arXiv:2601.01922v1 [physics.flu-dyn] 5 Jan 2026

利用傅里叶神经算子高效预测不规则区域中可压缩流的时间演化

Yifan Nie[1] 和 Qiaoxin Li[1*]

[1]华北电力大学数学与物理系，中国北京北农路，102206。

*通讯作者。电子邮箱：liqiaoxin@126.com；贡献作者：nyf0002000@gmail.com；

摘要

本文研究了利用傅里叶神经算子（FNO）预测不规则流场中高速可压缩流体的时间演化。我们将不规则流场点集重构为符合 FNO 输入要求的序列格式，然后在循环神经网络（RNN）中嵌入时间捆绑技术，以实现多步预测。此外，我们采用复合损失函数来平衡不同物理量之间的误差。我们在三种不同类型的不规则流场上开展实验，包括正交和非正交网格配置。随后，我们全面分析了物理分量损失曲线、流场可视化结果和物理剖面。结果表明，我们的方法在计算效率方面显著优于传统数值方法，同时实现了高精度，其中相对误差的最大值分别为（0.78，0.57，0.35）%，对应于（$\boldsymbol{p}$、 $\boldsymbol{T}$、$\mathbf{u}$）。这验证了该方法能够高效、准确地模拟不规则区域中高速可压缩流的时间演化。

关键词： Euler 方程、不规则流场、时间捆绑技术、傅里叶神经算子

1 引言

本研究聚焦于应用傅里叶神经算子（FNO），对不规则流场中由二维欧拉方程控制的时间演化进行建模

控制方程表述如下：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes (\rho \mathbf{u})) + \nabla p = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}(E + p)) = 0. \tag{3}$$

其中， ρ 表示流体质量密度，$\mathbf{u} = (u, v)$ 是流速矢量， p 表示压力， $E = \rho e + \frac{1}{2}\rho (u^2 + v^2)$ 表示单位体积总能量，其中 e 表示内能。

作为描述物理现象的基础工具，偏微分方程 (PDEs) 传统上采用有限差分法、有限元法和有限体积法等数值方法求解。尽管这些方法已相当成熟，但仍面临显著瓶颈：随着精度要求提高，计算复杂度急剧增长；在复杂几何形状中，网格生成变得困难；而高马赫数流动等极端条件则需要过于精细的网格和极小的时间步长，导致计算成本高得令人难以承受，阻碍了实时模拟和参数优化 [1, 2]。

近年来，深度学习方法在计算机视觉 [3] 和自然语言处理 [4]等诸多领域取得了显著成功。这些突破性进展为偏微分方程的数值求解开辟了新的研究方向。该领域的研究工作大致可分为三种主要范式：物理驱动方法 [5–8], 、物理约束方法 [9–12],和数据驱动方法 [13–16]。其中，数据驱动方法具有独特优势，因为其本质特点是能够直接从数据中学习映射关系，无需显式的物理先验。

在早期利用数据驱动方法求解偏微分方程的研究中，传统深度学习架构被广泛用于应对物理系统建模中的计算挑战 [17–20]。这些传统的数据驱动方法有效减轻了计算负担，但其归纳偏置是否适用于偏微分方程求解，仍是模型可解释性和泛化能力方面的一大挑战。

算子学习已成为科学机器学习领域的一种变革性方法，使研究从传统的函数学习转向学习无限维函数空间之间的映射。DeepONet[21]的开创性工作建立了首批实用的算子学习框架之一，提出了一种双网络架构：通过分支网络处理输入函数，并通过主干网络评估输出。这种创新结构表明，神经网络能够基于算子通用逼近定理有效地学习非线性算子。在此基础上， [22] 为神经算子提供了全面的理论框架，严谨地确立了学习函数空间之间映射的数学基础，并将其应用于偏微分方程。此后的架构创新进一步推动了这一领域的发展，图神经算子 [23] 引入了核积分

通过图网络上的消息传递实现，而多极图神经算子 [24]则开发出一种受经典多极方法启发的多层框架。傅里叶神经算子（FNO）[25] 随后应运而生，作为一种利用谱方法的高效实现方案。这一发展历程表明，算子学习有效地架起了数值分析与机器学习之间的桥梁，为不同物理领域的科学计算创造了新的可能性。

欧拉方程具有无黏假设、支持不连续解以及双曲性 [26, 27],等特征，对于航空航天工程中的高速流动模拟等应用十分有价值 [28], ，但在具有强激波的高马赫数条件下也带来了数值挑战。时变偏微分方程对不断演化的系统进行建模并捕捉瞬态现象 [29], ，而不规则几何形状则给离散化和边界处理带来了挑战 [30]。这些综合挑战促使人们采用创新方法来模拟现实世界中的流体动力学。

本文通过采用符合傅里叶神经算子要求的输入重构，对不规则区域中的高速可压缩流预测进行了系统研究。该研究涵盖正交网格和非正交网格配置。时间捆绑技术的成功实施，实现了对流场时间演化的精确建模。此外，所开发的复合损失函数有效平衡了对应于不同物理量的各个损失分量，在多个物理参数之间实现了稳定一致的优化水平。

