Sinh-Gordon 方程周期行波的定性方面

Beatriz Signori Lonardoni F´
abioNatalibeatrizslonardoni@gmail.com fmanatali@uem.br

数学系 - 马林加州立大学，Colombo 大道 5790 号，邮编 87020-900，
巴西巴拉那州马林加

arXiv:2601.01923v1 [math.AP] 5 Jan 2026

Abstract. 本文全面分析了 sinh-Gordon 方程在周期情形下的若干方面。我们的研究分为三个主要阶段。首先，我们应用山路定理，证明在波速固定、周期变化时周期解的存在性。随后，在周期固定的情况下，我们利用隐函数定理构造了一族随波速光滑变化的周期解。接着，我们严谨地研究这些行波的谱稳定性，并对固定周期行波附近的线性化算子进行详细的谱分析。这项分析的关键在于周期映射的单调性；结合 Morse 指标理论后，我们得以完整刻画零均值周期函数空间中投影算子的非正谱。最后，我们采用 Hamilton-Krein 指标分析，确定所构造行波的谱稳定性与谱不稳定性。此外，我们还讨论了与 sinh-Gordon 方程相关的柯西问题的定性方面，包括局部适定性和爆破解。前者为该问题提供了一种新的线性化方法，后者则预示着行波的谱不稳定性。

1. 引言

本文研究 sinh-Gordon 方程的定性性质，该方程表示为

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha \sinh(u) = 0, \tag{1.1}$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 和 $u\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 关于空间变量是 L-周期的，即 $u(x+L,\ t) = u(x,\ t)$对所有 $t \geqslant 0$均成立。方程 (1.1) 是数学物理中非线性偏微分方程理论的一个重要模型，应用于固体物理、微分几何、可积系统、流体动力学、相对论量子力学以及其他物理现象（参见 [7], [8], [10], [25], 及其中的参考文献）。

方程 (1.1) 可视为以下可积方程的一个玩具模型

$$u_{tt} - u_{xx} + \sinh(u) = 0, \tag{1.2}$$

也就是说，当 $\alpha = 1$ 属于 (1.1) 时。该特定方程具有正能量，因此可以在能量空间 $H^1_{per} \times L^2_{per}$ 中获得关于整个时间轴的解。此外，由于行波是适当 Lyapunov 泛函的临界点，因此有望得到行波的轨道稳定性和谱稳定性结果。当 $\alpha = -1$ 时，与 (1.1) 相关的能量变为符号不定，这与 (1.2) 的正定能量形成对比。基于这一原因，$\alpha = -1$ 的情形可被视为一个非线性 ***Klein–Gordon*** 方程，而 $\alpha = 1$ 的情形则对应于一个 $\phi^{2n}-$ 方程。这种解释是

2020 数学学科分类。 35B10, 35B35, 81Q05。关键词和短语。 sinh-Gordon 方程，周期波，谱稳定性，谱不稳定性。B.S. Lonardoni 获巴西CAPES资助——资助代码 001。F. Natali 获巴西CNPq部分资助（项目编号 303907/2021-5）。

由双曲正弦函数 $\sinh(u) = u + \frac{u^3}{6} + \mathcal{O}(u^5)$ 的泰勒展开所证实的，该展开揭示了非线性项所蕴含的多项式结构。

针对这类方程的解析方法的发展始终是该领域的核心主题，推动了对 sinh–Gordon 模型及其推广形式的定性和定量性质的研究。尽管 sinh–Gordon 方程与其他可积模型具有许多共同特征，但其指数非线性项带来了额外的解析挑战，尤其是在考虑 $\alpha = -1$ 的情况下。这些挑战包括更为微妙的稳定性性质、更复杂的局域结构，以及爆破解行为的可能性。

在这一背景下，研究主要沿着两条路线展开：通过代数方法和数值方法构造解，以及研究这些解析解的稳定性。对于第一个问题，我们考虑形如 $u(x,t) = \varphi(x - ct)$ 的周期行波解，其中波速为 $c \in \mathbb{R}$。将这一设定代入方程 (1.1)，可得到如下非线性二阶常微分方程

$$(1 - c^2)\varphi'' - \alpha \sinh(\varphi) = 0. \tag{1.3}$$

平面分析表明，$(0,0)$ 是一个中心点；当且仅当 $c \neq \pm 1$ 且 $\mathrm{sgn}(1 - c^2) = -\mathrm{sgn}(\alpha)$ 时，才保证周期解的存在，其中 $\mathrm{sgn}(\mathtt{a})$ 是某个实数 $\mathtt{a}$的众所周知的符号函数。

下面讨论一些关于模型 (1.3)求解方面的研究成果。事实上，在代数框架下，双曲正切法及其他相关技术已被用于分析该方程的推广形式。在 [18], 中，作者采用改进的直接代数方法，得到了双曲正弦–戈登方程的精确孤立波解和椭圆函数解。文献 [28]中还给出了 (1.1) 的推广形式的其他显式解。在 [15]（另见 [1]）中，作者采用展开法，对双重 Sinh-Gordon 方程及其推广形式的行波解进行了数值近似，它们分别表示为

$$u_{tt} - \mathtt{k}u_{xx} + 2\alpha \sinh(u) + \beta \sinh(2u) = 0,$$

and

$$u_{tt} - \mathtt{k}u_{xx} + 2\alpha \sinh(nu) + \beta \sinh(2nu) = 0.$$

在两种情况下，α 和 β 均为实参数，$\mathtt{k}$为正系数，n 为正整数。

关于方程 (1.1)的周期解的存在性及其轨道稳定性，我们可以提及一些相关研究，至少有两项值得关注。在 [20], 中，作者在特定的c取值下，运用文献 [11]提出的抽象方法，证明了空间$H^1_{per,m} \times L^2_{per}$中奇周期行波解的轨道稳定性。为便于说明，我们记

$$H^1_{per,m} = \left\{ f \in H^1_{per};\ \int_0^L f(x)dx = 0 \right\}.$$

在 [27], 中，作者利用该方程的可积结构，证明了双曲正弦–戈登方程在 (1.2) 中的椭圆解是谱稳定的。作者构造了一个合适的 Lyapunov 泛函，该泛函由高阶守恒量得到，并用它证明这些解在任意周期的次谐波扰动下轨道稳定。值得指出的是，当 $\alpha = -1$时，方程 (1.1) 的可积性并未得到验证。

尽管取得了这些进展，双曲正弦–戈登模型的若干解析方面仍未得到充分理解。在此背景下，本研究旨在推进对该模型定性

研究，针对情形 $\alpha = -1$，重点探讨方程 (1.3) 的周期行波的存在性，以及此类波的谱稳定性或不稳定性。

首先，我们注意到，关于 $\alpha = -1$ 的方程 **(1.1)** 具有抽象的哈密顿系统形式

$$U_t = J\mathcal{E}'(U), \tag{1.4}$$

其中 $U = (u, v) = (u, u_t)$, J 是反对称矩阵

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

而 $\mathcal{E}'$ 表示泛函（能量） $\mathcal{E}$ 的 Fr´echet 导数： $H^1_{per} \times L^2_{per} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathcal{E}(u, u_t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[u_x^2 + u_t^2 - 2(\cosh(u) - 1)\right] dx, \tag{1.6}$$

它是一个守恒量。此外，**(1.1)** 还具有另一个在 $H^1_{per} \times L^2_{per}$ 中定义的守恒量，表示为

$$\mathcal{F}(u, u_t) = \int_0^L u_x u_t dx. \tag{1.7}$$

将关于 $\alpha = -1$ 的方程 (1.3) 改写为更便于使用的形式

$$\omega\varphi'' + \sinh(\varphi) = 0, \tag{1.8}$$

其中 $\omega = 1 - c^2$为正，因此 $c \in (-1,\ 1)$。在这种情况下，方程 **(1.8)** 的解可以用雅可比椭圆函数表示为

$$\varphi(x) = 2\,\mathrm{arctanh}\left(k\,\mathrm{sn}\left(\frac{4K(k)}{L}\ x; k\right)\right), \tag{1.9}$$

其中 sn 是雅可比椭圆正弦函数， $k \in (0,\ 1)$ 是该椭圆函数的模数，而 $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}} d\theta$ 是第一类完全椭圆积分（关于雅可比椭圆函数及其性质的详细信息，请参见 [3] ）。

应用隐函数定理可推知，对于固定的周期 $L \in (0,\ 2\pi)$，存在一条光滑曲线

$$\omega \in (0, 1) \mapsto \varphi_\omega = \varphi \in H^n_{per,m},$$

对所有整数 $n \geqslant 1$均成立，该曲线由方程 (1.8)的解构成。关于周期解的确定，我们还采用另一种方法。对于固定的 $\omega \in (0,\ 1)$ 和 $L \in (0,\ 2\pi\sqrt{\omega})$，我们利用山路定理证明方程 (1.8) 存在一个弱解 $\varphi \in H^1_{per,\ m}$。

本文的主要目标是使用解析方法确定由 (1.9) 给出的光滑曲线的谱稳定性与不稳定性。我们在空间 $\mathbb{L}^2_{per,\ m} = L^2_{per,\ m} \times L^2_{per,\ m}$中开展研究，该空间由具有零均值的 L-周期对 $(u,\ v) \in \mathbb{L}^2_{per} = L^2_{per} \times L^2_{per}$ 组成。作此选择的原因是，尽管 φ在 (1.9)中是奇函数，但它同时也是一个零均值周期函数。据我们所知，空间$\mathbb{L}^2_{per,\ m}$ 为研究谱稳定性提供了更合适的框架，使我们能够对这一性质给出正面且明确的结论。这与 [20], 中的部分结果形成对比，后者仅在空间 $H^1_{per,\ m} \times L^2_{per}$中证明了轨道稳定性；此外，[27],依赖方程 (1.2)的可积性证明了谱稳定性。

为此，我们首先考察一些基本要素。首先，定义泛函$\mathcal{G}(u,\ v)=\mathcal{E}(u,\ v)-c\mathcal{F}(u,\ v).$显然，(1.8) 的任意解都满足 $\mathcal{G}'(\varphi,\ c\varphi')=0$，也就是说，$(\varphi,\ c\varphi')$是 $\mathcal{G}$的一个临界点。考虑线性投影算子

$$\mathcal{L}_{\Pi}=\mathcal{G}''(\varphi,c\varphi')+\begin{pmatrix}\frac{1}{L}\int_0^L\cosh(\varphi)\cdot dx & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\mathcal{L}+\begin{pmatrix}\frac{1}{L}\int_0^L\cosh(\varphi)\cdot dx & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\tag{1.10}$$

其中 $\mathcal{L}$ 定义为

$$\mathcal{L}=\begin{pmatrix}-\partial_x^2-\cosh(\varphi) & c\partial_x\\ -c\partial_x & 1\end{pmatrix}.\tag{1.11}$$

算子 $\mathcal{L}_{\Pi}$ 定义在 $\mathbb{L}^2_{per,\ m}$ 其定义域为 $H^2_{per,\ m}\times H^1_{per,\ m}$。利用 Morse 指标理论，我们能够证明 $\mathcal{L}_{\Pi}$ 只有一个负的单特征值，且零是与特征函数 $(\varphi',\ c\varphi'')$相关联的单特征值。为此，我们首先利用方程 (1.8)的周期映射的单调性，证明定义在 $\mathbb{L}^2_{per}$ 上、定义域为 $H^2_{per}\times H^1_{per}$ 的算子 $\mathcal{L}$具有两个负的单特征值，且零是与特征函数 $(\varphi',\ c\varphi'')$相关联的单特征值。

为了获得谱稳定性，我们需要通过分析差值来计算 Hamilton-Krein指标

$$\mathrm{n}(\mathcal{L})-\mathrm{n}(\mathcal{D}),\tag{1.12}$$

其中 $\mathrm{n}(\mathcal{L})$ 表示线性化算子 $\mathcal{L}$ 在 (1.11)中的负特征值个数（按重数计），而 $\mathrm{n}(\mathcal{D})$表示矩阵

$$\mathcal{D}=\begin{bmatrix}\displaystyle\int_0^L(\varphi')^2dx-2c^2\left(\frac{d\omega}{dk}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial k}\int_0^L(\varphi')^2dx & 0 & 0\\ 0 & D_1 & 0\\ 0 & 0 & L\end{bmatrix},\tag{1.13}$$

其中 $D_1=(\mathcal{L}_1^{-1}1,\ 1)_{L^2_{per}}$ 且 $\mathcal{L}_1=-\omega\partial_x^2-\cosh(\varphi)$。需要指出的是，(1.13) 中由 $D=\begin{bmatrix}D_1 & 0\\ 0 & L\end{bmatrix}$ 给出的 2×2子矩阵确定了量 $\mathrm{n}(\mathcal{L}_{\Pi})$。

根据 [13, 定理7.1。5], 若 (1.12) 中的差为零，则周期波 $(\varphi,\ c\varphi')$ 是谱稳定的；若该差为奇数，则是谱不稳定的。在本例中，我们证明了对于显式解 (1.9)，点对 $(\varphi,\ c\varphi')$ 可能是谱稳定的，也可能是谱不稳定的，这取决于椭圆模数 $k\in(0,\ 1)$的值。综上，我们得到以下结果：

定理1.1。令 $L\in(0,2\pi)$ 固定，并考虑 (1.9)中的周期行波解。存在唯一的 $k_0=k_0(L)\in(0,1)$ 使得：

(i) 若 $k\in(0,k_0)$，则周期波 $(\varphi,c\varphi')$ 在 $\mathbb{L}^2_{per,m}$中谱稳定；(ii) 若 $k\in[k_0,1)$，则周期波 $(\varphi,c\varphi')$ 在 $\mathbb{L}^2_{per,m}$中谱不稳定。

注 1.2. 在定理 1.1的第一项中，我们还可以得出，(1.9) 中的周期行波解在 $H^1_{per,m} \times L^2_{per,m}$中轨道稳定。事实上，在这种情况下，我们可以推导出存在 $C > 0$，使得

$$(\mathcal{L}(u,v),(u,v))_{\mathbb{L}^2_{per}} = (\mathcal{L}_{\Pi}(u,v),(u,v))_{\mathbb{L}^2_{per}} \geqslant C||(u,v)||^2_{\mathbb{L}^2_{per}}, \tag{1.14}$$

对所有满足 $((u,v),(\varphi',c\varphi''))_{\mathbb{L}^2_{per}} = 0$ 的 $(u,v) \in H^2_{per,\ m} \times H^1_{per,\ m}$。利用 $[11]$，中针对轨道稳定性的经典方法，(1.14) 中的估计进而表明，周期波 $(\varphi, c\varphi')$ 在能量空间 $H^1_{per,\ m} \times L^2_{per,\ m}$ 中具有轨道稳定性。

注 1.3。 我们研究的是集合 $\mathbb{L}^2_{per,\ m}$ 中的谱稳定性，而非经典集合 $\mathbb{L}^2_{per}$。此外，正如我们将在第 *5* 节中看到的，我们并未采用 (1.4) 中哈密顿结构的经典线性化来获得定理*1.1*中所述的谱稳定性结果。这是因为，在 $\mathbb{L}^2_{per}$ 中建立谱稳定性的经典方法可能不适用于双曲正弦–戈登方程。事实上，令 $d(c) = \mathcal{E}(\varphi, c\varphi') - c\mathcal{F}(\varphi, c\varphi')$。我们有 $(\varphi, c\varphi')$ 是泛函 $\mathcal{G}(u,v) = \mathcal{E}(u,v) - c\mathcal{F}(u,v)$ 的临界点，因此由链式法则

$$d''(c) = -\frac{d}{dc}\left(c\int_0^L (\varphi')^2 dx\right) = -\int_0^L (\varphi')^2 dx + 2c^2\frac{\partial}{\partial\omega}\int_0^L (\varphi')^2 dx.$$

根据 $[20,$ 第 $4],$，我们有 $d''(c) < 0$ 在包含于 $(-1$ 的某个开子集上成立，$1)$。由于$\mathrm{n}(\mathcal{L}) = 2$，我们在这些点得到

$$\mathrm{n}(\mathcal{L}) - \mathrm{n}(-d''(c)) = 2 - 0 = 2,$$

一个偶数。采用用于谱稳定性分析的经典方法（例如基于[11]的方法），我们发现，整个空间 $\mathbb{L}^2_{per}$ 中的谱稳定性因此无法得出结论。因此，我们的结果为解决这些问题提供了一个更完整的框架。此外，我们的新结果前景良好，并可用于研究周期情形下的其他 *Klein–Gordon* 方程和波型方程。

