arXiv:2601.01929v1 [math.CO] 5 Jan 2026

最大两两交叉相交族的完全刻画（I）

Yang Huang* Yuejian Peng†

摘要

若对于任意 $A\in\mathcal{A}$ 和 $B\in\mathcal{B}$，都有 $A\cap B\neq\emptyset$，则集合族 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 交叉相交。令 $t\geq 2$ 和 $k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_t$。若 $\mathcal{F}_1\subseteq\binom{[n]}{k_1},\ldots,\mathcal{F}_t\subseteq\binom{[n]}{k_t}$ 是非空且两两交叉相交的集合族，则称 $(\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_t)$ 为一个 $(n,k_1,\ldots,k_t)$-交叉相交系统。令 $M(n,k_1,\ldots,k_t)$ 表示一个 $(n,k_1,\ldots,k_t)$-交叉相交系统中各集合族大小总和的最大值。Frankl 和 Tokushige（1992）研究了 $t=2$ 的情形。为解决 Shi、Frankl 和 Qian（2022）提出的问题，Huang、Peng 和 Wang（2024），以及 Zhang 和 Feng（2024）分别确定了所有 $n\geq k_1+k_2$ 对应的 $M(n,k_1,\ldots,k_t)$。

注意到，$n\geq k_1+k_t$ 是最自然的约束。然而，即使在范围 $n<k_1+k_2$内，文献中已有的方法也不适用。本文克服了这一障碍，并确定了 $k_1+k_3\leq n<k_1+k_2$时的 $M(n,\ k_1,\ \ldots\ldots,\ k_t)$。此外，我们刻画了所有极值结构。这可视为关于交叉相交问题的首个“混合型”结果。此外，我们引入了“k-伴侣”、“奇偶性”和“对应的 k-集”等新概念，并提出了一些方法，用以判断两个 L-初始交叉相交族是否彼此极大。另外，我们证明，在一个极值 L-初始$(n,\ k_1,\ \ldots\ldots,\ k_t)$-交叉相交系统$(\mathcal{F}_1,\ \ldots\ldots,\ \mathcal{F}_t)$中，和$\sum_{i=1}^{t}|\mathcal{F}_i|$可表示为一个单变量函数。我们相信，这一新结果本身具有研究价值；尤其是，它在自然约束 $n\geq k_1+k_t$中发挥着重要作用。

关键词：极值组合学、交叉相交定理、交叉相交族**2010年数学主题分类：**05D05, 05C65, 05D15.

1 引言

极值组合学研究具有某些性质的组合对象的大小最大值或最小值。一类有趣的极值问题与相交问题有关，相关内容可参阅精彩的综述文章 [11, 4]。这一领域受到 Erd˝os、Ko 和 Rado [5]的奠基性结果的启发。我们记 $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$。对于 $0\leq k\leq n$，令 $\binom{[n]}{k}$ 表示所有 k元 $[n]$子集组成的集合族。若集合族 $\mathcal{A}$ 由 $[n]$ 的子集组成，则称其为 k均匀的，当且仅当 $\mathcal{A}\subseteq\binom{[n]}{k}$。集合族 $\mathcal{A}$ 称为相交族，当 $A\cap B\neq\emptyset$ 对任意 $A,B\in\mathcal{A}$时成立。半个世纪前，Erd˝os、Ko 和 Rado [5] 证明了：如果 $n>2k$ 且 $\mathcal{A}\subseteq\binom{[n]}{k}$ 是相交族，那么 $|\mathcal{A}|\leq\binom{n-1}{k-1}$；等号成立当且仅当 $\mathcal{A}$ 由所有包含某个固定元素的 k子集组成。文献中已经证明了各种相交定理，其中一些还被应用于其他领域，例如理论计算机科学和离散几何。例如，著名的 Ahlswede–Khachatrian定理 [1] 确定了这样一个 k均匀集合族 $\mathcal{A}$的最大大小：其中任意两个集合至少有 t 个元素相交。该定理在 Dinur 和 Safra [3]证明的“顶点覆盖”问题的近似困难性定理中发挥了关键作用。

*湖南大学数学学院；莫斯科物理技术学院；电子邮箱：1060393815@ qq.com.

