arXiv:2601.01911v1 [math.CO] 5 Jan 2026

若干围长g且负惯性指数为$\lceil \frac{g}{2} \rceil + 1$*的连通符号图类

BeiYan Liu，Fang Duan †

新疆师范大学数学科学学院，
中华人民共和国新疆乌鲁木齐 830017

摘要： 设 Γ 为一个符号图。Γ 的邻接矩阵的负特征值个数称为 Γ的负惯性指数，记作$i_-(\Gamma)$。Γ 中最短圈的长度称为 Γ的围长，记作g。本文给出若干满足条件$i_-(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil + 1$的连通符号图类。

关键词： 符号图；负惯性指数；围长；极值图

美国数学学会分类： 05C50

1 引言

设 $G = (V(G), E(G))$ 是一个由顶点集 $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots\}$ 和边集 E(G) 组成的图。对于 $u, v \in V(G)$ 和 $S \subseteq V(G)$，$u \sim v$ 表示 $uv \in E(G)$，$N_S(v) = \{u \in S \mid uv \in E(G)\}$ 表示 v 在 S 中的邻域，而 $|N_S(v)|$ 称为 v 在 S 中的度，记作 $d_S(v)$。特别地，若 $S = V(G)$，则 $N_S(v)$、$d_S(v)$ 分别可记为 N(v)、d(v)。按照图论中的标准约定，我们用 $K_{n_1,\ldots,n_l}$ 表示具有 l 个部、各部大小为 $n_1, \ldots, n_l$ 的完全多部图，用 $K_{1,n}$ 表示星图；度为 n 的顶点称为 $K_{1,n}$ 的中心顶点。C_n 和 P_n 分别表示具有 n 个顶点的圈和路。

邻接矩阵 $A(G) = (a_{ij})_{n\times n}$ 定义G 如下：若v_i与v_j相邻，则$a_{ij} = 1$；否则$a_{ij} = 0$。由于$A(G)$具有实对称性，其所有特征值均为实数，且可按非递增顺序排列为$(\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \cdots \geq \lambda_n(G))$；该序列通常称为$G$的谱。由此谱可得出三个关键的惯性参数：正惯性指数$i_+(G)$（正特征值的个数）、负惯性指数$i_-(G)$（负特征值的个数）以及零度 $\eta(G)$（零特征值的重数）。这些参数处于矩阵理论与图论交汇处的关键位置，并直接

*本研究受到国家自然科学基金委员会（项目编号：12561064）资助。
†电子邮箱：fangbing327@126.com

应用于分析化学分子的稳定性（例如，预测共轭化合物的 π-电子结构），并为图类分类提供代数判据。因此，过去三十年来，它们一直是谱图论研究的焦点 [5, 6, 14, 16]。

符号图 $\Gamma = (G, \sigma)$ 由 G（称为其底层图）和符号函数 $\sigma : E(G) \to \{+, -\}$ 组成。若对每个 $e \in E(G)$，都有 $\sigma(e) = +$（分别地，$\sigma(e) = -$），则将该符号图记为 $\Gamma = (G, +)$（分别地，$\Gamma = (G, -)$）。给定子集 $\{u_1, u_2, \ldots, u_t\} = S \subseteq V(\Gamma)$，由 S 诱导的 Γ 子图记作 $\Gamma[S]$，，其顶点集为 S，边集为 $\{u_i u_j \in E(\Gamma) \mid u_i \in S \text{ and } u_j \in S\}$；其中，$\Gamma[S]$ 中 $u_i u_j$ 的符号与其在 Γ 中的符号相同。$\Gamma = (G, \sigma)$ 的邻接矩阵定义为 $A(\Gamma) = (a^{\sigma}_{u,v})_{u,v \in V(G)}$，其中当 $uv \in E(G)$ 时，$a^{\sigma}_{u,v} = \sigma(uv) \cdot 1$，否则 $a^{\sigma}_{u,v} = 0$。$A(\Gamma)$ 的特征值称为 Γ 的特征值。符号图的惯性指数、零度及其他基本记号与简单图中的相应概念类似。

圈 C^{σ} 的符号定义为 $\mathrm{sgn}(C^{\sigma}) = \prod_{e \in E(C)} \sigma(e)$。如果 $\mathrm{sgn}(C^{\sigma}) = +$（相应地，$\mathrm{sgn}(C^{\sigma}) = -$），则称 C^{σ} 为正圈（相应地，为负圈）。如果一个符号图 Γ 的所有圈都是正圈，则称其为平衡的，否则称其为非平衡的。特别地，无圈符号图是平衡的。称函数 $\theta : V(\Gamma) \to \{+, -\}$ 为 Γ的切换函数。通过 θ对 Γ 进行切换，可得到新的符号图 $\Gamma^{\theta} = (G, \sigma^{\theta})$，其符号函数 σ^{θ} 定义为：对于任意 $xy \in E(G)$，$\sigma^{\theta}(xy) = \theta(x)\sigma(xy)\theta(y)$。如果存在一个切换函数 θ 使得$\Gamma_2 = \Gamma_1^{\theta}$，则称两个符号图 Γ_1 和 Γ_2 切换等价，记为 $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$。

符号图最早由 Harary [11], 形式化；其谱性质——结合了图的直观结构与矩阵分析的代数力量——此后已成为谱图论的核心研究方向之一 [2, 4, 10, 15]。Belardo 等人 [1] 全面综述了符号图理论的基础内容，包括惯性指数的计算方法和与围长相关的性质，并提出了若干关于符号图结构特征的开放性猜想，为后续研究指明了方向。此前，Duan 等人 [5,6] 研究了围长固定的简单连通图的惯性指数；在符号图领域，Liu 等人 [7]系统刻画了满足 $i_-(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil - 1$ 且$i_-(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil$的极值连通符号图。在零度这一平行研究方向上，Suliman Khan [8]刻画了满足零度条件$\eta(\Gamma) = n(\Gamma) - g(\Gamma)$ 和 $\eta(\Gamma) = n(\Gamma) - g(\Gamma) - 2$的符号图。这为研究符号图零度与围长之间的关联奠定了重要基础。本文聚焦于符号图负惯性指数与围长之间的关系，进一步拓展了 [7]的研究成果，并深入研究满足条件 $i_-(\Gamma) = \lceil g_2 \rceil + 1$ 的符号图。本研究不仅补充了惯性指数这一研究维度，也完善了 Suliman Khan 关于零度的研究，共同丰富了符号图核心指标与围长之间关系的理论体系。

本文其余部分组织如下：第2节回顾必要的基本概念和已有引理；第3节给出关于具有$i_-(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil + 1$的符号图的刻画的主要定理及其详细证明。

2 预备知识

引理 2.1（[12]）. 设 A 是一个 n 阶实矩阵，且 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值。则 $det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$。

引理 2.2.（西尔维斯特惯性定律）如果两个实对称矩阵 A 和 B 相合，则它们具有相同的正（分别为负）惯性指数，且零度相同。

引理 2.3（[7]）。设 $\Gamma = (G, \sigma)$ 是一个围长为 g 的符号图，且 C_g^σ 是 Γ的一个最短符号圈。设 $y, y' \in V(C_g^\sigma)$，并且存在一条从 y 到 y'的长度为 t 的诱导路 P^σ，该路与 C_g^σ点不交。则 $\lceil \frac{g}{2} \rceil \le t$。此外，若 $g \ge 5$，则 $V(\Gamma) V(C_g^\sigma)$ 中的每个顶点至多与 $V(C_g^\sigma)$ 中的一个顶点相邻。

引理 2.4（[17]）。设 Γ 是一个含有悬挂顶点 u 的符号图，Γ'是从 Γ 中删除 u 及与其相邻的顶点后得到的诱导符号子图。则 $i_+(\Gamma) = i_+(\Gamma') + 1$ 且 $i_-(\Gamma) = i_-(\Gamma') + 1$。

引理 2.5。设 Γ' 是符号图 Γ 的一个诱导符号子图。则 $i_+(\Gamma) \ge i_+(\Gamma')$，且 $i_-(\Gamma) \ge i_-(\Gamma')$。

引理 2.6（[16], [17], [18]）。设 C_n^σ、P_n^σ 分别为符号圈和阶为 n 的符号路。

（1）若 C_n^σ 是平衡的，则 $i_-(C_n^\sigma) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 & n \equiv 0, 1 \pmod 4; \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil & n \equiv 2, 3 \pmod 4; \end{cases}$

