rho}\right),$$

其中， r_0 是距离函数。于是，在 B_ρ上有 $\Psi\equiv 1$ ，在$B^c_{\rho^2}$ 上有 $\Psi\equiv 0$ ，并且

$$|\nabla\Psi|\leq\frac{C}{r_0\log\rho}$$

在 $B_{\rho^2}\setminus B_\rho$上。取 $\eta=\Psi$ ，并结合上述积分不等式可得

$$\frac{(q-1)^2}{2q^2}\int_{B_\rho} \left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)(u+1)^{-q}\leq\frac{\mathcal{C}}{(\log\rho)^p}\int_{B_{\rho^2}\setminus B_\rho}\frac{1}{{r_0}^p}+\frac{\mathcal{C}}{(\log\rho)^q}\int_{B_{\rho^2}\setminus B_\rho}\frac{1}{{r_0}^q}. \tag{3.3}$$

令 $V(r_0)=\mathrm{vol}(B_{r_0})$ 和 $S(r_0)=\mathrm{meas}(\partial B_{r_0})$ 分别表示 B_{r_0} 和 ∂B_{r_0} 的面积。然后，利用余面积公式（即 $V'=S$）、分部积分以及 Bishop-Gromov体积比较定理，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_{B_{\rho^2}\setminus B_\rho}\frac{1}{{r_0}^z}=\int_\rho^{\rho^2}\frac{1}{{r_0}^z}S(r_0)dr_0&=\left[\frac{1}{{r_0}^z}V(r_0)\right]_\rho^{\rho^2}+z\int_\rho^{\rho^2}\frac{1}{{r_0}^{z+1}}V(r_0)dr_0\\
&\leq\mathcal{C}\left(\frac{1}{\rho^{z-n}}+\int_\rho^{\rho^2}\frac{1}{r_0^{z+1-n}}dr\right)\\
&\leq\begin{cases}\mathcal{C}(1+\log\rho), & z=n,\\ \dfrac{\mathcal{C}}{\rho^{z-n}}, & z>n.\end{cases}
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\frac{\mathcal{C}}{(\log\rho)^z}\int_{B_{\rho^2}\setminus B_\rho}\frac{1}{{r_0}^z} \le \begin{cases} \dfrac{\mathcal{C}(1+\log\rho)}{(\log\rho)^n}, & z=n, \\ \dfrac{\mathcal{C}}{\rho^{z-n}(\log\rho)^z}, & z>n. \end{cases}$$

因此，我们可以推得

$$\lim_{\rho\to+\infty}\frac{\mathcal{C}}{(\log\rho)^z}\int_{B_{\rho^2}\setminus B_\rho}\frac{1}{{r_0}^z}=0, \tag{3.4}$$

对任意 $z \ge n$。结合 (3.3) 和 (3.4)，我们得到

$$\int_M \left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)(u+1)^{-q}=0,$$

这意味着

$$|\nabla u| \equiv 0 \quad \text{in } M.$$

综上，我们完成了定理 1.1 的证明。 □

4. Proof of Theorem 1.2

首先，我们需要给出 $\mathcal{L}_{p,q}(f)$ 的逐点估计，其中 $\mathcal{L}_{p,q}$ 是 u 处 $\Delta_p+\Delta_q$ （p-拉普拉斯算子与 q-拉普拉斯算子的和）的线性化算子。

4.1. p-拉普拉斯算子 $+$ q-拉普拉斯算子的线性化算子的估计。

引理 4.1. 设 u 是方程(1.1) 在$\Omega \subset M$中的一个解。记 $f=|\nabla u|^2$。则有如下

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{p,q}(f) =& \left(\frac{p}{2}-1\right)f^{\frac{p}{2}-2}|\nabla f|^2+\left(\frac{q}{2}-1\right)f^{\frac{q}{2}-2}|\nabla f|^2+2\left(f^{\frac{p}{2}-1}+f^{\frac{q}{2}-1}\right)\left(|\nabla\nabla u|^2+\mathrm{Ric}\left(\nabla u,\nabla u\right)\right)\\ &-2\frac{\partial h}{\partial x}(u,f)f-2\frac{\partial h}{\partial y}(u,f)\langle\nabla f,\nabla u\rangle\end{aligned}$$

在 $\{x\in\Omega:\ f(x)>0\}$中逐点成立。

证明。 由引理 2.1，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{p,q}(f) =&\mathcal{L}_p(f)+\mathcal{L}_q(f)\\ =&\left(\frac{p}{2}-1\right)f^{\frac{p}{2}-2}|\nabla f|^2+\left(\frac{q}{2}-1\right)f^{\frac{q}{2}-2}|\nabla f|^2+2\left(f^{\frac{p}{2}-1}+f^{\frac{q}{2}-1}\right)\left(|\nabla\nabla u|^2+\mathrm{Ric}\left(\nabla u,\nabla u\right)\right)\\ &+2\langle\nabla\left(\Delta_p u+\Delta_q u\right),\nabla u\rangle.\end{aligned}$$

另一方面，由(1.1)，有

$$\Delta_p u+\Delta_q u=-h(u,f).$$

结合以上结果，便完成了引理 4.1 的证明。

□

利用引理 4.1，我们可以证明以下引理:

引理 4.2. 设$(M,\ g)$ 是一个完备黎曼流形，且其里奇曲率 $\ge -(n-1)\kappa$ $(\kappa\ge 0)$，并设 u 是$\Omega\subset M$中的方程 (1.1) 的一个解。假设 $h\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 满足

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2\le\mu^2 y^{r-2},$$

其中 $r>q-1$ 和 $\mu>0$。那么，以下内容

$$\begin{aligned}\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)\mathcal{L}_{p,q}(f)\ge&-2(n-1)\kappa\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)^2+\frac{2}{n-1}fh^2(u,f)-2\mu|\nabla f|f^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)\\ &-\frac{2(q-1)}{n-1}|\nabla f|f^{-\frac{1}{2}}\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)|h(u,f)|-2\frac{\partial h}{\partial x}(u,f)f\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)\end{aligned} \tag{4.1}$$

在 $\{x \in \Omega:\ f(x)\ > 0\}$ 中逐点成立。

证明。设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为 TM^n 的标准正交标架，定义在满足 $f > 0$ 且 $e_1 = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ 的区域上。因此我们推得

$$\sum_{i=1}^{n} u_{1i}^2 = \frac{|\nabla f|^2}{4f} \quad and \quad u_{11} = \frac{\langle \nabla f, \nabla u \rangle}{2f} \tag{4.2}$$

and

$$\Delta_z u = f^{\frac{z}{2}-1} \left[(z-1)u_{11} + \sum_{i=2}^{n} u_{ii} \right]. \tag{4.3}$$

省略 $|\nabla\nabla u|^2$ 中的一些非负项，可得

$$|\nabla\nabla u|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} u_{1i}^2 + \sum_{i=2}^{n} u_{ii}^2.$$

由 (4.2) 和柯西不等式，得

$$|\nabla\nabla u|^2 \geq \frac{|\nabla f|^2}{4f} + \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=2}^{n} u_{ii} \right)^2.$$

利用引理 4.1 及上述不等式，得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{p,q}(f) \geq & \left(\frac{p}{2} - \frac{1}{2} \right) f^{\frac{p}{2}-2} |\nabla f|^2 + \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2} \right) f^{\frac{q}{2}-2} |\nabla f|^2 + 2 \left(f^{\frac{p}{2}-1} + f^{\frac{q}{2}-1} \right) \mathrm{Ric}\left(\nabla u, \nabla u \right) \\ & + \frac{2}{n-1} \left(f^{\frac{p}{2}-1} + f^{\frac{q}{2}-1} \right) \left(\sum_{i=2}^{n} u_{ii} \right)^2 - 2\frac{\partial h}{\partial x}(u, f) f - 2\frac{\partial h}{\partial y}(u, f) \langle \nabla f, \nabla u \rangle. \end{aligned}$$

由于里奇曲率 $\geq -(n-1)\kappa$ 和 $1 < p \leq q$，可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{p,q}(f) \geq & -2(n-1)\kappa \left(f^{\frac{p}{2}} + f^{\frac{q}{2}} \right) + \frac{2}{n-1} \left(f^{\frac{p}{2}-1} + f^{\frac{q}{2}-1} \right) \left(\sum_{i=2}^{n} u_{ii} \right)^2 \\ & - 2\frac{\partial h}{\partial x}(u, f) f - 2\frac{\partial h}{\partial y}(u, f) \langle \nabla f, \nabla u \rangle. \end{aligned} \tag{4.4}$$

由 (1.1) 和 (4.3)，我们得到

$$\sum_{i=2}^{n} u_{ii} = -\left(f^{\frac{p}{2}-1} + f^{\frac{q}{2}-1} \right)^{-1} \left[(p-1) f^{\frac{p}{2}-1} u_{11} + (q-1) f^{\frac{q}{2}-1} u_{11} + h(u, f) \right].$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n-1} \left(f^{\frac{p}{2}-1} + f^{\frac{q}{2}-1} \right) \left(\sum_{i=2}^{n} u_{ii} \right)^2 \\ \geq & \frac{2}{n-1} \left(f^{\frac{p}{2}-1} + f^{\frac{q}{2}-1} \right)^{-1} \left\{ h^2(u, f) + 2h(u, f) \left[(p-1) f^{\frac{p}{2}-1} + (q-1) f^{\frac{q}{2}-1} \right] u_{11} \right\} \\ \geq & \frac{2}{n-1} \left(f^{\frac{p}{2}-1} + f^{\frac{q}{2}-1} \right)^{-1} h^2(u, f) - \frac{4(q-1)}{n-1} |u_{11}| |h(u, f)|. \end{aligned}$$