†湖南大学数学学院；电子邮箱：ypeng1@hnu.edu.cn。研究得到中国国家自然科学基金（编号：12571363）和湖南省自然科学基金（项目编号：2025JJ30003）资助。

如果对于任意 $A \in \mathcal{A}$ 和 $B \in \mathcal{B}$都有 $A \cap B \neq \emptyset$，则称两个集合族 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 交叉相交。在 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$的情况下，交叉相交族的问题可归约为相交族的问题。集合族 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_t$ 称为非空两两交叉相交族，如果每个 $\mathcal{F}_i$都非空，并且对于任意 $i \neq j$， $\mathcal{F}_i$ 和 $\mathcal{F}_j$ 都是交叉相交的。1967 年，Hilton 和 Milner[17] 确定了两个交叉相交族的大小总和的最大值。

定理 1.1 （Hilton–Milner [17]）。设 n 和 k 为正整数，且满足 $n \geq 2k$。若 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{k}$ 是非空交叉相交族，则

$$|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| \leq \binom{n}{k} - \binom{n-k}{k} + 1.$$

在推广定理 1.1 的基础上，Frankl 和 Tokushige [9]证明了以下结果。

定理 1.2 （Frankl–Tokushige [9]）。设 $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ 和 $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ 是非空交叉相交族，满足 $n \geq k + \ell$ 和 $k \geq \ell$。则

$$|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| \leq \binom{n}{k} - \binom{n-\ell}{k} + 1.$$

感兴趣的读者可参阅 [2, 6, 10, 12, 13, 26]，了解关于交叉相交族的更多相关结果。2020 年，Shi、Frankl 和 Qian [24] 通过对常数 $c > 0$ 下 $|\mathcal{A}| + c|\mathcal{B}|$ 的最大值进行界定，证明了定理 1.2 的一个加权推广。值得注意的是，Kupavskii [23]也独立地得到了类似的加权结论。利用加权版本，Shi、Frankl 和 Qian [24]证明了关于多族的以下结果。

定理 1.3 (Shi–Frankl–Qian [24])。设 n、k 和 t 为正整数，且满足 $n \geq 2k$ 和 $t \geq 2$。若 $\mathcal{F}_1$、$\mathcal{F}_2$、...、$\mathcal{F}_t \subseteq \binom{[n]}{k}$ 是非空的两两交叉相交族，则

$$\sum_{i=1}^{t} |\mathcal{F}_i| \leq \max\left\{ \binom{n}{k} - \binom{n-k}{k} + t - 1, t\binom{n-1}{k-1} \right\}.$$

对于给定的整数 n、t 和 $k_1 \geq \cdots \geq k_t$，若 $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t)$ 是一个 $(n, k_1, \ldots, k_t)$-交叉相交系统，则 $\mathcal{F}_1 \subseteq \binom{[n]}{k_1}, \ldots, \mathcal{F}_t \subseteq \binom{[n]}{k_t}$ 是非空的两两交叉相交集合族。令 $M(n, k_1, \ldots, k_t)$ 表示所有 $(n, k_1, \ldots, k_t)$-交叉相交系统中 $\sum_{i=1}^{t} |\mathcal{F}_i|$ 的最大值。此外，若系统 $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t)$ 满足 $\sum_{i=1}^{t} |\mathcal{F}_i| = M(n, k_1, \ldots, k_t)$，则称其为极值。

定理 1.2 和定理 1.3 的一个统一推广，是确定任意整数 $k_1 \geq \cdots \geq k_t$ 下 $M(n, k_1, \ldots, k_t)$ 的值。在 $n \geq k_1 + k_2$ 的范围内，Huang、Peng 和 Wang [14], 以及 Zhang 和 Feng [27] 独立地确定了 $M(n, k_1, \ldots, k_t)$ 的值。

