Bian四维爱因斯坦–高斯–博内标量场理论中的 χ I 时空 y

Alex Giacomini,[1], ∗ Chevara Hansraj,[2, 3, †] Genly Leon,[4, 5, ‡] 和 Andronikos Paliathanasis[5, 6, 4, 3, §]

[1] *Instituto de Ciencias Fisicas y Matemàticas, Universidad Austral de Chile, Valdivia, Chile*

[2] *Applied Mathematics Division, Department of Mathematical Sciences,Stellenbosch University, Private Bag X1, Matieland 7602, South Africa*[3] *National Institute for Theoretical and Computational Sciences (NITheCS), Stellenbosch, South Africa*[4] *Departamento de Matemàticas, Universidad Catòlica del Norte,Avda. Angamos 0610, Casilla 1280 Antofagasta, Chile*[5] *Institute of Systems Science, Durban University of Technology, Durban 4000, South Africa*[6] *Centre for Space Research, North-West University, Potchefstroom 2520, South Africa*(日期：2026年1月6日)

我们研究了四维爱因斯坦–高斯–博内标量场理论框架下 Bianchi I 时空中各向异性的演化。我们采用无量纲变量构建场方程，并结合解析与数值方法研究渐近动力学。对于局部旋转对称情形，我们对场方程的定常点进行了解析探究。分析表明，存在一类加速解，其中标量场和高斯–博内标量实际上起到宇宙学常数的作用。因此，我们得到了各向异性和各向同性膨胀解，以及闵可夫斯基时空。该引力模型不支持标度解。对于具有三个不同尺度因子的普遍各向异性 Bianchi I 几何，我们发现存在一类紧致化的 Kasner型解。此外，还出现了一族新的解，用以描述背景几何的二维分裂。这种行为与此前在高维时空中的纯爱因斯坦–高斯–博内理论中观察到的现象相似。

arXiv:2601.01909v1 [gr-qc] 5 Jan 2026

1. 引言

宇宙学原理指出，在足够大的尺度上，当前时期的《宇宙》是均匀且各向同性的，这与当前观测数据相符 [1]。然而，对宇宙微波背景（CMB）的研究表明，早期《宇宙》可能曾偏离完美的各向同性 [2]。抑制这些各向异性的机制是宇宙暴胀 [3–8]。不过，在暴胀前时期，各向异性效应预计曾发挥重要作用 [9]。

均匀且各向异性的四维时空可分为九种不同的几何类别 [10]，对应于三维李代数的 Bianchi 分类。最简单的一类是 Bianchi I 几何，其中时空具有一个由平移对称性生成的三维阿贝尔李代数，这些平移对称性定义了空间超曲面的方向。

在广义相对论（GR）中，Bianchi I 模型的引力场方程给出了 Kasner 宇宙[11]，，这是一种闭式真空各向异性解。Kasner 宇宙及其推广形式 [12–23] 有多种应用。它描述了 Mixmaster 宇宙在宇宙奇点附近的混沌行为 [24]。此外，Kasner 几何和 Kasner 类几何还被用作范例，用于研究暴胀期间各向异性膨胀的观测后果 [25–28]，，涉及量子粒子产生 [29]，、重子合成[30]，、核合成 [31]以及许多其他现象 [32–41]。

Lovelock 引力理论 [42] 是广义相对论在高维几何中的一种拓展。它是一种不存在 Ostrogradsky 不稳定性 [43] 的二阶理论，并且当几何降至四维时可还原为广义相对论 [44]。在 Lovelock 理论中，引力场由修正后的爱因斯坦–希尔伯特作用量描述，其中引入了新的几何标量；当几何维数为四时，这些几何标量具有拓扑不变量的性质。Lovelock 理论中对爱因斯坦–希尔伯特作用量的第一个非平凡拓展，是通过引入高斯–博内标量 [45]实现的。高斯–博内项也自然地出现在受弦理论启发的低能有效作用量中，作为领先的高阶曲率修正；其中，无鬼高斯–博内组合发挥着核心作用 [46–49]。

∗电子邮箱地址： alexgiacomini@uach.cl
†电子邮箱地址： hansrajc@sun.ac.za
‡电子邮箱地址： genly.leon@ucn.cl§电子邮箱地址： anpaliat@phys.uoa.gr

在四维中，高斯–博内标量是拓扑不变量，因此不会对场方程产生动力学贡献。然而，将非最小耦合标量场 ϕ引入高斯–博内标量 G 后，爱因斯坦引力便会产生非平凡动力学。由此得到的理论称为爱因斯坦–高斯–博内标量场理论 [50–60], ，其中一种不含标量场动能项的特殊情形是$f(G)$-理论 [61–68]。该框架带来了多种可能的演化路径和宇宙行为，包括暴胀、晚期加速时期，以及反弹或奇异演化 [49, 69–71]。

近期，文献 [72] 研究了 $f(G)$ 理论中的各向异性时空。具体而言，考察了 Bianchi I、Bianchi III 和 Kantowski-Sachs 时空的宇宙学动力学。研究发现，无论二维空间的空间曲率如何，这些时空都存在一个描述各向同性空间平坦FLRW标度解的吸引子点，以及闵可夫斯基时空。这意味着该理论能够解决平坦性问题，并使宇宙趋于各向同性。然而，该模型存在大撕裂和大挤压奇点，这表明该理论受到微调问题的影响，正如文献 [73] 此前所讨论的那样。

当标量场与高斯–博内项耦合时，这种新的耦合会改变剪切演化。在许多情况下，它能够减小剪切并推动宇宙趋向各向同性（类 FLRW）状态；但在其他情况下，它也可能维持各向异性阶段 [72, 74–76], 。这凸显了研究 Bianchi I 时空中这些可能性的重要性，从而检验各向同性暴胀究竟有多稳定。尽管如此，在不含动能项的爱因斯坦–高斯–博内标量场理论 [74], 中，研究发现，对于四维 Bianchi I 几何，所得几何会使度规的空间部分分裂为各向同性的二维空间与一维空间之和。这些解是不稳定的。此外，各向同性宇宙得以恢复，并且它是广义相对论极限的吸引子。

在本研究中，本着相同的思路，我们考察了引力作用量积分中存在标量场动能项时各向异性的演化。正如我们将看到的，动能项和标量场的性质在各向异性的演化中发挥着重要作用。具体而言，尽管几何的分裂仍然存在，但这种分裂如今可能成为动力学上优先选择的状态，甚至成为一大类初始条件的吸引子；这与纯粹不含动能项的情形形成鲜明对比。

本文结构如下。第2节简要介绍本研究所采用的引力框架，即标量场与高斯-博内拓扑不变量耦合的四维 Einstein-Gauss-Bonnet理论。我们将Bianchi I 几何作为最简单的各向异性宇宙学模型，并给出相应的迷你超空间表述及其点状拉格朗日量。第3节从解析角度考察局部旋转对称（LRS）Bianchi I 时空的渐近动力学。我们发现，在没有显式宇宙学常数项的情况下，唯一的吸引子解对应于加速宇宙膨胀。第4节研究最一般的各向异性Bianchi I 模型，并采用数值方法进行分析。除了此前确定的加速解，我们还发现了一类新的Kasner型解，它描述了时空的 $2+2$ 紧致化。最后，第5节总结我们的结果，并将其与早期研究所得结果进行比较。