本研究的主要技术贡献如下：

1.**适用于傅里叶神经算子的不规则流场输入重构方法**：通过将不同网格类型的流场数据重新排列为顺序点数组，该方法有效解决了傅里叶神经算子在不规则网格上的适应性难题，为复杂几何构型中的流体模拟提供了一种全新的数据处理范式。2. **结合时间打包的傅里叶神经算子-循环神经网络架构**：将傅里叶神经算子融入循环神经网络框架，并结合时间打包技术，实现了从单步预测到多步联合预测的转变，显著提高了长期流动序列模拟的精度，并有效缓解了误差累积问题。3. **多物理场平衡复合损失函数**：通过系统分析不同物理量的数值特征，设计了一种加权复合损失函数，以解决幅值变化导致的优化失衡问题，从而确保多物理场预测的精度协调一致。

随后，我们对物理分量损失曲线、流场可视化和物理剖面进行了详细分析。结果表明：**1. 效率与精度** – 模型的计算效率至少提升了千倍，且 (p、 T、$\mathbf{u}$) 的误差不超过 (0.78、0.57、0.35)%；**2. 泛化能力** – 模型能够准确预测各种不规则流场中高速可压缩无黏流体的时间演化。

本文其余部分的组织结构如下。第2节介绍了 FNO 的架构、时间捆绑方法和复合损失函数。第3节展示了三种不同不规则流场的数值模拟，并对结果进行了全面分析。最后，第4 节总结了模型所实现的性能和扩展适用性，并提出了未来的研究方向。

2 方法论

2.1 傅里叶神经算子

傅里叶神经算子（FNO）是一种用于学习无限维函数空间之间映射的神经网络架构。其核心创新在于利用傅里叶变换，在频域中高效地参数化积分核。该架构主要由三个关键组件构成：将输入函数投影到更高维潜在空间的提升层；通过傅里叶变换执行全局卷积运算的多个连续傅里叶层；以及将最终表示映射回目标输出空间的投影层。

FNO 的基本构建模块是傅里叶层，其实现以下更新规则：

$$v_{t+1}(x) = \sigma\left(W v_t(x) + \left(\mathcal{K}(\phi) v_t\right)(x)\right) \tag{4}$$

其中，傅里叶积分算子的计算方式如下：

$$\left(\mathcal{K}(\phi) v_t\right)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(R_\phi \cdot \mathcal{F}(v_t)\right)(x) \tag{5}$$

在此公式中， $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{-1}$ 分别表示傅里叶变换及其逆变换， R_ϕ 表示频域中的可学习变换，用于参数化核 κ_ϕ， W 是在空间域中运算的线性权重矩阵，而 σ 是非线性激活函数。

在实际实现中，连续傅里叶变换通过快速傅里叶变换（FFT）算法进行离散化和计算。这种设计使傅里叶神经算子能够以 $\mathcal{O}(n\log\ n)$ 的计算复杂度高效捕捉长程依赖。然而，这种高效方法要求输入数据定义在均匀间隔网格上，才能保持其计算优势。

为克服这一限制，我们提出一种新方法，将不规则网格上的点云数据重新排列为一维序列，以供傅里叶神经算子处理。后续实验将证明，这种方法在处理复杂几何构型的同时，仍能保持傅里叶神经算子的计算效率，并展现出显著优势。

2.2 时间捆绑

为解决时间序列预测任务，传统方法使用前 k 个时间步长来预测当前时间步，即（t_{n-k}，……， t_{n-1}） $\rightarrow t_n$。然而，这

种方法在进行长期递归预测时会导致误差累积。为缓解这一问题，我们将时间捆绑方法 [31] 融入循环神经网络（RNN）架构，从而能够同时预测多个时间步长：（t_{n-k}，……，t_{n-1}）$\rightarrow$（t_n，……，t_{n+k-1}）。这种组合方法利用了 RNN 的时间建模能力，同时通过多步联合预测避免误差累积。在实验中，我们设置 $k=5$。

2.3 损失函数

我们的方法采用的基础损失函数是相对 L_2 损失，定义如下：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{r}}(\mathbf{y})=\frac{\|\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}}\|_2}{\|\hat{\mathbf{y}}\|_2} \tag{6}$$

其中，$\mathbf{y}$ 表示预测值，$\hat{}\mathbf{y}$ 表示真实值。

然而，由于不同物理量之间存在显著的数值差异，我们对数据进行标准化：

$$\mathcal{J}\left(y_{i,j}\right)=\frac{y_{i,j}-\mu_{i,j}}{\sigma_{i,j}} \tag{7}$$

其中，$\mu_{i,j}$ 和$\sigma_{i,j}$ 分别是基于训练数据集计算的(i,j)各点处的均值和标准差。

鉴于模型需要预测四种物理量（p、T、u、v），我们在训练过程中引入加权系数，以平衡它们各自的贡献。因此，多物理场相对 L_2 损失可表示为：

$$\mathcal{L}_{\text{multi}}\left(\mathbf{y}\right)=\lambda_p\mathcal{L}_r(p)+\lambda_T\mathcal{L}_r(T)+\lambda_u\mathcal{L}_r(u)+\lambda_v\mathcal{L}_r(v) \tag{8}$$