由式（4.2），可得

$$\frac{2}{n-1} \left(f^{\frac{p}{2}-1} + f^{\frac{q}{2}-1} \right) \left(\sum_{i=2}^{n} u_{ii} \right)^2 \geq \frac{2}{n-1} \left(f^{\frac{p}{2}-1} + f^{\frac{q}{2}-1} \right)^{-1} h^2(u, f) - \frac{2(q-1)}{n-1} f^{-\frac{1}{2}} |\nabla f| |h(u, f)|.$$

将上述不等式代入式（4.4），可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{p,q}(f) \geq & -2(n-1)\kappa\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)+\frac{2}{n-1}\left(f^{\frac{p}{2}-1}+f^{\frac{q}{2}-1}\right)^{-1}h^2(u,f)\\ & -\frac{2(q-1)}{n-1}f^{-\frac{1}{2}}|\nabla f||h(u,f)|-2\frac{\partial h}{\partial x}(u,f)f-2\frac{\partial h}{\partial y}(u,f)\langle\nabla f,\nabla u\rangle.\end{aligned} \tag{4.5}$$

利用 h 的假设，我们得到

$$-2\frac{\partial h}{\partial y}(u,f)\langle\nabla f,\nabla u\rangle \geq -2\left|\frac{\partial h}{\partial y}(u,f)\right| f^{\frac{1}{2}}|\nabla f| \geq -2\mu f^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}|\nabla f|.$$

将上述不等式代入 (4.5)，引理 4.2 的证明即告完成。

□

4.2. **推导主要积分不等式**。

现在我们选取一个测地球 $B_{4R}(o)$ 作为 (4.1) 的测试函数，其中 $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ 非负，$f_\varepsilon = (f-\varepsilon)^+$，$\varepsilon > 0$，$t > 1$ 待定。由 (4.1) 可得

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega\left\langle f^{\frac{p}{2}-1}\nabla f+(p-2)f^{\frac{p}{2}-2}\langle\nabla f,\nabla u\rangle\nabla u,\nabla\left[f_\varepsilon^t\eta^2\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)\right]\right\rangle\\ &-\int_\Omega\left\langle f^{\frac{q}{2}-1}\nabla f+(q-2)f^{\frac{q}{2}-2}\langle\nabla f,\nabla u\rangle\nabla u,\nabla\left[f_\varepsilon^t\eta^2\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)\right]\right\rangle\\ \geq & -2(n-1)\kappa\int_\Omega\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)^2 f_\varepsilon^t\eta^2+\frac{2}{n-1}\int_\Omega fh^2(u,f)f_\varepsilon^t\eta^2\\ &-2\int_\Omega\frac{\partial h}{\partial x}(u,f)f\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)f_\varepsilon^t\eta^2-2\mu\int_\Omega|\nabla f|f^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)f_\varepsilon^t\eta^2\\ &-\frac{2(q-1)}{n-1}\int_\Omega|\nabla f|f^{-\frac{1}{2}}\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)|h(u,f)|f_\varepsilon^t\eta^2.\end{aligned} \tag{4.6}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega\left\langle f^{\frac{z}{2}-1}\nabla f+(z-2)f^{\frac{z}{2}-2}\langle\nabla f,\nabla u\rangle\nabla u,\nabla\left[f_\varepsilon^t\eta^2\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)\right]\right\rangle\\ =&-\int_\Omega\left(\frac{p}{2}f^{\frac{p+z}{2}-2}+\frac{q}{2}f^{\frac{q+z}{2}-2}\right)f_\varepsilon^t|\nabla f|^2\eta^2-(z-2)\int_\Omega\left(\frac{p}{2}f^{\frac{p+z}{2}-3}+\frac{q}{2}f^{\frac{q+z}{2}-3}\right)f_\varepsilon^t\langle\nabla f,\nabla u\rangle^2\eta^2\\ &-t\int_\Omega\left(f^{\frac{p+z}{2}-1}+f^{\frac{q+z}{2}-1}\right)f_\varepsilon^{t-1}|\nabla f|^2\eta^2-(z-2)t\int_\Omega\left(f^{\frac{p+z}{2}-2}+f^{\frac{q+z}{2}-2}\right)f_\varepsilon^{t-1}\langle\nabla f,\nabla u\rangle^2\eta^2\\ &-2\int_\Omega\left(f^{\frac{p+z}{2}-1}+f^{\frac{q+z}{2}-1}\right)f_\varepsilon^t\langle\nabla f,\nabla\eta\rangle\eta-2(z-2)\int_\Omega\left(f^{\frac{p+z}{2}-2}+f^{\frac{q+z}{2}-2}\right)f_\varepsilon^t\langle\nabla f,\nabla u\rangle\langle\nabla u,\nabla\eta\rangle\eta.\end{aligned}$$

利用绝对值不等式和 $[(2-z)_+ - 1] < 0$ $(z \in \{p,q\})$，可得

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega\left\langle f^{\frac{z}{2}-1}\nabla f+(z-2)f^{\frac{z}{2}-2}\langle\nabla f,\nabla u\rangle\nabla u,\nabla\left[f_\varepsilon^t\eta^2\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)\right]\right\rangle\\ \leq&[(2-z)_+-1]\int_\Omega\left(\frac{p}{2}f^{\frac{p+z}{2}-2}+\frac{q}{2}f^{\frac{q+z}{2}-2}\right)f_\varepsilon^t|\nabla f|^2\eta^2\\ &+[(2-z)_+-1]t\int_\Omega\left(f^{\frac{p+z}{2}-1}+f^{\frac{q+z}{2}-1}\right)f_\varepsilon^{t-1}|\nabla f|^2\eta^2\\ &+2(1+|z-2|)\int_\Omega\left(f^{\frac{p+z}{2}-1}+f^{\frac{q+z}{2}-1}\right)f_\varepsilon^t|\nabla f||\nabla\eta|\eta\\ \leq&[(2-z)_+-1]t\int_\Omega\left(f^{\frac{p+z}{2}-1}+f^{\frac{q+z}{2}-1}\right)f_\varepsilon^{t-1}|\nabla f|^2\eta^2\\ &+2(1+|z-2|)\int_\Omega\left(f^{\frac{p+z}{2}-1}+f^{\frac{q+z}{2}-1}\right)f_\varepsilon^t|\nabla f||\nabla\eta|\eta.\end{aligned}$$

将上述不等式代入 (4.6)，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{n-1}\int_\Omega fh^2(u,f)f_\varepsilon^t\eta^2+[1-(2-p)_+]t\int_\Omega\left(f^{p-1}+f^{\frac{p+q}{2}-1}\right)f_\varepsilon^{t-1}|\nabla f|^2\eta^2\\
&+[1-(2-q)_+]t\int_\Omega\left(f^{\frac{p+q}{2}-1}+f^{q-1}\right)f_\varepsilon^{t-1}|\nabla f|^2\eta^2-2\int_\Omega\frac{\partial h}{\partial x}(u,f)f\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)f_\varepsilon^t\eta^2\\
\le&2(n-1)\kappa\int_\Omega\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)^2f_\varepsilon^t\eta^2+2\mu\int_\Omega|\nabla f|f^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)f_\varepsilon^t\eta^2\\
&+\frac{2(q-1)}{n-1}\int_\Omega|\nabla f|f^{-\frac{1}{2}}\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)|h(u,f)|f_\varepsilon^t\eta^2\\
&+2(1+|p-2|)\int_\Omega\left(f^{p-1}+f^{\frac{p+q}{2}-1}\right)f_\varepsilon^t|\nabla f||\nabla\eta|\eta\\
&+2(1+|q-2|)\int_\Omega\left(f^{\frac{p+q}{2}-1}+f^{q-1}\right)f_\varepsilon^t|\nabla f||\nabla\eta|\eta.
\end{aligned}\tag{4.7}$$

根据柯西不等式，我们有

$$\begin{aligned}
&2(1+|p-2|)\int_\Omega\left(f^{p-1}+f^{\frac{p+q}{2}-1}\right)f_\varepsilon^t|\nabla f||\nabla\eta|\eta\\
&+2(1+|q-2|)\int_\Omega\left(f^{\frac{p+q}{2}-1}+f^{q-1}\right)f_\varepsilon^t|\nabla f||\nabla\eta|\eta\\
\le&(4+3|p-2|+|q-2|)\int_\Omega f^{p-1}f_\varepsilon^t|\nabla f||\nabla\eta|\eta+(4+|p-2|+3|q-2|)\int_\Omega f^{q-1}f_\varepsilon^t|\nabla f||\nabla\eta|\eta\\
\le&\frac{[1-(2-p)_+]t}{2}\int_\Omega f^{p-1}f_\varepsilon^{t-1}|\nabla f|^2\eta^2+\frac{(4+3|p-2|+|q-2|)^2}{2[1-(2-p)_+]t}\int_\Omega f^{p-1}f_\varepsilon^{t+1}|\nabla\eta|^2\\
&+\frac{[1-(2-q)_+]t}{2}\int_\Omega f^{q-1}f_\varepsilon^{t-1}|\nabla f|^2\eta^2+\frac{(4+3|q-2|+|p-2|)^2}{2[1-(2-q)_+]t}\int_\Omega f^{q-1}f_\varepsilon^{t+1}|\nabla\eta|^2
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\frac{2(q-1)}{n-1}\int_\Omega|\nabla f|f^{-\frac{1}{2}}\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)|h(u,f)|f_\varepsilon^t\eta^2\\
\le&\frac{1}{n-1}\int_\Omega fh^2(u,f)f_\varepsilon^t\eta^2+\frac{2(q-1)^2}{n-1}\int_\Omega(f^p+f^q)|\nabla f|^2f^{-2}f_\varepsilon^t\eta^2.
\end{aligned}$$