2. 爱因斯坦–高斯–博内标量场引力

在爱因斯坦的广义相对论中，引力场由四维黎曼流形的里奇标量描述。考虑度规张量 $g_{\mu\nu}$ ，其协变导数 ∇_μ 由列维-奇维塔联络 $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$定义，即

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \left(g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda} \right), \tag{1}$$

曲率张量 或者，里奇张量和里奇标量可用如下方式表示为联络的形式 s

$$R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\Gamma^\kappa{}_{\nu]\lambda} + 2\Gamma^\kappa{}_{[\mu|\sigma|}\Gamma^\sigma{}_{\nu]\kappa} \ , \tag{2}$$

$$R_{\mu\nu} = 2\partial_{[\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\mu]\nu} + 2\Gamma^\kappa{}_{[\kappa|\sigma|}\Gamma^\sigma{}_{\mu]\nu} \ , \tag{3}$$

$$R = 2g^{\mu\nu}\partial_{[\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\mu]\nu} + 2g^{\mu\nu}\Gamma^\kappa{}_{[\kappa|\sigma|}\Gamma^\sigma{}_{\mu]\nu} \ . \tag{4}$$

引入高斯–博内标量 [45],

$$G = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\sigma\lambda}R^{\mu\nu\sigma\lambda}, \tag{5}$$

in 爱因斯坦–希尔伯特作用量导出了爱因斯坦–高斯–博内引力理论，即 [45]

$$S_{GB} = \int \sqrt{-g} \left(R + \alpha_0 G \right), \tag{6}$$

其中 α_0 是一个耦合常数。如前所述，当几何维数为四维时，后一个标量不会对引力场方程产生贡献。

然而，由于在四维几何情况下，高斯–博内标量具有拓扑不变性，在 [77] 中，有人提出耦合常数 α_0 应取决于背景几何的维数 n ，即$\alpha_0 = \frac{\alpha_1}{n-4}$。尽管如 [78]中所讨论的，这种方法可能会导致病态问题。

文献中考虑了两种将高斯–博内标量对低维几何中引力场的影响引入的方法：在作用量积分（6）中引入非线性函数 f（G），或考虑存在一个与高斯–博内标量非最小耦合的标量场，从而得到爱因斯坦-高斯-博内标量场引力。

在爱因斯坦-高斯-博内理论中 引力场由作用量积分描述， al

$$S_{EGB\phi} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{2}g^{\mu\kappa}\nabla_\mu\phi\nabla_\kappa\phi - g\left(\phi\right)G\right), \tag{7}$$

其中， g（ϕ）是标量场与高斯–博内标量之间的耦合函数。对作用量积分（7）关于度规张量进行变分，可得到引力场方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = T^G_{\mu\nu} + T^\phi_{\mu\nu}, \tag{8}$$

其中，能量-动量张量 $T^G_{\mu\nu}$将高斯-博内分量 $g(\phi)$ G所提供的几何动力学自由度归于其中，其表达式为

$$\begin{aligned} T^G_{\mu\nu} = &-4\left(\nabla_\mu\nabla_\nu g\left(\phi\right)\right)R + 8\left(\nabla_\mu\nabla_\rho g\left(\phi\right)\right)R^\rho_\nu + 8\left(\nabla_\nu\nabla_\rho g\left(\phi\right)\right)R^\rho_\mu \\ &- 8\left(g^{\kappa\rho}\nabla_\kappa\nabla_\rho g\left(\phi\right)\right)\left(4R_{\mu\nu} - 2Rg_{\mu\nu}\right) - 8\left(\nabla_\kappa\nabla_\rho g\left(\phi\right)\right)\left(R^{\rho\kappa}g_{\mu\nu} - R_\mu{}^\rho{}_\nu{}^\sigma\right), \end{aligned} \tag{9}$$

而 $T^\phi_{\mu\nu}$ 则将标量场的动能分量归于其中，即

$$T^\phi_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\kappa\rho}\nabla_\kappa\phi\nabla_\rho\phi\right).$$

此外，对标量场进行变分可得修正后的克莱因-戈尔登方程

$$-g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + g_{,\phi}G = 0. \tag{10}$$

在下文中，我们考 虑 $g(\phi) = \alpha\phi$ 为线性函数。在这种情况下，能量-动量张量 $T^G_{\mu\nu}$ 为 s

$$\begin{aligned} T^G_{\mu\nu} = &-4\alpha_0\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\right)R + 8\alpha_0\left(\nabla_\mu\nabla_\rho\phi\right)R^\rho_\nu + 8\alpha_0\left(\nabla_\nu\nabla_\rho\phi\right)R^\rho_\mu \\ &- 8\alpha_0\left(g^{\kappa\rho}\left(\nabla_\kappa\nabla_\rho\phi\right)\right)\left(4R_{\mu\nu} - 2Rg_{\mu\nu}\right) - 8\alpha_0\left(\nabla_\kappa\nabla_\rho\phi\right)\left(R^{\rho\kappa}g_{\mu\nu} - R_\mu{}^\rho{}_\nu{}^\sigma\right), \end{aligned} \tag{11}$$

标量场的运动方程简化为

$$-g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \alpha_0 G = 0. \tag{12}$$

2.1. Bianchi I 时空

为了研究爱因斯坦–高斯–博内标量场理论中各向异性的演化，我们考虑具有线元 [10]的 Bianchi I 时空

$$ds^2 = -N^2\left(t\right)dt^2 + \left(S_1\left(t\right)\right)^2dx^2 + \left(S_2\left(t\right)\right)^2dy^2 + \left(S_3\left(t\right)\right)^2dz^2, \tag{13}$$

这是最简单的各向异性模型，其中每个空间方向都具有等距变换，且时空在三维阿贝尔平移群作用下保持不变。

函数 $N(t)$ 是陂函数，而 $S_1(t)$ $S_2(t)$ 和 $S_3(t)$ 是三个尺度因子，它们定义了三维超曲面 $V = S_1(t)S_2(t)S_3(t)$ 的体积。三个膨胀率（哈勃函数）定义为

$$H_1 = \frac{\dot{S}_1}{S},\ H_2 = \frac{\dot{S}_2}{S_2},\ H_3 = \frac{\dot{S}_3}{S_3}. \tag{14}$$

在广义相对论中，真空 Bianchi I 几何给出了解析的 Kasner 宇宙 [11]，这是一个重要的闭式解，在引力场的描述中有诸多应用。卡斯纳度规取决于三个参数，也称为卡斯纳指标，它们受到卡斯纳代数关系 [10] 的约束。这些参数在实数轴上的取值由单位半径的三维球面与一个平面的交集确定，该平面上这些参数之和为一。然而，引入宇宙学常数会使卡斯纳解变得不稳定。