本文结构安排如下。第 2 节讨论与演化方程 (1.1) 相关的柯西问题的适定性，其中 $\alpha = -1$，在空间 $H^3_{per,\ m} \times H^2_{per,\ m}$ 中，包括导致爆破解的条件。第 3 节构造周期行波：通过山路定理，在固定波速、周期可变的情形下得到弱解；而在固定周期、波速可变的互补情形下，则得到显式经典解。第 4 节致力于对由 sinh-Gordon 方程的相对能量生成的线性化算子进行谱分析，并刻画其核、谱以及负特征值的数量。第 5 节基于先前推导出的周期波，通过适当的变换发展相应的谱稳定性与不稳定性理论。

记号。 我们首先回顾周期 Sobolev 空间的基本记号。有关这些空间的更详细介绍，请参阅 $[12]$。用 $L^2_{per} = L^2_{per}([0,\ L]), L > 0$ 表示所有平方可积实函数组成的空间，这些函数均为 L-周期函数。对于 $s \geqslant 0$，Sobolev 空间 $H^s_{per} = H^s_{per}([0,\ L])$ 是满足以下条件的所有周期实函数构成的集合：

$$\|f\|^2_{H^s_{per}} = L\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s|\hat{f}(k)|^2 < +\infty,$$

ˆ其中 f 是 f 的周期傅里叶变换。空间 H^s_{per} 是一个希尔伯特空间，其自然内积记为 $(\cdot,\cdot)_{H^s_{per}}$。当 $s=0$ 时，空间 H^s_{per} 与空间L^2_{per}等距同构，即 $L^2_{per}=H^0_{per}$（例如参见 [12]）。L^2_{per} 中的范数和内积分别记为$\|\cdot\|_{L^2_{per}}$ 和 $(\cdot,\cdot)_{L^2_{per}}$。

2. Well-posedness theory

本节旨在证明与方程（1.1）相关的柯西问题在考虑 $\alpha=-1$ 时的存在性和唯一性，并分析其解的爆破条件。

2.1. 局部适定性。 考虑与演化方程 (1.1) 相关的经典柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}-\sinh(u)=0, & \text{in } [0,L]\times(0,+\infty),\\ u(x,0)=u_0(x), & \text{in } [0,L],\\ u_t(x,0)=u_1(x), & \text{in } [0,L]. \end{cases} \tag{2.1}$$

性　　为研究（2.1）的存在性和唯一性，我们先将其改写为矩阵形式 a　　s

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ \partial_x^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\ \sinh(u)\end{pmatrix}, & \text{in } [0,L]\times(0,+\infty),\\ \begin{pmatrix} u(0)\\ v(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_0\\ v_0\end{pmatrix}, & \text{in } [0,L], \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $v=u_t$。采用 [23] 中的标准半群方法时，我们无法保证柯西问题 (2.2) 在索об列夫空间 $H^2_{per,\ m}\times H^1_{per,\ m}$ 中局部适定。为了解决这一问题，我们必须分析与问题 (2.1) 对应的辅助柯西问题，其表达式为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u\\ w\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix} \partial_x^{-1} & 0\\ 0 & \partial_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ \partial_x^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\\ w\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\ \partial_x(\sinh(u))\end{pmatrix}, & \text{in } [0,L]\times(0,+\infty),\\ \begin{pmatrix} u(0)\\ w(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_0\\ w_0\end{pmatrix}, & \text{in } [0,L], \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $w=\partial_x u_t$ 和　∂_x^{-1}:$L^2_{per,\ m}\to H^1_{per,\ m}$ 是众所周知的有界线性反导数算子　　r.

由于 $(u,\ w)$ 是在 (2.3) 中某个可容许空间（例如$H^3_{per,\ m}\times H^1_{per,\ m}$）内方程的光滑解，因此 u 是投影柯西问题的光滑解

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}-\sinh(u)+\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \sinh(u)dx=0, & \text{in } [0,L]\times(0,+\infty),\\ u(x,0)=u_0(x), & \text{in } [0,L],\\ u_t(x,0)=u_1(x), & \text{in } [0,L], \end{cases} \tag{2.4}$$

具有零均值性质。

我们从以下初等引理开始:

引理 2.1。 定义在 $X=H^2_{per,\ m}\times L^2_{per,\ m}$ 上的算子$D(A)=H^3_{per,\ m}\times H^1_{per,\ m}$ 是空间 X 上压缩 C_0-半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的生成元。证明。参见 [16,引理 21]。

■

在下一个结果中，我们证明柯西问题 (2.3)的局部解的存在性 .

引理 2.2. 设 $L>0$ 固定，并考虑 $(u_0,w_0)\in H^3_{per,\ m}\times H^1_{per,\ m}$。存在 $t_{\max}>0$，且柯西问题 (2.3) 存在唯一的局部（强）解 (u,w)，满足

$$(u,w)\in C([0,t_{\max}),H^3_{per,m}\times H^1_{per,m})\cap C^1([0,t_{\max}),H^2_{per,m}\times L^2_{per,m}).$$

证明。 根据引理 2.1，算子 A在空间 X上生成一个 C_0-压缩半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$。考虑 $(u_0,\ w_0)\in H^3_{per,\ m}\times H^1_{per,\ m}=D(A)\subset X$。我们的首要目标是证明存在一个最大存在时间 $t_{\max}>0$ 和一个唯一函数

$$W=(u,w)\in C([0,t_{\max}),H^2_{per,m}([0,L])\times L^2_{per,m}([0,L])), \tag{2.5}$$

使得对于 $t\in[0,\ t_{\max})$, $W(t)$ 满足积分方程

$$W(t)=(u(\cdot,t),w(\cdot,t))=S(t)(u_0,w_0)+\int_0^t S(t-s)(0,\partial_x(\sinh(u(\cdot,s))))ds. \tag{2.6}$$

Ini首先，定义函数 $Q:H^2_{per,\ m}\times L^2_{per,\ m}\to H^2_{per,\ m}\times L^2_{per,\ m}$ 如下

$$Q(u,w)=(0,\partial_x(\sinh(u))).$$

为验证 Q 定义良好，只需证明对于所有 $u\in H^2_{per,\ m}$，$\partial_x(\sinh(u))\in L^2_{per,\ m}$。事实上，由于 $u\in H^1_{per}\hookrightarrow L^\infty_{per}$，因此 $|u|\leqslant\|u\|_{L^\infty_{per}}<+\infty$。此外，$\partial_x u\in H^1_{per,\ m}\subset L^2_{per,\ m}$ 且$e^{-2u}\leqslant e^{2|u|}$。因此，我们有

$$\int_0^L|\partial_x(\sinh(u))|^2dx=\frac{1}{4}\int_0^L(e^{2u}+2+e^{-2u})|\partial_x u|^2dx\leqslant\frac{1}{2}(1+e^{2\|u\|_{L^\infty_{per}}})\|\partial_x u\|^2_{L^2_{per}},$$

证明了 $\partial_x(\sinh(u))\in L^2([0,\ L])$。此外，$\partial_x(\sinh(u))$ 的零均值性质和周期性是函数 $u\in L^2_{per,\ m}$ 正则性的直接推论。因此，Q 是定义良好的。

接下来，我们证明一个基本性质：令 $R>0$ 固定，并假设$(u_1,\ w_1),\ \ (u_2,\ w_2)\in X=H^2_{per,\ m}\times L^2_{per,\ m}$ 满足

$$\|(u_1,w_1)\|_X,\|(u_2,w_2)\|_X\leqslant R. \tag{2.7}$$

于是，存在 $M=M(L,R)>0$ 使得

$$\|Q(u_1,w_1)-Q(u_2,w_2)\|_X\leqslant M\|(u_1,w_1)-(u_2,w_2)\|_X. \tag{2.8}$$

首先，我们注意到

$$\begin{aligned}\|Q(u_1,w_1)-Q(u_2,w_2)\|_X &= \|\cosh(u_1)\partial_x u_1-\cosh(u_2)\partial_x u_2\|_{L^2_{per}}\\ &\leqslant \|[\cosh(u_1)-\cosh(u_2)]\partial_x u_1\|_{L^2_{per}}\\ &+ \|\cosh(u_2)[\partial_x u_1-\partial_x u_2]\|_{L^2_{per}}\\ &\leqslant \|\cosh(u_1)-\cosh(u_2)\|_{L^2_{per}}\|\partial_x u_1\|_{L^\infty_{per}}\\ &+ \|\cosh(u_2)\|_{L^\infty_{per}}\|u_1-u_2\|_{H^1_{per}}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

由中值定理、假设 (2.7) 以及双曲正弦函数的连续性可知，存在常数 $M_1=M_1(L,R)>0$ 满足

$$\|\cosh(u_1)-\cosh(u_2)\|_{L^2_{per}}\leqslant M_1\|u_1-u_2\|_{L^2_{per}}. \tag{2.10}$$

利用 Sobole夫嵌入$H^2_{per,m}\hookrightarrow H^1_{per,m}\hookrightarrow L^\infty_{per,m}$ 和$H^2_{per,m}\hookrightarrow L^2_{per,m}$，以及不等式 (2.9) 和 (2.10)，我们得到常数 $M_i=M_i(L,R)>0$, $i=2$,3，使得

$$\begin{aligned}\|Q(u_1,w_1)-Q(u_2,w_2)\|_X &\leqslant M_1\|u_1-u_2\|_{L^2_{per}}\|\partial_x u_1\|_{L^\infty_{per}}+\|\cosh(u_2)\|_{L^\infty_{per}}\|u_1-u_2\|_{H^1_{per}}\\ &\leqslant M_2\|u_1-u_2\|_{H^2_{per}}\|\partial_x u_1\|_{H^1_{per}}+M_3\|u_1-u_2\|_{H^2_{per}}\\ &\leqslant (M_2\|u_1\|_{H^2_{per}}+M_3)\|(u_1,w_1)-(u_2,w_2)\|_X.\end{aligned} \tag{2.11}$$

由 (2.11) 和假设 $\|u_1\|_{H^2_{per}}\leqslant\|(u_1,w_1)\|_X\leqslant R$，我们得出存在常数$M=M(L,R)>0$，使得 (2.8) 成立。

对于给定的 $T>0$，定义集合

$$\Upsilon=\left\{(u,w)\in C([0,T],X);\ \sup_{t\in[0,T]}\|(u(\cdot,t),w(\cdot,t))\|_X\leqslant 1+\|(u_0,w_0)\|_X\right\}. \tag{2.12}$$

由于集合 Υ 在配备上确界范数的 $C([0,\ T],\ X)$ 中是闭集，因此它是一个完备度量空间。我们还引入映射 Φ：$\Upsilon\to\Upsilon$，对每个 $t\in[0,\ T]$，定义为

$$\Phi(u(\cdot,t),w(\cdot,t))=S(t)(u_0,w_0)+\int_0^t S(t-s)Q(u(\cdot,s),w(\cdot,s))ds. \tag{2.13}$$

为了通过巴拿赫不动点定理证明抽象柯西问题 (2.3) 的存在性和唯一性，我们证明映射 Φ 在半径为 $r>0$ 的开球上定义良好，并且是严格压缩映射。为此，取 $r=1+\|(u_0,\ w_0)\|_X>0$ 并固定任意元素 $(u,\ w)\in\Upsilon$。值得注意的是，参数 r 取决于时间

变量 t，这是由于集合 Υ 的定义中施加的限制。接下来，需要适当选择 $T>0$ 以确保 Φ 定义良好。事实上，由 (2.8) 可知，存在正常数 $M=M(L,\ r)$；由于对 r 的选择，该常数现在隐含地取决于最大存在时间 T，使得

$$\|Q(u(\cdot,t),w(\cdot,t))-Q(u_0,w_0)\|_X \leqslant M\|(u(\cdot,t),w(\cdot,t))-(u_0,w_0)\|_X, \tag{2.14}$$

对所有 $t\in[0,\ T]$ 和 $(u,\ w)\in\Upsilon$均成立。此外，由方程 (2.14) 以及 $S(t)$ 是一个C_0-收缩半群这一条件，我们得到

$$\|\Phi(u(\cdot,t),w(\cdot,t))\|_X \leqslant \|(u_0,w_0)\|_X + MT[1+2\|(u_0,w_0)\|_X] + T\|(0,\partial_x(\sinh(u_0)))\|_X. \tag{2.15}$$

考虑

$$0<T^*=\{M[1+2\|(u_0,w_0)\|_X]+\|(0,\partial_x(\sinh(u_0)))\|_X\}^{-1}<+\infty, \tag{2.16}$$

并重新定义 T 使得 $0<T\leqslant T^*$，由 (2.15) 和 (2.16) 可知，对所有 $t\in[0,\ T]$ 我们有

$$\|\Phi(u(\cdot,t),w(\cdot,t))\|_X \leqslant 1+\|(u_0,w_0)\|_X = r, \tag{2.17}$$

这证明了映射 Φ 定义良好。

现在我们继续证明该函数满足严格压缩性质。为此，考虑 $(u_1,w_1),(u_2,w_2)\in\Upsilon$。仿照 (2.8) 和 (2.14) 的推导，我们得到

$$\|Q(u_1,w_1)-Q(u_2,w_2)\|_{C([0,T],X)} \leqslant MT\|(u_1,w_1)-(u_2,w_2)\|_{C([0,T],X)}. \tag{2.18}$$

由于 $T\leqslant T^*$，并且由 (2.16) 可知 $T^*<\frac{1}{M}$，因此由 (2.18) 可得 Φ 是严格压缩映射。鉴于这些条件，巴拿赫不动点定理保证存在唯一的函数 $(u,w)\in\Upsilon$，使得 $\Phi(u,w)=(u,w)$, 即 (2.6) 成立。

从此处开始，令 $t_{\max}=T^*$。应用格朗沃尔不等式，并利用 Q 满足 (2.8) 这一事实，可以证明上文得到的函数 $(u,w)\in C([0,t_{\max}),X)$ 是柯西问题在区间 $[0,t_{\max})$上的唯一温和解。

我们的下一个目标是证明 $(u,\ w)\in C([0,\ t_{\max}),\ D(A))\cap C^1([0,\ t_{\max}),\ X)$。为此，考虑 $W_0=(u_0,\ w_0)$, $W(t)=(u(\cdot,\ t),\ w(\cdot,\ t))$ 和 $z(t)=\int_0^t S(t-s)Q(W(s))ds$。由于

$$W(t)=S(t)W_0+z(t), \tag{2.19}$$

由 [23, 第 1 章，定理 2.4] 可得 $z(t)\in D(A)$, $S(t)W_0\in D(A)$，以及

$$\frac{d}{dt}S(t)W_0=AS(t)W_0=S(t)AW_0. \tag{2.20}$$

此外，利用函数 Q 在 (2.8) 中的性质，并结合 $S(t)$ 是一个C_0–半群这一事实，以及通过不动点论证得到的连续性 $W\in C([0,\ t_{\max}),\ X)$，我们证明 z 可微且满足

$$\frac{d}{dt}z(t)=A(z(t))+Q(W(t)). \tag{2.21}$$

由 (2.20) 和 (2.21) 可得

$$\frac{d}{dt}W(t)=AW(t)+Q(W(t)). \tag{2.22}$$

因此，$W\in C([0,\ t_{\max}),\ D(A))\cap C^1([0,\ t_{\max}),\ X)$ 是柯西问题 (2.3) 的唯一局部（强）解，其中 $t_{max}=T^*$ 取决于初始数据 $(u_0,\ w_0)\in D(A)$ 的范数以及固定周期 $L>0$。■

引理 2.2 中给出的论证可用于证明式 (2.4) 中柯西问题的局部适定性。

命题 2.3（投影柯西问题的局部适定性）。令 $L>0$ 为固定值，并考虑 $(u_0、u_1)\in H^3_{per,}$ $_m\times H^2_{per,\ m}$。则存在 $t_{\max}>0$，以及柯西问题 (2.4) 的唯一局部（强）解 u，满足

$$(u,u_t)\in C([0,t_{\max}),H^3_{per,m}\times H^2_{per,m})\cap C^1([0,t_{\max}),H^2_{per,m}\times L^2_{per,m}).$$

证明。令 $(u_0,\ u_1)\in H^3_{per,\ m}\times H^2_{per,\ m}$。因此，令 $(u_0,\ w_0)=(u_0,\ \partial_x u_1)$，我们有 $(u_0,\ w_0)\in D(A)$，并且根据引理 2.2，存在 $t_{\max}>0$ 以及唯一的强解

$$(u,w)\in C([0,t_{\max}),H^3_{per,m}\times H^1_{per,m})\cap C^1([0,t_{\max}),H^2_{per,m}\times L^2_{per,m})$$

柯西问题 (2.3) 的强解。由于 $(u,\ w)$ 是（2.3）的强解，因此，$(u,\ w)$ 满足以下偏微分方程组

$$\begin{cases} u_t=\partial_x^{-1}w, \\ \\ w_t=\partial_x(u_{xx}+\sinh(u)). \end{cases} \tag{2.23}$$