其中，λ_p、λ_T、λ_u和 λ_v 是可调超参数，用于控制各物理量在整体优化目标中的相对重要性。

复合损失函数通过加入额外的正则化项和物理约束构建而成：

$$\text{Loss}=\alpha\mathcal{L}_{\text{multi}}(\mathbf{y})+\beta\mathcal{L}_{\text{multi}}\left(\mathcal{J}\left(\mathbf{y}\right)\right) \tag{9}$$

其中，α 和 β 是平衡系数，用于控制各组成部分在整体优化目标中的相对重要性。

3 数值实验

本节在三个不规则区域上进行了实验，涵盖正交网格和非正交网格配置。

3.1 前向台阶

流场的构型如图所示1。该构型由一个 $1.4m$ 长、$0.2m$ 高的小矩形截面从一个

尺寸为 $2m \times 1m$ 的基矩形中减去上述部分而形成。在此定义的几何结构中，流动条件如下：气体从左侧边界均匀进入，作为入口；并从右侧边界流出，作为出口。上、下边界均设为固壁。

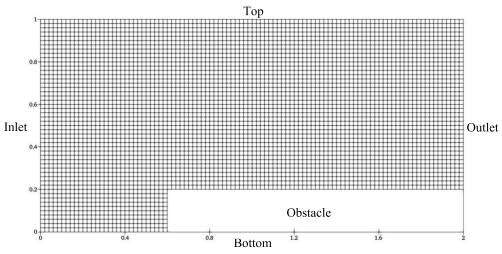

图 1 前向台阶的计算网格和边界标签

计算域采用结构化网格离散，在 x方向上有 100 个网格单元，在 y方向上有 50 个网格单元。流体被建模为一种归一化无黏气体，在 1 K 时声速为 1 m/s，比热比为$\gamma = 1.4$。后续讨论中始终采用这一气体模型。初始条件（内部场）和边界条件详见表 1。内部场和入口的初始速度分量均为$u = 2.0 - 4.0$ m/s、 $v = 0$ m/s，压力为 $p = 0.7 - 1.3$ Pa，温度为 $T = 0.7 - 1.3$K；边界条件设置如下：出口的速度和温度均采用零梯度 条件，压力采用波透射 条件；顶部和底部采用对称平面；障碍物的速度采用滑移 条件，压力和温度采用零梯度 条件。

表 1 前向台阶的边界条件和初始场配置。缩写 WT、ZG 和 SP 分别表示波透射、零梯度和对称平面边界条件

边界	p (Pa)	T (K)	u (m/s)	v (m/s)
内部场/入口	0.7–1.3	0.7–1.3	2.0–4.0	0
出口	WT	ZG	ZG	ZG
障碍物	ZG	ZG	slip	slip
顶部/底部	SP	SP	SP	SP

流场数据使用$OpenFOAM$ v11中的流体求解器生成。计算时间步长设置为 2×10^{-3} s，模拟运行时间为0至2 s。数值结果每0.2 s采样一次，从而生成由欧拉方程近似解组成的数据集。该数据集划分为训练集（4050个样本）、验证集（450个样本）和测试集（700个样本）。

在初始实验中，由于流场较为简单，我们未修改损失函数的超参数，将其设置为 $\lambda_p = \lambda_T = \lambda_u = \lambda_v = 1$、 $\alpha = 1$和$\beta = 0$。如图2所示， $\mathcal{L}_\mathrm{r}$ 所有物理分量均处于可接受范围内。由于 v 在$\mathbf{u}$中所占比例相对较小，因此 u 和$\|\mathbf{u}\|$的 $\mathcal{L}_\mathrm{r}$ 值非常接近。

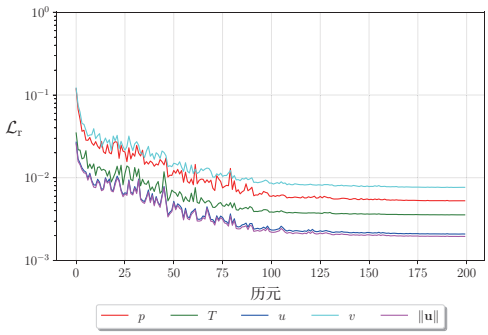

图 2 前向台阶的误差

图 3 展示了整个物理场（p、 T、 u、 v）在时间 $t = 1.8$ s 时的真实值、预测值和绝对误差。从图中可以观察到，预测值与真实值较为接近，误差主要集中在激波位置。差异最明显区域的最大相对误差不超过 2%。