对于我们的分析，我们选择使用 Misner 变量 [10]，此时线元 (8) 表示为

$$ds^2 = -N^2(t)\,dt^2 + e^{2a}\left(e^{2\beta_+(t)}dx^2 + e^{-\beta_+(t)}\left(e^{\beta_-(t)}dy^2 + e^{-\beta_-(t)}dz^2\right)\right). \tag{15}$$

体积定义为 $V(t) = e^{3a(t)}$，因此膨胀率，即哈勃函数，按 $\dot{}$ 通常的方式 $H = \dot{a}$ 定义。函数 $\beta_+(t)$、$\beta_-(t)$ 定义了各向异性参数 $\sigma_+ = \beta_+$ 和 $\sigma_- = \beta_-$。在这两个参数均为零的极限下，时空呈现为空间平坦 FLRW 几何。

哈勃函数 H 与各向异性参数 Σ_+ 和 Σ_- 同 Killing 方向的三个膨胀率 H_1, H_2 和 H_3 之间的关系如下

$$H = \frac{1}{3}\left(H_1 + H_2 + H_3\right), \tag{16}$$

and

$$H_1 = H\left(1 + \Sigma_+\right), \tag{17}$$

$$H_2 = H\left(1 - \frac{1}{2}\left(\Sigma_+ - \sqrt{3}\Sigma_-\right)\right), \tag{18}$$

$$H_3 = H\left(1 - \frac{1}{2}\left(\Sigma_+ + \sqrt{3}\Sigma_-\right)\right). \tag{19}$$

2.2. 迷你超空间描述

爱因斯坦–高斯–博内标量场理论中的引力场方程描述尺度因子 $a(t)$、$\beta_+(t)$ 和 $\beta_-(t)$ 的动力学演化，并可用迷你超空间描述。根据线元，我们可以计算出里奇标量和高斯–博内标量：

(9)

$$R = 6\ddot{a} + 12\dot{a}^2 + \frac{3}{2}\left(\dot{\beta}_+\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{\beta}_-\right)^2, \tag{20}$$

$$\int N e^{3a} G dt = \frac{2}{N^3} e^{3a}\left(\dot{a} + \dot{\beta}_+\right)\left(2\dot{a} - \dot{\beta}_+ - \dot{\beta}_-\right)\left(2\dot{a} - \dot{\beta}_- + \dot{\beta}_+\right). \tag{21}$$

将后面的表达式代入式（7），并经过分部积分后，我们得到点状拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L\left(N, a, \dot{a}, \beta_\pm, \dot{\beta}_\pm\right) = {} & \frac{e^{3a}}{N}\left(-3\dot{a}^2 + \frac{3}{4}\dot{\beta}_+^2 + \frac{1}{4}\dot{\beta}_-^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) \\ & + \left(\frac{e^{3a}}{N^3}\alpha_0\dot{\phi}\left(\dot{a} + \dot{\beta}_+\right)\left(2\dot{a} - \dot{\beta}_+ - \dot{\beta}_-\right)\left(2\dot{a} - \dot{\beta}_- + \dot{\beta}_+\right)\right). \end{aligned} \tag{22}$$

其中我们假设 $g(\phi) = \alpha_0\phi$，且存在动能项 $-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$。因此，引力场方程为

$$\begin{aligned} 0 = {} & -3H^2 + \frac{3}{4}\sigma_+^2 + \frac{1}{4}\sigma_-^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \\ & + 3\alpha_0\dot{\phi}\left(H + \sigma_+\right)\left(2H - \sigma_+ - \sigma_-\right)\left(2H - \sigma_- + \sigma_+\right), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & 2\left(1 - 4a_0 H\dot{\phi}\right)\dot{H} + \frac{3}{4}\sigma_+^2 + \frac{1}{4}\sigma_-^2 + H^2\left(3 - 4a_0\ddot{\phi}\right) - 8a_0 H^3\dot{\phi} \\ & + \frac{1}{3}\alpha_0\ddot{\phi}\left(3\sigma_+^2 + \sigma_-^2\right) + \frac{1}{6}\left(6\alpha_0\sigma_+\left(\sigma_+^2 - \sigma_-^2 + 2\dot{\sigma}_+\right) + 4\alpha_0\sigma_-\dot{\sigma}_- - 3\dot{\phi}\right)\dot{\phi}, \end{aligned} \tag{24}$$

$$0=-\frac{3}{2}\dot{\sigma}_{+}+2\alpha_{0}\dot{\phi}\left(3\sigma_{+}\left(\dot{H}-\dot{\sigma}_{+}\right)+\sigma_{-}\dot{\sigma}_{-}+90H^{2}\sigma_{+}\right)$$
$$+\alpha_{0}\ddot{\phi}\left(\sigma_{-}^{2}-3\sigma_{+}^{2}\right)+\frac{3}{2}H\left(2\alpha_{0}\dot{\phi}\left(2\dot{\sigma}_{+}^{2}+\sigma_{-}^{2}\right)+\sigma_{+}\left(4\alpha_{0}\ddot{\phi}-3\right)-6\alpha_{0}\sigma_{+}^{2}\dot{\phi}\right), \tag{25}$$

$$0=\left(-1+4\alpha_{0}\sigma_{+}\dot{\phi}\right)\dot{\sigma}_{-}+12\alpha_{0}\sigma_{-}\dot{\phi}+4\alpha_{0}\sigma_{-}\left(\dot{\phi}\left(\dot{H}+\dot{\sigma}_{+}\right)+\sigma_{+}\ddot{\phi}\right)$$
$$+H\left(4\alpha_{0}\dot{\phi}\dot{\sigma}_{-}+\sigma_{-}\left(4\alpha_{0}\left(\ddot{\phi}+3\sigma_{+}\dot{\phi}\right)-3\right)\right), \tag{26}$$

$$0=\ddot{\phi}-3\alpha_{0}H^{2}\left(4H^{2}-\left(3\sigma_{+}^{2}+\sigma_{-}^{2}-4\dot{H}\right)\right)+3\alpha_{0}\sigma_{+}^{2}\left(\dot{H}-\dot{\sigma}_{+}\right)+\alpha_{0}\sigma_{-}^{2}\left(\dot{H}+\dot{\sigma}_{+}\right)$$
$$+2\alpha_{0}\sigma_{+}\sigma_{-}\dot{\sigma}_{-}+3H\left(\dot{\phi}+\alpha_{0}\sigma_{+}\left(\sigma_{-}^{2}-\sigma_{+}^{2}+2\dot{\Sigma}_{+}\right)+\frac{2}{3}\alpha_{0}\sigma_{-}\dot{\sigma}_{-}\right). \tag{27}$$

其中，在不失一般性的前提下，我们选取了 $N(t)=1$。

3. 局部旋转对称时空

假设 Bianchi I 时空具有第四个等距变换，即 y 与z 方向之间的旋转对称性。这意味着尺度因子 $S_2(t)=S_3(t)$，而在 Misner 变量中，$\sigma_-=0$。我们引入无量纲变量

$$x=\phi\sqrt{1+H^{2}},\ \Sigma_{+}=\frac{\sigma_{+}}{\sqrt{1+H^{2}}},\ \eta=\frac{H}{\sqrt{1+H^{2}}},\ d\tau=\sqrt{1+H^{2}}dt, \tag{28}$$