对 (2.23) 中第一个方程取时间导数，对第二个方程应用算子 ∂_x^{-1}，并比较所得结果，可得 u 满足 (2.4) 中的第一个方程。

此外，由 $u_t=\partial_x^{-1}w$ 可推得 $(u_0,\ w_0)=(u_0,\ \partial_x u_t(0))=(u_0,\ \partial_x u_1)$。由此可知，$u$ 是满足 $(u_0,\ \partial_x^{-1}w_0)=(u_0,\ u_1)=(u(0),\ u_t(0))$ 的柯西问题 (2.4) 的唯一强解，并且

$$(u,u_t)\in C([0,t_{\max}),H^3_{per,m}\times H^2_{per,m})\cap C^1([0,t_{\max}),H^2_{per,m}\times L^2_{per,m}).$$

■

注记2.4。可以推导出与问题 (1.1) 相关的 (1.6) 和 (1.7) 中的两个基本守恒量。事实上，由于 $(u、u_t)\in C^1([0、\ t_{\max})、\ H^2_{per,\ m}\times L^2_{per,\ m})$，根据引理 *2.2*，将 (2.4) 中的方程乘以 u_t，对最终结果在 $[0、\ L]$ 上积分，并利用 u_t 具有零均值性质，可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L\left[u_x^2+u_t^2-2(\cosh(u)-1)\right]dx=0. \tag{2.24}$$

因此，由(2.24) 可得 (1.6) 中的守恒量。

我们证明，$\mathcal{F}(u,u_t)=\int u_xu_tdx$ 也是一个守恒量。事实上，由方程(2.4),$_0$可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{F}(u,u_t) &= \int_0^L(u_tu_{tx}+u_xu_{tt})dx \\ &= \int_0^L\left(u_tu_{tx}+u_xu_{xx}+u_x\sinh(u)-u_x\frac{1}{L}\int_0^L\sinh(u)dx\right)dx \\ &= \int_0^L\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dx}u_t^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dx}u_x^2+\frac{d}{dx}\cosh(u)-u_x\frac{1}{L}\int_0^L\sinh(u)dx\right)dx. \end{aligned} \tag{2.25}$$

由于函数 u、 u_x和 u_t具有周期性，由(2.25) 可得$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u,u_t)=0$，因此 $\mathcal{F}$也是一个守恒量。
−

鉴于双曲余弦函数为正且具有指数增长，无法证明柯西问题 (2.4) 或问题 (2.1) 存在整体弱解。相反，我们只能保证存在局部弱解，其陈述如下。

命题 2.5（经典柯西问题的局部弱解存在性）。 令 $L>0$为固定值，并考虑 $(u_0,u_1)\in Y=H^1_{per,}$ $_m\times L^2_{per,m}$。柯西问题 (2.1) 存在唯一的局部弱解 u，属于$H^1_{per,m}$，其意义是

$$\langle u_{tt}(\cdot,t),\mathfrak{p}\rangle_{H^{-1}_{per,m},H^1_{per,m}}+\int_0^L u_x(\cdot,t)\mathfrak{p}_x dx-\int_0^L \sinh(u(\cdot,t))\mathfrak{p}dx=0,\ a.e.\ t\in[0,t_{max}),\tag{2.26}$$

对所有 $\mathfrak{p}\in H^1_{per,m}$均成立。此外，我们有 $(u,u_t)\in C([0,t_{max}),Y)$。

证明。 令 $(u_0,u_1)\in H^1_{per,m}\times L^2_{per,m}$。由稠密性可知，存在一个序列 $\{(u_{0,n},u_{1,n})\}_{n\in\mathbb{N}}\subset H^3_{per,m}\times H^2_{per,m}$，使得 $(u_{0,n},u_{1,n})$ 在 Y中收敛到 (u_0,u_1)。根据命题 2.3 所述，对 $(u_{0,n},u_{1,n})$施加正则初始条件后，我们得到相应的解序列

$$(u_n,u_{t,n})\in C([0,t_{\max,\mathrm{n}}),H^3_{per,m}\times H^2_{per,m})\cap C^1([0,t_{\max,\mathrm{n}}),H^2_{per,m}\times L^2_{per,m}),\tag{2.27}$$

因此

$$u_{tt,n}-u_{xx,n}-\sinh(u_n)+\frac{1}{L}\int_0^L\sinh(u_n)dx=0,\quad \text{in } [0,L]\times(0,t_{\max,\mathrm{n}}).\tag{2.28}$$

为简化记号，记作 $\phi=u_{\tilde{n}}$, $\eta=u_n$, $\phi_t=u_{t,\ \tilde{n}}$，以及$\eta_t=u_{t,\ n}$。根据这些假设，并令 $\xi=\phi-\eta$，可得

$$\xi_{tt}-\xi_{xx}-[\sinh(\phi)-\sinh(\eta)]+\frac{1}{L}\int_0^L[\sinh(\phi)-\sinh(\eta)]\,dx=0,\ \text{in } [0,L]\times(0,t_{\max,\mathrm{n}}),\tag{2.29}$$

其中，$t_{\max,\ \mathrm{n}}$ 从现在起表示数值 $t_{\max,\ \tilde{\mathrm{n}}}$ 与 $t_{\max,\ \mathrm{n}}$中的较小者。将 (2.29) 乘以 ξ_t，并对 x 在 $[0,\ L]$ 上积分，由于 ξ_t 具有零均值性质，可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L(\xi_t^2+\xi_x^2)dx\leqslant\int_0^L|\xi_t||\sinh(\phi)-\sinh(\eta)|dx.\tag{2.30}$$

此外，在 (2.30) 中应用杨氏不等式，可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L(\xi_t^2+\xi_x^2)dx\leqslant\int_0^L\frac{|\xi_t|^2}{2}dx+\int_0^L\frac{|\sinh(\phi)-\sinh(\eta)|^2}{2}dx.\tag{2.31}$$

Next，对 (2.31) 的结果在区间 $[0,t]\subset[0,t_{\max,\mathrm{n}})$ 上积分，得到 in

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^L(\xi_t^2+\xi_x^2)dx\ &\leqslant\frac{1}{2}\int_0^L(\xi_{t,0}^2+\xi_{x,0}^2)dx+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^L\xi_t^2dxdt\\&\quad+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^L|\sinh(\phi)-\sinh(\eta)|^2dxdt.\end{aligned}\tag{2.32}$$

利用关系 $\sinh(\phi)-\sinh(\eta)=2\cosh(\frac{\phi+\eta}{2})\sinh(\frac{\phi-\eta}{2})$，并且当 $x\geqslant 0$ 时，由不等式 $0\leqslant\sinh(x)\leqslant x\cosh(x)$ 可得

$$\begin{aligned}\int_0^L|\sinh(\phi)-\sinh(\eta)|^2dx &= \int_0^L\left|2\cosh\left(\frac{\phi+\eta}{2}\right)\sinh\left(\frac{\phi-\eta}{2}\right)\right|^2dx\\ &= 4\int_0^L\left|\cosh\left(\frac{\phi+\eta}{2}\right)\right|^2\left|\sinh\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2dx\\ &= 4\int_0^L\left|\cosh\left(\frac{\phi+\eta}{2}\right)\right|^2\left[\sinh\left(\left|\frac{\xi}{2}\right|\right)\right]^2dx\\ &\leqslant 4\int_0^L\left|\cosh\left(\frac{\phi+\eta}{2}\right)\right|^2\left|\cosh\left(\left|\frac{\xi}{2}\right|\right)\right|^2\left|\frac{\xi}{2}\right|^2dx.\end{aligned}\tag{2.33}$$

根据引理 2.2 证明中的构造，最大值 $t_{max,\ n}$ 满足以下界 $t_{max,\ n}\leqslant T_n^*$，对每个 $n\in\mathbb{N}$均成立，其中 T_n^* 定义为

$$0<T_n^*=\{M_n[1+2\|(u_{0,n},w_{0,n})\|_X]+\|(0,\partial_x(\sinh(u_{0,n})))\|_X\}^{-1}<+\infty,\tag{2.34}$$

其中 M_n 是由条件 (2.18) 得到的参数，该条件依赖于 $n\in\mathbb{N}$。需要指出的是，M_n取决于周期 $L>0$以及 $r_n=1+||(u_{0,\ n},\ w_{0,\ n})||_X$，其中$w_{0,\ n}=\partial_x u_{1,\ n}\in H^1_{per,\ m}$。特别是，由于 $\{(u_{0,\ n},\ w_{0,\ n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是有界序列，因此取一个子序列后可得，$\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到一个非负数 M。

综上可知，$\{T_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$定义了一个有界序列，该序列取决于初始数据$(u_0$ 的范数$_{,\ n}$，$u_{1,\ n})\in H^3_{per,\ m}\times H^2_{per,\ m}$ 以及固定周期 $L>0$。因此，序列 $\{t_{max,\ n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界，这意味着存在一个收敛子序列；我们仍用同样的记号表示该子序列，其收敛到 t_{max}。

由于函数 ϕ、η 和 ξ 属于 $H^1_{per,\ m}\subset L^\infty_{per,\ m}$，我们进一步观察到，对每个 $t\in[0,\ t_{\max,\ n})$，以下不等式成立:

$$\begin{aligned}\left|\cosh\left(\frac{\phi+\eta}{2}\right)\right|^2\left|\cosh\left(\left|\frac{\xi}{2}\right|\right)\right|^2 &\leqslant \frac{(e^{\frac{\phi+\eta}{2}}+e^{-\frac{\phi+\eta}{2}})^2}{4}\frac{(e^{|\frac{\xi}{2}|}+e^{-|\frac{\xi}{2}|})^2}{4}\\ &\leqslant \frac{(e^{\frac{\|\phi\|_{L^\infty_{per}}+\|\eta\|_{L^\infty_{per}}}{2}}+e^{\frac{\|\phi\|_{L^\infty_{per}}+\|\eta\|_{L^\infty_{per}}}{2}})^2}{4}\frac{(e^{\frac{\|\xi\|_{L^\infty_{per}}}{2}}+e^{\frac{\|\xi\|_{L^\infty_{per}}}{2}})^2}{4}\\ &\leqslant e^{(\|\phi\|_{L^\infty_{per}}+\|\eta\|_{L^\infty_{per}})}e^{\|\xi\|_{L^\infty_{per}}}.\end{aligned}\tag{2.35}$$

将嵌入 $H^1_{per,\ m}\hookrightarrow L^\infty_{per,\ m}$ 应用于 (2.35)，可保证存在一个常数 $\tilde{M}_{0,\ n}=M_{0,\ n}(L,\ t_{max,\ n})>0$，该常数还取决于初始数据$(u_{0,\ n},\ u_{1,\ n})$的范数，使得

$$\int_0^L|\sinh(\phi)-\sinh(\eta)|^2dx\leqslant\tilde{M}_{0,n}\int_0^L\xi^2dx\leqslant\tilde{M}_{0,n}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\int_0^L\xi_x^2dx,\tag{2.36}$$

其中，在 (2.36) 的最后一个不等式中，我们使用了 ́e–Wirtinger 不等式$H^1_{per,\ m}$。由 (2.32) 和 (2.36) 可得

$$\int_0^L(\xi_t^2+\xi_x^2)dx \leqslant \int_0^L(\xi_{t,0}^2+\xi_{x,0}^2)dx+\int_0^t\int_0^L\xi_t^2dxdt+\tilde{M}_{0,n}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\int_0^t\int_0^L\xi_x^2dxdt. \tag{2.37}$$

考虑到 $\tilde{M}_n=\tilde{M}_n(L,\ t_{max,\ n})=\max\left\{1,\ \tilde{M}_{0,\ n}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\right\}$，由 (2.37) 可推得

$$\int_0^L(\xi_t^2+\xi_x^2)dx \leqslant \int_0^L(\xi_{t,0}^2+\xi_{x,0}^2)dx+\tilde{M}_n\int_0^t\int_0^L(\xi_t^2+\xi_x^2)dxdt. \tag{2.38}$$

将格朗沃尔不等式应用于 (2.38)，我们得出

$$\int_0^L(\xi_t^2+\xi_x^2)dx \leqslant \left[\int_0^L(\xi_{t,0}^2+\xi_{x,0}^2)dx\right]e^{\tilde{M}_nt}, \tag{2.39}$$

其中 $t\in[0,\ t_{max})$，其中 t_{max} 是时间子序列 $\{t_{max,\ n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限.

需要指出的是，(2.39) 中的不等式无法保证延拓为全局解，因为由于参数 M 依赖于最大存在时间，我们无法对其进行控制。这意味着乘积 Mt 可能无法在 $t\in[0,\ t_{\max})$.. 上保持有界。

由于 $\xi=u_{\tilde{n}}-u_n$，(2.39) 表明 $(u_n,\ u_{t,\ n})$ 是 $L^\infty([0,\ t_{max}),\ Y)$ 中的柯西序列。因此，存在 $(u,\ u_t)\in L^\infty([0,\ t_{max}),\ Y)$，使得

$$(u_n,u_{t,n})\to(u,u_t)\quad\text{in}\quad L^\infty([0,t_{max}),Y). \tag{2.40}$$

定义 $U_0=(u_0,\ u_1)$, $U=(u,\ u_t)$, $U_n=(u_n,\ u_{t,\ n})$, $U_{0,\ n}=(u_{0,\ n},\ u_{1,\ n})$，并利用守恒量 $\mathcal{E}$ 在 (1.6)中的时间连续性，以及 (2.40) 中的收敛性，我们得到

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{E}(U_n(t)) & = & \mathcal{E}(U_{0,n})\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathcal{E}(U(t)) & = & \mathcal{E}(U_0)\end{array} \tag{2.41}$$

利用 (2.41) 中的收敛性以及 [4, 引理 2.4.4], 中的论证，我们证明了对所有 $T\in[0,\ t_{max})$, $(u,\ u_t)\in C([0,\ T],\ Y)$。此外，通过对 (2.28) 采用标准的极限过程论证，可以证明 $(u,\ u_t)$ 是 (2.1) 在 $C([0,\ T],\ Y)$ 上的一个局部弱解，其初始数据为$(u_0,\ u_1)\in Y$，前提是 $L>0$。不等式 (2.39) 与恒等式 $\xi=\phi-\eta$还保证了 $C([0,\ T],\ Y)$中弱解的唯一性。因此，我们得出局部弱解 $(u,\ u_t)\in C([0,\ t_{max}),\ Y)$的存在性与唯一性，正如命题 2.5 所断言。■

注 2.6。 命题 2.3 中得到的强解也可以解释为 (2.1) 中关于 $H^1_{per,\ m}$ 且满足 (2.26)的弱解。按照命题 2.5的方法，我们将 (2.4) 中的方程乘以函数 $\mathfrak{p}\in H^1_{per,\ m}$ 并在区间 $[0,L]$上积分。因此，对于 $\alpha=-1$，该强解满足 (2.26)中的弱形式。由此，对于强解而言，柯西问题 (2.1)在弱意义下是可解的。

2.2. **爆破分析**。

命题 2.7。 设 $(u_0,u_1)\in H^3_{per,m}\times H^2_{per,m}$ 和 u 为柯西问题 (2.4)的局部（强）解。若 $\mathcal{E}(u_0,u_1)<0$，则有

$$\sup_{t>0}||u(t)||^2_{L^2_{per}}=+\infty.$$

证明。 事实上，根据命题 2.3，柯西问题 (2.4) 的局部解 u 尤其满足 $(u,u_t)\in C^1([0,t_{max}),H^2_{per,m}\times H^1_{per,m})$。此外，由注 2.4 可得，$\mathcal{E}(u(t),u_t(t))=\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}(0)=\mathcal{E}(u_0,u_1)$是一个守恒量。因此，我们可以写成

$$-2\int_0^L u_x(x,t)^2dx=-4\mathcal{E}(0)+2\int_0^L u_t(x,t)^2dx-4\int_0^L(\cosh(u(x,t))-1)dx. \tag{2.42}$$

现在，考虑平方范数函数 $\Lambda(t)=\int_0^L u(x,\ t)^2dx=||u(t)||^2_{L^2_{per}}$。对函数 $\Lambda(t)$ 关于 $t>0$ 求一次导，我们得到 $\Lambda'(t)=2\int^L u(x,\ t)u_t(x,\ t)dx$。因此，再0求一次导，并利用 (2.4) 中的方程可得

$$\begin{aligned}\Lambda''(t) &= 2\int_0^L u_t(x,t)^2+2\int_0^L u(x,t)u_{tt}(x,t)dx\\ &= 2\int_0^L u_t(x,t)^2+2\int_0^L u(x,t)u_{xx}(x,t)dx+2\int_0^L u(x,t)\sinh(u(x,t))dx \qquad (2.43)\\ &= 2\int_0^L u_t(x,t)^2-2\int_0^L u_x(x,t)^2dx+2\int_0^L u(x,t)\sinh(u(x,t))dx.\end{aligned}$$

由（2.42）和（2.43）可知

$$\Lambda''(t)=4\int_0^L u_t(x,t)^2-4\mathcal{E}(0)+2\int_0^L u(x,t)\sinh(u(x,t))dx-4\int_0^L(\cosh(u(x,t))-1)dx.$$