定理 1.4 (见 [14], [27])。设 $\mathcal{F}_1 \subseteq \binom{[n]}{k_1}, \mathcal{F}_2 \subseteq \binom{[n]}{k_2}, \ldots, \mathcal{F}_t \subseteq \binom{[n]}{k_t}$ 是非空的两两交叉相交族，且满足 $t \geq 2$, $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t$。若 $n \geq k_1 + k_2$，则

$$\sum_{i=1}^{t} |\mathcal{F}_i| \leq \max\left\{ \sum_{i=1}^{t} \binom{n-1}{k_i - 1}, \binom{n}{k_1} - \binom{n-k_t}{k_1} + \sum_{i=2}^{t} \binom{n-k_t}{k_i - k_t} \right\}.$$

此外，极值集合族的特征如下。

(i) 对于 $n > k_1 + k_2$ 或 $n = k_1 + k_2 > k_1 + k_t$，等号成立当且仅当：要么存在一个集合 $T \in \binom{[n]}{k_t}$，使得 $\mathcal{F}_1 = \{F \in \binom{[n]}{k_1} : \ F \cap T \neq \emptyset\}$ 且对每个 $j \in [2, t]$都有 $\mathcal{F}_j = \{F \in \binom{[n]}{k_j} : T \subseteq F\}$；要么存在 $a \in [n]$，使得对每个 $j \in [t]$ 都有 $\mathcal{F}_j = \left\{F \in \binom{[n]}{k_j} : \ a \in F\right\}$。

(ii) 对于 $t = 2$和 $n = k_1 + k_2$，等号成立当且仅当 $\mathcal{F}_1 = \binom{[n]}{k_1} \setminus \{[n] \setminus A : \ A \in \mathcal{F}_2\}$.

(iii) 对于 $t \geq 3$ 和 $n = k_1 + k_2 = k_1 + k_t$，若 $k_1 > k_2$，则等号成立当且仅当$\mathcal{F}_1$、$\mathcal{F}_2$、……、$\mathcal{F}_t$ 是具有相同中心的全星；若 $k_1 = k_2$，则等号成立当且仅当 $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \cdots = \mathcal{F}_t$，且 $\mathcal{F}_1$ 是任意大小为 $\binom{n-1}{k_1-1}$的相交族。

这解决了 Shi、Frankl 和 Qian 的一个未解决问题 [24, 问题 4.3]。更一般地，Huang 和 Peng 最近研究了多族的一个加权版本 [15]。

事实上，这个问题最自然的约束是 $n \geq k_1 + k_t$，而不是 $n \geq k_1 + k_2$。的确，如果 $n < k_1 + k_t$，那么对于任意极值的 $(n,\ k_1,\ \ldots\ldots,\ k_t)$-交叉相交系统 $(\mathcal{F}_1,\ \ldots\ldots,\ \mathcal{F}_t)$，必有 $\mathcal{F}_1 = \binom{[n]}{k_1}$。在这种情况下，确定 $M(n,\ k_1,\ k_2,\ \ldots\ldots,\ k_t)$ 的问题就归结为确定 $M(n,\ k_2,\ \ldots\ldots,\ k_t)$。然而，当约束 $n \geq k_1 + k_2$ 放宽为 $n \geq k_1 + k_t$ 时，先前在 [14, 27, 15, 24] 中建立的方法便不再适用。

对于交叉相交族 $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ 和 $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$，若 $n < k+\ell$，则称 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是自由交叉相交的；否则，称 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是非自由交叉相交的。此外，若交叉相交系统 $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t)$ 中至少有两对集合族自由交叉相交，且至少有两对集合族非自由交叉相交，则称该系统为混合型；否则，称 $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t)$ 为非混合型。