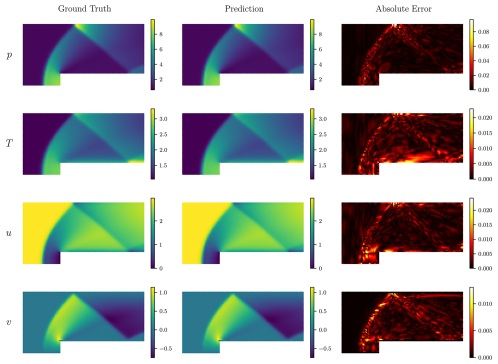

图 3 $t = 1.8$ s 时前向台阶的物理场和绝对误差

图4 展示了模型预测流场的可视化结果。该图对压力、温度和速度分量的时间演化进行了全面的可视化分析，内容按五行四列排列。值得注意的是，流场底部的障碍物造成的阻碍，使其左侧发生气体压缩并形成激波。随后，该激波

从顶部边界反射，并从 $t = 1.6$ s开始在障碍物的上表面发生二次反射。这些结果表明，该模型能够准确捕捉激波形成和反射等复杂现象。

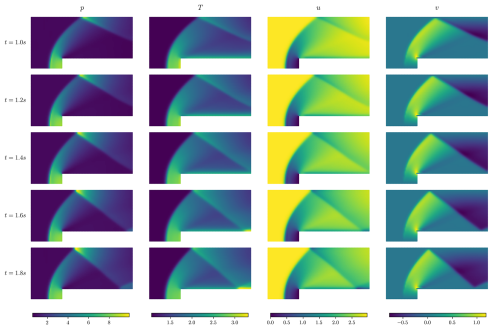

图 4 前向台阶在 $t = 1.0 - 1.8$ s 内的多物理场预测值

为考察流场的详细特征，我们选取了 $y = 0.24$ 和 $x = 1.96$ 处的两条剖面数据进行分析，因为激波附近存在显著变化。图 5 展示了时间区间 $t = 1.0 - 1.8$ s 内这些剖面上的结果和误差。可以观察到，预测值（虚线）与真实值（实线）非常吻合。此外，最大绝对误差不超过 0.015，相对误差不超过 1%。这表明该模型能够准确、可靠地预测激波附近界面区域的情况。

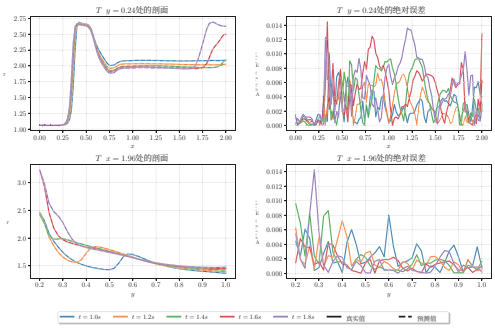

图 5 T 在 $t = 1$ 中前向台阶的剖面 $.0 - 1.8$ s

表2 表明，与流体求解器相比，傅里叶神经算子（FNO）的效率更高，其中 $\mathcal{L}_{\mathrm{r}}(v)$ 达到 0.82%，而 $\mathcal{L}_{\mathrm{r}}$ 其他物理分量则低于 0.55%。这表明，我们的模型不仅在计算效率方面显著优于传统数值方法，同时还能将误差保持在可接受的较低水平。

表 2 前向台阶的计算成本和精度比较，TT 是神经网络训练时间的缩写，IT 是训练后的模型推理时间的缩写，CT 是流体求解器计算时间的缩写。 $\mathcal{L}_{\mathrm{r}}$ 和残差的形式为：(p， T， u， v)

模型	参数（网格点）	TT	IT（CT）	$\mathcal{L}_{\mathrm{r}}$ （残差）（%）
流体	4451	-	12s	(0.041, 0.042, 0.034, 0.044)
FNO	8729492	48.6秒	9.4毫秒	(0.55, 0.34, 0.23, 0.82)

通过细致的对比，我们确认该模型的精度与传统数值方法相当，同时展现出更优的计算速度。

3.2 圆柱绕流

我们对如图6所示的带圆柱形障碍物的流场特性进行了深入研究。半径为 0.15 m 的圆柱位于中心位置（0.6, 0.5），作为障碍物；其余配置与第3.1节所述的配置类似。

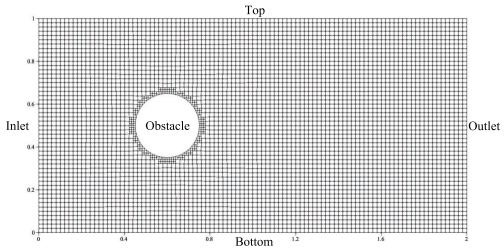

图 6 圆柱绕流的计算网格和边界标签

基本计算域仍沿 x方向离散为 100 个网格单元，沿 y方向离散为 50 个网格单元。然而，与之前的配置不同，圆柱障碍物使周围网格变为非正交网格。初始条件（内部场）和边界条件详见表 3。内部场和入口的速度分量均初始化为 $u = 1.5 - 3.0$ m/s， $v = 0\,\mathrm{m/s}$，压力为 $p = 0.7 - 1.6\,\mathrm{Pa}$，温度为 $T = 1 - 1.6\,\mathrm{K}$，而边界条件与第 3.1节所述保持一致。