利用对所有 $x\in\mathbb{R}$ 都成立的基本不等式 $2x\sinh(x)\geqslant 4(\cosh(x)-1)$，以及 $\mathcal{E}(0)<0$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\Lambda''(t)\Lambda(t) &\geqslant 4\int_0^L u(x,t)^2dx\int_0^L u_t(x,t)^2dx-4\mathcal{E}(0)\int_0^L u(x,t)^2dx\\ &\geqslant 4\left(\int_0^L u(x,t)u_t(x,t)dx\right)^2-4\mathcal{E}(0)\int_0^L u(x,t)^2dx \qquad (2.44)\\ &= (\Lambda'(t))^2-4\mathcal{E}(0)\Lambda(t).\end{aligned}$$

因此，假设 $u\not\equiv 0$，我们有 Λ 满足不等式

$$\frac{\Lambda''(t)\Lambda(t)-(\Lambda'(t))^2}{\Lambda(t)}\geqslant -4\mathcal{E}(0). \tag{2.45}$$

考虑 $-4\mathcal{E}(0)=d_0>0$。对于 $\Xi(t)=\ln(\Lambda(t))$，有 $\Xi'(t)=\frac{\Lambda'(t)}{\Lambda(t)}$ 和 $\Xi''(t)=\frac{\Lambda''(t)\Lambda(t)-(\Lambda'(t))^2}{(\Lambda(t))^2}$。因此，由 (2.45) 可得 $\Xi''(t)\geqslant\frac{d_0}{\Lambda(t)}$。

下面确定 $\sup\Lambda(t)=+\infty$。事实上，若对所有 $t\geqslant 0$ 都有 $\Lambda(t)\leqslant\Lambda_0$，且对某个 $\Lambda_0>0$ 有 $_{t>0}$，则可得 $\Xi''(t)\geqslant\frac{d_0}{\Lambda_0}=c_0>0$。对 t 将此不等式积分两次，得到$\Xi(t)\geqslant c_0t^2+b_0t+a_0$，其中 $a_0,\ b_0\in\mathbb{R}$. 因此我们得出 $\Lambda(t)=e^{\Xi(t)}\geqslant e^{c_0t^2+b_0t+a_0}$，这与假设矛盾。由此可知，所求的 $\sup_{t>0}||u(t)||_{L^2_{per}}=+\infty$，■

注 2.8。 关于命题 *2.7*，有一点值得特别指出。具体而言，若命题 2.3 中得到的解满足爆破二择一（即 $t_{\max} < +\infty$），那么解 (u, u_t) 会在有限时间内以相应的范数爆破。因此，上确界 $||u(t)||_{L^2_{per}} = +\infty$。
然而，如果 $t_{\max} = +\infty$，那么爆破会在无限时间发生。这种现象通常称为假定爆破。

3. Existence of periodic waves

3.1. 山路定理：弱解的存在性。 尽管我们考虑方程 (1.8)的周期行波解，记为 φ，但为避免读者混淆，我们将改用记号 ρ。出于同样的原因，我们也将波速 c和参数 ω的记号作相应更改。事实上，将形式为 $u(x,t) = \rho_{\mathtt{c}}(x - \mathtt{c}t)$的行波解代入 **(1.1)**，其中 $\alpha = -1$，可得

$$\mathtt{w}\rho''_{\mathtt{w}} + \sinh(\rho_{\mathtt{w}}) = 0, \tag{3.1}$$

其中 $\mathtt{w} = \mathtt{w}(\mathtt{c}) = 1 - \mathtt{c}^2 \in (0,1)$ 和 $0 < |\mathtt{c}| < 1$。为简便起见，以下记 $\rho_{\mathtt{w}} = \rho$。在此设定下，我们的目标是利用经典山路定理，在弱意义下求得满足 **(3.1)** 的 $\rho \in H^1_{per,m} \backslash \{0\}$。

为了建立我们的问题，定义泛函 $\mathcal{S}_{\mathtt{w}} : H^1_{per,\ m} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\mathcal{S}_{\mathtt{w}}(v) = \int_0^L \left[\frac{(v')^2}{2} - \frac{1}{\mathtt{w}} \cosh(v) + \frac{1}{\mathtt{w}} \right] dx. \tag{3.2}$$

此外，对于任意 $h \in H^1_{per,\ m}$，有：

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{S}_{\mathtt{w}}(v + \varepsilon h) - \mathcal{S}_{\mathtt{w}}(v)}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^L \left\{ \varepsilon v' h' + \frac{\varepsilon^2 (h')^2}{2} - \frac{1}{\mathtt{w}} \left[\cosh(\varepsilon h + v) - \cosh(v) \right] \right\} dx \\ &= \int_0^L v' h' dx - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon \mathtt{w}} \int_0^L \left[\cosh(\varepsilon h + v) - \cosh(v) \right] dx. \end{aligned} \tag{3.3}$$

利用双曲余弦函数的泰勒展开，可得

$$\cosh(\varepsilon h + v) - \cosh(v) = \sinh(v)\varepsilon h + \mathcal{O}((\varepsilon h)^2). \tag{3.4}$$

由 **(3.3)** 和 **(3.4)** 可知

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{S}_{\mathtt{w}}(v + \varepsilon h) - \mathcal{S}_{\mathtt{w}}(v)}{\varepsilon} = \int_0^L \left(v' h' - \frac{1}{\mathtt{w}} \sinh(v) h \right) dx.$$

因此， $\mathcal{S}_{\mathtt{w}}$ 在 v 处的弗雷歇导数为

$$\mathcal{S}'_{\mathtt{w}}(v) h = (\mathcal{S}'_{\mathtt{w}}(v), h)_{H^{-1}_{per,m}, H^1_{per,m}} = \int_0^L \left(v' h' - \frac{1}{\mathtt{w}} \sinh(v) h \right) dx, \tag{3.5}$$

其中 $h \in H^1_{per,\ m}$。因此，对于固定的 $L \in (0,\ 2\pi)$，根据 (3.5)， $\mathcal{S}_{\mathtt{w}}$ 的非平凡临界点是方程（**3.1**）的弱解。

注 3.1。 需要指出的是，在 $H^1_{per,\ m}$上，(3.2) 中的泛函 $\mathcal{S}_{\mathtt{w}}$ 既无下界，也无上界。事实上，对于 $v(x)=\kappa,\ \kappa\in\mathbb{R}$，我们有

$$\mathcal{S}_{\mathtt{w}}(\kappa)=-\frac{L}{\mathtt{w}}\cosh(\kappa)+\frac{L}{\mathtt{w}}\to-\infty,\ \ as\ \ |\kappa|\to+\infty.$$

另一方面，对于序列 $v_n(x)=\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right),\ n\in\mathbb{N},$ 我们注意到每个 v_n 都属于$H^1_{per,m}$，$(v_n')^2=\frac{4\pi^2n^2}{L^2}\cos^2\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$ 并且

$$\int_0^L(v_n')^2dx=\frac{2\pi^2n^2}{L^2}\int_0^L\left[\cos\left(\frac{4n\pi x}{L}\right)+1\right]dx=\frac{2\pi^2n^2}{L}.$$

因此，由于 $\cosh(v_n)=\cosh(|v_n|)\leqslant\cosh(1)$，可得

$$\mathcal{S}_{\mathtt{w}}(v_n)=\frac{\pi^2n^2}{L}-\frac{1}{\mathtt{w}}\int_0^L\cosh(v_n)dx+\frac{L}{\mathtt{w}}\geqslant\frac{\pi^2n^2}{L}-\frac{L}{\mathtt{w}}\cosh(1)+\frac{L}{\mathtt{w}}\to+\infty,\ \ as\ n\to+\infty.$$

因此， $\mathcal{S}_{\mathtt{w}}$ 在上方和下方均无界。这使得我们无法简单地运用标准紧性方法（参见 [26]）找到临界点。

为克服注记 3.1 中提出的困难，我们采用另一种方法，以保证泛函 $\mathcal{S}_{\mathtt{w}}$ （见式 (3.2)）存在临界点。为此，我们运用 Ambrosetti 和 Rabinowitz 提出的山路定理 [2] （另见 [29]），并部分借鉴了 [6]和 [17],，其定理陈述如下。

定义 3.1. 设 $\mathcal{X}$是一个范数为 $||\cdot||$、 $\mathcal{S}\in C^1(\mathcal{X}、\ \mathbb{R})$ 和 $\tilde{c}\in\mathbb{R}$ 的希尔伯特空间。若任意满足 $\mathcal{S}(v_n)\to\tilde{c}$ 和 $\mathcal{S}'(v_n)\to0$ 的序列 $(v_n)\subset\mathcal{X}$ 都存在收敛子序列，则泛函 $\mathcal{S}$满足 ***Palais–Smale*** 条件，记为 $(PS)_{\tilde{c}}$。

定理 3.2. 设 $\mathcal{X}$是一个范数为 $||\cdot||$、 $\mathcal{S}\in C^1(\mathcal{X}、\ \mathbb{R})$ 的希尔伯特空间，且 $e\in\mathcal{X}$ 和 $r_e>0$ 满足

$$\|e\|>r_e\quad and\quad\inf_{\|v\|=r_e}\mathcal{S}(v)>\mathcal{S}(0)\geqslant\mathcal{S}(e).\tag{3.6}$$

若 $\mathcal{S}$ 满足 $(PS)_{\tilde{c}}$ 条件，其中

$$\tilde{c}=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{\tau\in[0,1)}\mathcal{S}(\gamma(\tau))\in(0,+\infty),\tag{3.7}$$

其中 Γ 是容许路径集

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],\mathcal{X}):\ \gamma(0)=0,\ \gamma(1)=e\},$$

则 $\tilde{c}$ 是 $\mathcal{S}$的一个临界值，也就是说，存在 $\rho\in\mathcal{X}$ 使得 $\mathcal{S}(\rho)=\tilde{c}$ 且 $\mathcal{S}'(\rho)=0$。

证明. 参见 [2,定理 2.1]和 [29, 定理 2.10]。 ■

基于 [6] 和 [29], 中提出的论证，我们首先证明泛函 $\mathcal{S}_{\mathtt{w}}$ 具有山路几何，即满足（3.6）中的条件、 $\Gamma\neq\varnothing$ 和 $0<\tilde{c}<+\infty$。随后，我们确保满足定义 3.1 中的 Palais–Smale 条件。最后，我们可以应用山路定理，得出所需结果。

引理 3.3。 固定 $\mathtt{w}\in(0$ 和 $1)$，并考虑 $L\in(0$ 和 $2\pi\sqrt{\mathtt{w}})$。泛函 $\mathcal{S}_{\mathtt{w}}$ 定义于其中，且具有山路几何。 (3.2)

证明。 事实上，对双曲余弦函数在零点附近使用带拉格朗日余项的泰勒公式，我们得到一个依赖于 L 的常数 $\mathtt{M}(L)>0$ ，满足

$$\cosh(v)-\cosh(0)=\sinh(0)v+\frac{1}{2!}\cosh(0)v^2+\frac{1}{3!}\sinh(0)v^3+r_3(v), \tag{3.8}$$

其中

$$|r_3(v)|\leqslant\frac{\mathtt{M}(L)}{4!}|v|^4. \tag{3.9}$$

根据 $H^1_{per,m}\hookrightarrow L^4_{per.m}$ 的连续嵌入，我们可找到一个常数 $\mathtt{M}_0(L)>0$ ，使得

$$\|v\|_{L^4_{per}}\leqslant\mathtt{M}_0(L)\|v\|_{H^1_{per}}. \tag{3.10}$$

此外，由 $H^1_{per,m}$ 中的 Poincar´e–Wirtinger 不等式可知,

$$\|v\|^2_{L^2_{per}}\leqslant\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\|v\|^2_{H^1_{per}}. \tag{3.11}$$

将 (3.8)-(3.11) 代入 (3.2)，我们对每个 $v\in H^1_{per,m}$ 都得到:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mathtt{w}}(v) &= \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1_{per}}-\frac{1}{\mathtt{w}}\int_0^L[\cosh(v)-1]dx\\
&= \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1_{per}}-\frac{1}{\mathtt{w}}\int_0^L\left|\frac{v^2}{2}+r_3(v)\right|dx\\
&\geqslant \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1_{per}}-\frac{1}{2\mathtt{w}}\|v\|^2_{L^2_{per}}-\frac{\mathtt{M}(L)}{24\mathtt{w}}\|v\|^4_{L^4_{per}}\\
&\geqslant \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1_{per}}-\frac{1}{2\mathtt{w}}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\|v\|^2_{H^1_{per}}-\frac{\mathtt{M}(L)\mathtt{M}_0^4(L)}{24\mathtt{w}}\|v\|^4_{H^1_{per}}\\
&\geqslant \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{\mathtt{w}}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\right]\|v\|^2_{H^1_{per}}-\frac{\mathtt{M}(L)\mathtt{M}_0^4(L)}{24\mathtt{w}}\|v\|^4_{H^1_{per}}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

因此，由于 $L\in(0,2\pi\sqrt{\mathtt{w}})$，我们可以断定存在一个充分小的 $\varepsilon>0$ ，使得

$$0<\varepsilon<\sqrt{\frac{12\mathtt{w}}{\mathtt{M}(L)\mathtt{M}_0^4(L)}\left[1-\frac{1}{\mathtt{w}}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\right]}. \tag{3.13}$$

因此，对于任意满足 $\|v\|_{H^1_{per}}=\varepsilon$的$m$ ，由 (3.12) 可得 $\mathcal{S}_{\mathtt{w}}(v)>0$。这意味着

$$\inf_{\|v\|_{H^1_{per}}=\varepsilon}\mathcal{S}_{\mathtt{w}}(v)>0=\mathcal{S}_{\mathtt{w}}(0). \tag{3.14}$$

此外，对于任意 $v\in H^1_{per,\ m}$ 和 $\tau>0$,

$$\mathcal{S}_{\mathtt{w}}(\tau v)=\frac{\tau^2}{2}\|v\|^2_{H^1_{per}}+\frac{L}{\mathtt{w}}-\frac{1}{\mathtt{w}}\int_0^L\cosh(\tau v)dx. \tag{3.15}$$

由于双曲余弦函数为正且呈指数型增长，由 (3.15) 可得， $\mathcal{S}_{\mathtt{w}}(\tau v) < 0$ 如果 τ 足够大。令 $\tau_0 > 0$ 满足 $\mathcal{S}_{\mathtt{w}}(\tau_0 v) < 0$ 和 $\|\tau_0 v\|_{H^1_{per}} > \varepsilon$。通过定义 $e = (\tau_0 v) \in H^1_{per,\ m}$ 和 $r_e = \varepsilon$，我们证明

$$\inf_{\|v\|=r_e} \mathcal{S}_{\mathtt{w}}(v) > \mathcal{S}_{\mathtt{w}}(0) \geqslant \mathcal{S}_{\mathtt{w}}(e). \tag{3.16}$$

现在，考虑映射 $\gamma\colon [0,1] \to H^1_{per,m}$，其定义为 $\gamma(\tau) = \tau_0 \tau v$。由此可得$\gamma \in C([0,1], H^1_{per,m})$, $\gamma(0) = 0$ 以及 $\gamma(1) = e$，这证明了 Γ 非空。这意味着对于任意$\gamma \in \Gamma$，都有 $\|\gamma(1)\|_{H^1_{per}} > r_e > 0 = \|\gamma(0)\|_{H^1_{per}}$。由 γ的连续性，存在 $\tau_\gamma \in (0,1)$ 使得$\|\gamma(\tau_\gamma)\|_{H^1_{per}} = r_e$。因此，由 (3.14) 可得

$$\max_{\tau\in[0,1]} \mathcal{S}_{\mathtt{w}}(\gamma(\tau)) \geqslant \mathcal{S}_{\mathtt{w}}(\gamma(\tau_\gamma)) > 0, \quad \gamma \in \Gamma, \tag{3.17}$$

因此，山路关卡值满足

$$\tilde{c} = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{\tau\in[0,1]} \mathcal{S}_{\mathtt{w}}(\gamma(\tau)) > 0. \tag{3.18}$$

此外，

$$\inf_{\|v\|=r_e} \mathcal{S}_{\mathtt{w}}(v) \leqslant \mathcal{S}_{\mathtt{w}}(\gamma(\tau_\gamma)) \leqslant \max_{\tau\in[0,1]} \mathcal{S}_{\mathtt{w}}(\gamma(\tau)), \quad \gamma \in \Gamma,$$

根据下确界的定义，可得

$$0 < \inf_{\|v\|=r_e} \mathcal{S}_{\mathtt{w}}(v) \leqslant \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{\tau\in[0,1]} \mathcal{S}_{\mathtt{w}}(\gamma(\tau)) = \tilde{c}. \tag{3.19}$$