（2）若 C_n^σ 是非平衡的，则 $i_-(C_n^\sigma) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 & n \equiv 2, 3 \pmod 4 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil & n \equiv 0, 1 \pmod 4; \end{cases}$

（3）$i_-(P_n^\sigma) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。

对于 $x \notin Y$，一组具有不同末端顶点的、内部不相交的 k 条 (x,Y)-路称为从 x 到 Y 的 k-扇。此外，如果一个 k-扇的所有路长度均为 l，则称其为长度为 l 的 k-扇。

引理 2.7. 设 $\Gamma = (G, \sigma)$ 是一个围长为 g 的符号图，且 C_g^σ是 Γ 的一个最短符号圈。若存在一个从 x 到 $V(C_g^\sigma)$、长度为 l 的 k-扇，则 $\lfloor \frac{g}{k} \rfloor + 2l \ge g$。

证明。由于这个 k-扇在 $V(C_g^\sigma)$ 中有 k 个不同的末端顶点，因此这些末端顶点中必有两个在 $V(C_g^\sigma)$ 上的距离小于或等于 $\lfloor \frac{g}{k} \rfloor$。因此，我们可以在 Γ 中找到一个长度至多为 $\lfloor \frac{g}{k} \rfloor + 2l$ 的符号圈，从而所需的不等式成立。□

定理 2.1（[13]）。设 $\Gamma = (G, \sigma)$ 是一个符号图。那么，当且仅当$\Gamma \backsim (G, +)$时，Γ 是平衡的。

引理 2.8（[9]）。设 Γ 为一个阶为 n 的非平衡符号单圈图。则 Γ切换等价于一个阶为 n 且在该圈上恰有一条（任意）负边的符号单圈图。

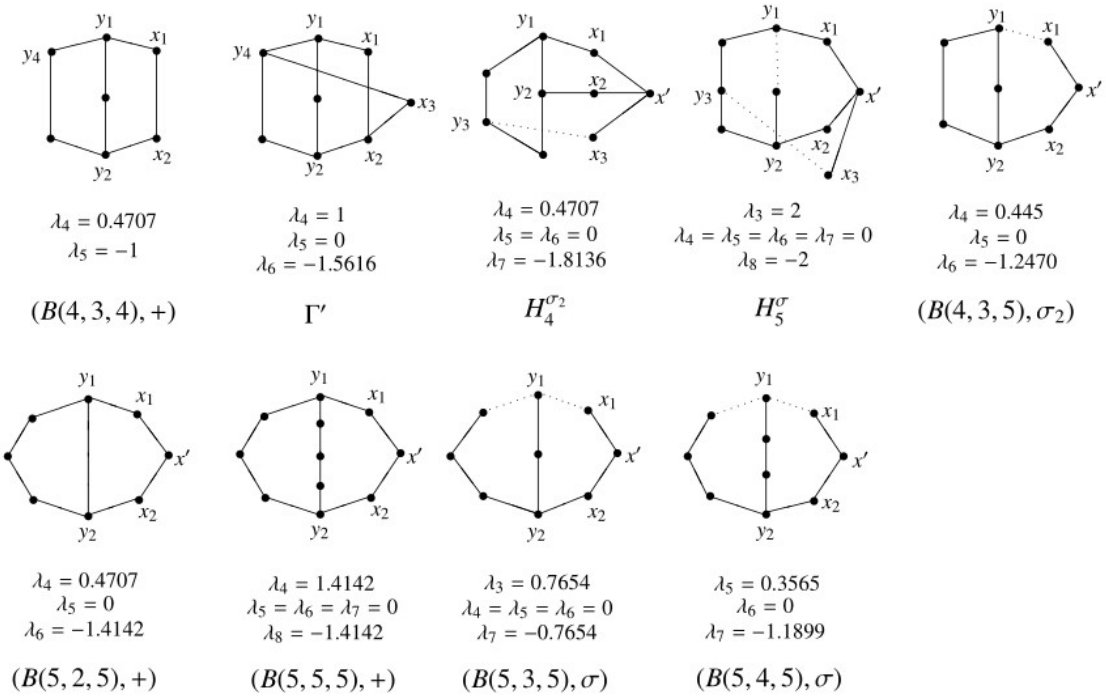


图1：符号图 $(B(4,3,4),+)$、 Γ'、$H_4^{\sigma_2}$、H_5^{σ}、$(B(4,3,5),\sigma_2)$、$(B(5,2,5),+)$、$(B(5,3,5),\sigma)$、$(B(5,4,5),\sigma)$ 和 $(B(5,5,5),+)$

设 C^{σ} 是 Γ 的一个符号圈，且 $v \in V(\Gamma) \setminus V(C^{\sigma})$。记 $d(v,x)$ 为 v 与 x 之间最短路径的长度，并令 $d(v,C^{\sigma}) = min\{d(v,x) \mid x \in V(C^{\sigma})\}$。定义

$$N_r(v,C^{\sigma}) = \{v \in V(\Gamma) \setminus V(C^{\sigma}) \mid d(v,C^{\sigma}) = r\},$$

其中 r 为正整数， $|N_r(v,C^{\sigma})|$ 表示 $N_r(v,C^{\sigma})$ 中顶点的数量。若符号单圈图 Γ 满足：(a) 对任意 r，$N_r(v,C^{\sigma}) = \emptyset$；(b) $N_1(v,C^{\sigma})$ 是独立集，且 $N_1(v,C^{\sigma})$ 中的每个顶点都与 $V(C^{\sigma})$ 中恰好一个顶点相邻，则称 Γ 为典范符号单圈图。设 H^{σ} 是典范符号单圈图 Γ 的诱导符号子图。若 H^{σ} 是星图，且其中心是唯一一个在 C^{σ} 中恰有两个邻点的顶点，则称 H^{σ} 为 Γ 的附着悬挂星；H^{σ} 的这个中心顶点称为主要顶点。

定理 2.2 ([7])。 设 Γ 是一个围长为 g、唯一的符号圈为 C_g^{σ} 的典范符号单圈图。则以下结论成立：

(1) 若 Γ 是符号圈，则 $i_-(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil$ 当且仅当 $\Gamma \cong C_g^{\sigma}$，其中 C_g^{σ} 是平衡的且 $g \equiv 2, 3 (mod\ 4)$，或非平衡的且 $g \equiv 0, 1 (mod\ 4)$；*(2)* 若 Γ 不是符号圈且 $g \equiv 1, 3 (mod\ 4)$，则 $i_-(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil$ 当且仅当 Γ 有一个或多个附着的悬挂星图，使得 $V(C_g^{\sigma})$ 中任意两个主顶点之间恰有一条路具有偶阶；*(3)* 若 Γ 不是符号圈且 $g \equiv 0, 2 (mod\ 4)$，则 $i_-(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil$ 当且仅当 Γ 有一个或多个附着的悬挂星图，使得任意两个主顶点之间的所有路都具有奇阶。

定理 2.3 ([7])。 设 $\Gamma = (G, \sigma)$ 是一个围长为 $g \geq 4$ 的连通符号图，并且不存在满足 $i_{-}(C_g^{\sigma}) = \lceil \frac{g}{2} \rceil$ 的 Γ 的符号圈 C_g^{σ}。假设 Γ 不是典范符号单圈图。那么，$i_{-}(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil$ 当且仅当 Γ 同构于以下符号图之一：

(1) 通过添加孪生顶点，从 P_4^{σ}、P_5^{σ}、平衡的 C_5^{σ} 或非平衡的 C_6^{σ} 得到的围长为 *4* 的符号图；

(2) 将符号圈 C_g^{σ} 的一个顶点与星图 $K_{1,r}$ 的中心相连得到的符号图，其中，若 C_g^{σ} 是平衡的，则 $g \equiv 0,\ 1 (\mathrm{mod}\, 4)$；若 C_g^{σ} 是非平衡的，则 $g \equiv 2,\ 3 (\mathrm{mod}\, 4)$；

(3) (B(4, 3, 4), +), Γ′, $H_4^{\sigma_2}$, H_5^{σ}, (B(4, 3, 5), σ_2), (B(5, 2, 5), +), (B(5, 3, 5), σ), (B(5, 4, 5), σ) 和 *(B(5, 5, 5), +)*（见图 *1*）。