流场数据使用 *OpenFOAM* v11 中的流体求解器生成。计算时间步长设置为 1×10^{-4} s，模拟运行时间为 0 到 1 s。数值结果每隔 0.1 s 采样一次，由此生成一个由欧拉方程近似解组成的数据集。该数据集划分为训练集（4050 个样本）、验证集（450 个样本）和测试集（600 个样本）。

如图所示7，子图 (a) 对应于基础超参数设置（$\lambda_p = \lambda_T = \lambda_u = \lambda_v = 1$、 $\alpha = 1$和 $\beta = 0$），而子图 (b) 采用了优化配置（$\lambda_p = 1.5$、 $\lambda_T = 1.0$、 $\lambda_u = 1.0$、 $\lambda_v = 2.0$、 $\alpha = 0.3$和 $\beta = 0.7$）。

表3 圆柱绕流的边界条件和初始场配置

边界	p (Pa)	T (K)	u (米/秒)	v (米/秒)
内部场/入口	0.7–1.6	1.0–1.6	1.5–3.0	0
出口	WT	ZG	ZG	ZG
障碍物	ZG	ZG	slip	slip
顶部/底部	SP	SP	SP	SP

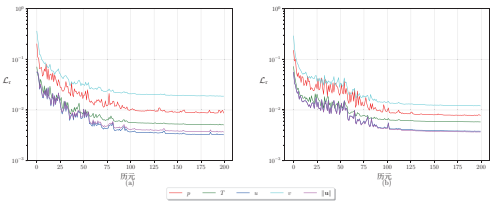

图 7 圆柱绕流误差

结果清楚地表明，在 (a) 中，p 和 v 的误差仍处于较高水平，其中 v 的误差尤其明显地超过了 1%。相比之下，(b) 中的优化超参数有效地平衡了所有物理量的收敛，并显著减小了 v 中的差异，实现了更加均衡的收敛行为。此外，在 (b) 中，u 和 $\|\mathbf{u}\|$ 之间的误差差距小于 (a)，表明在复合损失函数下，整体速度场的收敛性得到了改善。

图8 展示了时间 $t = 0.9$ s 时整个物理场（p、T、u、v）的真实值、预测值和绝对误差。由图可见，预测值与真实值高度吻合，误差主要集中在激波位置。最大绝对误差不超过（0.2、0.05、0.07、0.04）。

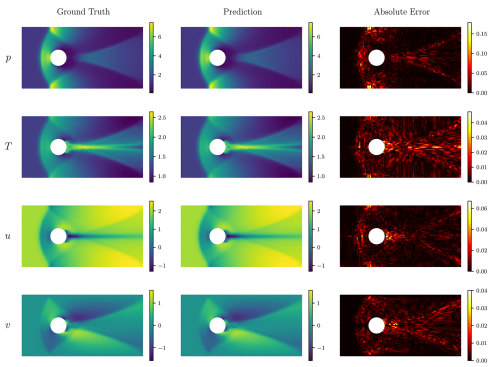

图 8 $t = 0.9$ s 时圆柱绕流的物理场和绝对误差

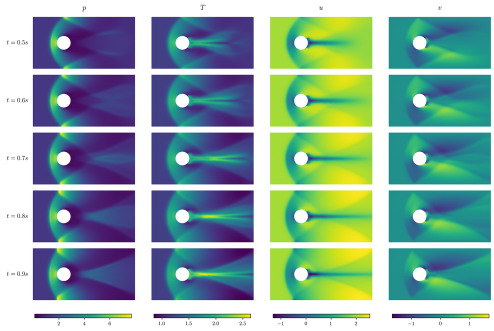

图 9 $t = 0.5 - 0.9$ 秒内圆柱绕流的多物理场预测

我们从测试集中选取了一个样本，并对时间区间 $t = 0.5s$ 至 $t = 0.9s$内四个物理量——压力（p）、温度（T）和速度分量（u、 v）——的预测流场进行了可视化。如图 9所示，流场的轴对称性使激波在圆柱障碍物右侧发生反射并汇聚，导致该区域出现剧烈变化。通过这一可视化结果，我们可以观察到各物理量随时间的动态演化。

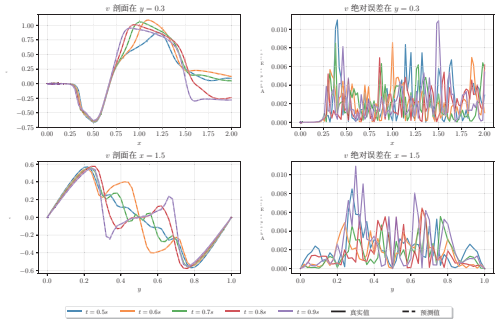

图 10 v 圆柱绕流在 $t = 0.5 - 0.9$ 秒内的剖面

现在，我们重点关注流场中的速度分量 v 的表现。如图 10所示，由于这些区域的流动变化显著，我们在 $t = 0.5 - 0.9$ 秒内选取了位于 $y = 0.3$ 和 $x = 1.5$ 处的两个剖面。误差分布分析表明，预测值与实际值高度吻合，即使在流动剧烈的区域，最大绝对误差也未超过 0.012。