特别地，考虑 (3.19) 中的路径 $\gamma_0(\tau) = \tau e \in \Gamma$，并利用 (3.15)，可得

$$0 < \inf_{\|v\|=r_e} \mathcal{S}_{\mathtt{w}}(v) \leqslant \tilde{c} \leqslant \max_{\tau\in[0,1]} \mathcal{S}_{\mathtt{w}}(\gamma_0(\tau)) = \max_{\tau\in[0,1]} \mathcal{S}_{\mathtt{w}}(\tau e) \ \leqslant \frac{1}{2}\|e\|^2_{H^1_{per}} + \frac{L}{\mathtt{w}} < +\infty, \tag{3.20}$$

也就是说， $\mathcal{S}_{\mathtt{w}}$ 具有山路几何。 ■

命题 3.1. 令 $\mathtt{w} \in (0、\ 1)$ 为固定值，并考虑 $L \in (0、\ 2\pi\sqrt{\mathtt{w}})$。那么，(3.18) 中的山路关卡值$\tilde{c}$ 是(3.2)中定义的泛函 $\mathcal{S}_{\mathtt{w}}$ 的一个临界值；也就是说，存在$\rho \in H^1_{per,m}$，使得 $\mathcal{S}_{\mathtt{w}}(\rho) = \tilde{c}$ 且 $\mathcal{S}'_{\mathtt{w}}(\rho) = 0$ 属于 H^{-1}_{per}。

证明。 事实上，根据引理 3.3，我们可知 $\mathcal{S}_{\mathtt{w}}$ 具有山路几何。利用 [29, 定理 2.9], ，我们立即得到在山路关卡值处存在一个 Palais-Smale 序列。因此，我们可以应用定理 3.2，从而得出 $\mathcal{S}_{\mathtt{w}}$存在一个非平凡临界值，如所求。■

注记 3.4. 值得一提的是， ρ 是光滑的，并且在经典意义下满足方程 (3.1) 。事实上，由于$\rho \in H^1_{per,\ m}$，我们得到$\sinh(\rho) \in H^1_{per}$，从而保证方程 (3.1) 在经典意义下成立，而不仅仅是在弱意义下成立。

注记 3.5。 众所周知，用于证明方程 (3.1)存在解 ρ 的山路定理，是一种非标准方法，可用于求得确实为椭圆方程解的临界点。与其他变分方法相比，这种方法似乎特别适合保证此类临界点的存在；其他变分方法通常是在约束条件下，寻找能量（某一部分）的适当极小元。据我们所知，(3.1) 中的强非线性项$\sinh(\rho)$ 使得无法使用标准变分方法来获得能够解非线性方程的约束极小元。本文提出的方法有望适用于其他相关方程。

3.2. 显式光滑解的存在性。 我们的思路是采用不同的方法，求得方程 (3.1) 的周期解。在上一小节中，我们固定了 $\mathtt{w} \in (0,1)$，并考虑区间 $(0,2\pi\sqrt{\mathtt{w}})$ 上依赖于 $\mathtt{w}$ 的 L，使得 ρ 是 (3.1) 的弱解，并且可表征为泛函 $\mathcal{S}_{\mathtt{w}}$（见 (3.2)）的临界点。本小节采用不同的方法：对于固定的周期 $L \in (0, 2\pi)$，我们考虑依赖于$\omega \in (0,1)$ 且光滑变化的周期波 φ，它们是 (3.1) 的解。

事实上，将形如 $u(x,t) = \varphi_c(x - ct)$ 的行波解代入 (1.1)，其中 $\alpha = -1$，可得

$$c^2\varphi_c'' - \varphi_c'' - \sinh(\varphi_c) = 0. \tag{3.21}$$

考虑 $\omega = \omega(c) = 1 - c^2 \in (0,1)$，由 (3.21) 可得

$$\omega\varphi_\omega'' + \sinh(\varphi_\omega) = 0. \tag{3.22}$$

注 3.6. 需要特别指出的是，情形 $\omega = 1$，即 $c = 0$，可以在极限意义下纳入我们的分析，即当 $\lim_{c\to 0} \omega(c) = 1$ 时。由于我们构造依赖于 ω 的光滑周期波时基于隐函数定理，因此分析必须局限于开集内。

为简便起见，以下记 $\varphi_\omega = \varphi$。首先，将方程 (3.22) 乘以 φ' 并对所得结果积分，可将该微分方程化为如下求积形式：

$$(\varphi')^2 = \frac{2}{\omega}[a - \cosh(\varphi)], \tag{3.23}$$

其中 $a \in \mathbb{R}$ 是积分常数。

现在，我们考虑用双曲正切函数和雅可比椭圆函数表示的试探解：

$$\varphi(x) = 2\,\mathrm{arctanh}(k\,\mathrm{sn}(bx;k)), \tag{3.24}$$

其中 $k \in (0,\ 1)$ 是正弦型椭圆函数的模数，$b \in \mathbb{R}$ 是待定常数。

利用导数 $\dfrac{d}{du}$反双曲正切$(u) = \dfrac{1}{1-u^2}$和 $\dfrac{d}{du}\mathrm{sn}(u;\,k) = \mathrm{cn}(u;\,k)\,\mathrm{dn}(u;k)$，结合恒等式 $\mathrm{cn}^2 = (1 - \mathrm{sn}^2)$ 和 $\mathrm{dn}^2 = (1 - k^2\mathrm{sn}^2)$，对 (3.24) 求导后可得

$$\varphi'(x) = \frac{2bk}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(bx;k)}\,\mathrm{cn}(bx;k)\,\mathrm{dn}(bx;k) = 2kb\left[\frac{\mathrm{cn}(bx;k)}{\mathrm{dn}(bx;k)}\right], \tag{3.25}$$

这意味着

$$[\varphi'(x)]^2 = 4k^2b^2\left[\frac{1 - \mathrm{sn}^2(bx;k)}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(bx;k)}\right]. \tag{3.26}$$

接下来，利用表达式 $\cosh(2\,\text{反双曲正切}(u)) = \dfrac{1+u^2}{1-u^2}$，以及方程 (3.23) 和 (3.26)，可得

$$4k^2b^2\left[\frac{1 - \mathrm{sn}^2(bx;k)}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(bx;k)}\right] = \frac{2}{\omega}\left[a - \frac{1 + k^2\,\mathrm{sn}^2(bx;k)}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(bx;k)}\right],$$

也就是说，

$$2k^2b^2\omega[1 - \mathrm{sn}^2(bx;k)] = [1 + k^2\,\mathrm{sn}^2(bx;k)] + a[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(bx;k)]. \tag{3.27}$$

由（3.27）可知

$$[2k^2b^2\omega+1-a]+[a+1-2b^2\omega]k^2\,\mathrm{sn}^2(bx;k)=0. \tag{3.28}$$

根据（3.28），合理的假设是 a和 b 满足

$$a=2k^2b^2\omega+1 \quad \text{and} \quad b^2=\frac{1}{\omega(1-k^2)}.$$

考虑 b的正根，我们得到（3.23）的显式解 φ，从而得到（3.22）的显式解，表示为

$$\varphi(x)=2\,\mathrm{arctanh}\left(k\,\mathrm{sn}\left(\frac{x}{\sqrt{\omega(1-k^2)}};k\right)\right). \tag{3.29}$$

此外，由于正弦型雅可比椭圆函数的实周期等于 $4K(k)$，因此必须有

$$b=\frac{1}{\sqrt{\omega(1-k^2)}}=\frac{1}{\sqrt{(1-c^2)(1-k^2)}}=\frac{4K(k)}{L}. \tag{3.30}$$

此时，有必要确保对于固定的 $L\in(0,2\pi)$，条件 $0\lneq|c|<1$ 成立，或等价地，$0<\omega<1$ 成立。事实上，第一类完全椭圆积分由 $K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}}$ 给出，是一个递增函数，并满足当 $k\to0^+$ 时 $K(k)\to\frac{\pi}{2}$，以及当 $k\to1^-$时$K(k)\to+\infty$；由（3.30）中的关系可知

$$0<\omega=1-c^2=\frac{L^2}{16K^2(k)(1-k^2)}\leqslant\lim_{k\to0^+}\frac{L^2}{16K^2(k)(1-k^2)}=\frac{L^2}{4\pi^2}<1, \tag{3.31}$$

如所需。此外，由 (3.30) 可推得

$$\frac{dk}{d\omega}=\left(\frac{d\omega}{dk}\right)^{-1}=\frac{8k(1-k^2)^2K(k)^3}{L^2(K(k)-E(k))}>0, \tag{3.32}$$

并由反函数定理可知，对于固定的 $L\in(0,2\pi)$，映射 $\omega\in(0,1)\mapsto\varphi\in H^\infty_{per,m}$ 是光滑的。

下面给出该结果。

命题 3.7。设 $L\in(0,2\pi)$ 为固定值。方程 (3.22)存在一条周期行波解的光滑曲线，其表达式为

$$\omega\in(0,1)\mapsto\varphi\in H^\infty_{per,m}([0,L]), \tag{3.33}$$

其中

$$\varphi(x)=2\,\mathrm{arctanh}\left(k\,\mathrm{sn}\left(\frac{4K(k)}{L}\,x;k\right)\right). \tag{3.34}$$

■

注 3.8。设 $L\in(0,2\pi)$ 为固定值。命题 3.7 指出，φ 关于参数 $\omega\in(0,1)$光滑依赖。一个自然的问题是，φ 是否关于$c\in(-1,1)$光滑依赖，因为 $\omega=1-c^2$。事实上，对于 $c\in(-1,0)\cup(0,1)$，由链式法则 $\frac{\partial\varphi}{\partial c}=-2c\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$可知，$\varphi$关于 c光滑依赖。在 $c=0$处，我们得到 $\lim_{c\to0}\frac{\partial\varphi}{\partial c}=\lim_{c\to0}\left(-2c\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right)=0$,

因此 φ 在 $c=0$处光滑。所以，对于所有固定的 $L\in(0,2\pi)$， φ 都可以视为关于$c\in(-1,1)$ 的光滑函数。

现在我们给出一个重要结果，说明 (3.34) 中的周期解 φ 可能会出现不稳定性。

命题 3.9. 设 (3.34) 中的周期解为 φ。我们有 $\mathcal{E}(\varphi,c\varphi')$ 的符号不定。

证明. 事实上，由 (3.23) 可得求积形式

$$(\varphi')^2=\frac{2}{\omega}[a-\cosh(\varphi)], \tag{3.35}$$

其中 $a=\dfrac{k^2+1}{1-k^2}$ 和 $k\in(0,1)$。因此，由 (3.35) 可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\varphi,c\varphi') &= \frac{1}{2}\int_0^L\left[(\varphi')^2+(c\varphi')^2-2(\cosh(\varphi)-1)\right]dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^L\left[(1+c^2)\frac{2}{\omega}[a-\cosh(\varphi)]-2(\cosh(\varphi)-1)\right]dx\\
&= \int_0^L\left\{\left[1+(1+c^2)\frac{1}{\omega}a\right]-\left[1+(1+c^2)\frac{1}{\omega}\right]\cosh(\varphi)\right\}dx\\
&= \int_0^L\left\{\left[1+\frac{(1+c^2)(1+k^2)}{(1-c^2)(1-k^2)}\right]-\left[1+\frac{1+c^2}{1-c^2}\right]\cosh(\varphi)\right\}dx.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

利用 (3.24) 中的解以及恒等式 $\cosh(2\,\mathrm{arctanh}(u))=\dfrac{1+u^2}{1-u^2}$，我们得到

$$\mathcal{E}(\varphi,c\varphi')=\left(1+\frac{(1+c^2)(1+k^2)}{(1-c^2)(1-k^2)}\right)L-\left(1+\frac{1+c^2}{1-c^2}\right)\int_0^L\frac{1+k^2\,\mathrm{sn}(bx;k)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}(bx;k)^2}dx, \tag{3.37}$$

其中 $b^2=\dfrac{1}{\omega(1-k^2)}$。我们可以将 (3.37) 中的积分改写为

$$\int_0^L\frac{1+k^2\,\mathrm{sn}(bx;k)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}(bx;k)^2}dx=\int_0^L\frac{2-\,\mathrm{dn}(bx;k)^2}{\mathrm{dn}(bx;k)^2}dx=-L+\frac{2}{b}\int_0^{bL}\frac{1}{\mathrm{dn}(u;k)^2}du. \tag{3.38}$$

由 [3,公式 315.02] 可知

$$\int\frac{1}{\mathrm{dn}^2(u)}\,du=\frac{1}{1-k^2}\left[E(u)-k^2\,\frac{\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{cn}(u)u}{\mathrm{dn}(u)}\right],$$

其中

$$E(u)=E(\psi,k)=\int_0^u\mathrm{dn}^2(x)\,dx=\int_0^\psi\sqrt{1-k^2\sin^2(\vartheta)}\,d\vartheta,\quad \mathrm{sn}(u)=\sin(\psi),$$

表示第二类正规椭圆积分（见 [3, 公式 110。03]）。因此,

$$\int_0^{bL} \frac{1}{\mathrm{dn}(u;k)^2} du = \frac{1}{1-k^2}\left[E(bL) - k^2\ \frac{\mathrm{sn}(bL)\,\mathrm{cn}(bL)bL}{\mathrm{dn}(bL)}\right].$$

由于 $bL = 4K(k)$ 和 $\mathsf{sn}(u + 4K(k)) = \mathsf{sn}(u)$ ，我们有 $\mathsf{sn}(bL) = \mathsf{sn}(0) = 0$。因此,

$$\int_0^{bL} \frac{1}{\mathrm{dn}(u;k)^2} du = \frac{1}{1-k^2} E(4K(k)). \tag{3.39}$$

由 (3.37)、(3.38) 和 (3.39) 可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\varphi, c\varphi') &= \left[1 + \frac{(1+c^2)(k^2+1)}{(1-c^2)(1-k^2)}\right] L - \left(1 + \frac{1+c^2}{1-c^2}\right)\left[-L + \frac{2}{b}\int_0^{bL} \frac{1}{\mathrm{dn}(u;k)^2} du\right] \\
&= \left[\frac{2-k^2(1-c^2)}{(1-c^2)(1-k^2)}\right] 2L - 4bE(4K(k)) \\
&= \left[\frac{2-k^2(1-c^2)}{(1-c^2)(1-k^2)}\right] 2L - \frac{16K(k)}{L} E(4K(k)) \\
&= \left[\frac{2}{(1-c^2)(1-k^2)} - \frac{k^2}{(1-k^2)}\right] 2L - \frac{16K(k)}{L} 4E(k) \\
&= \frac{64K^2(k)}{L} - \frac{2Lk^2}{(1-k^2)} - \frac{64K(k)E(k)}{L} \\
&= \frac{64}{L}\left[K^2(k) - K(k)E(k) - \frac{L^2k^2}{32(1-k^2)}\right].
\end{aligned} \tag{3.40}$$

为了描述由 (3.40) 给出的 $\mathcal{E}(\varphi, c\varphi')$ 的行为，我们需要研究量 $K^2(k) - K(k)E(k) - \frac{L^2k^2}{32(1-k^2)}$ 的符号。事实上，若 $L \in (0, l]$，其中 $l > 0$ 很小，则可得 $\mathcal{E}(\varphi, c\varphi')$ 为正。现在，若令 L 取遍整个区间 $(0, 2\pi)$，则 $\mathcal{E}(\varphi, c\varphi')$ 会取正值和负值（见图 3.1）。

■

注 3.10。 应当着重指出关于命题 (3.9) 的一些重要说明。事实上，对于固定的 $L \in (0, 2\pi)$，周期波 $(\varphi, c\varphi')$ 的能量符号取决于模数$k \in (0, 1)$。根据图 *3.1*，我们观察到，当 L 趋近于 2π时，函数 $\mathcal{E}(\varphi, c\varphi')$对模数 $k \in (0, 1)$的所有取值均变为负值。若 L 较小，则该量为正。据我们所知，$\mathcal{E}(\varphi, c\varphi')$ 的符号不定，这意味着根据命题 *2.7*，由 φ生成的行波受到扰动时会发生爆破现象。进而，这表明对于某些 $k \in (0, 1)$的取值， $(\varphi, c\varphi')$ 这一对解是不稳定的。