注 1. 定理 *2.3* 中所示图的围长均小于 *6*。

3 具有给定负惯性指数和给定围长的连通符号图

本节将给出三个主要定理。

定理 3.1. 设 Γ是围长为 g 的典范符号单圈图，且其唯一的符号圈为 C_g^{σ}。则有以下结论：

(1) 若 $g \equiv 1,3 (\mathrm{mod}\, 4)$，则 $i_{-}(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil + 1$ 当且仅当 Γ至少有三个附着悬挂星图，且任意两个主顶点之间恰有三条偶数阶路径，其中顶点属于 $V(C_g^{\sigma})$；

(2) 若 $g \equiv 0,2 (\mathrm{mod}\, 4)$，则 $i_{-}(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil + 1$ 当且仅当 Γ至少有两个附着悬挂星图，且任意两个主顶点之间恰有两条偶数阶路径，其中顶点属于 $V(C_g^{\sigma})$。

证明。显然，根据引理 2.6， $\Gamma \ncong C_g^{\sigma}$。因此，Γ中有 k 个 ≥ 1 附着悬挂星。从Γ中移除这 k 个附着悬挂星后得到路径 $P^{\sigma} l_1, \ldots, P^{\sigma} l_k$。于是，$g = k + l_1 + \cdots + l_k$。另一方面，由于 Γ中有 k 个附着悬挂星，根据引理 2.4，我们有 $i_{-}(\Gamma) = k + i_{-}(P^{\sigma} l_1) + \cdots + i_{-}(P^{\sigma} l_k)$。可考虑以下两种情况：

情况 1. $g \equiv 1,\ 3$（模 4）。

由于此时g为奇数，我们有$i_{-}(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil + 1$当且仅当

$$k + i_{-}(P_{l_1}^{\sigma}) + \cdots + i_{-}(P_{l_k}^{\sigma}) = i_{-}(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil + 1 = \frac{g+1}{2} + 1 = \frac{k + l_1 + \cdots + l_k + 3}{2}.$$

于是，

$$k - 3 = [l_1 - 2i_{-}(P_{l_1}^{\sigma})] + [l_2 - 2i_{-}(P_{l_2}^{\sigma})] + \cdots + [l_k - 2i_{-}(P_{l_k}^{\sigma})].$$

根据引理 2.6，当$l_j - 2i_{-}(P^{\sigma} l_j) = 0$为偶数时，以及$l_j i - 2(P_{-} l^{\sigma})$ 为奇数时，对j，…，k}均成立。因此，$i_{-}(\Gamma) = \lceil g_2 \rceil + 1$当且仅当$l_1$,，…，$l_k$中有三个为偶数，证毕。

情况 2. $g \equiv 0,\ 2 \pmod 4$。

由于g为偶数，我们有$i_-(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil + 1$当且仅当

$$k + i_-(P_{l_1}^{\sigma}) + \cdots + i_-(P_{l_k}^{\sigma}) = i_-(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil + 1 = \frac{g}{2} + 1 = \frac{k + l_1 + \cdots + l_k + 2}{2}.$$

于是，

$$k - 2 = [l_1 - 2i_-(P_{l_1}^{\sigma})] + [l_2 - 2i_-(P_{l_2}^{\sigma})] + \cdots + [l_k - 2i_-(P_{l_k}^{\sigma})].$$

通过与情况 1 类似的讨论，$i_-(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil + 1$成立当且仅当$l_1$、.....、$l_k$中有两个为偶数。由此得到所需结论。□

设 G_1 是一个包含顶点 u 的图，G_2 是一个与 G_1不相交的 n 阶图。对于 $1 \le k \le n$，将 G_1 与 G_2 关于 u 的 k-连接图定义为：从 $G_1 \cup G_2$ 出发，将 u 与 G_2, 中的任意 k 个顶点相连，所得图记作 $G_1(u) \odot^k G_2$。显然，当 $n > k$ 时，图 $G_1(u) \odot^k G_2$ 并不唯一确定。

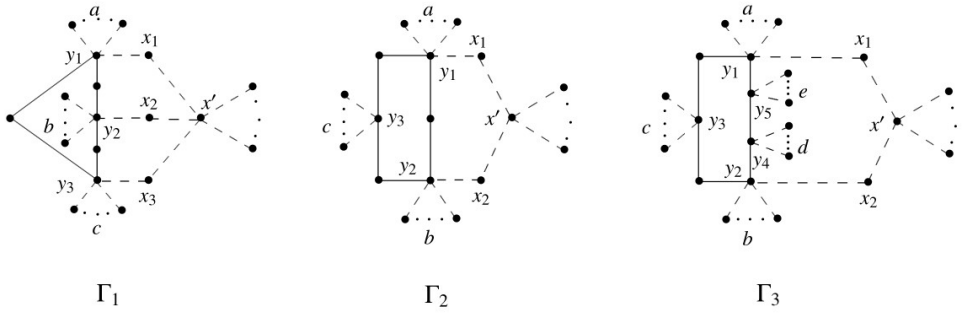


图 2：符号图 Γ_1、Γ_2 和 Γ_3

我们介绍一种用于表示符号图的方法，本节将用到这种方法。由实线（分别为点线）连接的两个顶点表示对应的边为正（分别为负）；由虚线连接的两个顶点则表示边的符号未定。

定理 3.2. 设 $\Gamma = (G, \sigma)$ 是一个围长为 $g \equiv 2,3 \pmod 4$的连通无三角形符号图。假设存在一个平衡符号圈 C_g^{σ} *in* Γ，且 Γ 不是典范符号单圈图。如果 $N_3(v, C_g^{\sigma}) \neq \emptyset$, 那么 $i_-(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil + 1$ 当且仅当 Γ同构于以下某个符号图：

(1) 符号图 Γ_1和 Γ_2，其中 a, b, c 为非负整数；
(2) 符号图 Γ_3，其中 a, b, c, d, e 为非负整数，且 d, e 不能同时为非零；

(3) 符号图 $K_1^{\sigma}{}_{,t}(x') \odot^1 \Gamma'$，其中 x' 是 $K_1^{\sigma}{}_{,t}$ 的中心顶点，Γ' 是定理 *2.2(2)(3)* 中所示的、具有平衡符号圈 C_g^{σ} 的其中一个符号图，适用于 $g \equiv 2,3 \pmod 4$，且 x' 恰好与 Γ' 的一个悬挂顶点相邻。

证明。通过一个简单的操作，我们可以验证 (1)、(2) 和 (3) 中所示每个符号图的负惯性指数为 $\lceil \frac{g}{2} \rceil + 1$。反过来，设 Γ 是一个围长为 $g \equiv 2 \pmod 4$、满足 $3 \pmod 4$ 的连通无三角形符号图，且 $i_-(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil + 1$。于是 $g \ge 6$，根据定理 2.1，不妨设 C_g^{σ} 的每条边均为正。注意，由引理 2.6 可知 $i_-(C_g^{\sigma}) = \lceil \frac{g}{2} \rceil$

2.6。我们有 $N_4(v, C_g^\sigma) = \emptyset$。事实上，反设 $x''' \in N_4(v, C_g^\sigma) \neq \emptyset$。那么，不妨设 $x''' \sim x'' \in N_3(v, C_g^\sigma)$、$x'' \sim x' \in N_2(v, C_g^\sigma)$，且 $x' \sim x \in N_1(v, C_g^\sigma)$。根据引理 2.4 和 2.5，导出矛盾

$$i_-(\Gamma) \geq i_-(\Gamma[V(C_g^\sigma) \cup \{x, x', x'', x'''\}]) = i_-(\Gamma[V(C_g^\sigma)]) + 2 = \lceil \frac{g}{2} \rceil + 2 > \lceil \frac{g}{2} \rceil + 1$$

因此，$N_i(v, C_g^\sigma) = \emptyset$ 当 $i \geq 4$ 时。注意 $N_3(v, C_g^\sigma) \neq \emptyset$。我们给出以下断言。

断言。 $|N_2(v, C_g^\sigma)| = 1$。

证明。设 $x'' \in N_3(v, C_g^\sigma) \neq \emptyset$ 且 $x'' \sim x_1' \in N_2(v, C_g^\sigma)$。假设 $|N_2(v, C_g^\sigma)| \geq 2$。令 $x_1' \neq x_2' \in N_2(v, C_g^\sigma)$，且 $x_2' \sim x_2 \in N_1(v, C_g^\sigma)$。若 $x_2' \nsim x''$，则

$$i_-(\Gamma) \geq i_-(\Gamma[V(C_g^\sigma) \cup \{x_2, x_1', x_2', x''\}]) = i_-(C_g^\sigma) + 2 > \left\lceil \frac{g}{2} \right\rceil + 1$$