此时场方程可表示为一组一阶微分方程

$$\frac{dx}{d\tau}=f_{1}\left(x,\Sigma_{+},\eta\right), \tag{29}$$
$$\frac{d\Sigma_{+}}{d\tau}=f_{2}\left(x,\Sigma_{+},\eta\right), \tag{30}$$
$$\frac{d\eta}{d\tau}=f_{3}\left(x,\Sigma_{+},\eta\right), \tag{31}$$

并满足代数约束

$$3\eta^{2}+\frac{1}{2}\left(\eta^{2}-1\right)^{2}x^{2}-\frac{3}{4}\Sigma_{+}^{2}-3\alpha_{0}x\left(\Sigma_{+}-2\eta\right)^{2}\left(\Sigma_{+}+\eta\right)=0. \tag{32}$$

我们继续分析动力系统 (29)-(32) 的驻点。这类分析揭示了引力模型渐近解及其稳定性性质的重要信息。事实上，引力场方程的驻点 $P=(x(P)\quad\Sigma_{+}(P)\quad\eta(P))$ 为

$$P_{1}^{\pm}=\left(\pm\frac{\sqrt{9-6\sqrt{30}\alpha_{0}}}{10\alpha_{0}},0,\pm\frac{3}{\sqrt{9-6\sqrt{30}\alpha_{0}}}\right),$$
$$P_{2}^{\pm}=\left(\pm\frac{\sqrt{9+6\sqrt{30}\alpha_{0}}}{10\alpha_{0}},0,\pm\frac{3}{\sqrt{9+6\sqrt{30}\alpha_{0}}}\right),$$
$$P_{3}^{\pm}=\left(\pm\frac{\sqrt{4-9\sqrt{2}\alpha_{0}}}{6\alpha_{0}},\pm\frac{1}{\sqrt{4-9\sqrt{2}\alpha_{0}}},\pm\sqrt{\frac{8+18\sqrt{2}\alpha_{0}}{8-81\alpha_{0}^{2}}}\right)$$
$$P_{4}^{\pm}=\left(\pm\frac{\sqrt{4+9\sqrt{2}\alpha_{0}}}{6\alpha_{0}},\pm\frac{1}{\sqrt{4+9\sqrt{2}\alpha_{0}}},\pm\sqrt{\frac{8-18\sqrt{2}\alpha_{0}}{8-81\alpha_{0}^{2}}}\right)$$
$$P_{5}=(0,0,0)$$

当 $\alpha_0 < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{10}}$ 和 $\alpha_0 > -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{10}}$ 分别成立时，点 $P_1^{\pm}$ 和 $P_2^{\pm}$ 为实数且在物理上可接受。另一方面，当 $\left\{\alpha_0 < \frac{2\sqrt{2}}{9},\ \alpha_0 \neq -\frac{2\sqrt{2}}{9}\right\}$ 和 $\left\{\alpha_0 > -\frac{2\sqrt{2}}{9},\ \ \alpha_0 \neq \frac{2\sqrt{2}}{9}\right\}$ 时，点 $P_3^{\pm}$ 和 $P_4^{\pm}$ 在物理上可接受。

为了解驻点处渐近解的物理性质，我们计算了这些点处的减速参数 $q = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}$。我们发现，点 $P_1^{\pm}$、$P_2^{\pm}$、$P_3^{\pm}$和 $P_4^{\pm}$处的参数值为 -1。这意味着，在渐近解中，哈勃函数 $H(t)$ 为常数，也就是说 $H(t) = H_0$。这是预期的结果，因为根据定义 $H = \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$，因此，当 $|\eta|$ 为不同于 1 的常数时，后一个表达式表明哈勃函数为常数。对于点 P_5，减速参数未定义。

因此，驻点 $P_1^{\pm}$和 $P_2^{\pm}$描述德西特 FLRW 几何，而点 $P_3^{\pm}$和 $P_4^{\pm}$描述各向异性指数膨胀。值得注意的是，点 P_5 描述闵可夫斯基解。我们指出，引力理论中并未引入宇宙学常数。标量场和高斯–博内项发挥着暴胀的作用，驱动动力学演化以描述暴胀。我们指出，该引力模型不支持标度解。

我们对驻点的稳定性进行了数值研究。我们发现，P_1^{+}对于 $\alpha_0 < 0$是一个吸引子。此外，P_1^{-}、P_2^{+}和 P_2^{-}描述了不稳定解。此外，P_3^{+}对于 $\alpha_0 < 0$ 是一个吸引子，而 P_4^{-}对于 $-\frac{2\sqrt{2}}{9} < \alpha_0 < 0$是一个吸引子，$P_3^{-}$和 P_4^{+}描述了不稳定解。最后，点 P_5 对应于一个不稳定解。具体而言，P_5 描述了相空间内轨迹从 $H > 0$ 区域向 $H < 0$所在区域的转变，反之亦然。在考察了局部旋转对称情形之后，我们现在可以更一般地研究各向异性。

4. 紧致化

我们继续分析更一般情形下各向异性的演化，此时 σ_- 是一个动力学变量。对于这一模型，我们引入额外的无量纲参数

$$\Sigma_- = \frac{\sigma_-}{\sqrt{1+H^2}}.$$

由于场方程具有非线性，所得动力系统通过数值方法进行研究。我们利用约束方程，将动力系统的维数降低一维。具体而言，我们探索了约束方程所得到的两个分支 x_+ 和 x_- 中的数值解。

我们针对动力学变量 $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \eta\}$ 的各种初始条件组合以及自由参数 α_0，进行了数值模拟。下面，我们将介绍并讨论解轨迹中动力学变量保持在有限区域内时的行为。

在图1、图2、图3和图4中，我们展示了通向动力学变量有限区域内物理可行解的轨迹。

图 1 描绘了分支 x_+ 在 $a = -1$ 下的定性演化。蓝线对应于非常接近各向同性几何的初始条件，而另外两条线描述了具有更高各向异性参数的初始条件。我们注意到，德西特解是该动力系统的吸引子。绿色线和橙色线所表示的另外两个解描述了标度解，即类似 Kanser 的宇宙，其中两个尺度因子 S_2 和 S_3 为常数。然而，根据这两条轨迹上的减速参数和标量场的行为，我们得出结论：时空紧化为 $2+2$ 几何。也就是说，x 方向和 z 方向发生了紧化。我们注意到，对于 $a < 0$ 也能得到类似的行为。对于分支 x_- 在 $a = +1$ 下，也能得到类似的行为，如图 3 所示。

在图 2 中，我们展示了分支 x_+ 中 $a = +1$的轨迹。我们观察到，FLRW 几何是一个吸引子。此外，其余轨迹描述了膨胀解，其中 η 是一个常数。在图 3 中也得到了类似的行为，该图描述了分支 x_- 和 $a = -1$中的解。

5. 结论

在本研究中，我们考察了具有正则动能项和线性耦合 $g(\phi) = \alpha_0\phi$ 的四维爱因斯坦–高斯–博内标量场理论中 Bianchi I 宇宙学各向异性的演化。通过引入一组便于使用的无量纲变量，我们将场方程改写为自治动力系统，并结合解析工具（用于局部旋转对称情形）和数值积分（用于完全各向异性情形）来考察其渐近行为。