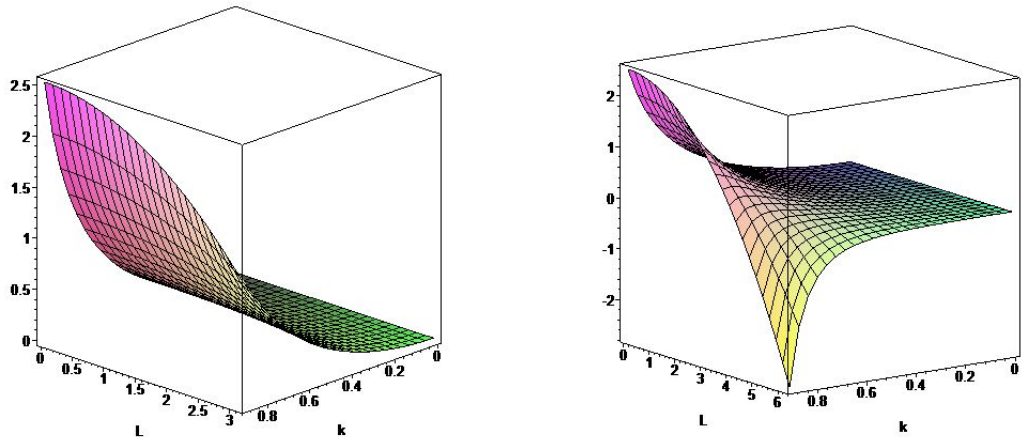

FIGURE 3.1. 左： $\mathcal{E}(\varphi, c\varphi')$ 在 $L \in (0, \pi]$ 和 $k \in (0, 1)$时的图像。右：$\mathcal{E}(\varphi, c\varphi')$ 在 $L \in (0, 2\pi)$ 和 $k \in (0, 1)$时的图像。

4. SPECTRAL ANALYSIS

众所周知，方程 (3.22) 是守恒的，其解位于能量的等值曲线上

$$\mathcal{H}(\varphi, \varphi') = \frac{(\varphi')^2}{2} + \frac{1}{\omega}\cosh(\varphi) - \frac{1}{\omega}. \tag{4.1}$$

我们看到，当且仅当 (φ, φ') 是平面微分系统的一个周期轨道时， φ 才是方程 (3.22) 的一个周期解

$$\begin{cases} \varphi' = \chi, \\ \chi' = -\frac{1}{\omega}\sinh(\varphi), \end{cases} \tag{4.2}$$

其中 $(0, 0)$ 是唯一的临界点。值得注意的是，施加条件 $\omega > 0$ 是为了确保该临界点是一个中心。

与系统 (4.2) 对应的周期轨道包含在 (4.1) 中能量 $\mathcal{H}$ 的适当等值集中。换言之，对于所有 $B \in (0, +\infty)$，数对 (φ, φ') 满足方程 $\mathcal{H}(\varphi, \varphi') = B$ 。此外，平面系统 (4.2) 的周期轨道对应于方程 (3.22) 的一个奇周期解 φ 。而且，周期解的周期为 ℓ，它取决于 B 和 ω。然而，由于我们首先只打算研究 ℓ 关于 B的行为，因此（形式上）将其定义如下：

$$\ell(B) = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\varphi^-}^{\varphi^+} \frac{d\varphi}{\sqrt{B + \frac{1-\cosh(\varphi)}{\omega}}}, \tag{4.3}$$

其中， φ^- 和 φ^+ 是 $B + {}^{1-}\!\cosh_{\omega}{}^{(\varphi)}$ 的根，它们由下式给出

$$\varphi^- = \min_{x\in[0,\ell]} \varphi(x) \quad \text{and} \quad \varphi^+ = \max_{x\in[0,\ell]} \varphi(x).$$

另一方面，考虑 Γ_B 为相图中与（3.34）中的周期解 φ 相对应的轨道。(4.3)中的映射可以看作是关于 B 和 ω的光滑函数，并且可以改写为

$$\begin{aligned} \ell(B) : (0,+\infty) &\to (0,2\pi) \\ B &\mapsto \int_{\Gamma_B} \frac{d\varphi}{\varphi'}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

我们将 $\ell = \ell(B)$ 称为与周期解 φ相关的周期函数。关于周期函数 ℓ 关于 $B \in (0,+\infty)$的单调性，我们有以下结果:

Le引理 4.1. (4.4) 中的周期函数对所有 $B \in (0,+\infty$都满足 $\ell'(B) < 0$).

证明。考虑定义在 $\mathbb{R}$上的函数 $\mathtt{g}(x) = \frac{1}{\omega}\sinh(x)$ 和 $G(x) = \frac{1}{\omega}\cosh(x) - \frac{1}{\omega}$。我们可以将 $\mathtt{g}$ 改写为 $\mathtt{g}(x) = x\mathtt{h}(x)$，其中 $\mathtt{h}$ 是一个正的光滑函数，定义如下:

$$\mathtt{h}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega}, & x = 0, \\ \frac{1}{\omega}\frac{\sinh(x)}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

此外，我们注意到 $\lim_{x\to\pm+\infty} G(x) = +\infty$, 并且对所有 $x \neq 0$都有 $x\mathtt{g}''(x) = \frac{1}{\omega}\sinh(x)x > 0$。因此，根据 [5, 推论 2.3],，周期函数 $\ell(B)$ 在 $(0,+\infty)$上单调递减。■

本节的主要目标是研究与算子 $\mathcal{L}$ 对应的非正谱： $H^2_{per}([0,\ \ell]) \times H^1_{per}([0,\ \ell]) \subset \mathbb{L}^2_{per}([0,\ \ell]) \to \mathbb{L}^2_{per}([0,\ \ell])$，该算子定义于（1.11）中。与线性化算子相关的特征值问题

$$\mathcal{L}_1 = -\omega\partial_x^2 - \cosh(\varphi), \tag{4.5}$$

将通过分析与（3.22）中的牛顿方程相对应的周期映射的单调性来研究，该周期映射与（3.34）中的解相关联。本研究旨在确定与算子 $\mathcal{L}_1$ 相关的谱性质。

在继续之前，我们简要总结 Floquet理论的一些基础要素（详情请参见 [9], [19] 和 [22]）。设 $\mathcal{Q}$ 为一个偶光滑函数，并且具有 ℓ-周期性。在空间 $L^2_{per}([0,\ \ell])$ 上定义 Hill算子$\mathcal{P}$，其定义域为 $D(\mathcal{P}) = H^2_{per}([0,\ \ell])$，具体如下:

$$\mathcal{P} = -\partial_x^2 + \mathcal{Q}(x).$$

$\mathcal{P}$ 的谱由一个发散的实特征值序列组成

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{2n-1} \leqslant \lambda_{2n} \leqslant \cdots, \tag{4.6}$$

其中等式 $\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n}$ 对应于一个二重特征值。此外，谱还可以通过相应特征函数的零点数来刻画：如果 f 是与 λ_{2n-1} 或 λ_{2n}相关联的特征函数，那么在半开区间$[0,\ell)$内， f 恰好有 $2n$ 个零点。特别地，与单特征值 λ_0 对应的特征函数严格为正（或严格为负），在 $[0,\ell)$内没有零点。

接下来，考虑方程的一个非平凡 ℓ-周期解 $z(x)$

$$\mathcal{P}f = -f'' + \mathcal{Q}(x)f = 0. \tag{4.7}$$

设 $y(x)$ 是方程 (4.7) 的另一个解，它与 $z(x)$ 线性无关。根据 Floquet理论 [19]，存在一个实常数 θ，使得

$$y(x+\ell) = y(x) + \theta z(x). \tag{4.8}$$

我们看到，$\theta = 0$当且仅当 y ℓ–是周期的。

现在我们将注意力转回与式（4.5）中的 Hill算子相关的特征值问题。首先，对方程（3.22）求导可知，$\varphi' \in$ 属于核 $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_1)$。此外，$\varphi'$ 在半开区间 $[0,\ \ell)$内恰有两个零点。根据我们的构造，对于修正算子

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}_1 = -\partial_x^2 - \frac{1}{\omega}\cosh(\varphi), \tag{4.9}$$

零是 $\mathcal{P}$的第二或第三个特征值。由于 ω 为正，$\mathcal{L}_1$ 保持了零特征值与 $\mathcal{P}$相同的位置。

引理4.2。 我们有 $\theta = -\ell'(B)$，其中 θ 是式（4.8）中的常数。

证明。 将 φ视为方程（3.22）的解。令 y 为相应初值问题的唯一解

$$\begin{cases} -y'' - \frac{1}{\omega}\cosh(\varphi)y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = \frac{1}{\varphi'(0)}. \end{cases} \tag{4.10}$$

由 (3.22) 可知，φ' 是方程 (4.10) 的一个 ℓ-周期解。与 (4.8) 中一样，存在常数 θ 使得

$$y(x+\ell(B)) = y(x) + \theta\varphi'(x). \tag{4.11}$$

在 (4.11) 中取 $x = 0$，可得

$$\theta = \frac{y(\ell(B))}{\varphi'(0)}. \tag{4.12}$$

现在，由于 φ 是奇函数且具有周期性，我们有 $\varphi(0) = \varphi(\ell(B)) = 0$。因此，解 φ 对初始数据的光滑依赖性意味着 φ 关于参数 B 和 ω 光滑变化。特别地，我们可以对 $\varphi(\ell(B)) = 0$ 关于 B 求导，得到

$$\varphi'(\ell(B))\ell'(B) + \frac{\partial\varphi(\ell(B))}{\partial B} = 0. \tag{4.13}$$

接下来，我们回到 (4.1) 中的求积形式，它满足

$$\frac{(\varphi'(x))^2}{2} + G(\varphi(x)) = B, \tag{4.14}$$

其中 $G(\varphi(x)) = \frac{1}{\omega}\cosh(\varphi(x)) - \frac{1}{\omega}$。对方程 (4.14) 关于 B 求导，并将最终结果代入 $x = 0$，得到

$$\varphi'(0)\frac{\partial\varphi'(0)}{\partial B} + \frac{1}{\omega}\sinh(\varphi(0))\frac{\partial\varphi(0)}{\partial B} = \varphi'(0)\frac{\partial\varphi'(0)}{\partial B} = 1,$$

这意味着 $\frac{\partial\varphi'(0)}{\partial B} = \frac{1}{\varphi'(0)}$。此外，由于特别地 $\frac{\partial\varphi}{\partial B}$ 是奇函数，可得 $\frac{\partial\varphi(0)}{\partial B} = 0$。另一方面，对方程 (3.22) 关于参数 B求导，我们发现 $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial B}$ 是初值问题 (4.10) 的一个解。根据存在唯一性定理，可得 $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial B} = y(x)$。

结合 (4.13)，这些信息给出

$$\ell'(B) = -\frac{y(\ell(B))}{\varphi'(\ell(B))} = -\frac{y(\ell(B))}{\varphi'(0)}, \tag{4.15}$$

鉴于 φ' 是周期的。结合（(4.12)）和（(4.15)），我们得到 $\theta = -\ell'(B)$。这一关系表明，只要 $\ell'(B) \neq 0$, y 就不是周期的。

■

注 4.1. 关于引理*4.1*和引理*4.2*，有一些相关说明值得强调。事实上，根据引理 4.1，对所有 $B \in (0、+\infty)$，我们都有 $\ell'(B) < 0$；根据引理 4.2，可知对于任意 B，y 都不是周期的。此外，由于 ℓ 关于 B 和 ω光滑依赖，且 ℓ关于 B严格递减，我们推得，对于固定的 $L \in (0、2\pi)$，存在 $B_0 \in (0、+\infty)$，使得对所有 $\omega \in (0、1)$，均有$\ell(B_0、\omega) = L$。这一事实使我们能够重新得到命题3.7中的结果。该结果断言存在一条光滑曲线 $\omega \in (0、1) \mapsto \varphi \in H^{\infty}_{per,m}([0、L])$，其周期固定；此处则通过不同的方法得到了这一结果。

下一个结果刻画了 $\mathcal{L}_1$ 的谱行为，并将 (4.11) 中 θ 的取值与负特征值的数量联系起来。下面，我们考虑周期固定的周期函数 φ，其周期由命题3.7确定。

命题 4.1。设 $L \in (0、2\pi)$ 固定。定义于(4.5)中的线性化算子 $\mathcal{L}_1$： $L^2_{\mathrm{per}} \to L^2_{\mathrm{per}}$ 有两个单重负特征值，以及一个以 φ'为特征函数的单重零特征值。此外，谱的其余部分是一个离散集，且与零有正距离。

证明。事实上，引理4.1和引理4.2表明，$\theta > 0$ 在 $(0, +\infty)$。因此，根据 $[22,$ 定理3.1$]$，零是 $\mathcal{L}_1$的第三个特征值，且该特征值是单重的。其余结论由以下事实得出：$\frac{1}{\omega}\mathcal{L}_1$ 是一个具有偶周期势的Hill算子（见(4.6)）。
■

接下来，我们证明在 (1.11) 中定义的完整线性算子 $\mathcal{L}$ 的核是一维的。

引理 4.3。设 $L \in (0、2\pi)$ 为固定值。设 φ 为命题 *3.7* 中得到的解。则核$(\mathcal{L}) = [(\varphi'、c\varphi'')]$。

证明。注意到 $(f_1, f_2) \in$ 属于核$(\mathcal{L})$ 当且仅当，

$$\begin{cases} -f_1'' - \cosh(\varphi) f_1 + c f_2' = 0, \\ -c f_1' + f_2 = 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

将 (4.16) 中的第二个方程代入第一个方程，我们得到 $\mathcal{L}_1 f_1 = 0$，即 $f_1 \in$ 属于核$(\mathcal{L}_1)$。由命题 4.1 可知，存在 $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $f_1 = \alpha_0 \varphi'$。因此，我们有

$$(f_1, f_2) = (\alpha_0 \varphi', \alpha_0 c\varphi'') = \alpha_0(\varphi', c\varphi'') \in [(\varphi', c\varphi'')].$$

这证明了核$(\mathcal{L}) \subseteq [(\varphi'、c\varphi'')]$。另一方面，对 (3.22) 关于 x 求导，并利用 $\mathcal{L}$ 的线性性，我们得到反向包含，从而完成证明。■

$\mathcal{L}$ 的其余谱由下一个结果描述。

命题4.2。令 $L \in (0, 2\pi)$ 为固定值。(1.11) 中的算子 $\mathcal{L}$ 恰有两个负特征值，且均为单特征值。零是一个单特征值，其对应的特征函数为 $(\varphi', c\varphi'')$。此外，谱的其余部分由一个离散特征值集构成。

证明。 首先，由于 $\mathcal{L}$ 是自伴算子，我们可知其所有特征值均为实数。由于紧嵌入 $H^2_{per} \times H^1_{per} \hookrightarrow \mathbb{L}^2_{per}$，算子 $\mathcal{L}$ 的本质谱为空，因此算子 $\mathcal{L}$ 的谱由一个有限重数的离散特征值集构成。接下来，对于 $c = 0$，我们看到 $\omega = 1$ （见注3。6），并且

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - \cosh(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

由于 (4.17) 中的算子是对角的，并且根据命题 4.1，线性化算子 $\mathcal{L}_1$ 具有两个单重负特征值，因此可知， $\mathcal{L}$在 (4.17) 中同样恰好具有两个单重负特征值。随后，根据引理 4.3 以及特征值关于 $c \in (-1,\ 1)$ 的连续性（见 [14, 第 4 章，第 3 节。5]），可知，完整线性算子 $\mathcal{L}$ 在 (1.11) 中具有两个单重负特征值，结论得证。■

下一步是研究投影算子 $\mathcal{L}_\Pi$ 在 (1.10)中的谱。事实上，我们首先建立一些必要的预备事实。首先，考虑约束子空间 $S_1 = [1] \subset$核$(\mathcal{L}_1)^\perp = [\varphi']^\perp$，它与辅助线性算子 $\mathcal{L}_{1\Pi}$ 相关：$H^2_{per,\ m} \subset L^2_{per,\ m} \to L^2_{per,\ m}$，其定义为 $\mathcal{L}_{1\Pi} = \mathcal{L}_1 + \frac{1}{L}(\text{双曲余弦}(\varphi),\ \cdot)_{L^2_{per}}$。由于 $\mathcal{L}_1$的核是单的，并由 φ'生成，我们可以定义数 $D_1 = (\overline{\mathcal{L}_1^{-1}1},\ 1)_{L^2_{per}}$，因为 $1 \in$核$(\mathcal{L}_1)^\perp$。

指标定理，如 [13, 定理5.3.2]和 [24, 定理4.1], 所述，适用于自伴算子，可用于确定负特征值的确切个数以及 $\mathcal{L}_{1\Pi}$ 和 $\mathcal{L}_\Pi$的核的维数。事实上，由于 $\mathbf{Ker}(\mathcal{L}_1) = [\varphi']$，有

$$\mathrm{n}(\mathcal{L}_{1\Pi}) = \mathrm{n}(\mathcal{L}_1) - \mathrm{n}_0 - \mathrm{z}_0 \quad \text{and} \quad \mathrm{z}(\mathcal{L}_{1\Pi}) = \mathrm{z}(\mathcal{L}_1) + \mathrm{z}_0, \tag{4.18}$$