将上述不等式代入 (4.7)，并略去一些非负项，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n-1}\int_\Omega fh^2(u,f)f_\varepsilon^t\eta^2+\frac{[1-(2-p)_+]t}{2}\int_\Omega f^{p-1}f_\varepsilon^{t-1}|\nabla f|^2\eta^2\\
&+\frac{[1-(2-q)_+]t}{2}\int_\Omega f^{q-1}f_\varepsilon^{t-1}|\nabla f|^2\eta^2-2\int_\Omega\frac{\partial h}{\partial x}(u,f)f\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)f_\varepsilon^t\eta^2\\
\le&2(n-1)\kappa\int_\Omega\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)^2f_\varepsilon^t\eta^2+2\mu\int_\Omega|\nabla f|f^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)f_\varepsilon^t\eta^2\\
&+\frac{(4+3|p-2|+|q-2|)^2}{2[1-(2-p)_+]t}\int_\Omega f^{p-1}f_\varepsilon^{t+1}|\nabla\eta|^2+\frac{(4+3|q-2|+|p-2|)^2}{2[1-(2-q)_+]t}\int_\Omega f^{q-1}f_\varepsilon^{t+1}|\nabla\eta|^2\\
&+\frac{2(q-1)^2}{n-1}\int_\Omega(f^p+f^q)|\nabla f|^2f^{-2}f_\varepsilon^t\eta^2.
\end{aligned}\tag{4.8}$$

情形 1：假设

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\le0\quad\text{and}\quad h^2(x,y)\ge\lambda y^r,\quad(\lambda>0)$$

那么我们可以得到

$$-2\int_\Omega\frac{\partial h}{\partial x}(u,f)f\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right)f_\varepsilon^t\eta^2\ge0\tag{4.9}$$

and

$$\frac{1}{n-1}\int_\Omega f h^2(u,f) f_\varepsilon^t \eta^2 \geq \frac{\lambda}{n-1}\int_\Omega f^{r+1} f_\varepsilon^t \eta^2. \tag{4.10}$$

此外，由柯西不等式可得

$$\begin{aligned} &2\mu\int_\Omega |\nabla f| f^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right) f_\varepsilon^t \eta^2 \\ \leq &\frac{\lambda}{2(n-1)}\int_\Omega f^{r+1} f_\varepsilon^t \eta^2 + \frac{4(n-1)\mu^2}{\lambda}\int_\Omega (f^p+f^q) f^{-2} f_\varepsilon^t |\nabla f|^2 \eta^2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

现在，将 (4.9)、(4.10) 和 (4.11) 代入 (4.8)，并令 $\varepsilon \to 0^+$，可得

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda}{2(n-1)}\int_\Omega f^{t+r+1}\eta^2 + \left(\frac{[1-(2-p)_+]t}{2} - \frac{4(n-1)\mu^2}{\lambda} - \frac{2(q-1)^2}{n-1}\right)\int_\Omega f^{t+p-2}|\nabla f|^2\eta^2 \\ &+\left(\frac{[1-(2-q)_+]t}{2} - \frac{4(n-1)\mu^2}{\lambda} - \frac{2(q-1)^2}{n-1}\right)\int_\Omega f^{t+q-2}|\nabla f|^2\eta^2 \\ \leq &4(n-1)\kappa\int_\Omega \left(f^{t+p}+f^{t+q}\right)\eta^2 + \frac{(4+3|p-2|+|q-2|)^2}{2[1-(2-p)_+]t}\int_\Omega f^{t+p}|\nabla\eta|^2 \\ &+\frac{(4+3|q-2|+|p-2|)^2}{2[1-(2-q)_+]t}\int_\Omega f^{t+q}|\nabla\eta|^2. \end{aligned}$$

现在，我们选取足够大的 $t_0 = t_0(n,\ p,\ q,\ \mu)$，使得

$$\frac{[1-(2-p)_+]t}{4} - \frac{4(n-1)\mu^2}{\lambda} - \frac{2(q-1)^2}{n-1} \geq 0$$

and

$$\frac{[1-(2-q)_+]t}{4} - \frac{4(n-1)\mu^2}{\lambda} - \frac{2(q-1)^2}{n-1} \geq 0$$

对任意 $t \geq t_0$ 均成立。因此，对任意 $t \geq t_0$，下列不等式成立

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda}{2(n-1)}\int_\Omega f^{t+r+1}\eta^2 + \frac{[1-(2-p)_+]t}{4}\int_\Omega f^{t+p-2}|\nabla f|^2\eta^2 + \frac{[1-(2-q)_+]t}{4}\int_\Omega f^{t+q-2}|\nabla f|^2\eta^2 \\ \leq &4(n-1)\kappa\int_\Omega \left(f^{t+p}+f^{t+q}\right)\eta^2 + \frac{(4+3|p-2|+|q-2|)^2}{2[1-(2-p)_+]t}\int_\Omega f^{t+p}|\nabla\eta|^2 \\ &+\frac{(4+3|q-2|+|p-2|)^2}{2[1-(2-q)_+]t}\int_\Omega f^{t+q}|\nabla\eta|^2. \end{aligned}$$

情形2： 假设

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \leq -\lambda y^{r-\frac{q}{2}} \quad (\lambda > 0),$$

那么我们可以得到

$$-2\int_\Omega \frac{\partial h}{\partial x}(u,f) f\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right) f_\varepsilon^t \eta^2 \geq 2\lambda\int_\Omega f^{r+1} f_\varepsilon^t \eta^2. \tag{4.12}$$

根据柯西不等式，我们有

$$2\mu\int_\Omega |\nabla f| f^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}\left(f^{\frac{p}{2}}+f^{\frac{q}{2}}\right) f_\varepsilon^t \eta^2 \leq \lambda\int_\Omega f^{r+1} f_\varepsilon^t \eta^2 + \frac{2\mu^2}{\lambda}\int_\Omega (f^p+f^q) f^{-2} f_\varepsilon^t |\nabla f|^2 \eta^2. \tag{4.13}$$

将（4.12）和（4.13）代入（4.8），并令 $\varepsilon \to 0^+$，可得

$$\begin{aligned} &\lambda\int_\Omega f^{t+r+1}\eta^2 + \left(\frac{[1-(2-p)_+]t}{2} - \frac{2\mu^2}{\lambda} - \frac{2(q-1)^2}{n-1}\right)\int_\Omega f^{t+p-2}|\nabla f|^2\eta^2 \\ &+\left(\frac{[1-(2-q)_+]t}{2} - \frac{2\mu^2}{\lambda} - \frac{2(q-1)^2}{n-1}\right)\int_\Omega f^{t+q-2}|\nabla f|^2\eta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\leq & 4(n-1)\kappa\int_\Omega\left(f^{t+p}+f^{t+q}\right)\eta^2+\frac{(4+3|p-2|+|q-2|)^2}{2[1-(2-p)_+]t}\int_\Omega f^{t+p}|\nabla\eta|^2\\&+\frac{(4+3|q-2|+|p-2|)^2}{2[1-(2-q)_+]t}\int_\Omega f^{t+q}|\nabla\eta|^2.\end{aligned}$$

现在我们取足够大的 $t_0=t_0(n,\ p,\ q,\ \mu)$，使得

$$\frac{[1-(2-p)_+]t}{4}-\frac{2\mu^2}{\lambda}-\frac{2(q-1)^2}{n-1}\geq 0$$

and

$$\frac{[1-(2-q)_+]t}{4}-\frac{2\mu^2}{\lambda}-\frac{2(q-1)^2}{n-1}\geq 0$$

对任意 $t\geq t_0$ 均成立。因此，容易看出，对于任意 $t\geq t_0$，下列不等式成立

$$\begin{aligned}&\lambda\int_\Omega f^{t+r+1}\eta^2+\frac{[1-(2-p)_+]t}{4}\int_\Omega f^{t+p-2}|\nabla f|^2\eta^2+\frac{[1-(2-q)_+]t}{4}\int_\Omega f^{t+q-2}|\nabla f|^2\eta^2\\\leq & 4(n-1)\kappa\int_\Omega\left(f^{t+p}+f^{t+q}\right)\eta^2+\frac{(4+3|p-2|+|q-2|)^2}{2[1-(2-p)_+]t}\int_\Omega f^{t+p}|\nabla\eta|^2\\&+\frac{(4+3|q-2|+|p-2|)^2}{2[1-(2-q)_+]t}\int_\Omega f^{t+q}|\nabla\eta|^2.\end{aligned}$$

综合以上结果，可得以下引理

引理 4.3. 设 $(M,\ g)$ 为一个满足 里奇曲率 $\geq-(n-1)\kappa\ (\kappa\geq 0)$ 的完备黎曼流形，并设 u 是定义在 $\Omega\subset M$ 上的方程 (1.1) 的解。假设 $h\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 满足以下两个条件之一

- $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\leq 0,\quad\left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2\leq\mu^2y^{r-2}\quad$ and $\quad h^2(x,y)\geq\lambda y^r$;
- $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\leq-\lambda y^{r-\frac{q}{2}}\quad$ and $\quad\left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2\leq\mu^2y^{r-2}$,

其中 $r>q-1$、 $\lambda>0$ 和 $\mu>0$。那么，存在 $t_0=t_0(n,p,q,\mu)>0$，使得对于任意 $t\geq t_0$，下列不等式

$$\begin{aligned}&\int_\Omega f^{t+r+1}\eta^2+t\int_\Omega f^{t+p-2}|\nabla f|^2\eta^2+t\int_\Omega f^{t+q-2}|\nabla f|^2\eta^2\\\leq&\mathcal{C}\kappa\int_\Omega\left(f^{t+p}+f^{t+q}\right)\eta^2+\frac{\mathcal{C}}{t}\int_\Omega(f^{t+p}+f^{t+q})|\nabla\eta|^2\end{aligned}$$