上述文献仅针对非混合型系统研究了相交问题，这类系统要求满足条件 $n \geq k_1 + k_2$。研究满足条件 $n < k_1 + k_2$ 的混合型系统中的这一问题将会很有意思。本文给出了范围 $k_1+k_3 \leq n < k_1+k_2$ 内首个关于混合型系统的结果。给定集合族 $\mathcal{F}_1 \subseteq \binom{[n]}{k_1}, \ldots, \mathcal{F}_t \subseteq \binom{[n]}{k_t}$，满足 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t$，若 $k_1+k_3 \leq n < k_1+k_2$，则在混合型系统 $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t)$ 中，只有 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 自由交叉相交。我们先来看以下例子。

例 1.5。 设 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t$ 和 $k_1 + k_3 \leq n < k_1 + k_2$。对于每个 $i \in [t]$，令

$$\mathcal{G}_i = \left\{ G \in \binom{[n]}{k_i} : 1 \in G \right\}.$$

例1.6。 设 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t$ 和 $k_1 + k_3 \leq n < k_1 + k_2$。对于 $i \in \{1, 2\}$，令

$$\mathcal{H}_i = \left\{ H \in \binom{[n]}{k_i} : H \cap [k_t] \neq \emptyset \right\},$$

并对每个 $i \in [3, t]$，令

$$\mathcal{H}_i = \left\{ H \in \binom{[n]}{k_i} : [k_t] \subseteq H \right\}.$$

接下来，我们将证明，在约束 $k_1 + k_3 \leq n < k_1 + k_2$ 下，一个 $(n,\ k_1、\ \ldots\ldots、\ k_t)$-交叉相交系统 $(\mathcal{F}_1、\ \ldots\ldots、\ \mathcal{F}_t)$ 是极值的，当且仅当它同构于例 1.5 或例1.6中的系统，但也可能存在一个例外。

定理1.7 (主要结果)。 设 $t \geq 3$、 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t$ 和 $k_1 + k_3 \leq n < k_1 + k_2$。若 $\mathcal{F}_1 \subseteq \binom{[n]}{k_1}$、 $\mathcal{F}_2 \subseteq \binom{[n]}{k_2}$、……、 $\mathcal{F}_t \subseteq \binom{[n]}{k_t}$ 是非空的两两交叉相交族，则

$$\sum_{i=1}^{t} |\mathcal{F}_i| \leq \max \left\{ \sum_{i=1}^{t} \binom{n-1}{k_i - 1},\ \sum_{i=1}^{2} \left(\binom{n}{k_i} - \binom{n-k_t}{k_i} \right) + \sum_{i=3}^{t} \binom{n-k_t}{k_i - k_t} \right\}.$$

如果 $t = 4$、 $k_1 = k_2$、 $k_3 = k_4$ 和 $n = k_1 + k_3$，则等号成立当且仅当 $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4$ 是一个相交族，且 $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \binom{[n]}{k_1} \setminus \mathcal{F}_3$。否则，等号成立当且仅当$(\overline{\mathcal{F}_1}、\ \ldots、\ \mathcal{F}_t)$ 与$(\mathcal{G}_1、\ \ldots、\ \mathcal{G}_t)$ 在例 *1.5*或$(\mathcal{H}_1、\ \ldots、\ \mathcal{H}_t)$ 在例*1.6*中同构。

值得一提的是，本文的贡献不仅在于研究 $n < k_1 + k_2$ 的情形，还为最终解决最自然的约束 $n \geq k_1 + k_t$ 提供了一种可行的方法。我们方法的关键在于利用涉及“k-伴侣”、“奇偶性”和“相应的 k-集”的结果，而这些结果本身也具有独立的研究价值。