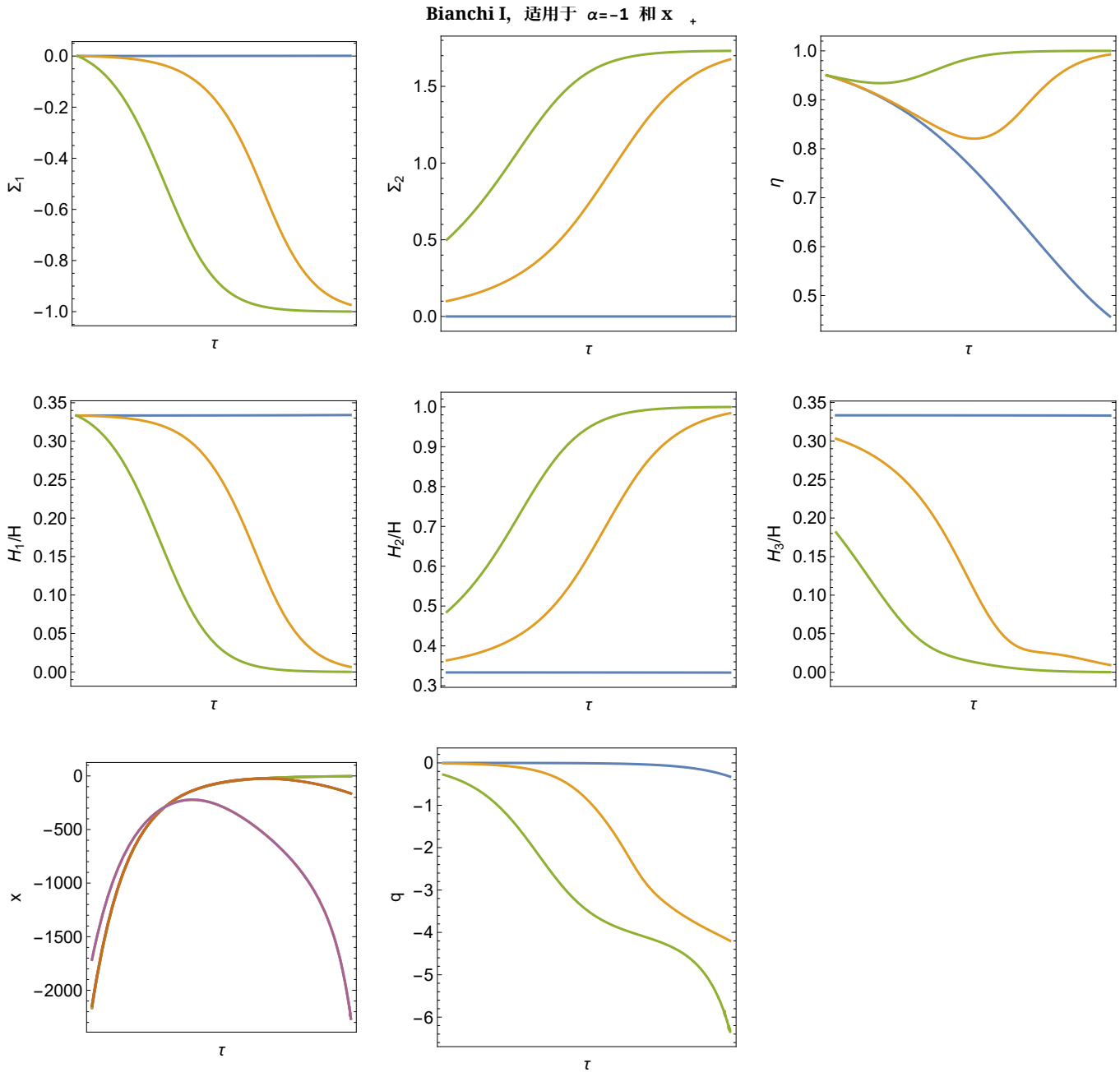


图 1：分支 x_+ 中 $\alpha = -1$ 的定性演化：各向异性参数 Σ_1, Σ_2、减速参数 q、标量场 x、哈勃参数 H_1, H_2 和 H_3 以及参数 η，初始条件为$\Sigma_1^0 = 0$, $\Sigma_2^0 = (0, 0.1, 0.5)$和 $\eta = 0.95$。

对于局部旋转对称 Bianchi I 时空，我们发现，具有 $q = -1$ 的指数膨胀对应于物理上相关的驻点。这些驻点包括各向同性类德西特解和各向异性指数解；而闵可夫斯基时空对应一个不稳定驻点，更适合视为膨胀与收缩之间的过渡，而非稳定的晚期吸引子。值得注意的是，这些加速解无需引入显式的宇宙学常数。因此，我们可以得出结论：标量场与高斯–博内项共同提供了驱动膨胀的有效真空能，实际上起到了宇宙学常数的作用。此外，该动力系统不支持标度解，因此其渐近行为并非幂律型，而是根据 α_0 的符号和取值范围，从类德西特解族（各向同性或各向异性）中选出相应解；我们进行的数值研究也支持这一结论。