由引理 2.4 和 2.5，得到矛盾。因此 $x_2' \sim x''$，从而 $x_1' \nsim x_2'$。此外，存在 $x_2 \neq x_1 \in N_1(v, C_g^\sigma)$，使得 $x_1' \sim x_1$，因为 $g \geq 6$。由引理 2.4 和 2.5 也可推出矛盾 $i_-(\Gamma) \geq i_-(\Gamma[V(C_g^\sigma) \cup \{x_1, x_2, x_1', x_2'\}]) = i_-(C_g^\sigma) + 2 > \left\lceil \frac{g}{2} \right\rceil + 1$。于是 $|N_2(v, C_g^\sigma)| = 1$。□

我们不妨假设 $N_2(v, C_g^\sigma) = \{x'\}$。由于 $N_3(v, C_g^\sigma)$ 中的每个顶点都与 x' 相邻，且 Γ 无三角形，因此 $N_3(v, C_g^\sigma)$ 是一个独立集。假设 x' 与 $N_1(v, C_g^\sigma)$ 中的四个顶点 x_1, x_2, x_3, x_4 相邻。由于 $g \geq 6$，因此存在一个从 x' 到 $V(C_g^\sigma)$、长度为 2 的 4-扇。于是，根据引理 2.7，$\lfloor \frac{g}{4} \rfloor + 4 \geq g$，等价地，$\lceil \frac{3g}{4} \rceil \leq 4$，这意味着 $g \leq 5$，矛盾。因此，x' 至多与 $N_1(v, C_g^\sigma)$ 中的三个顶点相邻，以下三种情况需要考虑:

情况 1。 x' 恰好与 x_1, x_2 和 x_3 这三个顶点相邻，它们属于 $N_1(v, C_g^\sigma)$。

注意，x_1, x_2, x_3 在 $V(C_g^\sigma)$ 中没有公共邻点。我们不妨假设 $x_i \sim y_i$，其中 $i \in \{1, 2, 3\}$。那么存在一条从 x' 到 $V(C_g^\sigma)$、长度为 2 的 3-扇。因此，根据引理 2.7，$\lfloor \frac{g}{3} \rfloor + 4 \geq g$，于是 $g = 6$。

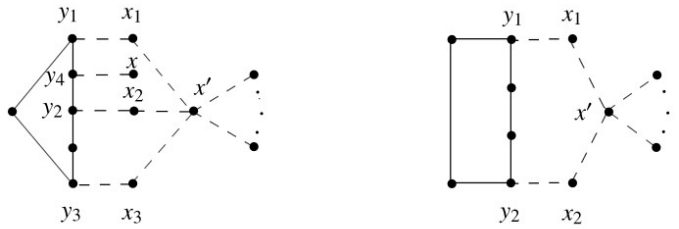
设 $x \in N_1(v, C_6^\sigma) \backslash \{x_1, x_2, x_3\}$（若存在）。那么，根据引理 2.3，$x$ 与 $V(C_6^\sigma)$ 中恰好一个顶点相邻。若 x 与 $V(C_6^\sigma)$ 中一个不同于 y_1, y_2 和 y_3 的顶点相邻，则 $\Gamma[V(C_6^\sigma) \cup N_3(v, C_g^\sigma) \cup \{x_1, x_2, x_3, x, x'\}] \cong H_1^\sigma$（见图 3）。这与 $i_-(\Gamma) \geq i_-(H_1^\sigma) = 5 > 4 = \lceil \frac{6}{2} \rceil + 1$ 矛盾。于是，$N_1(v, C_g^\sigma)$ 中的每个顶点都必须与 y_1, y_2 和 y_3 中的一个相邻，因此 $N_1(v, C_g^\sigma)$ 是一个独立集。因此 $\Gamma \cong \Gamma_1$（见图 2），其中 a、b 和 c 均为非负整数。

情况 2. x' 恰好与 x_1, x_2 这两个顶点相邻，它们属于 $N_1(v, C_g^\sigma)$。

由于 x_1, x_2 在 $V(C_g^\sigma)$ 中没有公共邻点，我们可以假设 $x_i \sim y_i$ 对于 $i \in \{1, 2\}$ 成立。从 x' 到 $V(C_g^\sigma)$ 存在一个长度为 2 的 2-扇。因此，根据引理 2.7，$\lfloor \frac{g}{2} \rfloor + 4 \geq g$，这意味着 $g = 6$ 或 7。

假设 $g = 6$。若 $\Gamma[V(C_6^\sigma) \cup N_3(v, C_g^\sigma) \cup \{x', x_1, x_2\})] \cong H_2^\sigma$（见图 3），则会与 $i_-(\Gamma) \geq i_-(H_2^\sigma) = 5 > 4 = \lceil \frac{6}{2} \rceil + 1$ 矛盾。因此，$\Gamma[V(C_6^\sigma) \cup N_3(v, C_g^\sigma) \cup \{x', x_1, x_2\}] \cong \Gamma_2$，其中 a、b、c 均为零（见图 2）。令 $x \in N_1(v, C_g^\sigma)$（若存在）为不同于 x_1 和 x_2 的顶点。与情况 1 类似，x 必须恰好与 y_1, y_2 和 y_3 之一相邻，因此 $N_1(v, C_g^\sigma)$ 是一个独立集。由此可得，Γ 同构于符号图 Γ_2^σ，其中 a、b、c 均为非负整数。

假设 $g = 7$。则 $\Gamma[V(C_7^\sigma) \cup N_3(v, C_g^\sigma) \cup \{x', x_1, x_2\})] \cong \Gamma_3$，其中 $a = b = c = d = e = 0$（见图 2）。与情况 1 类似，$N_1(v, C_g^\sigma) \setminus \{x_1, x_2\}$ 中的每个顶点（若存在）都恰好与 y_1, y_2, y_3, y_4 和 y_5 之一相邻，因此 $N_1(v, C_g^\sigma)$ 是一个独立集。由此可得，Γ 同构于 Γ_3（见图 2），其中 a、b、c、d 和 e 均为非负整数，且 d、e 不能同时非零。



H_1^σ H_2^σ

图 3：符号图 H_1^σ 和 H_2^σ

情形 3. x' 恰与 x_1 $N_1(v, C_g^\sigma)$中的一个顶点相邻。令 $x'' \in N_3(v, C_g^\sigma)$。从 Γ 中删去悬挂边 $x''x'$，得到

$$\lceil \frac{g}{2} \rceil + 1 = i_-(\Gamma) = i_-(\Gamma[V(C_g^\sigma) \cup N_1(v, C_g^\sigma)]) + 1$$

由引理 2.5 可知。因此 $i_-(\Gamma[V(C_g^\sigma) \cup N_1(v, C_g^\sigma)]) = \lceil g/2 \rceil$。注意到 $\Gamma[V(C_g^\sigma) \cup N_1(v, C_g^\sigma)]$ 根据注 1 是一个典范符号单圈图。我们得到 $\Gamma \cong K_1^\sigma, t(x') \odot^1 \Gamma'$，其中 Γ' 是定理 2.2(2)(3) 所示的符号图之一，其平衡符号圈为 C_g^σ 且 $g \equiv 2, 3 \pmod 4$，而 x' 与 Γ' 的一个悬挂顶点相邻。证毕。□

定理 3.3. 设 $\Gamma = (G, \sigma)$ 是一个围长为 $g \equiv 2,3 \pmod 4$ 的连通无三角形符号图。假设其中存在一个平衡符号圈 C_g^σ，且 Γ 不是典范符号单圈图。如果 $N_3(v, C_g^\sigma) = \emptyset$，那么 $i_-(\Gamma) = \lceil \frac{g}{2} \rceil + 1$ 当且仅当 Γ 同构于下列某个符号图：