如表4所示，该模型在计算速度方面显著优于传统数值方法。这种效率提升对时间敏感型应用和大规模模拟具有重要意义，使该模型成为加速可压缩流场分析的有前景工具。此外，值得注意的是，该模型不仅实现了卓越的效率，还能在预测值方面保持相当高的精度。

表 4 圆柱绕流的计算成本与精度比较

模型	参数（网格点）	TT	IT（CT）	$\mathcal{L}_r$ （残差）（%）
流体	5226	-	72.3秒	（0.011，0.014，0.0096，0.017）
FNO	8729492	61.3秒	9.8毫秒	(0.78, 0.57, 0.36, 1.17)

我们在非正交网格上进行的数值模拟进一步验证了该模型的潜力，而对流场特性和计算成本的全面比较则共同彰显了其精度、适应性和创新性。

3.3 翼型流动

第 3.2 节中描述的流场关于水平轴轴对称。如图11所示，现引入一个翼型（NACA 2412）剖面作为障碍物，由此产生非对称流场。其余配置参数与第 3.2节一致，初始条件和边界条件详见表5。

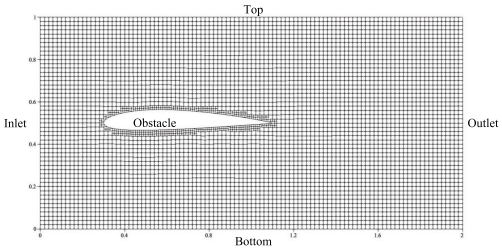

图 11 翼型流动的计算网格和边界标签

表 5 翼型流动的边界条件和初始场配置

边界	p (Pa)	T (K)	u (m/s)	v (m/s)
内部场/入口	0.7–1.6	1.0–1.6	1.5–3.0	0
出口	WT	ZG	ZG	ZG
障碍物	ZG	ZG	slip	slip
顶部/底部	SP	SP	SP	SP

流场数据使用*OpenFOAM* v11 中的流体求解器生成。计算时间步长设为 1×10^{-4} s，模拟时间从 0 到 1 s。每隔 0.1 s 采样一次数值结果，由此生成一个由欧拉方程近似解组成的数据集。该数据集划分为训练集（4050 个样本）、验证集（450 个样本）和测试集（600 个样本）。

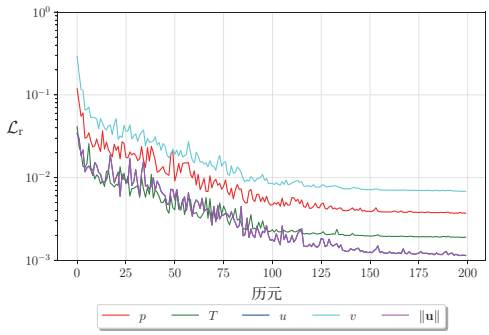

图 12 翼型流动的误差

在图12中，当超参数设为 $\lambda_p = 1.5$、 $\lambda_T = 1.0$、 $\lambda_u = 1.0$、 $\lambda_v = 2.0$、$\alpha = 0.3$ 和 $\beta = 0.7$ 时，可以观察到所有物理量的误差都收敛到足够低的水平。具体而言，u 和 $\|\mathbf{u}\|$的误差最低，接近 0.001。

图13 展示了在时间 $t = 0.9$ s时整个物理场（p、 T、 u、 v）的真实值、预测值和绝对误差。从图中可以看出，预测值与真实值高度吻合。最大绝对误差不超过（0.1、0.04、0.025、0.01）。

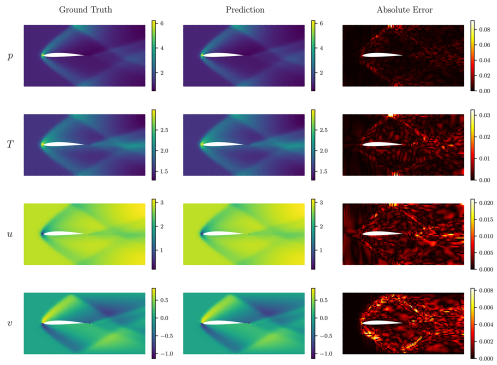

图 13 $t = 0.9$ s时翼型流动的物理场和绝对误差

图 14展示了预测流场物理量从 $t = 0.5$ 秒到 $t = 0.9$ 秒的时间演化。可视化清楚地揭示了流场尾流区中发生的多次激波相互作用。

图 15 展示了压力 p 沿截线 $y = 0.4$ 和 $x = 1.8$ 在 $t = 0.5$ 秒至 $t = 0.9$ 秒这一时间区间内的时间演化。可以看出，预测值与真实值高度吻合。此外，右侧的绝对误差图显示，最大误差低于 1.2%，凸显了该模型捕捉非对称非正交网格上流场动态的能力，并证实了其精度和可靠性。