当一般的（f 纳入各向异性扇区后，我们的数值分析表明，该理论还具有 n

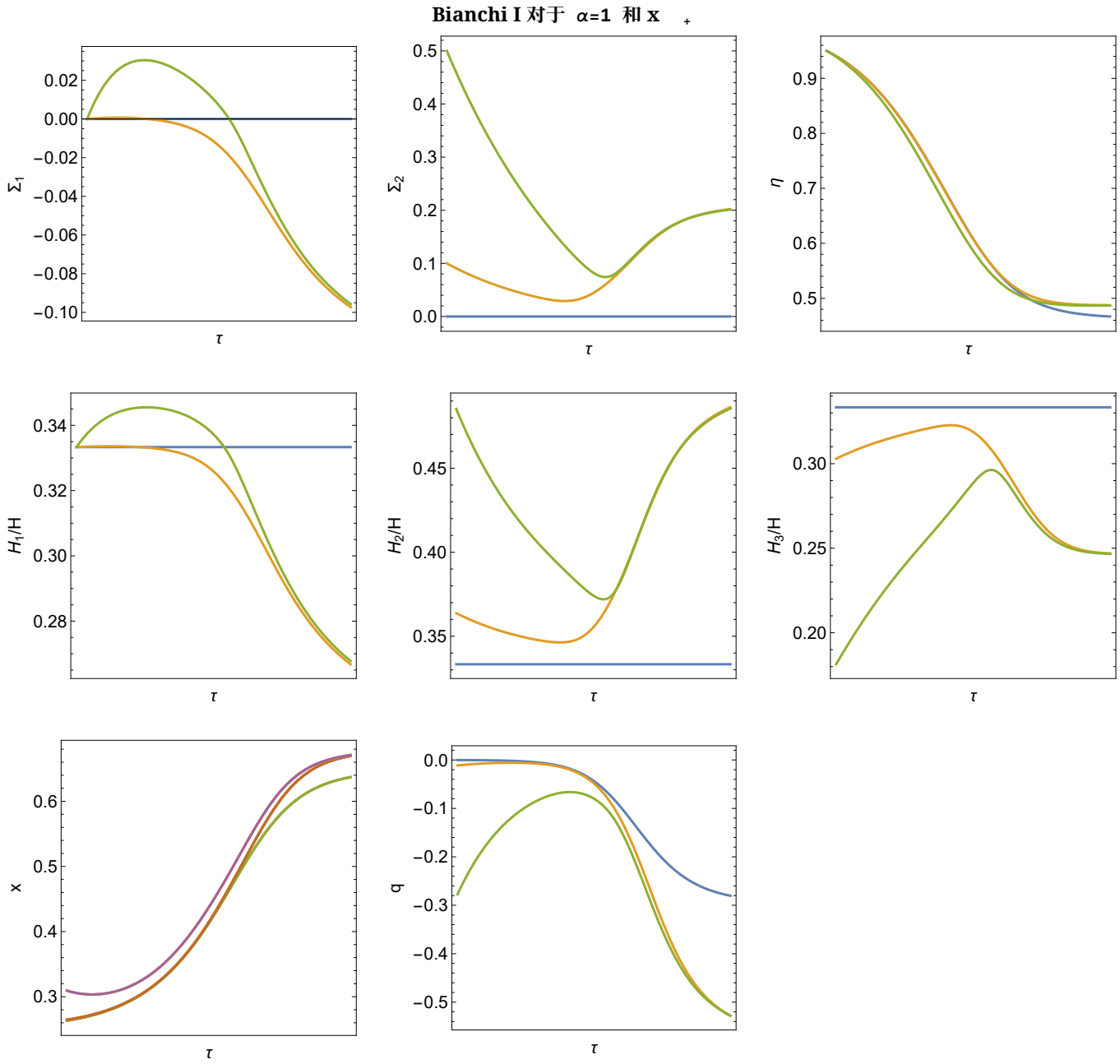


图 2：分支 x_+ 中 $\alpha = 1$ 的定性演化：各向异性参数 Σ_1，Σ_2、减速参数q、标量场 x、哈勃参数 H_1，H_2 以及 H_3，还有参数 η 在初始条件 $\Sigma_1^0 = 0, \Sigma_2^0 = (0，0。1，0。5)$ 和 $\eta = 0.95$ 下的定性演化。

更丰富的渐近行为。除了被各向同性德西特解吸引的轨迹外，我们还发现了与紧致化相关的类卡西纳态区间，其中包括实现时空有效分裂的解 $2 + 2$ 。此外，我们发现了一族新的解，其空间几何呈现二维分裂，这与高维纯爱因斯坦–高斯–博内模型中已知的紧致化现象相似。这些结果表明，标量动能项能够从定性上改变各向异性动力学。几何分裂依然存在，但如今它可能在动力学上更受青睐，并成为一大类初始条件下的吸引子。未来的工作将包括把这项分析推广到更一般的耦合函数，并纳入标量势。

数据可用性声明： 由于本研究未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

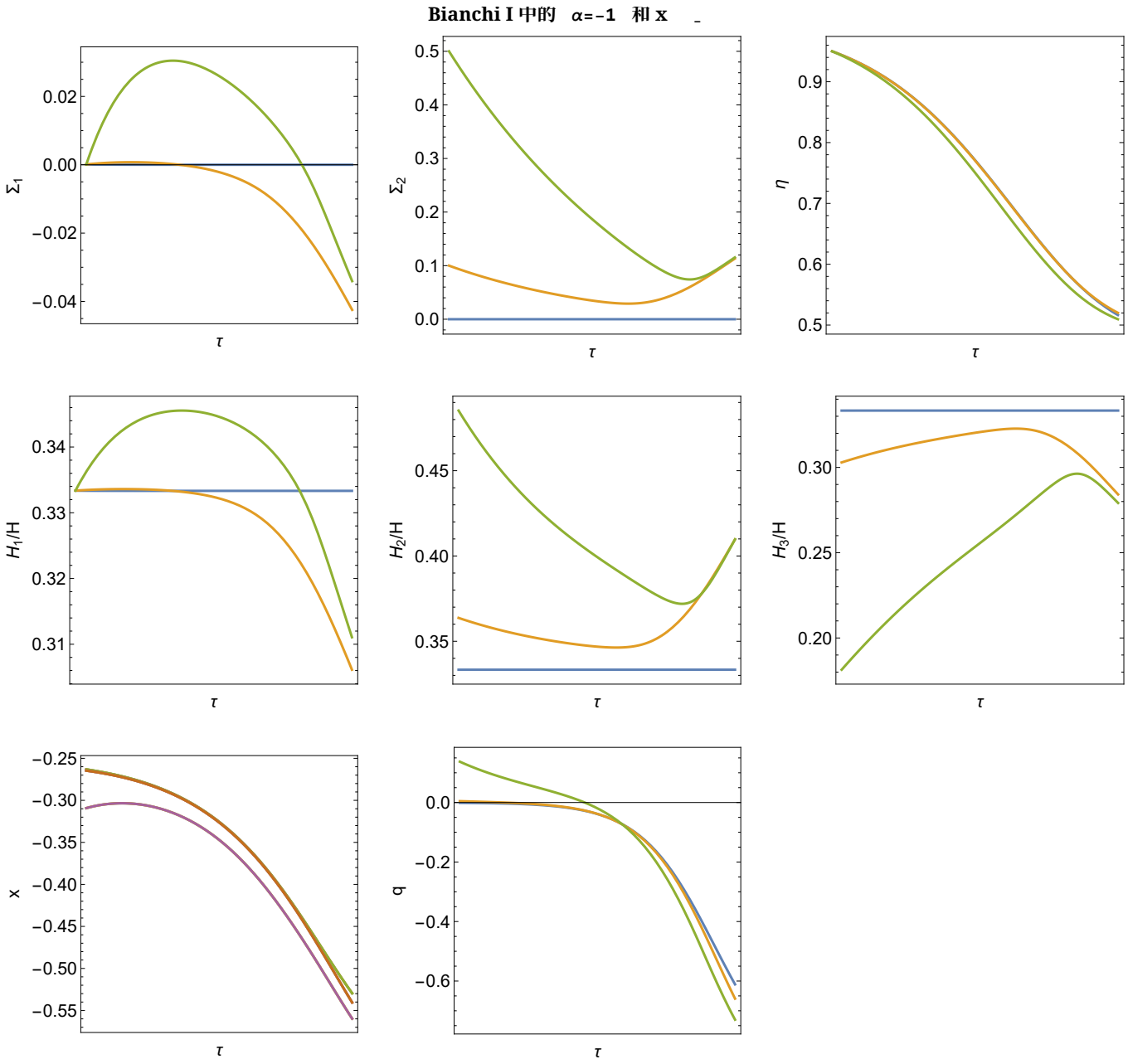


图 3：分支 x_- 中 $\alpha = -1$ 的定性演化：各向异性参数 Σ_1, Σ_2、减速参数 q、标量场 x、哈勃参数 H_1, H_2、参数 H_3 和 η；初始条件为 $\Sigma_1^0 = 0, \Sigma_2^0 = (0, 0.1, 0.5)$ 和 $\eta = 0.95$。