成立，其中 $\mathcal{C}=\mathcal{C}(n,p,q,\lambda)>0$。

4.3. L^{β_1}**-界：测地球内方程** (1.1) **解的梯度估计**。

利用引理 4.3，我们可以得到以下引理:

引理 4.4. 设$(M,\ g)$ 为一个完备黎曼流形，且满足 里奇曲率 $\geq-(n-1)\kappa\ (\kappa\geq 0,\ n\geq 3)$；设 u 为方程 (1.1) 在$\Omega=B(o,R)\subset M$中的一个解。假设 $h\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 满足以下两个条件之一

- $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\leq 0,\quad\left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2\leq\mu^2y^{r-2}\quad$ and $\quad h^2(x,y)\geq\lambda y^r$;
- $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\leq-\lambda y^{r-\frac{q}{2}}\quad$ and $\quad\left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2\leq\mu^2y^{r-2}$,

其中 $r>q-1$、 $\lambda>0$ 和 $\mu>0$。设 $R>\delta>0$ 和

$$\mathcal{C}_2(1+\kappa R^2)\leq t_0\leq\mathcal{C}_3(1+\kappa R^2),$$

则以下估计成立

$$\|f\|_{L^{\beta_1}(\Omega_0)}\leq\mathcal{C}_0\left[\left(\frac{1+\kappa R^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{r-p+1}}+\left(\frac{1+\kappa R^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{r-q+1}}\right]V^{\frac{1}{\beta_1}},$$

其中$\Omega_0=B(o,\frac{3}{4}R)$、 $\beta_1=\frac{n(t_0+p)}{n-2}$、 $\mathcal{C}_i=\mathcal{C}_i(n,p,q,\lambda,r)\ (i=2,3)$以及 $\mathcal{C}_0=\mathcal{C}_0(n,p,q,\lambda,r,\delta)$。

证明。 根据引理 4.3，我们有

$$\int_\Omega f^{t+r+1}\eta^2 + t\int_\Omega f^{t+p-2}|\nabla f|^2\eta^2 \le \mathcal{C}\kappa\int_\Omega \left(f^{t+p}+f^{t+q}\right)\eta^2 + \frac{\mathcal{C}}{t}\int_\Omega (f^{t+p}+f^{t+q})|\nabla\eta|^2, \tag{4.14}$$

其中 $t \ge t_0^-(n,p,q,\mu)$ 和 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(n,p,q,\lambda) > 0$。

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}|\nabla(f^{\frac{t+p}{2}}\eta)|^2 &= \left|\frac{t+p}{2}f^{\frac{t+p}{2}-1}\eta\nabla f + f^{\frac{t+p}{2}}\nabla\eta\right|^2\\ &\le \frac{(t+p)^2}{2}f^{t+p-2}|\nabla f|^2\eta^2 + 2f^{t+p}|\nabla\eta|^2.\end{aligned}$$

将上述不等式代入 (4.14)，我们得到

$$\int_\Omega f^{t+r+1}\eta^2 + \frac{1}{t}\int_\Omega |\nabla(f^{\frac{t+p}{2}}\eta)|^2 \le \mathcal{C}\kappa\int_\Omega \left(f^{t+p}+f^{t+q}\right)\eta^2 + \frac{\mathcal{C}}{t}\int_\Omega (f^{t+p}+f^{t+q})|\nabla\eta|^2,$$

其中 $t \ge t_0^-(n,p,q,\mu)$ 和 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(n,p,q,\lambda) > 0$。

N现在，利用 Saloff-Coste的Sobolev不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega f^{t+r+1}\eta^2 + \frac{1}{t}\exp\left\{-C_n(1+\sqrt{\kappa}R)\right\}V^{\frac{2}{n}}R^{-2}\left\|f^{\frac{t+p}{2}}\eta\right\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\\ &\le\left(\mathcal{C}\kappa+\frac{1}{tR^2}\right)\int_\Omega f^{t+p}\eta^2 + \frac{\mathcal{C}}{t}\int_\Omega f^{t+p}|\nabla\eta|^2 + \mathcal{C}\kappa\int_\Omega f^{t+q}\eta^2 + \frac{\mathcal{C}}{t}\int_\Omega f^{t+q}|\nabla\eta|^2.\end{aligned} \tag{4.15}$$

因此，通过取足够大的 t_0 ，我们有

$$\begin{aligned}&t_0\int_\Omega f^{t_0+r+1}\eta^2 + \exp\left\{-C_n(1+\sqrt{\kappa}R)\right\}V^{\frac{2}{n}}R^{-2}\left\|f^{\frac{t_0+p}{2}}\eta\right\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\\ &\le\left(\mathcal{C}\kappa t_0+\frac{1}{R^2}\right)\int_\Omega f^{t_0+p}\eta^2 + \mathcal{C}\int_\Omega f^{t_0+p}|\nabla\eta|^2 + \mathcal{C}\kappa t_0\int_\Omega f^{t_0+q}\eta^2 + \mathcal{C}\int_\Omega f^{t_0+q}|\nabla\eta|^2.\end{aligned} \tag{4.16}$$

此外，令 $0 \le \eta \le 1$。 记

$$\widehat{\Omega}_1 = \left\{x\in\Omega:\ f \ge \left(4\mathcal{C}\kappa + \frac{4}{t_0R^2}\right)^{\frac{1}{r-p+1}}\right\},$$

我们有

$$\left(\mathcal{C}\kappa t_0+\frac{1}{R^2}\right)\int_{\widehat{\Omega}_1} f^{t_0+p}\eta^2 \le \frac{t_0}{4}\int_\Omega f^{t_0+r+1}\eta^2 \tag{4.17}$$

and

$$\left(\mathcal{C}\kappa t_0+\frac{1}{R^2}\right)\int_{\Omega\setminus\widehat{\Omega}_1} f^{t_0+p}\eta^2 \le \left(\frac{4}{t_0}\right)^{\frac{t_0+p}{r-p+1}}\left(\mathcal{C}\kappa t_0+\frac{1}{R^2}\right)^{\frac{t_0+r+1}{r-p+1}}V. \tag{4.18}$$

记

$$\widehat{\Omega}_2 = \left\{x\in\Omega:\ f \ge (4\mathcal{C}\kappa)^{\frac{1}{r-q+1}}\right\},$$

我们有

$$\mathcal{C}\kappa t_0\int_{\widehat{\Omega}_2} f^{t_0+q}\eta^2 \le \frac{t_0}{4}\int_\Omega f^{t_0+r+1}\eta^2 \tag{4.19}$$

and

$$\mathcal{C}\kappa t_0\int_{\Omega\setminus\widehat{\Omega}_2} f^{t_0+q}\eta^2 \le t_0 4^{\frac{t_0+q}{r-q+1}}(\mathcal{C}\kappa)^{\frac{t_0+r+1}{r-q+1}}V. \tag{4.20}$$

我们记作 $\Omega_0 = B(o,\frac{3R}{4})$，并选取满足以下条件的 $\eta_1 \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{cases}0\le\eta_1\le 1, \quad \eta_1\equiv 1 \quad in\ \Omega_0;\\ |\nabla\eta_1|\le\frac{C}{R}.\end{cases}$$

Let

$$\eta=\eta_1^{\frac{t_0+r+1}{r-q+1}}.$$

然后，利用杨不等式以及 η 的结构，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\int_\Omega f^{t_0+p}|\nabla\eta|^2=&\mathcal{C}\frac{(t_0+r+1)^2}{(r-q+1)^2}\int_\Omega f^{t_0+p}\eta_1^{\frac{2(t_0+q)}{r-q+1}}|\nabla\eta_1|^2\\ \le&\frac{t_0}{4}\int_\Omega f^{t_0+r+1}\eta^2+\frac{r-p+1}{t_0+r+1}\left[\frac{\mathcal{C}(t_0+r+1)^2}{(r-q+1)^2}\right]^{\frac{t_0+r+1}{r-p+1}}\left[\frac{4(t_0+p)}{t_0(t_0+r+1)}\right]^{\frac{t_0+p}{r-p+1}}\\ &\cdot\int_\Omega\eta_1^{\frac{2(q-p)(t_0+r+1)}{(r-q+1)(r-p+1)}}|\nabla\eta_1|^{\frac{2(t_0+r+1)}{r-p+1}}\\ \le&\frac{t_0}{4}\int_\Omega f^{t_0+r+1}\eta^2+\frac{\mathcal{C}_1}{t_0}\left(\mathcal{C}\mathcal{C}_1t_0^2\right)^{\frac{t_0+r+1}{r-p+1}}\left(\frac{\mathcal{C}_1}{t_0}\right)^{\frac{t_0+p}{r-p+1}}\int_\Omega|\nabla\eta_1|^{\frac{2(t_0+r+1)}{r-p+1}}\\ \le&\frac{t_0}{4}\int_\Omega f^{t_0+r+1}\eta^2+\mathcal{C}^{\frac{t_0+r+1}{r-p+1}}\mathcal{C}_1^{\frac{2t_0+2r+2}{r-p+1}}t_0^{\frac{t_0+r+1}{r-p+1}}\left(\frac{C}{R}\right)^{\frac{2(t_0+r+1)}{r-p+1}}V,\end{aligned}\tag{4.21}$$

其中 $\mathcal{C}_1=\mathcal{C}_1(p,\ q,\ r)>0$。类似于(4.21)的证明，我们有

$$\mathcal{C}\int_\Omega f^{t_0+q}|\nabla\eta|^2\le\frac{t_0}{4}\int_\Omega f^{t_0+r+1}\eta^2+\mathcal{C}^{\frac{t_0+r+1}{r-q+1}}\mathcal{C}_1^{\frac{2t_0+2r+2}{r-q+1}}t_0^{\frac{t_0+r+1}{r-q+1}}\left(\frac{C}{R}\right)^{\frac{2(t_0+r+1)}{r-q+1}}V.\tag{4.22}$$