1.1 我们策略的概述

为了确定 $M(n,k_1,\ldots,k_t)$，Kruskal 和 Katona 的一个结果（定理 2.1）使我们只需考虑这样的集合族 $\mathcal{F}_i$：其成员按字典序排列时位于最前面的 $|\mathcal{F}_i|$ 个（我们称之为 L-初始族），并且它们构成一个极值的 $(n,k_1,\ldots,k_t)$-交叉相交系统 $(\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_t)$。对于一个 L-初始族 $\mathcal{F}$，我们将 $\mathcal{F}$ 中按字典序排列的最后一个成员称为 $\mathcal{F}$ 的标识。在 [15], 中，我们提出了一种不同于 [14, 27] 的新方法，并通过函数 $f_i(R)$给出了 $\sum_{i=1}^{t} c_i|\mathcal{F}_i|$ 的界（其中 $c_i, 1 \le i \le t$ 为正数），其中 R 是 $\mathcal{F}_i$ 的标识；同时证明了 $-f_i(R)$ 具有“单峰性”。我们先前工作的这一方法和结果 [15] 为本文提供了某些基础，但由于弱化了对 n 的条件，我们还需要新的要素来克服由此产生的困难。由于对 n 的条件放宽为 $k_1+k_t \le n < k_1+k_2$，且 $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_t$ 中至少有两个是自由交叉相交的。当我们试图用一个函数界定 $\sum_{i=1}^{t}|\mathcal{F}_i|$ 时，至少存在两个自由变量 I_1 （ $\mathcal{F}_1$ 的标识）和 I_2 （ $\mathcal{F}_2$ 的标识）。与 [15] 中的问题相比，这使得分析相应函数的性质更加困难。为克服这一困难，我们引入了“k-伴侣”、“奇偶性”和“相应的k-集”等新概念，发展出一些规则来确定一对 L-初始交叉相交族是否彼此极大，并证明了一个关键性质：如果 $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\ldots,\mathcal{F}_t)$ 是一个具有标识 I_1,I_2 的极值 L-初始族，其中这些标识分别属于 $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$，那么 I_2 就是 I_1 的相应 k_2-集。这一发现使我们能够用单变量函数 $f(I_1)$ 给出 $\sum_{i=1}^{t}|\mathcal{F}_i|$ 的界。另一个关键且具有挑战性的部分是界定 $f(I_1)$。与 [15], 中的函数相比，在处理函数 $f(I_1)$ 时，我们需要克服更多困难，因为有更多“神秘”的项需要处理。我们利用了在 [15] 中得到的函数 $f_i(R)$ 的一些性质，并提出了一些新的策略，用于估计当 $\mathcal{F}_1$ 的标识从 I_1 增加到 I_1' 时， $f(I_1')-f(I_1)$ 的变化。本文引入的新概念——包括“k-伴侣”、“奇偶性”和“相应的 k-集”——以及为确定一对 L-初始交叉相交族是否相对于彼此为极大而建立的规则，将为最一般约束 $n \ge k_1+k_t$ 的解决奠定关键基础。引理 4.16 等关键结果对于这一框架同样至关重要。

1.2 论文结构

在第 2 节中，我们引入“k-伴侣”和“奇偶性”这两个新概念，并给出一些结果，以判定一对 L-初始交叉相交族是否互为极大。这些结果为处理 $n \ge k_1+k_t$ 的一般情形奠定了关键基础。第 3 节概述了我们此前关于非混合型的重要结果，这些结果将在本文中使用。第 4 节中，我们在假设引理 4.16 成立的前提下，给出定理1.7的证明。最后一节将给出引理 4.16 的证明，这一结果在后续工作中也将发挥重要作用 [16]。

2 预备知识

本节中，我们引入“k-伴侣”和“奇偶性”这两个新概念，并制定一些规则，以判定一对 L-初始交叉相交族是否互为极大。

当我们写集合 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_s\}\subseteq[n]$ 时，总是假设 $a_1<a_2<\ldots<a_s$。我们定义区间 $[a,b]$ 如下：若 $a<b$，则 $[a,b]=\{a,a+1,\ldots,b\}$。若 $a=b$，则 $[a,b]=\{a\}=\{b\}$。若 $a>b$，则 $[a,b]=\emptyset$。对于 $A\subseteq[n]$，令 $\max A$ 和 $\min A$ 分别表示 A 的最大元素和最小元素。设 A 和 B 是正整数集的有限子集。若满足以下条件之一： $A\supseteq B$ 或 $\min(A\setminus B)<\min(B\setminus A)$，则称 A 在 字典序（简称 *lex*） 下不大于 B ，记作 $A\prec B$。特别地， $A\prec A$。令 $\mathcal{L}([n],\ r,\ k)$ 表示 $\binom{[n]}{k}$ 中按 lex 序排列的前 r 个子集。给定集合 R，记