代码可用性声明： 如有需要，可申请获取代码。

致谢

AG 获得了 Proyecto Fondecyt Regular 项目（编号 1240247）的资助。GL 和 AP 获得了 Proyecto Fondecyt Regular 项目（编号 1240514）的资助。CH 感谢国家理论与计算科学研究所（NiTheCS）

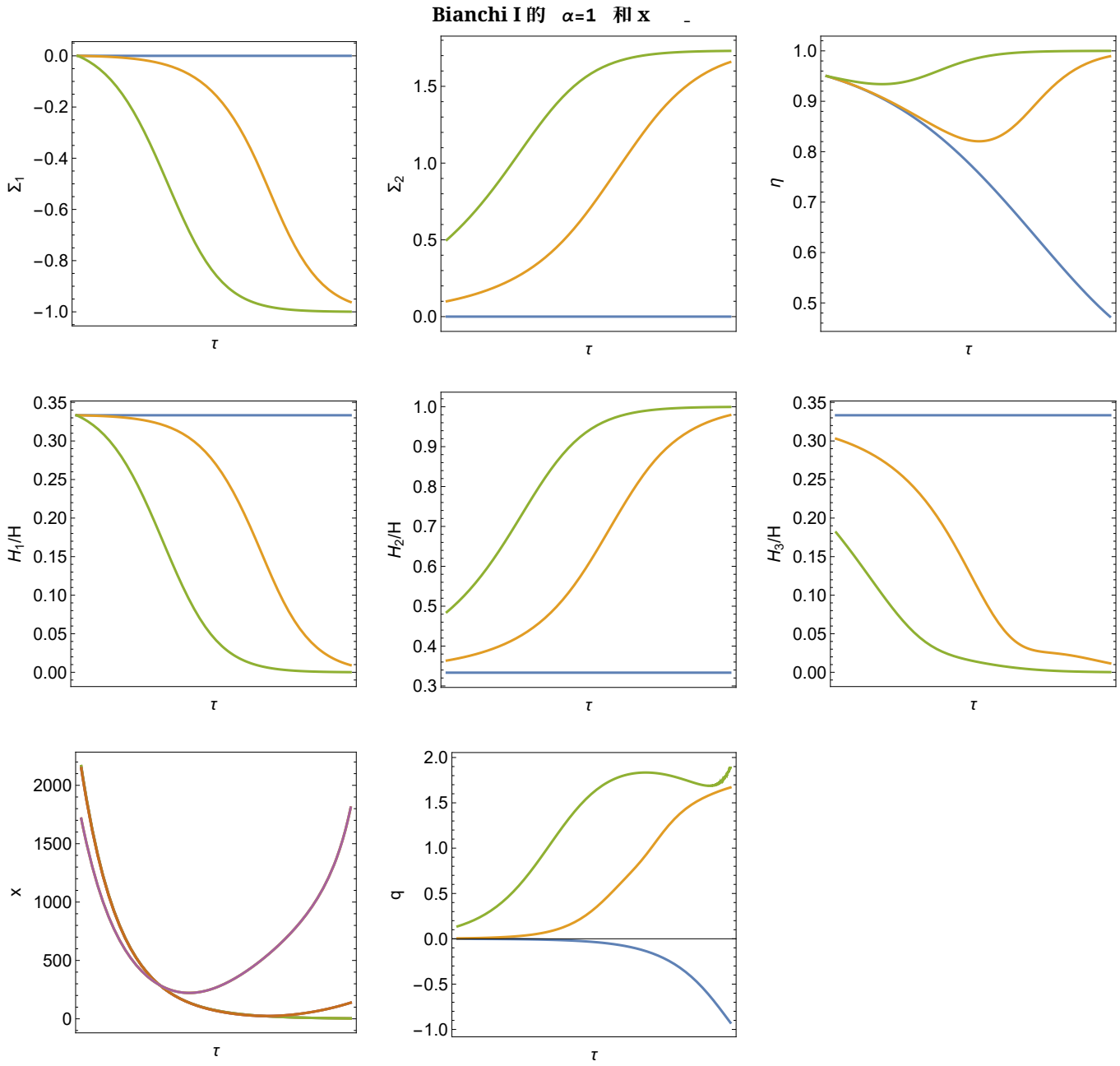


图 4：在初始条件 $\Sigma_1^0 = 0$、$\Sigma_2^0 = (0,\ 0。1,\ 0。5)$ 和 $\eta = 0.95$ 下，分支 x_- 中 $\alpha = 1$ 的定性演化：各向异性参数 Σ_1，Σ_2、减速参数q、标量场 x、哈勃参数 H_1，H_2 和 H_3，以及参数 η。

用于撰写 的研究访问资助。AP 感谢 CH 在开展本研究期间提供的热情接待 .

[1] W. Hu 和 S. Dodelson，《天文学与天体物理学年度评论》**40**，171 (2002)，astro-ph/0110414。[2] P. A. R. Ade 等（普朗克），《天文学与天体物理学》**536**，A18 (2011)，1101.2028。[3] A. H. Guth，《物理评论D》**23**，347 (1981)。[4] J. D. Barrow，《物理评论D》**48**，1585 (1993)。[5] J. Martin、C. Ringeval 和 V. Vennin，《暗宇宙物理学》**5-6**，75 (2014)，1303.3787。[6] A. Ach´ucarro 等 (2022)，2203.08128。