将 $\eta=\eta_1^{t_0+r+1\over r-q+1}$、(4.17)、(4.18)、(4.19)、(4.20)、(4.21) 和 (4.22) 代入(4.18)，可得

$$\begin{aligned}&\exp\left\{-C_n(1+\sqrt{\kappa}R)\right\}V^{\frac{2}{n}}R^{-2}\left\|f^{\frac{t_0+p}{2}}\right\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_0)}\\ \le&\left(\frac{4}{t_0}\right)^{\frac{t_0+p}{r-p+1}}\left(\mathcal{C}\kappa t_0+\frac{1}{R^2}\right)^{\frac{t_0+r+1}{r-p+1}}V+t_04^{\frac{t_0+q}{r-q+1}}\left(\mathcal{C}\kappa\right)^{\frac{t_0+r+1}{r-q+1}}V\\ &+\mathcal{C}^{\frac{t_0+r+1}{r-p+1}}\mathcal{C}_1^{\frac{2t_0+2r+2}{r-p+1}}t_0^{\frac{t_0+r+1}{r-p+1}}\left(\frac{C}{R}\right)^{\frac{2(t_0+r+1)}{r-p+1}}V\\ &+\mathcal{C}^{\frac{t_0+r+1}{r-q+1}}\mathcal{C}_1^{\frac{2t_0+2r+2}{r-q+1}}t_0^{\frac{t_0+r+1}{r-q+1}}\left(\frac{C}{R}\right)^{\frac{2(t_0+r+1)}{r-q+1}}V.\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\exp\left\{-C_n(1+\sqrt{\kappa}R)\right\}V^{\frac{2}{n}}R^{-2}\left\|f^{\frac{t_0+p}{2}}\right\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_0)}\\ \le&\mathcal{C}^{\frac{2t_0+r+p+1}{r-p+1}}t_0^{-\frac{t_0+p}{r-p+1}}\left(\kappa t_0+\frac{1}{R^2}\right)^{\frac{t_0+r+1}{r-p+1}}V+\mathcal{C}^{\frac{2t_0+r+q+1}{r-q+1}}t_0\kappa^{\frac{t_0+r+1}{r-q+1}}V\\ &+\mathcal{C}^{\frac{5(t_0+r+1)}{r-p+1}}\left(\frac{t_0}{R^2}\right)^{\frac{t_0+r+1}{r-p+1}}V+\mathcal{C}^{\frac{5(t_0+r+1)}{r-q+1}}\left(\frac{t_0}{R^2}\right)^{\frac{t_0+r+1}{r-q+1}}V.\end{aligned}$$

利用上述不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Omega_0}f^{(t_0+p)\frac{n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}}\le&\exp\left\{C_n(1+\sqrt{\kappa}R)\right\}V^{\frac{n-2}{n}}\left\{\mathcal{C}^{\frac{2t_0+r+p+1}{r-p+1}}t_0^{-\frac{t_0+p}{r-p+1}}\left(\kappa t_0+\frac{1}{R^2}\right)^{\frac{t_0+r+1}{r-p+1}}R^2\right.\\ &+\mathcal{C}^{\frac{2t_0+r+q+1}{r-q+1}}t_0\kappa^{\frac{t_0+r+1}{r-q+1}}R^2+\mathcal{C}^{\frac{5(t_0+r+1)}{r-p+1}}t_0^{\frac{t_0+r+1}{r-p+1}}\left(\frac{1}{R^2}\right)^{\frac{t_0+p}{r-p+1}}\\ &\left.+\mathcal{C}^{\frac{5(t_0+r+1)}{r-q+1}}t_0^{\frac{t_0+r+1}{r-q+1}}\left(\frac{1}{R^2}\right)^{\frac{t_0+q}{r-q+1}}\right\}.\end{aligned}$$

分别对上述不等式两边取 $\frac{1}{t_0+p}$ 次幂，我们得到

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{\beta_1}(\Omega_0)} \leq & \mathcal{C}\exp\left\{\frac{C_n(1+\sqrt{\kappa}R)}{t_0+p}\right\} V^{\frac{1}{\beta_1}} \left\{ t_0^{-\frac{t_0+p}{r-p+1}} \left(\kappa t_0 + \frac{1}{R^2}\right)^{\frac{t_0+r+1}{r-p+1}} R^2 \right. \\ & \left. + t_0 \kappa^{\frac{t_0+r+1}{r-q+1}} R^2 + t_0^{\frac{t_0+r+1}{r-p+1}} \left(\frac{1}{R^2}\right)^{\frac{t_0+p}{r-p+1}} + t_0^{\frac{t_0+r+1}{r-q+1}} \left(\frac{1}{R^2}\right)^{\frac{t_0+q}{r-q+1}} \right\}^{\frac{1}{t_0+p}},\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(n, p, q, \lambda, r)$ 且 $\beta_1 = \frac{n(t_0+p)}{n-2}$。

利用不等式

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^b \leq 4^b (a_1^b + a_2^b + a_3^b + a_4^b)$$

$(a_i \geq 0, \quad b > 0)$，我们得到

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{\beta_1}(\Omega_0)} \leq & \mathcal{C}\exp\left\{\frac{C_n(1+\sqrt{\kappa}R)}{t_0+p}\right\} V^{\frac{1}{\beta_1}} 4^{\frac{1}{t_0+p}} \left\{ t_0^{-\frac{1}{r-p+1}} \left(\kappa t_0 R^2 + 1\right)^{\frac{t_0+r+1}{(r-p+1)(t_0+p)}} R^{\frac{-2}{r-p+1}} \right. \\ & + t_0^{\frac{1}{t_0+p}} \kappa^{\frac{t_0+r+1}{(r-q+1)(t_0+p)}} R^{\frac{2}{t_0+p}} + t_0^{\frac{t_0+r+1}{(r-p+1)(t_0+p)}} \left(\frac{1}{R^2}\right)^{\frac{1}{r-p+1}} \\ & \left. + t_0^{\frac{t_0+r+1}{(r-q+1)(t_0+p)}} \left(\frac{1}{R^2}\right)^{\frac{t_0+q}{(r-q+1)(t_0+p)}} \right\} \\ := & \mathcal{C}\exp\left\{\frac{C_n(1+\sqrt{\kappa}R)}{t_0+p}\right\} V^{\frac{1}{\beta_1}} 4^{\frac{1}{t_0+p}} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4).\end{aligned} \tag{4.23}$$

Let

$$\mathcal{C}_2(1+\kappa R^2) \leq t_0 \leq \mathcal{C}_3(1+\kappa R^2), \tag{4.24}$$

其中 $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_i(n, p, q, \lambda, r)$ $(i = 2, 3)$；并注意到

$$\lim_{\omega \to +\infty} \omega^{\frac{1}{\omega}} = 1,$$

这将在对 I_i 进行估计时使用。

对于 I_1，我们有

$$\begin{aligned} I_1 = & t_0^{-\frac{1}{r-p+1}} \left(\kappa t_0 R^2 + 1\right)^{\frac{t_0+r+1}{(r-p+1)(t_0+p)}} R^{\frac{-2}{r-p+1}} \\ = & \left(\kappa + \frac{1}{t_0 R^2}\right)^{\frac{1}{r-p+1}} (1 + \kappa t_0 R^2)^{\frac{1}{t_0+p}} \\ \leq & \mathcal{C}\left(\kappa + \frac{1}{R^2}\right)^{\frac{1}{r-p+1}} [t_0(1+\kappa R^2)]^{\frac{1}{t_0+p}} \\ \leq & \mathcal{C}\left(\frac{1+\kappa R^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{r-p+1}}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

对于 I_2，由于 $R > \delta > 0$，我们有

$$\begin{aligned} I_2 = & t_0^{\frac{1}{t_0+p}} \kappa^{\frac{t_0+r+1}{(r-q+1)(t_0+p)}} R^{\frac{2}{t_0+p}} \\ = & t_0^{\frac{1}{t_0+p}} \kappa^{\frac{1}{r-q+1}} R^{-\frac{2(q-p)}{(t_0+p)(r-q+1)}} \left(\kappa R^2\right)^{\frac{r-p+1}{(r-q+1)(t_0+p)}} \\ \leq & t_0^{\frac{1}{t_0+p}} \kappa^{\frac{1}{r-q+1}} R^{-\frac{2(q-p)}{(t_0+p)(r-q+1)}} \left(1+\kappa R^2\right)^{\frac{r-p+1}{(r-q+1)(t_0+p)}} \\ \leq & \mathcal{C}_0 \kappa^{\frac{1}{r-q+1}} \\ \leq & \mathcal{C}_0 \left(\frac{1+\kappa R^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{r-q+1}}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

其中 $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(n, p, q, \lambda, r, \delta)$。

对于 I_3，我们有

$$I_3 = t_0^{\frac{t_0+r+1}{(r-p+1)(t_0+p)}} \left(\frac{1}{R^2}\right)^{\frac{1}{r-p+1}} = \left(\frac{t_0}{R^2}\right)^{\frac{1}{r-p+1}} t_0^{\frac{1}{t_0+p}} \leq \mathcal{C}\left(\frac{1+\kappa R^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{r-p+1}}. \tag{4.27}$$

对于 I_4，由于 $R > \delta > 0$，我们有

$$\begin{aligned} I_4 =& t_0^{\frac{t_0+r+1}{(r-q+1)(t_0+p)}} \left(\frac{1}{R^2}\right)^{\frac{t_0+q}{(r-q+1)(t_0+p)}} \\ =& \left(\frac{t_0}{R^2}\right)^{\frac{1}{r-q+1}} \left(\frac{1}{R^2}\right)^{\frac{q-p}{(r-q+1)(t_0+p)}} t_0^{\frac{r-p+1}{(r-q+1)(t_0+p)}} \\ \leq& \mathcal{C}_0 \left(\frac{1+\kappa R^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{r-q+1}}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