(1) 符号图 $(B(4,4,5), -)$。（见图 *4*）；
(2) 符号图 Γ_5（见图 *4*），其中 a, b, c 为非负整数；
*(3)*符号图 Γ_6（见图 *4*），其中 a, b, c 和 d 为非负整数；若 a, b, c 中任意一个非零，则 d 必须为零；
(4) 符号图 Γ_7（见图 *4*），其中 a，b，c，d 和 e 均为非负整数；若 a，b，c 不全为零，则 $d = e = 0$；
(5) 符号图 Γ_8（见图 *4*），其中 a，b，c，d 和 e 均为非负整数。此外，a，b，c，d 和 e 中至多有三个非零；若 d，e 中有非零项，则 a，b，c 均为零；

(6) 符号图 Γ_9（见图 *4*），其中 a，b，c，d，e，f，g 均为非负整数。此外，它们中至多有三个非零，即 a，b，c。若恰有两个非零，则这两个要么是 a，b，c 中的两个，要么是 ae，ad，be，bd，fg 中的一个。
(7) 符号图 $K_1^\sigma, t(x) \odot^k \Gamma'$，其中 x 是 K_1^σ, t，Γ' 的中心顶点，该图是定理 *2.2(1)*、*(2)* 和 *(3)* 中所示的符号图之一，其包含平衡符号圈 C_g^σ，且 $g \equiv 2, 3 \pmod 4$；x 与 C_g^σ 中的至少一个顶点相邻，Γ'。

证明。 由定理 2.1，可假设C_g^σ的每条边均为正边。由引理 2.3，$N_1(v,C_g^\sigma)$ 中的任意顶点都恰好与$V(C_g^\sigma)$ 中的一个顶点相邻，因为$g \geq 6$。注意， Γ 不是典范单圈图。我们有$N_2(v,C_g^\sigma) \neq \emptyset$，并可分为以下两种情形。

情况 1。 $N_2(v,C_g^\sigma)$ 是一个独立集。

令 x_1'、$x_2' \in N_2(v, C_g^\sigma)$。设 $N(x_1') \neq N(x_2')$。不妨令 $x_2' \sim x_2 \in N_1(v,C_g^\sigma)$ 且$x_1' \nsim x_2$。令 $x_1' \sim x_1$。则

$$i_-(\Gamma) \geq i_-(\Gamma[V(C_g^\sigma) \cup \{x_1, x_2, x_1', x_2'\}]) = i_-(C_g^\sigma) + 2 > \left\lceil \frac{g}{2} \right\rceil + 1$$

由引理 2.4 和 2.5，矛盾。因此，$N(x_2') = N(x_1')$，这意味着$|N(x_2')| = |N(x_2')| = 1$，因为 $g \geq 6$。所以，除非 $|N_2(v, C_g^\sigma)| = 1$，$N_2(v, C_g^\sigma)$ 中的每个顶点的度都为 1，且它们具有一个公共邻点，记为 x，位于 $N_1(v, C_g^\sigma)$ 中。注意，$\lceil g_2 \rceil + 1 = i_-(\Gamma) = i_-(\Gamma - x - N_2(v, C_g^\sigma)) + 1$。我们有 $i_-(\Gamma - x - N_2(v, C_g^\sigma)) = \lceil g_2 \rceil$。此外，由于 $\Gamma - x - N_2(v, C_g^\sigma)$根据注 1 是一个典范单圈图，$\Gamma$ 同构于符号图 $K_1^\sigma, t(x) \odot^k \Gamma'$，其中 Γ' 是定理 2.2(1)、(2) 和 (3) 中所示符号图之一，具有平衡符号圈 C_g^σ，且 $g \equiv 2, 3 (\mathrm{mod}\ 4)$，并且 x 与 C_g^σ中的至少一个顶点相邻，该顶点属于 Γ'。

现在我们只需考虑 $|N_2(v, C_g^\sigma)| = 1$，且 $N_2(v, C_g^\sigma)$ 中的顶点与 $N_1(v, C_g^\sigma)$ 中至少两个顶点相邻的情形。令 $N_2(v, C_g^\sigma) = \{x'\}$。如果 x' 与 $N_1(v, C_g^\sigma)$ 中的四个顶点相邻，那么由于 $g \geq 6$，存在一个从 x' 到 $V(C_g^\sigma)$、长度为 2 的 4-扇。因此，根据引理 2.7，$\lfloor \frac{g}{4} \rfloor + 4 \geq g$，这意味着 $g \leq 5$，矛盾。故 x'至多与 $N_1(v, C_g^\sigma)$ 中的三个顶点相邻。

子情形 1. x' 与恰好三个顶点 x_1, x_2, x_3 相邻，它们属于 $N_1(v,C_g^\sigma)$。

不妨设 $x_i \sim y_i$，对所有 $i \in \{1, 2, 3\}$ 均成立，因为 x_1, x_2, x_3 在 $V(C_g^\sigma)$ 中没有公共邻点。从 x'到 $V(C_g^\sigma)$ 存在一个长度为 2 的 3-扇。因此，根据引理 2.7，$\lfloor g_3 \rfloor + 4 \geq g$，这意味着 $g = 6$。于是 $\Gamma[V(C_6^\sigma) \cup \{x_1, x_2, x_3, x'\}] \cong \Gamma_4$（见图 4）。按 $y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6, x_1, x_2, x_3, x'$ 的顺序，$A(\Gamma_4)$ 可写为

$$A(\Gamma_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & a_{17}^\sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & a_{28}^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_{39}^\sigma & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{17}^\sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{710}^\sigma \\ 0 & a_{28}^\sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{810}^\sigma \\ 0 & 0 & a_{39}^\sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{910}^\sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{710}^\sigma & a_{810}^\sigma & a_{910}^\sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

对 $A(\Gamma_4)$ 进行初等合同矩阵运算后，它与下列矩阵合同：

$$B_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&2&0&0&0&0\\0&0&0&0&2&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&a_{910}^{\sigma}\\0&0&0&0&0&0&0&0&a_{910}^{\sigma}&0\end{pmatrix}.$$

矩阵 B_1 有四个负特征值。设 $x\in N_1(v,C_6^{\sigma})\setminus\{x_1,x_2,x_3\}$（若存在）。那么，根据引理 2.3，x 与 $V(C_6^{\sigma})$ 中恰好一个顶点相邻。假设 x 与 $V(C_6^{\sigma})$ 中除 y_1,y_2 和 y_3 以外的一个顶点相邻。我们得到 $\Gamma[V(C_6^{\sigma})\cup\{x_1,x_2,x_3,x,x'\}]\cong H_3^{\sigma}$（见图 5）。按 $y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,x_1,x_2,x_3$, x，x′ 的顺序，$A(H_3^{\sigma})$ 可写为

$$A(H_3^{\sigma})=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&1&a_{17}^{\sigma}&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&a_{28}^{\sigma}&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0&a_{39}^{\sigma}&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&0&a_{410}^{\sigma}&0\\0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\a_{17}^{\sigma}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&a_{711}^{\sigma}\\0&a_{28}^{\sigma}&0&0&0&0&0&0&0&0&a_{811}^{\sigma}\\0&0&a_{39}^{\sigma}&0&0&0&0&0&0&0&a_{911}^{\sigma}\\0&0&0&a_{410}^{\sigma}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&a_{711}^{\sigma}&a_{811}^{\sigma}&a_{911}^{\sigma}&0&0\end{pmatrix}.$$

对$A(H_3^{\sigma})$进行初等合同矩阵运算，可得其合同于 o

$$B_2=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&a_{811}^{\sigma}+\frac{a_{28}^{\sigma}a_{911}^{\sigma}}{a_{39}^{\sigma}}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&a_{811}^{\sigma}+\frac{a_{28}^{\sigma}a_{911}^{\sigma}}{a_{39}^{\sigma}}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{a_{39}^{\sigma}a_{410}^{\sigma}}{2}\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{a_{39}^{\sigma}a_{410}^{\sigma}}{2}&0\end{pmatrix}.$$

显然，B_2有五个负特征值。若 $i_-(\Gamma)\geq i_-(\Gamma[V(C_6^{\sigma})\cup\{x_2,x_3,x,x'\}])=5>4=\lceil\frac{6}{2}\rceil+1$，则会产生矛盾。因此，$N_1(v,C_g^{\sigma})$ 中的每个顶点都必须恰好与 y_1,y_2 和 y_3, 中的一个相邻，因而 $N_1(v,C_g^{\sigma})$ 是一个独立集。因此 $\Gamma\cong\Gamma_5$（见图 4），其中 a、b 和 c 均为非负整数。