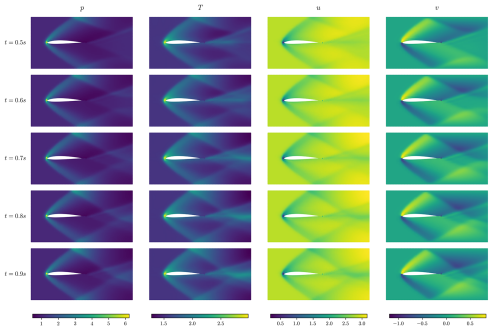

图 14 翼型流动在 $t = 0.5 - 0.9$ s 内的多物理场预测

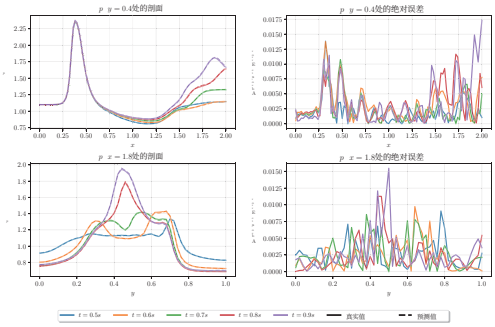

图 15 p 翼型流动在 $t = 0.5 - 0.9$ s 时的剖面

如表6所示，在计算速度方面，该模型显著优于传统数值方法。这种效率提升对时间敏感型应用和大规模模拟具有重要意义，使该模型成为加速可压缩流场分析的有力工具。此外，值得注意的是，该模型不仅效率出众，而且预测精度也相当高。

表 6 翼型流动的计算成本与精度比较

模型	**参数（网格点）**	**TT**	**IT（CT）**	$\mathcal{L}_r$ **(残差) (%)**
流体	5462	-	76.6秒	(0.023, 0.023, 0.014, 0.026)
FNO	8729492	65.4秒	10.2毫秒	(0.37, 0.18, 0.12, 0.72)

我们在非对称非正交网格上进行的数值模拟进一步验证了该模型的潜力。通过对流场行为和计算性能进行系统评估，充分展示了这一能力，也共同证实了该模型的精度与灵活性。

4 结论

本文提出的方法解决了高速可压缩流体流场预测这一难题。值得注意的是，本研究中预测的所有流场均涉及不规则几何形状，包括正交网格和非正交网格。通过构建多样化的流场数据集，该模型在不同输入条件下展现出稳健的稳定性和泛化能力，具有出色的计算效率，并在流场预测方面取得了有竞争力的精度。这些能力使其成为一种高效的代理模型，为气动外形优化和推进系统分析等领域的快速设计评估与参数研究提供了可行途径。

基于上述已展现的优势，未来有几个值得进一步探索的研究方向：

1. **拓展至黏性流动**：当前研究聚焦于由欧拉方程控制的无黏流动。未来的研究应考虑将该方法拓展至由纳维–斯托克斯方程描述的黏性流动。然而，这一拓展面临诸多挑战，包括数据生成过程更加复杂，以及数值模拟的计算需求显著提高。

2.**高维应用**：理论上，所提出的模型可以拓展至求解更高维的问题。然而，目前此类应用受到计算资源有限的制约，而在高维空间中开展大规模数值模拟需要大量计算资源。

3.**结合物理约束改进损失函数**：当前损失函数主要关注物理量本身。由于数据处理方法的限制，计算导数以纳入物理约束仍然颇具挑战。未来的工作可探索克服这一局限的方法，从而有望将控制方程作为额外组成部分纳入损失函数，进而增强物理一致性。

声明

经费支持。 本研究未获得任何资助机构的资助。

利益冲突。 作者声明不存在利益冲突。

作者贡献。 Yifan Nie：概念构思、正式分析、方法学、软件、撰写初稿。
Qiaoxin Li：正式分析、方法学、监督、审阅与编辑。

参考文献

[1] Brenner, S.C., Scott, L.R.：《有限元方法的数学理论》。Springer，纽约（2008）[2]Weinan, E.：《多尺度建模原理》。剑桥大学出版社，剑桥（2011）