利用 (4.24)，我们有

$$\exp\left\{\frac{C_n(1+\sqrt{\kappa}R)}{t_0+p}\right\} 4^{\frac{1}{t_0+p}} \leq \mathcal{C}. \tag{4.29}$$

将 (4.25)、(4.26)、(4.27)、(4.28) 和 (4.29) 代入 (4.23)，得到

$$\|f\|_{L^{\beta_1}(\Omega_0)} \leq \mathcal{C}_0 \left[\left(\frac{1+\kappa R^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{r-p+1}} + \left(\frac{1+\kappa R^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{r-q+1}}\right] V^{\frac{1}{\beta_1}}.$$

因此，引理 4.4 的证明完成。

□

4.4. **莫泽迭代：方程** (1.1) **的解**。

利用积分不等式 (4.15)，可得以下引理:

引理 4.5. 设$(M,\ g)$ 是一个完备黎曼流形，满足里奇曲率 $\geq -(n-1)\kappa$ ($\kappa \geq 0,\ n \geq 3$)，并设 u 是(1.1) 在 $\Omega = B(o,R) \subset M$中的一个解。假设 $h \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 满足以下两个条件之一

- $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \leq 0, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2 \leq \mu^2 y^{r-2} \quad and \quad h^2(x,y) \geq \lambda y^r;$
- $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \leq -\lambda y^{r-\frac{q}{2}} \quad and \quad \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2 \leq \mu^2 y^{r-2},$

其中 $r > q-1$、 $\lambda > 0$ 和 $\mu > 0$。令

$$\xi = \exp\left\{\frac{(n-2)C_n(1+\sqrt{\kappa}R)}{2(t_0+p)}\right\} V^{\frac{-1}{\beta_1}} \left(\kappa t_0 R^2 + 1\right)^{\frac{n-2}{2(t_0+p)}} \|f\|_{L^{\beta_1}(B(o,\frac{3R}{4}))},$$

then

$$\|f\|_{L^\infty(B(o,sR))} \leq \mathcal{C}\left(\xi + \xi^{\frac{2(t_0+p)}{2(t_0+p)-(n-2)(q-p)}}\right) \frac{1}{(\tau-s)^{\frac{2(n-2)}{2(t_0+p)-(n-2)(q-p)}}},$$

其中 $0 < s < \tau < \frac{1}{2}$且 t_0 足够大。

证明. 利用 (4.15)，可得

$$\begin{aligned} &\exp\left\{-C_n(1+\sqrt{\kappa}R)\right\} V^{\frac{2}{n}} R^{-2} \left\|f^{\frac{t+p}{2}}\eta\right\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \\ \leq& \mathcal{C}\left(\kappa t + \frac{1}{R^2}\right)\int_\Omega f^{t+p}\eta^2 + \mathcal{C}\int_\Omega f^{t+p}|\nabla\eta|^2 + \mathcal{C}\kappa t\int_\Omega f^{t+q}\eta^2 + \mathcal{C}\int_\Omega f^{t+q}|\nabla\eta|^2. \end{aligned}$$

现在，我们记

$$r_m = sR + \frac{\tau-s}{\alpha^{m-1}}R$$

以及 $\Omega_m = B(o, r_m)$，其中 $\alpha = \sqrt{\frac{n}{n-2}}$ 和 $0 < s < \tau < \frac{1}{2}$；然后选取满足以下条件的 $\eta_m \in C_0^\infty(\Omega_m)$

$$\begin{cases} 0 \le \eta_m \le 1, \quad \eta_m \equiv 1 \quad in\ \Omega_{m+1}; \\ |\nabla \eta_m| \le \frac{C\alpha^m}{(\tau - s)R}. \end{cases}$$

将 η 代入上述积分不等式中的 η_m 后，我们可以很容易地验证

$$\begin{aligned} &\exp\left\{-C_n(1+\sqrt{\kappa}R)\right\} V^{\frac{2}{n}} R^{-2} \left\| f^{\frac{t+p}{2}} \right\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_{m+1})} \\ \le& \mathcal{C}\left(\kappa t + \frac{1}{R^2}\right) \int_{\Omega_m} f^{t+p} + \frac{\mathcal{C}\alpha^{2m}}{(\tau-s)^2 R^2} \int_{\Omega_m} f^{t+p} + \mathcal{C}\kappa t \int_{\Omega_m} f^{t+q} + \frac{\mathcal{C}\alpha^{2m}}{(\tau-s)^2 R^2} \mathcal{C} \int_{\Omega_m} f^{t+q} \\ \le& \mathcal{C}\left(\kappa t + \frac{1}{R^2} + \frac{\alpha^{2m}}{(\tau-s)^2 R^2}\right) \int_{\Omega_m} (f^{t+p} + f^{t+q}) \\ \le& \mathcal{C}\left(\kappa t + \frac{1}{R^2} + \frac{\alpha^{2m}}{(\tau-s)^2 R^2}\right) \left(1 + \|f\|^{q-p}_{L^\infty(B(o,\tau R))}\right) \int_{\Omega_m} f^{t+p}. \end{aligned}$$

接下来，我们选取

$$\beta_1 = \frac{n(t_0+p)}{n-2} \quad \text{and} \quad \beta_{m+1} = \frac{n\beta_m}{n-2},$$

并令 $t = t_m$ 使得 $t_m + p = \beta_m$。于是由上述积分不等式可得 at

$$\begin{aligned} &\exp\left\{-C_n(1+\sqrt{\kappa}R)\right\} V^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\Omega_{m+1}} f^{\beta_{m+1}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ \le& \mathcal{C}\left(\kappa t_m R^2 + 1 + \frac{\alpha^{2m}}{(\tau-s)^2}\right) \left(1 + \|f\|^{q-p}_{L^\infty(B(o,\tau R))}\right) \int_{\Omega_m} f^{\beta_m}. \end{aligned}$$

对上述不等式两边取 $\frac{1}{\beta_m}$ 次幂，我们得到

$$\begin{aligned} &\exp\left\{-\frac{C_n(1+\sqrt{\kappa}R)}{\beta_m}\right\} V^{\frac{2}{n\beta_m}} \|f\|_{L^{\beta_{m+1}}(\Omega_{m+1})} \\ \le& \mathcal{C}^{\frac{1}{\beta_m}} \left(\kappa t_m R^2 + 1 + \frac{\alpha^{2m}}{(\tau-s)^2}\right)^{\frac{1}{\beta_m}} \left(1 + \|f\|^{q-p}_{L^\infty(B(o,\tau R))}\right)^{\frac{1}{\beta_m}} \|f\|_{L^{\beta_m}(\Omega_m)}. \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{\beta_{m+1}}(\Omega_{m+1})} \le& \exp\left\{\frac{C_n(1+\sqrt{\kappa}R)}{\beta_m}\right\} V^{\frac{-2}{n\beta_m}} \mathcal{C}^{\frac{1}{\beta_m}} \left(\kappa t_m R^2 + 1 + \frac{\alpha^{2m}}{(\tau-s)^2}\right)^{\frac{1}{\beta_m}} \\ &\cdot \left(1 + \|f\|^{q-p}_{L^\infty(B(o,\tau R))}\right)^{\frac{1}{\beta_m}} \|f\|_{L^{\beta_m}(\Omega_m)} \\ \le& \exp\left\{\frac{C_n(1+\sqrt{\kappa}R)}{\beta_m}\right\} V^{\frac{-2}{n\beta_m}} \mathcal{C}^{\frac{1}{\beta_m}} \left(\kappa t_0 R^2 + \frac{1}{(\tau-s)^2}\right)^{\frac{1}{\beta_m}} \\ &\cdot \left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{m}{\beta_m}} \left(1 + \|f\|^{q-p}_{L^\infty(B(o,\tau R))}\right)^{\frac{1}{\beta_m}} \|f\|_{L^{\beta_m}(\Omega_m)}. \end{aligned}$$

注意到

$$0 < s < \tau < \frac{1}{2}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_m} = \frac{n}{2\beta_1} \quad \text{and} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\beta_m} = \frac{n^2}{4\beta_1},$$

我们有

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty(B(o,sR))} \le& \mathcal{C}^{\frac{n-2}{2(t_0+p)}} \exp\left\{\frac{(n-2)C_n(1+\sqrt{\kappa}R)}{2(t_0+p)}\right\} V^{\frac{-1}{\beta_1}} \left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{n^2}{4\beta_1}} \\ &\cdot \left(\kappa t_0 R^2 + \frac{1}{(\tau-s)^2}\right)^{\frac{n}{2\beta_1}} \left(1 + \|f\|^{q-p}_{L^\infty(B(o,\tau R))}\right)^{\frac{n}{2\beta_1}} \|f\|_{L^{\beta_1}(B(o,\tau R))}. \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty(B(o,sR))} \leq & \mathcal{C}\exp\left\{\frac{(n-2)C_n(1+\sqrt{\kappa}R)}{2(t_0+p)}\right\}V^{\frac{-1}{\beta_1}}\left(\kappa t_0R^2+1\right)^{\frac{n-2}{2(t_0+p)}}\\ & \cdot\left(1+\|f\|_{L^\infty(B(o,\tau R))}^{\frac{(n-2)(q-p)}{2(t_0+p)}}\right)\|f\|_{L^{\beta_1}(B(o,\tau R))}\frac{1}{(\tau-s)^{\frac{n-2}{t_0+p}}}.\end{aligned}$$

Set

$$\xi=\exp\left\{\frac{(n-2)C_n(1+\sqrt{\kappa}R)}{2(t_0+p)}\right\}V^{\frac{-1}{\beta_1}}\left(\kappa t_0R^2+1\right)^{\frac{n-2}{2(t_0+p)}}\|f\|_{L^{\beta_1}(B(o,\frac{3R}{4}))},$$