子情形 2. x' 恰好与x_1, x_2 这两个$N_1(v,C_g^\sigma)$ 中的顶点相邻。

我们可以假设$x_i \sim y_i$ 对于$i \in \{1,2\}$成立。从x' 到$V(C_g^\sigma)$存在一条长度为 2 的 2-扇。因此，根据引理 2.7, $^-\lfloor g_2 \rfloor + 4 \geq g$ </style}，从而$g = 6$或 7。

假设 g = 6且 $N_1(v, C_6^\sigma) = \{x_1, x_2\}$。由于 i_((B(4, 4, 5), +)) = 5 > 4 = $\lceil \frac{6}{2} \rceil + 1$, i_((B(5, 3, 5), +)) =i_(B(5, 3, 5), –) =i_(B(4, 4, 5), –) = 4 = $\lceil \frac{6}{2} \rceil + 1$（见图 4 和图 5）。根据引理 2.8, Γ同构于符号图 (B(5, 3, 5), +)、(B(5, 3, 5), –) 或 (B(4, 4, 5), –)。容易观察到，如果 $\Gamma[V(C_6^\sigma) \cup \{x_1, x_2\} \cup x'] \cong$(B(4, 4, 5), –)，则 $N_1(v, C_6^\sigma) = \{x_1, x_2\}$。我们考虑另外两张图，并令 $x \in N_1(v, C_6^\sigma)$ 与 x_1 和 x_2不同。类似于子情形 1，在 (B(5, 3, 5), +) 中，x 必须与 y_1, y_2, y_3, y_5 中的恰好一个相邻。因此，Γ同构于符号图 Γ_6，其中 a、b、c 和 d 为非负整数（见图 4）。此外，如果 a、b、c 中任意一个非零，则 d 必须为零。类似地，在 (B(5, 3, 5), –) 中，x 必须与 y_1, y_2, y_4, y_5, y_6 中的恰好一个相邻。因此，Γ同构于符号图 Γ_7，其中 a、b、c、d 和 e 为非负整数（见图 4）。此外，a、b、c、d 和 e 中至多有三个非零，并且只要 d、e 中有一个非零，a、b、c 就都为零。

假设 $g = 7$ 且 $N_1(v,C_7^\sigma) = \{x_1, x_2\}$。那么根据引理 2.8, Γ 切换等价于 ($B$(5, 4, 5), +) 或 ($B$(5, 4, 5), –)（见图 4）。通过一个简单的操作，我们得到

$$i_-((B(5,4,5),+)) = i_-((B(5,4,5),-)) = 5 = \lceil \frac{7}{2} \rceil + 1,$$

如所需。若 $N_1(v, C_7^\sigma) \neq \{x_1, x_2\}$，并令 $x \in N_1(v, C_7^\sigma) \setminus \{x_1, x_2\}$，则 x 必须与 (B(5, 4, 5), +) 中的 y_1, y_2, y_3, y_4 和 y_5 恰有一个相邻。因此，Γ同构于符号图 Γ_8，其中 a、b、c、d 和 e 为非负整数（见图 4）。此外，它们中至多有四个非零；当 d 和 e 均非零时，a、b、c 均为零。类似地，x 必须与 (B(5, 4, 5), –) 中的 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ 和 y_7 恰有一个相邻。于是，Γ同构于符号图 Γ_9，其中 a、b、c、d、e、f、g 为非负整数（见图 4）。此外，它们中至多有三个非零，即 a、b、c。若恰有两个非零，则这两个要么是 a、b、c 中的两个，要么是 ae、ad、be、bd、fg 中的一个。

情况 2。 $N_2(v,C_g^\sigma)$ 不是独立集。

不妨设 x_1'、$x_2' \in N_2(v,C_g^\sigma)$ 和 $x_1' \sim x_2'$，因为$N_2(v,C_g^\sigma)$ 不是独立集。令 $x_i' \sim x_i \in N_1(v,C_g^\sigma)$，且 $x_i \sim y_i$ 对于$i \in \{1,2\}$成立。首先，可以建立如下断言。

断言。$N_2(v,C_g^\sigma)] = \{x_1', x_2'\}$。

证明。 假设$x_3' \in N_2(v,C_g^\sigma)$ 除了x_1' 和x_2'之外还存在。则x_3' 不可能同时与x_1 和x_2 相邻，因为$g \geq 6$。如果x_3' 与顶点$x_3 \in N_1(v,C_g^\sigma)\setminus\{x_1, x_2\}$相邻，那么

$$i_-(\Gamma) \geq i_-(\Gamma[V(C_g^\sigma) \cup \{x_1, x_3, x_1', x_3'\}]) = i_-(\Gamma[V(C_g^\sigma)]) + 2 = \lceil \frac{g}{2} \rceil + 2 > \left\lceil \frac{g}{2} \right\rceil + 1.$$

如果x_3' 与x_1 和x_2,中的一个x_2,相邻，那么

$$i_-(\Gamma) \geq i_-(\Gamma[V(C_g^\sigma) \cup \{x_1, x_2, x_1', x_3'\}]) = i_-(\Gamma[V(C_g^\sigma)]) + 2 = \lceil \frac{g}{2} \rceil + 2 > \left\lceil \frac{g}{2} \right\rceil + 1.$$

这两个矛盾表明$N_2(v,C_g^\sigma) = \{x_1', x_2'\}$。 □

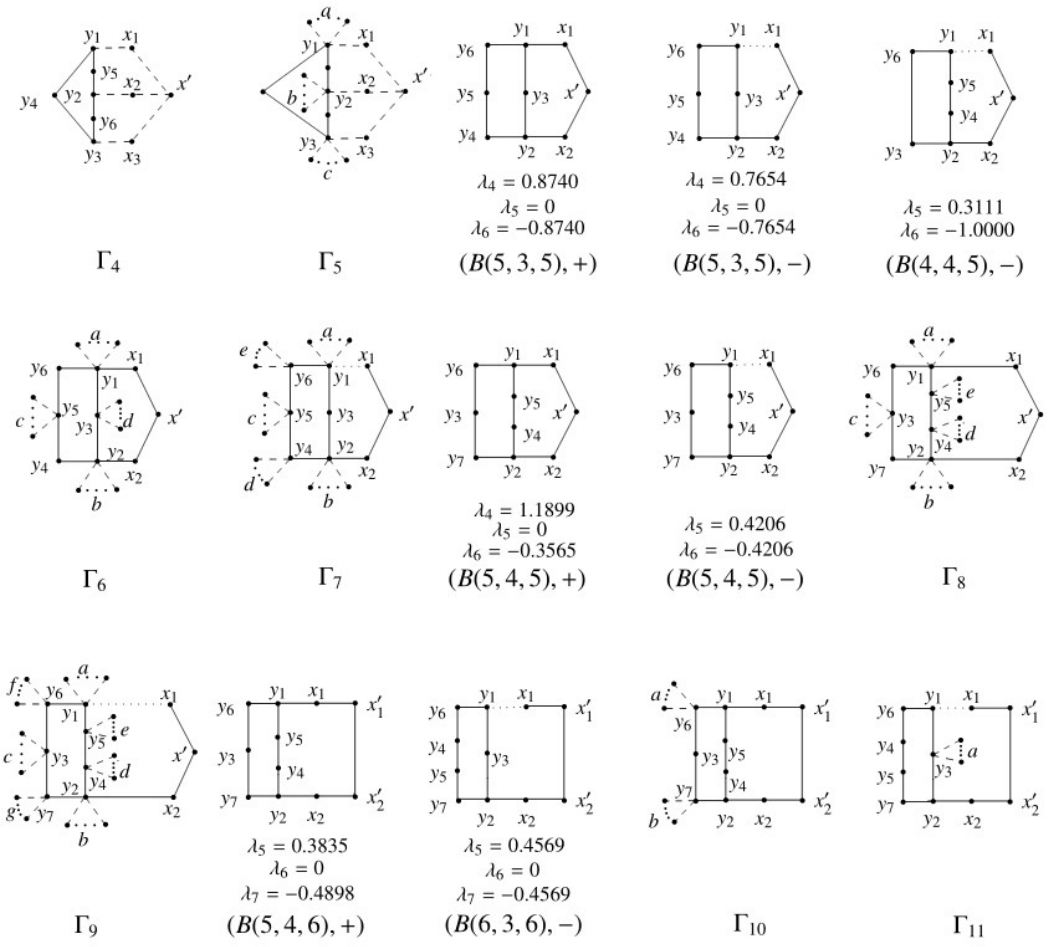


图 4：符号图 Γ_4, Γ_5, ($B(5, 3, 5)$, +), ($B(5, 3, 5)$, –), ($B(4, 4, 5)$, –), Γ_6, Γ_7, ($B(5, 4, 5)$, +), ($B(5, 4, 5)$, –), Γ_4, Γ_8, Γ_9, ($B(5, 4, 6)$, +), ($B(6, 3, 6)$, σ_1), Γ_{10}和 Γ_{11}