[7] J. D. Barrow 和 A. Paliathanasis，《广义相对论与引力》50，82（2018），1611.06680。[8] R. D'Agostino 和 O. Luongo，《物理快报B辑》829，137070（2022），2112.12816。[9] J. D. Barrow，《物理快报B辑》187，12（1987）。[10] M. P. Ryan 和 L. C. Shepley，*Homogeneous Relativistic Cosmologies*，《普林斯顿物理学丛书》（普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1975），ISBN 978-0-691-08146-5，。[11] E. Kasner，《美国数学杂志》43，217（1921）。[12] S. S. Kokarev，《引力与宇宙学》2，321（1996），gr-qc/9510059。[13] P. Halpern，《物理评论D》66，027503（2002），gr-qc/0203055。[14] T. Clifton 和 J. D. Barrow，《物理评论D》72，103005（2005），[勘误：《物理评论D》90，029902（2014）]，gr-qc/0509059。[15] A. Paliathanasis、J. D. Barrow 和 P. G. L. Leach，《物理评论D》94，023525（2016），1606.00659。[16] A. Paliathanasis、J. Levi Said 和 J. D. Barrow，《物理评论D》97，044008（2018），1709.03432。[17] M. de Cesare 和 E. Wilson-Ewing，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》12，039（2019），1910.03616。[18] O. Delice，《波兰物理学报 B 辑》37，2445（2006），gr-qc/0411011。[19] A. Paliathanasis 和 G. Leon（2024），2406.04563。[20] G. Murtaza、S. Chakraborty 和 A. De，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》08，093（2025），2504.21757。[21] A. Toporensky 和 D. M¨uller，《广义相对论与引力》49，8（2017），1603.02851。[22] S. D. P. Vitenti 和 D. Muller，《物理评论D》74，063508（2006），gr-qc/0604127。[23] J. A. Leach、S. Carloni 和 P. K. S. Dunsby，《经典与量子引力》23，4915（2006），gr-qc/0603012。[24] D. F. Chernoff 和 J. D. Barrow，《物理评论快报》50，134（1983）。[25] J. Soda，《经典与量子引力》29，083001（2012），1201.6434。[26] A. Ghalee，《物理评论D》90，067503（2014），1407.5421。[27] S. Nojiri、S. D. Odintsov、V. K. Oikonomou 和 A. Constantini，《核物理B辑》985，116011（2022），2210.16383。[28] P. Goodarzi，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》11，052（2022），2208.10757。[29] Y. B. Zel'dovich 和 A. A. Starobinsky，《苏联物理学-实验与理论物理学杂志》34，1159（1972）。[30] J. D. Barrow 和 M. S. Turner，《自然》291，469（1981）。[31] T. Rothman 和 R. Matzner，《物理评论D》30，1649（1984）。[32] M. M. Som、M. A. P. Martins 和 A. A. Moregula，《物理评论D》65，067501（2002）。[33] P. Halpern，《物理评论D》63，024009（2001），gr-qc/0010090。[34] K. D. Krori、P. Borgohain 和 D. Das，《经典与量子引力》13，199（1996）。[35] K. D. Krori、P. Borgohain、P. Kar 和 D. Das Kar，《数学物理学杂志》31，446（1990）。[36] E. C´aceres，´A. J. Murcia、A. K. Patra 和 J. F. Pedraza，《高能物理学杂志》12，077（2024），2408.14535。[37] D. Are´an、H.-S. Jeong、J. F. Pedraza 和 L.-C. Qu，《高能物理学杂志》11，138（2024），2407.18430。[38] D. Brizuela 和 S. F. Uria，《物理评论D》110，084059（2024），2406.20070。[39] P. Bueno、P. A. Cano 和 R. A. Hennigar，《物理评论D》110，L041503（2024），2402.14912。[40] H. L. Prihadi、R. R. Firdaus、F. Khairunnisa、D. Dwiputra 和 F. P. Zen，《欧洲物理杂志C辑》85，1228（2025），2508.02174。[41] G. Fournodavlos、I. Rodnianski 和 J. Speck，《美国数学会杂志》36，827（2023），2012.05888。[42] D. Lovelock，《数学物理学杂志》12，498（1971）。[43] R. P. Woodard，《学术百科》10，32243（2015），1506.02210。[44] T. Padmanabhan 和 D. Kothawala，《物理学报告》531，115（2013），1302.2151。[45] P. G. S. Fernandes、P. Carrilho、T. Clifton 和 D. J. Mulryne，《经典与量子引力》39，063001（2022），2202.13908。[46] B. Zwiebach，《物理快报B辑》156，315（1985）。[47] D. G. Boulware 和 S. Deser，《物理评论快报》55，2656（1985）。[48] D. J. Gross 和 J. H. Sloan，《核物理B辑》291，41（1987）。[49] P. Kanti 等，《物理评论D》92，041302（2015），1503.01579。[50] S. Tsujikawa 和 M. Sami，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》01，006（2007），hep-th/0608178。[51] T. Koivisto 和 D. F. Mota，《物理快报B辑》644，104（2007），astro-ph/0606078。[52] S. Carloni 和 J. P. Mimoso，《欧洲物理杂志C辑》77，547（2017），1701.00231。[53] E. O. Pozdeeva、M. A. Skugoreva、A. V. Toporensky 和 S. Y. Vernov，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》09，050（2024），2403.06147。[54] S. Vernov 和 E. Pozdeeva，《宇宙》7，149（2021），2104.11111。[55] E. O. Pozdeeva 和 S. Y. Vernov，《欧洲物理杂志C辑》81，633（2021），2104.04995。[56] A. D. Millano、G. Leon 和 A. Paliathanasis，《物理评论D》108，023519（2023），2304.08659。[57] A. D. Millano、C. Michea、G. Leon 和 A. Paliathanasis，《暗宇宙物理学》46，101589（2024），2405.09732。[58] D. D. Doneva、K. V. Staykov 和 S. S. Yazadjiev，《物理评论D》99，104045（2019），1903.08119。[59] S. Nojiri 和 S. D. Odintsov，《核物理B辑》998，116423（2024），2308.06731。[60] A. Paliathanasis，《广义相对论与引力》56，84（2024）。[61] S. Nojiri 和 S. D. Odintsov，《核物理B辑》631，1（2005），hep-th/0508049。[62] S. Nojiri、S. D. Odintsov 和 V. K. Oikonomou，《物理评论D》99，044050（2019），1811.07790。[63] E. O. Pozdeeva、M. Sami、A. V. Toporensky 和 S. Y. Vernov，《物理评论D》100，083527（2019），1905.05085。[64] B. Li、J. D. Barrow 和 D. F. Mota，《物理评论D》76，044027（2007），0705.3795。[65] S. Nojiri、S. D. Odintsov、V. K. Oikonomou 和 A. A. Popov，《核物理B辑》973，115617（2021），2111.09457。[66] S. Nojiri 和 S. D. Odintsov，《暗宇宙物理学》46，101702（2024），2410.11530。[67] N. Dimakis、A. Giacomini、G. Leon、A. Paliathanasis、E. Pozdeeva 和 S. Vernov，《广义相对论与引力》57，153（2025），2505.02663。

[68] E. Elizalde、E. O. Pozdeeva 和 S. Y. Vernov，现代物理学国际期刊 A **35**，2040045（2020），1909.09452。[69] S. Nojiri、S. D. Odintsov 和 M. Sami，《物理评论D》**74**，046004（2006），hep-th/0605039。[70] S. Tsujikawa 和 M. Sami，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》**0701**，006（2007），hep-th/0608178。[71] K. Bamba、A. N. Makarenko、A. N. Myagky 和 S. D. Odintsov，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》**1504**，001（2015），1411.3852。[72] R. S. Bogadi、A. Giacomini、M. Govender、C. Hansraj、G. Leon 和 A. Paliathanasis，《广义相对论与引力》**57**，129（2025），2508.18055。[73] G. Papagiannopoulos、O. Luongo、G. Leon 和 A. Paliathanasis，高能天体物理学杂志**47**，100397（2025），2503.01620。[74] A. Giacomini、A. Paliathanasis 和 A. Toporensky，《广义相对论与引力》**57**，99（2025），2503.07260。[75] T. Q. Do 和 S. H. Q. Nguyen（2019），1905.01427。[76] F. Naderi、A. Rezaei-Aghdam 和 F. Darabi，《物理评论D》**98**，026009（2018）。[77] D. Glavan 和 C. Lin，《物理评论快报》**124**，081301（2020），1905.03601。[78] J. Arrechea、A. Delhom 和 A. Jim´enez-Cano，《物理评论快报》**125**，149002（2020），2009.10715。