我们有

$$\|f\|_{L^\infty(B(o,sR))}\leq\mathcal{C}\xi\frac{1}{(\tau-s)^{\frac{n-2}{t_0+p}}}+\mathcal{C}\xi\frac{\|f\|_{L^\infty(B(o,\tau R))}^{\frac{(n-2)(q-p)}{2(t_0+p)}}}{(\tau-s)^{\frac{n-2}{t_0+p}}}.$$

在 $p\neq q$ 条件下，对上述不等式右侧的第二个积分应用杨不等式，我们可直接得到

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty(B(o,sR))}\leq & \frac{1}{2}\|f\|_{L^\infty(B(o,\tau R))}+\mathcal{C}\xi\frac{1}{(\tau-s)^{\frac{n-2}{t_0+p}}}+\left[\frac{(n-2)(q-p)}{t_0+p}\right]^{\frac{(n-2)(q-p)}{2(t_0+p)-(n-2)(q-p)}}\\ & \cdot\frac{2(t_0+p)-(n-2)(q-p)}{2(t_0+p)}(\mathcal{C}\xi)^{\frac{2(t_0+p)}{2(t_0+p)-(n-2)(q-p)}}\frac{1}{(\tau-s)^{\frac{2(n-2)}{2(t_0+p)-(n-2)(q-p)}}}\\ \leq & \frac{1}{2}\|f\|_{L^\infty(B(o,\tau R))}+\mathcal{C}\left(\xi+\xi^{\frac{2(t_0+p)}{2(t_0+p)-(n-2)(q-p)}}\right)\frac{1}{(\tau-s)^{\frac{2(n-2)}{2(t_0+p)-(n-2)(q-p)}}}.\end{aligned}$$

此外，值得一提的是，在 $p=q$ 条件下上述不等式也成立。令

$$\psi_0(y)=\|f\|_{L^\infty(B(o,yR))},$$

我们得到

$$\psi_0(s)\leq\frac{1}{2}\psi_0(\tau)+\mathcal{C}\left(\xi+\xi^{\frac{2(t_0+p)}{2(t_0+p)-(n-2)(q-p)}}\right)\frac{1}{(\tau-s)^{\frac{2(n-2)}{2(t_0+p)-(n-2)(q-p)}}}.$$

利用引理 2.2，并注意到

$$\lim_{t_0\to+\infty}\frac{2(n-2)}{2(t_0+p)-(n-2)(q-p)}=0,$$

我们完成引理 4.5 的证明。

□

4.5. **定理 1.2 的证明**。

证明。 利用引理 4.5 并取 $s=\frac{1}{4}$ 和 $\tau=\frac{3}{8}$，我们有

$$\|f\|_{L^\infty(B(o,\frac{R}{4}))}\leq\mathcal{C}\left(\xi+\xi^{\frac{2(t_0+p)}{2(t_0+p)-(n-2)(q-p)}}\right),\tag{4.30}$$

其中

$$\xi=\exp\left\{\frac{(n-2)C_n(1+\sqrt{\kappa}R)}{2(t_0+p)}\right\}V^{\frac{-1}{\beta_1}}\left(\kappa t_0R^2+1\right)^{\frac{n-2}{2(t_0+p)}}\|f\|_{L^{\beta_1}(B(o,\frac{3R}{4}))}$$

且 t_0 足够大。令

$$\mathcal{C}_2(1+\kappa R^2)\leq t_0\leq\mathcal{C}_3(1+\kappa R^2),$$

我们可以推导出

$$\xi\leq\mathcal{C}\|f\|_{L^{\beta_1}(B(o,\frac{3R}{4}))}V^{\frac{-1}{\beta_1}}.$$

利用引理 4.4，我们得到

$$\xi \le \mathcal{C}_0 \left[\left(\frac{1+\kappa R^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{r-p+1}} + \left(\frac{1+\kappa R^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{r-q+1}} \right], \tag{4.31}$$

其中 $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(n,\ p,\ q,\ \lambda,\ r,\ \delta)$ 且 $R \ge \delta$。

对于任意 $\theta > 1$，我们可以将 $\mathcal{C}_2$ 选得足够大，使得

$$\frac{2(t_0+p)}{2(t_0+p)-(n-2)(q-p)} < \theta.$$

注意到

$$1 \le \frac{2(t_0+p)}{2(t_0+p)-(n-2)(q-p)} < \theta$$

结合 (4.30) 和 (4.31)，可得

$$\|f\|_{L^\infty(B(o,\frac{R}{4}))} \le \widetilde{\mathcal{C}} \left[\left(\frac{1+\kappa R^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{r-p+1}} + \left(\frac{1+\kappa R^2}{R^2} \right)^{\frac{\theta}{r-q+1}} \right]$$

其中 $\widetilde{\mathcal{C}} = \widetilde{\mathcal{C}}(n,\ p,\ q,\ \lambda,\ r,\ \delta,\ \theta)$。因此，我们完成了定理 1.1 的证明。 □

5. 进一步应用

接下来，我们利用上述定理给出几个例子。

Ex例 1. 若在 (1.1) 中令 $h(u,|\nabla u|^2) = au^s|\nabla u|^r$，则 (1.1) 具有如下形式：

$$\Delta_p u + \Delta_q u + au^s|\nabla u|^r = 0, \tag{5.1}$$

其中，s 和 r 是两个实数。对于该方程，我们可以采用与第 4 节相同的论证，从而得到以下结论：

定理 5.1. 设 M (维数$(M) \ge 3$) 是一个具有非负里奇曲率的完备非紧黎曼流形。假设在 (5.1) 中，$r > q-1 \ge p-1 > 0$、$as \le 0$ 和 $a \ne 0$。若 u 是 M 上方程 (5.1) 的正解，并满足

(1) u 在 M上有界，(2) u 在 M上有正下界，

那么 u 是一个平凡常数解。

证明。 利用 u中的假设，我们可以看出存在 $l_1,\ l_2 > 0$，使得

$$l_1 \le u \le l_2.$$

由于 $h(u,|\nabla u|^2) = au^s|\nabla u|^r$，我们可以看出

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\Big|_{(u,|\nabla u|^2)} = asu^{s-1}|\nabla u|^r \quad and \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\Big|_{(u,|\nabla u|^2)} = \frac{ar}{2}u^s|\nabla u|^{r-2}.$$

取 $\mu = \frac{|ar|}{2}$ 最大值$\{l_1^s,\ l_2^s\}$ 和 $\lambda = a^2$最小值$\{l_1^{2s},\ l_2^{2s}\}$，并利用 $as \le 0$，我们得到如下结果

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\Big|_{(u,|\nabla u|^2)} \le 0,\\
&\left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2\Big|_{(u,|\nabla u|^2)} = \frac{a^2r^2}{4}x^{2s}y^{r-2}\Big|_{(u,|\nabla u|^2)} \le \mu^2 y^{r-2}\Big|_{|\nabla u|^2},\\
&h^2(x,y)\Big|_{(u,|\nabla u|^2)} = a^2x^{2s}y^r\Big|_{(u,|\nabla u|^2)} \ge \lambda y^r\Big|_{|\nabla u|^2}.
\end{aligned}$$

因此，利用推论 1.3 和注 1 中的 (3)，我们完成了证明。 □

例 2. 事实上，也可以考虑以下方程:

$$\Delta_p u + \Delta_q u - u = 0, \tag{5.2}$$

通过在 (1.1) 中令 $h(u,\ |\nabla u|^2) = -u$ 即可得到。

定理 5.2。 设 $1 < p \le q < 2$ 和 M (维数$(M) \ge 3$) 是一个具有非负里奇曲率的完备非紧黎曼流形。如果 u 是 M上的方程 (5.2) 的一个解，那么 $u \equiv 0$。

证明。 由于 $h(u,\ |\nabla u|^2) = -u$，我们可以看到

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\Big|_{(u,|\nabla u|^2)} = -1 \quad and \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\Big|_{(u,|\nabla u|^2)} = 0.$$

取 $r = \frac{q}{2}$、 $\lambda = 1$ 和 $\mu = 1$，可得如下结果

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\Big|_{(u,|\nabla u|^2)} = -1 \le -1 \times y^0\Big|_{|\nabla u|^2} = -\lambda y^{r-\frac{q}{2}}\Big|_{|\nabla u|^2},$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2\Big|_{(u,|\nabla u|^2)} = 0 \le 1 \times y^{\frac{q}{2}-2}\Big|_{|\nabla u|^2} = \mu^2 y^{r-2}\Big|_{|\nabla u|^2}.$$

因此，利用推论 1.3 和注 1 的 (3)，证明完毕。 □

致谢：作者受到国家自然科学基金（项目编号：12431003）资助。

利益冲突声明：作者声明不存在利益冲突。 s.