由于y_1与y_2之间存在一条长度为 5 的路，且P与C_g^σ点不交，由引理 2.3 得到 $\left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor + 5 \geq g$，因此$g \leq 10$。所以$g = 6$，7 或 10。

假设 g = 6。那么 $\Gamma[V(C_6^\sigma) \cup \{x_1, x_2, x_1', x_2'\}] \cong$(B(5, 3, 6), σ)、(B(6, 2, 6), σ) 或 (B(4, 4, 6), σ)（见图 5）。按 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, x_1, x_2, x_1'$、$x_2'$的顺序，A((B(5, 3, 6), σ)) 可写为

$$A((B(5,3,6),\sigma)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & a_{17}^{\sigma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_{28}^{\sigma} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{17}^{\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{79}^{\sigma} & 0 \\ 0 & a_{28}^{\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{810}^{\sigma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{79}^{\sigma} & 0 & 0 & a_{910}^{\sigma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{810}^{\sigma} & a_{910}^{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

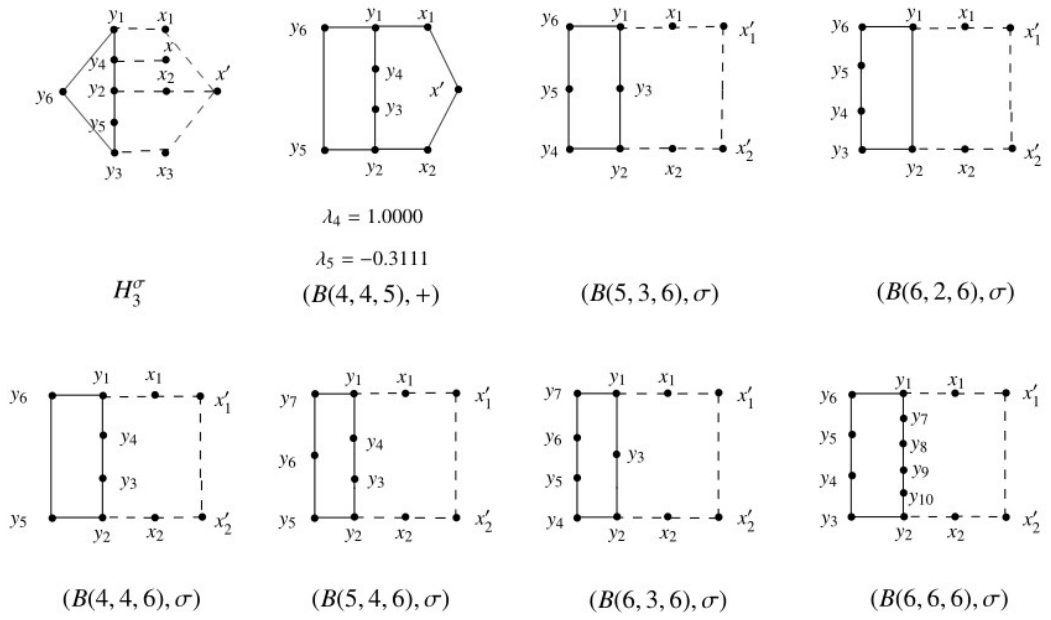


图 5：符号图H_3^σ、$(B(4,4,5),+)$、$(B(5,3,6),\sigma)$、$(B(6,2,6),\sigma)$、$(B(4,4,6),\sigma)$、$(B(5,4,6),\sigma)$、$(B(6,3,6),\sigma)$和$(B(6,6,6),\sigma)$

应用　　经过初等合同矩阵运算，$A((B(5,3,6),\sigma))$ 与之合同，得到

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{\sigma}_{810} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{\sigma}_{810} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{\sigma}_{79} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{\sigma}_{79} & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵B_3有五个负特征值，这与$i_-((B(5,3,6),\sigma)) = 5 > \lceil \frac{6}{2} \rceil + 1 = 4$由引理 2.2 得出相矛盾。

按$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, x_1, x_2, x_1', x_2'$的顺序，$A((B(6,2,6),\sigma))$ 可写为 a　　s

$$A((B(6,2,6),\sigma)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a^{\sigma}_{17} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{\sigma}_{28} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^{\sigma}_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{\sigma}_{79} & 0 \\ 0 & a^{\sigma}_{28} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{\sigma}_{810} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{\sigma}_{79} & 0 & 0 & a^{\sigma}_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{\sigma}_{810} & a^{\sigma}_{910} & 0 \end{pmatrix}.$$

应用　　初等合同矩阵运算于 $A((B(6,2,6),\sigma))$，可将其化为

$$B_4=\begin{pmatrix}
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&2&0&0&0&0\\
0&0&0&0&2&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\frac{-a_{17}^{\sigma}a_{28}^{\sigma}}{2}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\frac{-a_{17}^{\sigma}a_{28}^{\sigma}}{2}&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&a_{910}^{\sigma}+\frac{2a_{79}^{\sigma}a_{810}^{\sigma}}{a_{17}^{\sigma}a_{28}^{\sigma}}\\
0&0&0&0&0&0&0&0&a_{910}^{\sigma}+\frac{2a_{79}^{\sigma}a_{810}^{\sigma}}{a_{17}^{\sigma}a_{28}^{\sigma}}&0
\end{pmatrix}.$$

由于$\frac{2a_{79}^{\sigma}a_{810}^{\sigma}}{a_{17}^{\sigma}a_{28}^{\sigma}}\neq 1,-1$，矩阵$B_4$有五个负特征值，这与$i_-((B(6,2,6),\sigma))=5>\lceil\frac{6}{2}\rceil+1=4$由引理 2.2 推出的结论相矛盾。

最后，注意到 $A((B(4,4,6),\sigma))$ 合同于

$$B_5=\begin{pmatrix}
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&2&0&0&0&0\\
0&0&0&0&2&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\frac{a_{17}^{\sigma}a_{28}^{\sigma}}{2}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\frac{a_{17}^{\sigma}a_{28}^{\sigma}}{2}&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&a_{910}^{\sigma}-\frac{2a_{79}^{\sigma}a_{810}^{\sigma}}{a_{17}^{\sigma}a_{28}^{\sigma}}\\
0&0&0&0&0&0&0&0&a_{910}^{\sigma}-\frac{2a_{79}^{\sigma}a_{810}^{\sigma}}{a_{17}^{\sigma}a_{28}^{\sigma}}&0
\end{pmatrix}.$$

由于$\frac{2a_{79}^{\sigma}a_{810}^{\sigma}}{a_{17}^{\sigma}a_{28}^{\sigma}}\neq 1,-1$，矩阵$B_5$有五个负特征值，产生矛盾$i_-((B(4,4,6),\sigma))=5>\lceil\frac{6}{2}\rceil+1=4$由引理 2.2 得出。

假设 $g=7$。则 $\Gamma[V(C_7^{\sigma})\cup\{x_1,x_2,x_1',x_2'\}]\cong(B(5,4,6),\sigma)$ 或 $(B(6,3,6),\sigma)$（见图 5）。按照 $y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7,x_1,x_2,x_1'$、$x_2'$的顺序，可将其写成

$$A((B(5,4,6),\sigma))=\begin{pmatrix}
0&0&0&1&0&0&1&a_{18}^{\sigma}&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&a_{29}^{\sigma}&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
a_{18}^{\sigma}&0&0&0&0&0&0&0&0&a_{810}^{\sigma}&0\\
0&a_{29}^{\sigma}&0&0&0&0&0&0&0&0&a_{911}^{\sigma}\\
0&0&0&0&0&0&0&a_{811}^{\sigma}&0&0&a_{1011}^{\sigma}\\
0&0&0&0&0&0&0&0&a_{911}^{\sigma}&a_{1011}^{\sigma}&0
\end{pmatrix}.$$