[3] LeCun, Y., Bengio, Y., Hinton, G.：深度学习。Nature **521**（7553），436–444（2015）[4] Young, T., Hazarika, D., Poria, S., Cambria, E.：基于深度学习的自然语言处理的最新趋势。IEEE 计算智能杂志**13**（3），55–75（2018）[5] Zhang, Z., Wang, Y., Jimack, P.K., Wang, H.：Meshingnet：一种基于深度学习的新型网格生成方法。载于：国际计算科学会议，第186–198页（2020）。Springer [6] Shen, L., Li, D., Zha, W., Zhang, L., Tan, J.：物理渐近解网络：物理驱动神经网络求解渗流方程，其表现优于传统数值解。流体物理**35**（2）（2023）[7] Ding, Y., Chen, S., Li, X., Wang, S., Luan, S., Sun, H.：复杂地形中用于地震波建模的自适应物理驱动深度学习。人工智能工程应用**123**，106425（2023）[8]Xiong, Z., Yang, P., Zhao, P.：用于非线性微观力学的物理驱动神经网络。国际机械科学杂志**273**，109214（2024）[9] Wang, S., Perdikaris, P.：自由边界和斯特藩问题的深度学习。《计算物理学杂志》**428**，109914（2021）[10] Sun, Y., Sengupta, U., Juniper, M.：用于翼型几何同时代理建模和偏微分方程约束优化的物理信息深度学习。计算机在应用力学与工程中的方法**411**，116042（2023）[11] Yang,Q.-H., Yang, Y.,Deng, Y.-T., He, Q.-L., Gong, H.-L., Zhang, S.-Q.：用于求解不连续界面k-特征值问题的物理约束神经网络及其在反应堆物理中的应用。核科学与技术**34**（10），161（2023）[12] Du, M., Chen, Y., Nie, L., Lou, S., Zhang, D.：从有限且含噪数据中进行开放形式偏微分方程数据驱动发现的物理约束鲁棒学习。流体物理**36**（5）（2024）[13] Xu, H., Chang, H., Zhang, D.：Dl-pde：基于深度学习的数据驱动方法，从离散且含噪数据中发现偏微分方程。计算物理通讯**29**（3），698–728（2021）[14] Koric, S., Abueidda, D.W.：用于求解带参数化热源热传导方程的数据驱动与物理信息深度学习算子。国际传热与传质杂志**203**，123809（2023）

[15] Mata, F.F., Gij´on, A., Molina-Solana, M., G´omez-Romero, J.：用于数据驱动模拟的物理信息神经网络：优势、局限与机遇。《物理学A：统计力学及其应用》**610**, 128415 (2023)[16] Roy, A.M., Guha, S.：用于求解冯·米塞斯塑性的数据驱动物理约束深度学习计算框架。《人工智能工程应用》**122**, 106049 (2023)[17] Zhang, R., Liu, Y., Sun, H.：用于数据驱动地震响应建模的物理引导卷积神经网络（PhyCNN）。《工程结构》**215**, 110704 (2020)[18] Yang, L., Zhang, D., Karniadakis, G.E.：用于随机微分方程的物理信息生成对抗网络。《SIAM科学计算杂志》**42**(1), 292–317 (2020)[19]Thuerey, N., Weißenow, K., Prantl, L., Hu, X.：用于翼型流动雷诺平均纳维–斯托克斯模拟的深度学习方法。《美国航空航天学会期刊》**58**(1), 25–36 (2020)[20] Gao, H., Sun, L., Wang, J.-X.：PhyGeoNet：用于求解不规则区域上参数化稳态偏微分方程的物理信息几何自适应卷积神经网络。《计算物理学杂志》**428**, 110079 (2021)[21] Lu, L., Jin, P., Pang, G., Zhang, Z., Karniadakis, G.E.：基于算子通用逼近定理，通过DeepONet学习非线性算子。《自然·机器智能》**3**(3), 218–229 (2021)[22] Kovachki, N., Li, Z., Liu, B., Azizzadenesheli, K., Bhattacharya, K., Stuart, A., Anandkumar, A.：神经算子：学习函数空间之间的映射及其在偏微分方程中的应用。《机器学习研究杂志》**24**(89), 1–97 (2023)[23] Li, Z., Kovachki, N., Azizzadenesheli, K., Liu, B., Bhattacharya, K., Stuart, A., Anandkumar, A.：神经算子：偏微分方程的图核网络。arXiv 预印本 arXiv:2003.03485 (2020)[24] Li, Z., Kovachki, N., Azizzadenesheli, K., Liu, B., Stuart, A., Bhattacharya, K., Anandkumar, A.：用于参数化偏微分方程的多极图神经算子。《神经信息处理系统进展》**33**, 6755–6766 (2020)[25] Li, Z., Kovachki, N.B., Azizzadenesheli, K., Bhattacharya, K., Stuart, A., Anandkumar, A., 等：用于参数化偏微分方程的傅里叶神经算子。载于：国际学习表征会议 (2021)[26] Courant, R., Friedrichs, K.O.：《超音速流与激波》第21卷。Springer,

纽约 (1999)

[27] Christodoulou, D., Miao, S.：《可压缩流与欧拉方程》第9卷。International Press，萨默维尔（2014）[28] Pezent, J.B., Sood, R.：非对称物体欧拉方程的新解：在航天器重新定向中的应用。《制导、控制与动力学杂志》**45**(12), 2289–2303（2022）[29] Liu, X.-Y., Zhu, M., Lu, L., Sun, H., Wang, J.-X.：用于时空动力学的多分辨率偏微分方程保持学习框架。《通讯物理》**7**(1), 31（2024）[30] Pfaff, T., Fortunato, M., Sanchez-Gonzalez, A., Battaglia, P.：利用图网络学习基于网格的模拟。载于：国际学习表征会议（2020）[31] Brandstetter, J., Worrall, D., Welling, M.：消息传递神经偏微分方程求解器。载于：国际学习表征会议（2021）