数据可用性声明：本文所述研究未使用任何数据。

References

[1] B. Alreshidi、D. D. Hai 和 R. Shivaji。 *On sublinear singular*(p,q)*-Laplacian problems.* 纯粹与应用分析通讯 22(2023), 2773-2783. [2] V. Ambrosio。 *The nonlinear*(p,q)*-Schrödinger equation with a general nonlinearity: existence and concentration.* 纯粹与应用数学杂志 (9) 178 (2023), 141-184. [3] V. Ambrosio。 *Nonlinear scalar field*(p_1,p_2)*-Laplacian equations in* $\mathbb{R}^N$*: existence and multiplicity.* 变分与偏微分方程 63 (2024), no. 8, Paper No. 210, 59 pp. [4] V. Ambrosio V.D. Radulescu。 *Fractional double phase patterns: concentration and multiplicity of solutions.* 纯粹与应用数学杂志 (9) 142 (2020), 101-145. [5] L. Baldelli、Y. Brizi 和 R. Filippucci。 *Multiplicity results for (p,q)-Laplacian equations with critical exponent in* $\mathbb{R}^N$ *and negative energy* 60 2021 1, 8, 30 。变分与偏微分方程 ( ), no. Paper No. pp. [6] L. Baldelli、Y. Brizi 和 R. Filippucci。 *On symmetric solutions for (p,q)-Laplacian equations in* $\mathbb{R}^N$ *with critical terms*。J. Geom. Anal. 32 (2022), no. 4, Paper No. 120, 25 pp. [7] L. Baldelli 和 R. Filippucci。 *Existence of solutions for critical (p,q)-Laplacian equations in* $\mathbb{R}^N$。当代数学通讯 25 (2023), no. 5, Paper No. 2150109, 26 pp. [8] M.-F. Bidaut-V´eron、M. Garcia-Huidobro 和 L. Veron。 *Local and global properties of solutions of quasilinear Hamilton-Jacobi equations.* 267 2014 9, 3294 3331 。泛函分析杂志 ( ), no. – . [9] M.-F. Bidaut-V´eron、M. Garcia-Huidobro 和 L. Veron。 *Estimates of solutions of elliptic equations with a source reaction term involving the product of the function and its gradient.* 168 8 1487 1537, 2019 。杜克数学杂志 ( ): – . [10] V. Bobkov 和 M. Tanaka。 *On positive solutions for*(p,q)*-Laplace equations with two parameters.* 变分与偏微分方程 54 (2015), no. 3, 3277-3301. [11] V. Bobkov 和 M. Tanaka。 *Multiplicity of positive solutions for*(p,q)*-Laplace equations with two parameters.* 当代数学通讯 24(2022), no. 3, 2150008. [12] D. Bonheure、P. d'Avenia 和 A. Pomponio。 *On the electrostatic Born–Infeld equation with extended charges.* 数学物理通讯 346(2016), 877–906. [13] L. A. Caffarelli、B. Gidas 和 J. Spruck。临界 Sobolev 增长下半线性椭圆方程的渐近对称性与局部行为。纯粹与应用数学通讯 42(1989), no. 3, 271–297. [14] G. Catino 和 D. D. Monticelli。 *Semilinear elliptic equations on manifolds with nonnegative Ricci curvature.* 欧洲数学会杂志 10.4171, 1–34, 2024. [15] Yazhe Chen 和 Lancheng Wu。 *Second order elliptic equations and elliptic systems.* 由 Bei Hu 从 1991 年中文原著译出。数学专著译丛, 174。美国数学会，普罗维登斯，RI，1998。xiv+246 页。

[16] L. Cherfils 和 Y. Il'yasov。 *On the stationary solutions of generalized reaction diffusion equations with* (p, q)*-Laplacian.* 纯粹与应用分析通讯 4 (2005), no. 1, 9-22. [17] G. Cupini、P. Marcellini 和 E. Mascolo。 *Regularity for nonuniformly elliptic equations with* (p, q)*-growth and explicit* (x, u)*-dependence.* Arch. Ration. Mech. Anal. 248 (2024), no. 4, Paper No. 60, 45 pp. [18] E. Di Benedetto。 $C^{1,\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations.* 非线性分析 7 850, 1983 8 827( ): - .[19] S. El Manouni、K. Perera 和 P. Winkert。 *On the first eigenvalue of the (p, q)-Laplacian and some related problems.* Math. Z. 310 (2025), no. 3, Paper No. 46, 18 pp. [20] B. Gidas 和 J. Spruck。非线性椭圆方程正解的整体与局部行为。

Comm. Pure, ( ): – . [21] Dong *Appl. Math.* 34 4 525 598, 1981
Han、Jie He 和 Youde Wang。

Gradient estimates for $\Delta_p u - |\nabla u|^q + b\ x\ |u|^{r-1}u = 0$ *on a complete Riemannian manifold and Liouville type theorems.* ( ) arXiv: . pages – . 2309 03510, 1 37, 2023
[22] Dong Han、Jie He 和 Youde Wang。 *Universal gradient estimates for quasilinear Hamilton-Jacobi type equation on manifolds and Liouville theorems.* 449 2025 113724 微分方程杂志 ( ), .

[23] Chengjun He 和 Gongbao Li。 *The regularity of weak solutions to nonlinear scalar field elliptic equations containing* (p, q)*-Laplacians.* Annales Academ. Sci. Fenni Mathematica, 33(2008), 337-371. [24] J. He、J.-C. Hu 和 Y.-D. Wang。 *Nash-Moser iteration approach to the logarithmic gradient estimates and Liouville Properties of quasilinear elliptic equations on manifolds.* 2311 02568 arXiv: .[25] J. He、Y.-Q. Ma、Y.-D. Wang。 *Universal log-gradient estimates of solutions to* $\Delta_p v + bv^q + cv^r = 0$ *on manifolds and applications.* 434 2025 113233, 39 微分方程杂志 ( ), Paper No. pp. [26] J. He、Y.-D. Wang。 *On the universal local and global properties of positive solutions to on complete Riemannian manifolds.* 2311 arXiv: . 13179
[27] J. He、Youde Wang 和 Guodong Wei。 *Gradient estimate for solutions of the equation* $\Delta_p v + au^q = 0$ *on a complete Riemannian manifold.* 306 2024 3, 42, 19 Math. Z. ( ), no. Paper No. pp. [28] P. Li 和 S.-T. Yau。 *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator.* Acta Math. 156(1986), 3-4, 153–201. [29] Pierre-Louis Lions。 *Quelques remarques sur les problémes elliptiques quasilinéaires du second ordre.* J. Analyse Math. 45(1985), 234–254. [30] Z.-H. Liu 和 N.S. Papageorgiou。 *Positive solutions for double phase problems with combined nonlinearities.* Positivity 26(2022), no. 1, 24. [31] Z.-H. Liu 和 N.S. Papageorgiou。 *Nonautonomous* (p, q)*-equations with unbalanced growth and competing nonlinearities.* 纯粹与应用数学杂志 (9) 182 (2024), 164-194. [32] S.A. Marano 和 S.J. Mosconi。 *Some recent results on the Dirichlet problem for* (p, q)*-Laplace equations.* Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 11 (2018), no. 2, 279-291. [33] P. Marcellini。 *Regularity of minimizers of integrals of the calculus of variations with non standard growth conditions*。 Arch. Ration. Mech. Anal. 105 (1989), 267-284. [34] P. Marcellini。 *Regularity and existence of solutions of elliptic equations with p, q-growth conditions.* J. Differ. Equ. 90(1991), no. 1, 1–30. [35] P. Marcellini。 *Local Lipschitz continuity for* (p, q)*-PDEs with explicit u-dependence.* 非线性分析 226(2023), Paper No. 113066, 26 pp.[36] G. Mingione 和 V. Radulescu。 *Recent developments in problems with nonstandard growth and nonuniform ellipticity.* J. Math. Anal. Appl. 501(2021), no. 1, 125197. [37] Shitong Niu 和 Jun Sun。

Gradient estimate for solutions to $\Delta_b u = 0$ *and* $\Delta_b u + au \quad u + bu = 0$ *on pseudohermitian manifold.* ln J. Differential 429 2025 262 282
Equations ( ), – . [38] N.S. Papageorgiou、A. Pude·lko 和 V.D. Radulescu。 *Non-autonomous* (p, q)*-equations with unbalanced growth.* Math. Ann. 385 (3–4)(2023), 1707–1745. [39] M.A. Ragusa、A. Tachikawa。 *Regularity for minimizers for functionals of double phase with variable exponents.* Adv. Nonlinear Anal. 9(1) (2019) 710–728. [40] Chong Song 和 Jibo Wu。

Universal gradient estimates of $\Delta u + a\ x\ u^p \quad u + c\ ^q = 0$ *on complete Riemannian manifolds.* ( ) (ln( )) 微分方程 434 2025 113257, 19
杂志 ( ), Paper No. pp. [41] P. Tolksdorf。 *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations.* 微分方程杂志 51(1984), no. 1, 126—150.[42] L. Saloff-Coste。 *Uniformly elliptic operators on Riemannian manifolds.*微分几何杂志, 36(1992), no. 2, 417–450.[43] J. Serrin 和 H.-H. Zou。 *Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities.* 189 2002 1, 79 142 Acta Math., ( ), no. – . [44] B. Shen 和 Y.H. Zhu。 *The feasilility of Nash-Moser iteration for Cheng-Yau type gradient estimates of nonlinear on complete Riemannian manifolds* 2405 10344 。arXiv: . .[45] K. Uhlenbeck。 *Regularity for a class of nonlinear elliptic systems.* Acta Math. 138(1977), no.3-4, 219–240. [46] Xiaodong Wang 和 Lei Zhang。 *Local gradient estimate for p-harmonic functions on Riemannian manifolds.* Comm. Anal. Geom., 19(2011), no.4, 759–771. [47] Y.D. Wang 和 L.Q. Zhang。 *Gradient estimates for* $\Delta_p u + \Delta_q u + a|u|^{s-1}u + b|u|^{l-1}u = 0$ *on a complete Riemannian manifold and applications.* 36 2025 2, 2450070, 53 Internat. J. Math. ( ), no. Paper No. pp.

[48] Youde Wang、Jun Yang 和 Liqin Zhang。*Liouville theorems and gradient estimates for positive solutions to* $\Delta_p u + \Delta_q u + h\ u\ = 0$ *on a complete manifold* ( )。即将发表。[49] S.-T. Yau。 *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds.* Comm. Pure Appl. Math., 28(1975), 201–228。[50] V.V. Zhikov。 *Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory.(Russian)* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 50 (1986), 第4期, 675–710, 877。[51] V.V. Zhikov。 *On Lavrentiev's phenomenon.* Russ. J. Math. Phys. 3 (1995), 249–269。