对$A((B(5,4,6),\sigma))$应用初等合同矩阵运算，可将其化为合同于

$$\begin{pmatrix}
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-2&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\frac{a_{18}^{\sigma\,2}}{2}&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{-a_{29}^{\sigma}a_{810}^{\sigma}}{a_{18}^{\sigma}}&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{-a_{29}^{\sigma}a_{810}^{\sigma}}{a_{18}^{\sigma}}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda_1
\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1 = {}^{2}\!\cancel{a_{18}^{\sigma}a_{911}^{\sigma}a_{1011}^{\sigma}}\,a_{29}^{\sigma}a_{810}^{\sigma}$。当且仅当 $a_{18}^{\sigma}a_{911}^{\sigma}a_{1011}^{\sigma}$ 与 $a_{29}^{\sigma}a_{810}^{\sigma}$ 具有相同符号时，$i_{-}(B(5,4,6),\sigma) = 5 = \lceil \frac{7}{2} \rceil + 1$。满足相同符号条件的全部 16 个符号图都与 $(B(5,4,6),+)$ 切换等价（见图 4）。设 $x \in N_1(v, C_7^{\sigma}) \setminus \{x_1, x_2\}$（如果存在）。则 x 必须与 $(B(5,4,6),+)$ 中的 y_6 和 y_7 恰好一个相邻。因此，$N_1(v, C_7^{\sigma}) \setminus \{x_1, x_2\}$ 是一个独立集。我们得到 $\Gamma \cong \Gamma_{10}$（见图 4），其中 a 和 b 是非负整数。

同样地，对$A((B(6,3,6),\sigma))$应用初等合同矩阵运算，可将其化为合同于

$$\begin{pmatrix}
0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-2&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\frac{a_{18}^{\sigma\,2}}{2}&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{a_{29}^{\sigma}a_{810}^{\sigma}}{a_{18}^{\sigma}}&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{a_{29}^{\sigma}a_{810}^{\sigma}}{a_{18}^{\sigma}}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda_2
\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_2 = {}^{-2}\!\cancel{a_{18}^{\sigma}a_{911}^{\sigma}a_{1011}^{\sigma}}\,a_{29}^{\sigma}a_{810}^{\sigma}$。则 $i_{-}((B(6,3,6),\sigma)) = 5 = \lfloor \frac{7}{2} \rfloor + 1$ 当且仅当 $a_{18}^{\sigma}a_{911}^{\sigma}a_{1011}^{\sigma}$ 与 $a_{29}^{\sigma}a_{810}^{\sigma}$ 的符号相反。满足相反符号条件的全部 16 个符号图都与 $(B(6,3,6),-)$ 切换等价。令 $x \in N_1(v, C_7^{\sigma}) \setminus \{x_1, x_2\}$（若其存在）。则在 $(B(6,3,6),-)$ 中，x 仅与 y_3 相邻。因此，$N_1(v, C_7^{\sigma}) \setminus \{x_1, x_2\}$ 是一个独立集。我们得到 $\Gamma \cong \Gamma_{11}$（见图 4），其中 a 为非负整数。

假设 $g = 10$。那么 $\Gamma[V(C_{10}^{\sigma}) \cup \{x_1, x_2, x_1', x_2'\}] \cong (B(6,6,6),\sigma)$（见图 5）。按 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, x_1, x_2, x_1', x_2'$ 的顺序，$A((B(6,6,6),\sigma))$ 可写为

$$A((B(6,6,6),\sigma)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & a^{\sigma}_{111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a^{\sigma}_{212} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^{\sigma}_{111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{\sigma}_{1113} & 0 \\ 0 & a^{\sigma}_{212} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{\sigma}_{1214} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{\sigma}_{1113} & 0 & 0 & a^{\sigma}_{1314} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{\sigma}_{1214} & a^{\sigma}_{1314} & 0 \end{pmatrix}.$$

对$A((B(6,6,6),\sigma))$进行初等合同矩阵运算后，它与下式合同：

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-a^{\sigma}_{111}a^{\sigma}_{212}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-a^{\sigma}_{111}a^{\sigma}_{212}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_3 = {}^{2}\cancel{a^{\sigma}_{1113}a^{\sigma}_{1214}a^{\sigma}_{111}a^{\sigma}_{212}} + a^{\sigma}_{1314}$。~~由于~~ $\cancel{2a^{\sigma}_{1113}a^{\sigma}_{1214}a^{\sigma}_{111}a^{\sigma}_{212}} \neq 1, -1$, $i_((B(6,6,6),\cancel{-}\sigma))$，由引理 2.2 可得 $= 7 > \lceil \binom{10}{2} \rceil + 1 = 6$，这与假设矛盾。证毕。□

参考文献

[1] F. Belardo, S. Cioab´a, J. Koolen, J.F. Wang, 《符号图谱理论中的一个开放问题》, Art Discrtete Applied Mathematics 1 (2018) 2-24。https://doi.org/ 10.48550/ arXiv.1907.04349

[2] M. Brunetti, Z. Stani´c，大指数符号图的排序，Ars Mathematica Contemporanea，22(2022年) P4.05.https://doi.org/10.26493/1855-3974.2714.9b3

[3] D. Cvetkovi´c，M. Doob，H. Sachs，《图的谱：理论与应用》。Academic Press，纽约，1980年。

[4] F. Duan，Y.H. Yang，无三角形且负惯性指数较小的符号图，《离散应用数学》，357(2024) 135-142。https://doi.org/10.1016/j.dam. 2024.06.012 [5] F. Duan，根据围长刻画连通图的负惯性指数，《离散数学》，347(2024) 113997。https://doi.org/10.1016/j. disc.2024.113997[6]F. Duan，Q. Yang，关于围长为g且正惯性指数为$\lceil \frac{g}{2} \rceil$-1和$\lceil \frac{g}{2} \rceil$的图，《线性代数及其应用》，683(2024) 98-110。https://doi.org/ 10.1016/j.laa.2023.12.001[7] Liu B, Duan F. 具有给定惯性指数和给定围长的连通符号图[J]. arXiv预印本 - arXiv:2505.08539，2025年。[8] K S. 零度为G^{σ}且满足$n(G^{\sigma}) - g(G^{\sigma}) - 1$的符号图。《线性代数及其应用》，2026，728：47-62。https://doi.org/10.1016/j.laa.2025.08.017.[9] Y.Z. Fan，Y. Wang，Y. Wang，关于单圈符号图零度的一则注记，《线性代数及其应用》，438(2013) 1193-1200。https://doi.org/10.1016/j. laa.2012.08.027[10] W.H. Haemers, H. Topcu，关于至多有两个特征值不等于± 1的符号图，《线性代数及其应用》，670(2023) 68-77。https://doi.org /10.1016/j.laa.2023.04.001[11] F. Harary，论符号图中平衡的概念，《密歇根数学杂志》2 (1) (1953) 143-146。https://doi.org/10.1016/ j.laa.2023.04.001[12] R.A. Horn，C.R. Johnson，《矩阵分析》，剑桥大学出版社，1985年。[13] Y.P. Hou，J.S. Li，Y.L. Pan，关于符号图的拉普拉斯特征值，《线性与多重线性代数》，51(1)(2003) 21-30。https://doi.org/10.1080/03081080310000 53611[14]M.R. Oboudi，恰有两个非负特征值的图的刻画，《Ars Mathematica Contemporanea》，12(2017) 271-286。https://doi.org/10.26493/1855-3974.1077.5b6[15] Q. Wu，Y. Lu，B.S. Tam，秩等于围长的连通符号图，《线性代数及其应用》651 (2022) 90-115。https://doi.org/10.1016/ j.laa.2022.06.019[16]G. H. Yu，L. H. Feng，Q. W. Wang，正惯性指数较小的双圈图，《线性代数及其应用》，438 (2013) 2036-2045。https://doi.org/10.10 16/j.laa.2012.09.031[17] G.H. Yu，X.D. Zhang，L.H. Feng，加权单圈图的惯性，《线性代数及其应用》，44(2014) 130-152。https://doi.org/10.1016/j.laa .2014.01.023

[18] G.H. Yu、L.H. Feng、Q.W. Wang、A. Ili´c, 《单圈符号图的最小正惯性指数》, ArsCombinatoria，117（2014）245-255。