其中，$\mathrm{n}(\mathcal{P})$ 和 $\mathrm{z}(\mathcal{P})$分别表示线性算子 $\mathcal{P}$ 的负特征值个数和核的维数（计入重数）。此外，n_0 和 z_0 分别定义为

$$\mathrm{n}_0 = \begin{cases} 1, \text{ if } D_1 < 0, \\ 0, \text{ if } D_1 \geqslant 0, \end{cases} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{z}_0 = \begin{cases} 1, \text{ if } D_1 = 0, \\ 0, \text{ if } D_1 \neq 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

现在我们给出一个确定算子 $\mathcal{L}_\Pi$谱信息的结果。

命题4.2. 设 $L \in (0、\ 2\pi)$ 为固定值。线性算子 $\mathcal{L}_\Pi$ 在 (1.10) 中恰有一个负特征值，且该特征值是单重的；$(\varphi'、\ c\varphi'')$ 是与零特征值对应的单重特征函数。

证明。 计算负特征值需要注意， $\mathcal{L}_\Pi$ 是 $\mathcal{L}$约束算子 $\mathcal{L}$，定义见$\mathbb{L}^2_{per,\ m}$ 满足 $\mathcal{L}_\Pi|_{S^\perp} = \mathcal{L}$，其约束空间为

$$S = [(1,0),(0,1)] \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{L})^\perp = [(\varphi', c\varphi'')]^\perp.$$

关于约束集 S，我们定义矩阵

$$D = \begin{bmatrix} (\mathcal{L}^{-1}(1,0),(1,0))_{\mathbb{L}^2_{per}} & (\mathcal{L}^{-1}(1,0),(0,1))_{\mathbb{L}^2_{per}} \\ (\mathcal{L}^{-1}(1,0),(0,1))_{\mathbb{L}^2_{per}} & (\mathcal{L}^{-1}(0,1),(0,1))_{\mathbb{L}^2_{per}} \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

鉴于 $\mathcal{L}$ 是一个线性算子， $\mathcal{L}(0,\ 1) = (0,\ 1)$ 和 $(1,\ 1) = (1,\ 0) + (0,\ 1)$，我们得到以下恒等式$\mathcal{L}^{-1}(1,\ 0) = \mathcal{L}^{-1}(1,\ 1) - \mathcal{L}^{-1}(0,\ 1) = \mathcal{L}^{-1}(1,\ 1) - (0,\ 1)$，以及

$$\big(\mathcal{L}^{-1}(1,0),(1,0)\big)_{\mathbb{L}^2_{per}} = (\tilde{f},1)_{L^2_{per}} = (\mathcal{L}_1^{-1}1,1)_{L^2_{per}} = D_1. \tag{4.21}$$

此外，

$$\big(\mathcal{L}^{-1}(1,0),(0,1)\big)_{\mathbb{L}^2_{per}} = \big(\mathcal{L}^{-1}(1,1),(0,1)\big)_{\mathbb{L}^2_{per}} - \big(\mathcal{L}^{-1}(0,1),(0,1)\big)_{\mathbb{L}^2_{per}} = L - L = 0, \tag{4.22}$$

and

$$\big(\mathcal{L}^{-1}(0,1),(0,1)\big)_{\mathbb{L}^2_{per}} = ((0,1),(0,1))_{\mathbb{L}^2_{per}} = L \tag{4.23}$$

因此，根据 (4.21)、(4.22) 和 (4.23)，D 在 (4.20) 中可写成 $D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}$的形式，其中 $D_1 = (\mathcal{L}_1^{-1}1,\ 1)_{L^2_{per}}$。计算 D_1需要寻找一个 $\tilde{f} \in H^2_{per}$，使得 $\mathcal{L}_1\tilde{f} = 1$。

~为了构造一个合适的周期 f，我们首先分析 (4.10) 中引入的初值问题，其解为y。此外，利用参数变易公式，我们可以推导出

$$\mathrm{p}(x) = \frac{1}{\omega}\left(\int_0^x y(s)ds\right)\varphi'(x) - \frac{1}{\omega}y(x)\varphi(x),$$

是方程

$$-\omega\mathrm{p}'' - \cosh(\varphi)\mathrm{p} = 1.$$

我们将证明，L p 实际上是一个 L-周期函数，这自然引出了 $\tilde{f} = \mathrm{p}$的定义。首先，由于 y 的奇性，我们得到 $\int y(x)dx = 0$。因此，由于$_0\varphi(L) = 0$，我们有

$$\mathrm{p}(L) = \frac{1}{\omega}\left(\int_0^L y(x)dx\right)\varphi'(L) - \frac{1}{\omega}\varphi(L)y(L) = 0 = \mathrm{p}(0).$$

此时，鉴于

$$\omega\mathrm{p}'(x) \ = \ \left(\int_0^x y(s)ds\right)\varphi''(x) - y'(x)\varphi(x),$$

~由此可得， $\mathrm{p}'(L) = \mathrm{p}'(0) = 0$ 并且 p 按要求是 L-周期的。因此，考虑到 $f = \mathrm{p}$，我们看到~f 满足初值问题

$$\begin{cases} -\omega\tilde{f}'' - \cosh(\varphi)\tilde{f} = 1, \\ \tilde{f}(0) = 0, \\ \tilde{f}'(0) = 0. \end{cases} \tag{4.24}$$

问题 (4.24) 适用于数值计算。事实上，对$L = \pi$数值求解 (4.24)，我们得到 $D_1 = (\mathcal{L}_1^{-1}1,\ 1)_{L^2_{per}} = (\tilde{f},\ 1)_{L^2_{per}} = \int \tilde{f}(x)dx < 0$对于所有 $c \in (-1,\ 1)$。图 4.1 展示了在此情况下 D_1 行为的表示$_0$。

我们可以通过缩放论证证明，对于所有 $L \in (0, 2\pi)$ ，都有 $D_1 < 0$ 。事实上，考虑 $\tilde{\varphi}(x) = \varphi\left(\frac{L}{\tilde{L}}x\right)$，其中 $\tilde{L} > 0$，且 φ满足方程 (3.22)。由于 φ是 L-周期的，我们得到

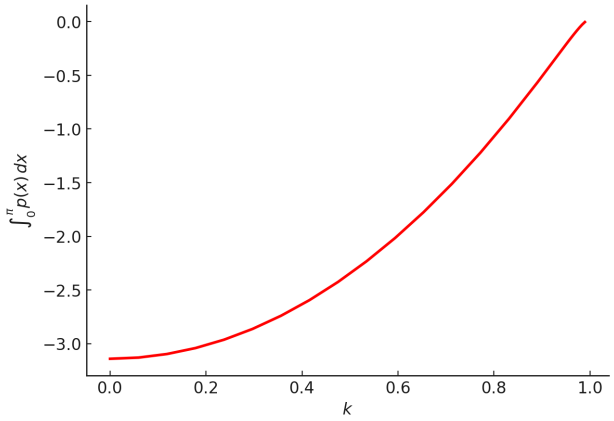

FIGURE 4.1. D_1 关于 $L = \pi$的图示。

~$\tilde{\varphi}$是 L-周期的，并且满足方程

$$-\tilde{\omega}\tilde{\varphi}'' - \sinh(\tilde{\varphi}) = 0, \tag{4.25}$$

其中 $\tilde{\omega} = \left(\frac{\tilde{L}}{L}\right)^2 \omega$。接下来，在初值问题 (4.10) 中考虑新解 $\tilde{\varphi}$ 而非 φ，我们得到满足该问题的非周期解 $\tilde{y}(x) = y\left(\frac{L}{\tilde{L}}x\right)$

$$\begin{cases} -\tilde{y}'' - \frac{1}{\tilde{\omega}}\cosh(\tilde{\varphi})\tilde{y} = 0, \\ \tilde{y}(0) = 0, \\ \tilde{y}'(0) = \frac{L}{\tilde{L}}\frac{1}{\varphi'(0)}. \end{cases} \tag{4.26}$$

我们还得到 $\tilde{\mathrm{p}} = \mathrm{p}\left(\frac{L}{\tilde{L}}x\right)$ 满足问题 (4.24)，其中以 $\tilde{\omega}$ 代替 ω，并以 $\tilde{\varphi}$ 代替 ~而非 φ。然后，按照之前的计算方法进行计算，并考虑 $L = \pi$，我们得到

$$D_1 = (\mathcal{L}_1^{-1}1, 1)_{L^2_{per}} = (\mathrm{p}, 1)_{L^2_{per}} = \int_0^L \mathrm{p}(s)ds = \frac{L}{\pi}\int_0^\pi \tilde{\mathrm{p}}(s)ds < 0,$$

正如所期望的。

因此， [13,定理 5.3.2] 和 [24,定理 4.1] 中所述的指标定理给出

$$\mathrm{n}(\mathcal{L}_{1\Pi}) = 2 - 1 - 0 = 1 \quad \text{and} \quad \mathrm{z}(\mathcal{L}_{1\Pi}) = 1 + 0 = 1.$$

类似地,将指标定理应用于算子 $\mathcal{L}_\Pi$ 和 $\mathcal{L}$ 可得关系式 s

$$\mathrm{n}(\mathcal{L}_\Pi) = \mathrm{n}(\mathcal{L}) - \mathrm{N}_0 - \mathrm{Z}_0 \quad \text{and} \quad \mathrm{z}(\mathcal{L}_\Pi) = \mathrm{z}(\mathcal{L}) + \mathrm{Z}_0, \tag{4.27}$$

其中，数值 N_0 和 Z_0 分别定义为

$$\mathrm{N}_0 = \begin{cases} 1, \text{ if } D_1 L < 0, \\ 0, \text{ if } D_1 L \geqslant 0, \end{cases} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Z}_0 = \begin{cases} 1, \text{ if } D_1 L = 0, \\ 0, \text{ if } D_1 L \neq 0. \end{cases} \tag{4.28}$$

因此，$\mathrm{N}_0 = 1$ 且 $\mathrm{Z}_0 = 0$，从而证明了 $\mathrm{n}(\mathcal{L}_\Pi) = 1$ 且 $\mathrm{z}(\mathcal{L}_\Pi) = 1$，如所需。 ■

5. Spectral stability and instability of periodic waves for the sinh-Gordon equation

本节旨在基于 [13, 21] 中建立的理论，研究 sinh–Gordon 方程 (1.1) 的周期行波解 φ（见 (3.34)）的谱稳定性与不稳定性。我们已经看到，对于 $\alpha = -1$，方程 (1.1) 可以写成如下非线性哈密顿系统形式：

$$\begin{cases} U_t = J\mathcal{E}'(U), \quad t > 0, \\ U|_{t=0} = U_0, \end{cases} \tag{5.1}$$

其中 $U = (u, \ u_t) = (u, \ v)$, J为反对称矩阵

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

且 $\mathcal{E}'$ 表示在 (1.6) 中定义的能量 $\mathcal{E}$ 的 Fr´echet 导数。

为表述我们的问题，我们通过考察问题 (2.4) 的强解 u ，应用命题 2。3 的结果。特别地，这个强解 u 同时也是问题 (2.1) 的弱解，正如我们在注 2。6 中所提到的。事实上，令我们考虑 $\mathtt{v} = \partial_x u_t$，即 $u_t = \partial_x^{-1}\mathtt{v}$。那么，

$$\mathtt{v}_t = \partial_x u_{tt} = \partial_x(\partial_x^2 u + \sinh(u)). \tag{5.3}$$

我们将行波的扰动定义为

$$\begin{cases} p(x + ct, t) = u(x, t) - \varphi(x + ct), \\ q(x + ct, t) = \mathtt{v}(x, t) - c\varphi''(x + ct). \end{cases} \tag{5.4}$$

对 (5.4) 中的第一个方程关于 t 求导，并令其等于对第二个方程应用算子 ∂_x^{-1} 所得到的结果，可得

$$p_t = -c\partial_x p + \partial_x^{-1} q. \tag{5.5}$$

接下来对 (5.4) 中的第二个方程关于 t 求导，可得

$$\mathtt{v}_t = c\partial_x q + q_t + c^2\varphi'''. \tag{5.6}$$

由 (5.3) 和 (5.6) 可得

$$\begin{aligned} q_t &= -c\partial_x q + \partial_x^3(p + \varphi) + \partial_x(\sinh(p + \varphi)) - c^2\varphi''' \\ &= -c\partial_x q + \partial_x^3 p + \partial_x(\sinh(p + \varphi)) + \omega\varphi'''. \end{aligned} \tag{5.7}$$

求导后 对 x 进行 ng (1.8)，并将所得结果代入 (5.7)，可得 t

$$q_t = -c\partial_x q + \partial_x^3 p + \partial_x(\sinh(p + \varphi) - \sinh(\varphi)). \tag{5.8}$$

对函数 sinh(p) 在点 φ附近进行泰勒展开，可得

$$\sinh(p + \varphi) = \sinh(\varphi) + \cosh(\varphi)p + \mathcal{O}(p^2),$$

也就是说,

$$\sinh(p + \varphi) - \sinh(\varphi) \approx \cosh(\varphi)p.$$

将这一线性化代入（5.8），可得到如下形式的线性系统

$$\begin{cases} p_t = -c\partial_x p + \partial_x^{-1} q, \\ q_t = -c\partial_x q + \partial_x^3 p + \partial_x(\cosh(\varphi)p), \end{cases} \tag{5.9}$$

或等价地，写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} -c\,\partial_x & \partial_x^{-1} \\ \partial_x^3 + \partial_x(\cosh(\varphi)\cdot) & -c\,\partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

接下来，考虑由 $p(x,t) = e^{\lambda t} g(x)$ 和 $q(x,t) = e^{\lambda t} h(x)$ 给出的增长模态解。代入系统 (5.10) 后，我们得到谱问题

$$\begin{pmatrix} -c\,\partial_x & \partial_x^{-1} \\ \partial_x^3 + \partial_x(\cosh(\varphi)\cdot) & -c\,\partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

由于双曲函数中存在导数，我们看到，(5.11) 等价于以下投影问题

$$\begin{pmatrix} -c\,\partial_x & \partial_x^{-1} \\ \partial_x^3 + \partial_x\left(\cosh(\varphi)\cdot -\frac{1}{L}\int_0^L \cosh(\varphi)\cdot dx\right) & -c\,\partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

系统 (5.12) 可化为如下投影二次特征值问题

$$\lambda^2 g + 2c\lambda\partial_x g - (1-c^2)\partial_x^2 g - \cosh(\varphi)g + \frac{1}{L}\int_0^L \cosh(\varphi) g dx = 0, \tag{5.13}$$

它与哈密顿结构 (5.1) 的投影线性化有关，其形式为

$$J\mathcal{L}_\Pi V = \lambda V, \tag{5.14}$$

其中 $V = \begin{pmatrix} g \\ \tilde{h} \end{pmatrix}$. 需要特别指出，谱问题（5.14）对应的二次算子铅笔也由（5.13）给出。现在我们引入以下谱稳定性定义：

定义 5.1. 如果(5.13) 中的二次算子铅笔可解，且所有相应的 λ 均为纯虚数，则称周期波 $(\varphi, c\varphi')$ 谱稳定。否则，也就是说，如果存在某个 λ 满足 $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ 且 $u \neq 0$，使得这一对 (λ, u) 满足 (5.13)，则称周期波 $(\varphi, c\varphi')$ 谱不稳定。

注 5.1. 根据经典谱稳定性定义，如果 $(\varphi, c\varphi')$ 的谱包含于复平面的虚轴上，则称其谱稳定。或者，如果 $J\mathcal{L}_\Pi$ 的谱包含一个实部为正的特征值，则称$(\varphi, c\varphi')$ 谱不稳定。这两个定义在空间 $\mathbb{L}^2_{per,\ m}$中等价。

根据注释 5.1，我们需要研究 $J\mathcal{L}_\Pi$ 的谱。事实上，根据注释 3.8，我们可以对方程 (3.22) 关于 $c \in (-1, 1)$ 求导，从而得到

$$\mathcal{L}_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right) = -2c\varphi''. \tag{5.15}$$

此外，简单计算还可得

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c},\frac{\partial}{\partial c}(c\varphi')\right)=\left(\mathcal{L}_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right)+c\varphi'',\varphi'\right)=(-c\varphi'',\varphi'). \tag{5.16}$$

由于 $\frac{\partial\varphi}{\partial c}$ 和 $\frac{\partial}{\partial c}(c\varphi')$ 都具有零均值性质，因此特别地，我们有

$$\mathcal{L}_\Pi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c},\frac{\partial}{\partial c}(c\varphi')\right)=(-c\varphi'',\varphi'). \tag{5.17}$$

接下来，我们考虑定义为如下形式的 3×3 矩阵 $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D}=\begin{bmatrix}(\mathcal{L}^{-1}e_0,e_0)_{\mathbb{L}^2_{per}} & (\mathcal{L}^{-1}e_1,e_0)_{\mathbb{L}^2_{per}} & (\mathcal{L}^{-1}e_2,e_0)_{\mathbb{L}^2_{per}}\\ (\mathcal{L}^{-1}e_0,e_1)_{\mathbb{L}^2_{per}} & (\mathcal{L}^{-1}e_1,e_1)_{\mathbb{L}^2_{per}} & (\mathcal{L}^{-1}e_2,e_1)_{\mathbb{L}^2_{per}}\\ (\mathcal{L}^{-1}e_0,e_2)_{\mathbb{L}^2_{per}} & (\mathcal{L}^{-1}e_1,e_2)_{\mathbb{L}^2_{per}} & (\mathcal{L}^{-1}e_2,e_2)_{\mathbb{L}^2_{per}}\end{bmatrix}, \tag{5.18}$$

其中 $e_0=(-c\varphi'',\ \varphi')$、$e_1=(1,\ 0)$ 以及 $e_2=(0,\ 1)$。

我们有，$\mathcal{L}$ 是自伴算子，且 $\mathrm{Ker}(\mathcal{L})=[(\varphi',\ c\varphi'')]$。此外，关于 $\mathbb{L}^2_{per}$中的内积，集合 $\{e_0,\ e_1,\ e_2\}$ 包含于 $\mathrm{Ker}(\mathcal{L})^\perp=\mathrm{Range}(\mathcal{L})$中。这确保了逆算子 $\mathcal{L}^{-1}$定义良好；该逆算子出现在矩阵 $\mathcal{D}$的各个元素中，因为它作用于受限的定义域和值域 $\mathcal{L}^{-1}:\ \mathrm{Ker}(\mathcal{L})^\perp\to\mathrm{Ker}(\mathcal{L})^\perp$。为了进行谱分析并将其与矩阵 $\mathcal{D}$联系起来，有必要介绍一些重要概念。

定义 5.2。我们将 $J\mathcal{L}_\Pi$ 的正实特征值个数（按重数计）称为实 ***Krein*** 指数，记作 k_r；将 $J\mathcal{L}_\Pi$ 中虚部非零且实部为正的特征值个数（同样按重数计）称为复 ***Krein*** 指数，记作 k_c。

定义 5.3。设 λ 是算子 $J\mathcal{L}_\Pi$ 的纯虚非零特征值，其对应的广义特征空间为 $E_\lambda=[v_1^\lambda,\dots,v_m^\lambda]$。我们将 λ 的 ***Krein*** 符号定义为

$$k_i^-(\lambda)=\mathrm{n}\left((w,(\mathcal{L}|_{E_\lambda})w)_{L^2_{per}}\right),$$

其中 $w\in E_\lambda$ 和 $\mathrm{n}\left((w,(\mathcal{L}|_{E_\lambda})w)_{L^2_{per}}\right)$ 表示满足 $(w,(\mathcal{L}|_{E_\lambda})w)_{L^2_{per}}<0$ 的最大子空间的维数。若 $k_i^-(\lambda)\geqslant 1$，则称特征值 λ 具有负 ***Krein*** 符号；否则，称其具有正 ***Krein*** 符号。此外，我们将总 ***Krein*** 符号定义为以下量

$$k_i^-=\sum_{\lambda\neq 0,\ \lambda\in(i\mathbb{R})}k_i^-(\lambda).$$

定义5.4。*Hamiltonian–Krein* 指数等于以下各项之和：

$$\mathcal{K}_{Ham}=k_r+k_c+k_i^-$$

实数 、复数和负克莱因指标，定义见定义(5.2) 和(5.3).

根据先前建立的结果，我们能够依照定义 5.1 确定投影柯西问题的谱稳定区间和不稳定区间。

定理*1.1* 的证明。 由于 $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_\Pi) = [(\varphi',\ c\varphi'')]$，由定义 5.4 和[13, 定理 7.1.5] 可知，当该量满足以下条件时，周期波 $(\varphi,\ c\varphi')$ 是谱稳定的

$$\mathcal{K}_{Ham} = \mathrm{n}(\mathcal{L}) - \mathrm{n}(\mathcal{D}) \tag{5.19}$$

为零。现在，如果 (5.19) 中的差为奇数，则该周期波谱不稳定。

根据命题 4.2 的证明及恒等式 $(\mathcal{L}^{-1}e_1, e_1)_{\mathbb{L}^2 per} = D_1$，要确定 (5.18) 中矩阵 $\mathcal{D}$ 的其余元素，需要计算以下内积：$(\mathcal{L}^{-1}e_0, e_0)_{\mathbb{L}^2_{per}}$，$(\mathcal{L}^{-1}e_1, e_0)_{\mathbb{L}^2_{per}} = (\mathcal{L}^{-1}e_0, e_1)_{\mathbb{L}^2_{per}}$，以及 $(\mathcal{L}^{-1}e_2, e_0)_{\mathbb{L}^2_{per}} = (\mathcal{L}^{-1}e_0, e_2)_{\mathbb{L}^2_{per}}$。事实上，由 (5.16) 可知

$$\mathcal{L}^{-1}e_0 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}, \frac{\partial}{\partial c}(c\varphi')\right).$$

然后，经过一些计算，并利用函数 φ' 具有零均值、函数$\frac{\partial\varphi}{\partial c}$ 为奇函数且 $\frac{\partial\varphi'}{\partial c}$ 是 L-周期的这一事实，我们得到

$$(\mathcal{L}^{-1}e_0, e_0)_{\mathbb{L}^2_{per}} = \int_0^L \left[(\varphi')^2 - 2c\varphi''\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right]dx = \int_0^L \left[(\varphi')^2 + c\frac{\partial(\varphi')^2}{\partial c}\right]dx = \frac{\partial}{\partial c}\int_0^L [c(\varphi')^2]dx, \tag{5.20}$$

$$(\mathcal{L}^{-1}e_0, e_1)_{\mathbb{L}^2_{per}} = \int_0^L \frac{\partial\varphi}{\partial c}dx = 0, \tag{5.21}$$

and

$$(\mathcal{L}^{-1}e_0, e_2)_{\mathbb{L}^2_{per}} = \int_0^L \left[\varphi' + c\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial c}\right)\right]dx = 0. \tag{5.22}$$

利用方程 (5.20)、(5.21) 和 (5.22)，可将 (5.18) 中的矩阵 $\mathcal{D}$ 化简为

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial c}\displaystyle\int_0^L [c(\varphi')^2]dx & 0 & 0 \\ 0 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}, \tag{5.23}$$

其中 $D_1 = (\mathcal{L}_1^{-1}1,\ 1)_{L^2_{per}}$。我们的目标是，在 $L \in (0,\ 2\pi)$ 取定时，确定对所有 $c \in (-1,\ 1)$，$\det(\mathcal{D})$ 的符号。事实上，对 (5.23) 中的积分项应用链式法则，可得

$$\det(\mathcal{D}) = D_1 L\frac{\partial}{\partial c}\int_0^L [c(\varphi')^2]dx = D_1 L\left[\int_0^L (\varphi')^2 dx - 2c^2\left(\frac{d\omega}{dk}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial k}\int_0^L (\varphi')^2 dx\right]. \tag{5.24}$$

由 (3.25)，利用椭圆积分的性质以及关系式 $b = \frac{4K(k)}{L}$，可得

$$\int_0^L (\varphi')^2 dx = 64k^2\frac{K(k)}{L}\int_0^{K(k)} \frac{\mathrm{cn}(x;k)^2}{\mathrm{dn}(x;k)^2}dx = \frac{64K(k)(K(k) - E(k))}{L}. \tag{5.25}$$

由于 ω 由 (3.31)，由（5.24）、（5.25）以及 [3] 中的公式（710.00）和（710.05），我们得到

$$\begin{aligned}\det(\mathcal{D}) &= D_1 L\frac{64K(k)^3}{L^3(K(k)-E(k))}\left\{k^2L^2-16(1-k^2)\left[k^2K(k)^2-(K(k)-E(k))^2\right]\right\} \\ &= D_1 L\frac{64K(k)^3}{L^3(K(k)-E(k))}\mathsf{r}(k,L).\end{aligned} \tag{5.26}$$

由于对所有 $k\in(0,1)$，$L>0$、$D_1<0$ 和 $\dfrac{64K(k)^3}{L^3(K(k)-E(k))}>0$，我们需要根据 $k\in(0,1)$ 分析函数 $\mathsf{r}(k,L)$ 的符号，并固定 $L\in(0,2\pi)$。事实上，众所周知，完全椭圆积分满足 $K(k),\,E(k)\to\dfrac{\pi}{2}$（当 $k\to0^+$ 时），$K(k)\to+\infty$（当 $k\to1^-$ 时），以及 $E(k)\to1$（当 $k\to1^-$ 时）。利用这些收敛性并应用洛必达法则，可得

$$\lim_{k\to1^-}\left[(1-k^2)K(k)\right]=\lim_{k\to1^-}\left[(1-k^2)K(k)^2\right]=0.$$

因此，对于每个固定的 $L\in(0,\,2\pi)$，当 k 趋近于 0^+时，函数 r 趋近于 0；当 k趋近于 1^-时，函数 r 趋近于 L^2。此外，该函数是光滑的，并且在唯一的点 $k_0=k_0(L)\in(0,\,1)$处变号。事实上，对 r 关于 k 的表达式求导，可得

$$\frac{\partial\mathsf{r}}{\partial k}=2k\left\{L^2-16\left[(1-k^2)K(k)^2-2E(k)K(k)+2E(k)^2\right]\right\}=2k\left\{L^2-16\mathsf{f}(k)\right\}.$$

由于 $\lim\limits_{k\to0^+}\dfrac{\partial\mathsf{r}}{\partial k}=L^2-4\pi^2<0$ 且 $\lim\limits_{k\to1^-}\dfrac{\partial\mathsf{r}}{\partial k}=+\infty$，根据介值定理，我们得到存在 $k_1=k_1(L)\in(0,1)$，使得 $\left.\dfrac{\partial\mathsf{r}}{\partial k}\right|_{k=k_1}=0$。另一方面，函数 $\partial\mathsf{r}/\partial k$ 关于椭圆模数 k严格递增。这意味着，k_1 是 r 在区间 $(0,1)$上的唯一临界点。这表示，对于每个固定的 $L\in(0,2\pi)$，存在唯一的 k_0，其取决于L，使得当 $k\in(0,k_0)$时，$\mathsf{r}(k_0,L)=0$，而当 $k\in(k_0,1)$时，$\mathsf{r}(k,L)>0$。此外，需要强调的是，当 L 趋近于 2π时，r 的临界点 k_1 向 1 靠近，因此，根 k_0也具有同样的性质。下面，我们展示 r 在某些 $L\in(0,2\pi)$取值下的行为。

现在，由于 $\mathcal{D}$ 的行列式等于其三个特征值 $L>0$ 和 $D_1<0$ 的乘积，因此可得

$$\mathrm{n}(\mathcal{D})=\begin{cases}2, & \text{if } k\in(0,k_0),\\ 1, & \text{if } k\in[k_0,1).\end{cases}$$

因此，Hamilton-Krein指标变为

$$\mathcal{K}_{Ham}=\mathrm{n}(\mathcal{L})-\mathrm{n}(\mathcal{D})=\begin{cases}0, & \text{if } k\in(0,k_0),\\ 1, & \text{if } k\in[k_0,1).\end{cases}$$

定理的证明至此完成。 ■

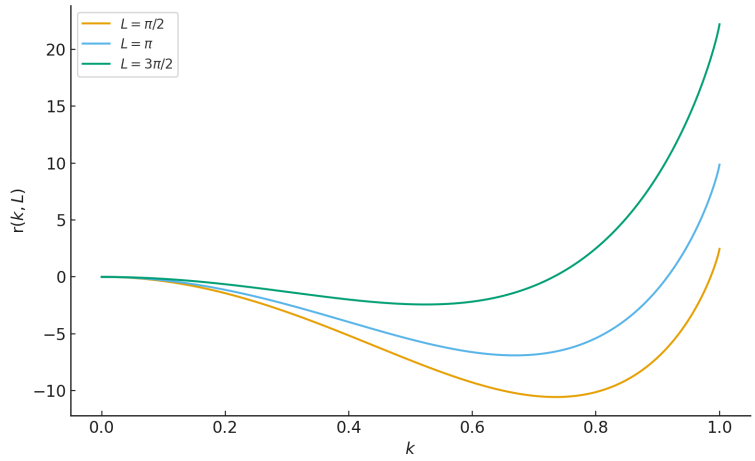

FIGURE 5.1. $\mathrm{r}(k,\ L)$ 的图像，其中 $L = \frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$。

REFERENCES

[1] I. Ali 和 I. Ahmad，《非线性 Klein/sinh-Gordon 方程在现代物理学中的应用：数值研究》，数学建模与控制 4（2024年），361–373。[2] A. Ambrosetti 和 P. H. Rabinowitz，《临界点理论中的对偶变分方法及其应用》，函数分析杂志 14（1973），349–381。[3] P. F. Byrd 和 M. D. Friedman，《工程师和科学家的椭圆积分手册》，第 2 版，Springer 出版社，纽约，1971。[4] T. Cazenave 和 A. Haraux，《具有对数非线性的演化方程》。图卢兹科学学院年刊，2（1980），21–51。[5] S. -N. Chow 和 D. Wang，《关于某些二阶方程周期函数的单调性》，《数学研究杂志》111（1986），14–25。[6] S. Le Coz，《非线性 Schrödinger 方程中的驻波》，《偏微分方程的分析、数值与应用》（2008），151–192。[7] R. K. Dodd、J. C. Eilbeck、J. D. Gibbon 和 H. C. Morris，《孤子与非线性波动方程》，学术出版社，纽约，1982。[8] P. G. Drazin 和 R. S. Johnson，《孤子：导论》，剑桥大学出版社，剑桥，1989。[9] M. S. P. Eastham，《周期微分方程的谱理论》，苏格兰学术出版社，爱丁堡；Hafner 出版社，纽约，1973。[10] W. Greiner，《相对论量子力学：波动方程》，第 3 版，Springer 出版社，柏林，2000。[11] M. Grillakis、J. Shatah 和 W. Strauss，《对称性存在下孤立波的稳定性理论 I》，函数分析杂志 74（1987），160–197。[12] R. Iorio Jr 和 V. M. Iorio，《傅里叶分析与偏微分方程》，剑桥高等数学研究 70，剑桥大学出版社，剑桥，2001。[13] T. Kapitula 和 K. Promislow，《非线性波的谱稳定性与动力稳定性》，应用数学科学 185，Springer 出版社，纽约，2013。[14] T. Kato，《线性算子的扰动理论》，1980 年版重印本，Springer 出版社，柏林，1995。[15] H. Kheiri 和 A. Jabbari，《使用 (G'/G)–展开法求双 sinh-Gordon 方程及其广义形式的精确解》，《土耳其物理学杂志》34（2010），73–82。[16] B. S. Lonardoni 和 F. Natali，《周期 snoidal 波的轨道稳定性》，针对 ϕ^4–方程的预印本（2025年）。[17] G. Loreno、G. E. B. Moraes、F. Natali 和 A. Pastor，《三次非线性 Klein-Gordon 方程与 Schrödinger 方程的 cn 波》，《欧洲数学杂志》11（2025年），31。

[18] D. Lu、A. R. Seadawy 和 M. Arshad，Sinh-Gordon 方程的孤立波与椭圆函数解及其应用，Modern Physics Letters B **33** (2019年)。[19] W. Magnus 和 S. Winkler，*Hill* 方程，纯粹与应用数学丛书第 20 卷，Wiley，纽约，1976年。[20] F. Natali，正弦-Gordon 方程和 sinh-Gordon 方程的周期波，Journal of Mathematical Analysis and Applications **379** (2011年)，334–350。[21] F. Natali 和 T. P. de Andrade，双重色散方程周期行波解的谱稳定性，Applicable Analysis **103** (2024年)，第 17 期，3142–3159。[22] A. Neves，Floquet 定理与周期孤立波的稳定性，Journal of Dynamics and Differential Equations **21** (2009年)，555–565。[23] A. Pazy，线性算子半群及其在偏微分方程中的应用，Springer 出版社，纽约，1983年。[24] D. E. Pelinovsky，周期势中的局域化：从 *Schr¨odinger* 算子到 *Gross-Pitaevskii* 方程，伦敦数学会讲义系列第 390 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2011年。[25] J. K. Perring 和 T. H. Skyrme，统一场方程模型，Nuclear Physics **31** (1962年)，550–555。[26] W. A. Strauss，高维孤立波的存在性，Communications in Mathematical Physics **55** (1977年)，149–162。[27] W.-R. Sun 和 B. Deconinck，Sinh-Gordon 方程椭圆解的稳定性，Journal of Nonlinear Science **31**(2021年)，63。[28] A. M. Wazwaz，广义正弦-Gordon 方程和广义 sinh-Gordon 方程的精确解，Chaos, Solitons & Fractals **28** (2006年)，127–135。[29]M. Willem，极小极大定理，《非线性微分方程及其应用进展》第 24 卷，Birkh¨auser，波士顿，1996年。