$$\mathcal{L}([n],R,k)=\left\{F\in\binom{[n]}{k}:F\prec R\right\}. \tag{1}$$

当底集 $[n]$ 明确时，我们将其省略，简记为 $\mathcal{L}(R,\ k)$、 $\mathcal{L}(r,\ k)$。设 $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ 是一个族，若 $\mathcal{F} = \mathcal{L}([n],\ |\mathcal{F}|,\ k)$，则称 $\mathcal{F}$ 是 L-初始 的。我们称 $\mathcal{F}$ 的最后一个成员为 $\mathcal{F}$ 的标识 。

著名的克鲁斯卡尔–卡托纳定理 [20, 22] 使我们只需考虑 L-初始族。（如果我们只考虑一个 $(n, k_1, \ldots, k_t)$-交叉相交系统的大小。）这一结果的一个等价表述由 [8, 18]给出如下。

定理 2.1 (克鲁斯卡尔–卡托纳定理 [8, 18])。 对于 $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ 和 $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{l}$，若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 交叉相交，则 $\mathcal{L}(|\mathcal{A}|, k)$ 和 $\mathcal{L}(|\mathcal{B}|, l)$ 也交叉相交。

设 F 和 H 是 $[n]$ 的两个子集，其大小分别为 $|F| = f$ 和 $|H| = h$。如果存在一个元素 q，使得 $F \cap H = \{q\}$ 和$F \cup H = [q]$，我们就称 F 和H 在最后一个元素处强相交。我们还称 F是 H的伴侣（或者称 H是 F的伴侣）。在 [15], 中，作者证明了以下命题。

命题 2.2。 设 a、 b、 n 为正整数，且 $a + b \leq n$。对于满足 $|P| \leq a$ 的 $P \subseteq [n]$，令Q 为 P 的伴侣。则 $\mathcal{L}$（Q、 b）是与 $\mathcal{L}$（P、 a）交叉相交的最大 b- 均匀集合族。

在 [15], 中，我们研究了非混合型：设 $t \geq 2$、 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t$ 和 $n \geq k_1 + k_2$ 以及集合族 $\mathcal{A}_1 \subseteq \binom{[n]}{k_1}$、 $\mathcal{A}_2 \subseteq \binom{[n]}{k_2}$、.....、 $\mathcal{A}_t \subseteq \binom{[n]}{k_t}$ 非空且两两交叉相交。令 R 为 $\mathcal{A}_1$的标识，令 T 为 R 的伴侣。鉴于 [15],，一个重要的要点是，根据命题 2.2， $\sum_{i=1}^{t} |\mathcal{A}_i|$ 可以由 R 的一个函数界定如下。

$$f(R) = \sum_{j=1}^{t} |\mathcal{A}_j| \leq |\mathcal{L}(R, k_1)| + \sum_{j=2}^{t} |\mathcal{L}(T, k_j)|.$$

设 $\mathcal{F}_1$、.....、 $\mathcal{F}_t$为定理 1.7 中所描述的集合族。根据定理 2.1，为证明定理 1.7 的定量部分，我们还可以假设 $\mathcal{F}_i$ 是 L-初始的，即对于每个 $i \in [t]$，都有 $\mathcal{F}_i = \mathcal{L}(I_i、\ k_i)$，其中 I_i 是 $\mathcal{F}_i$ 的标识。然而，对 n 的条件放宽为 $k_1 + k_3 \leq n < k_1 + k_2$，因此 $\mathcal{F}_1 \subseteq \binom{[n]}{k_1}$ 和 $\mathcal{F}_2 \subseteq \binom{[n]}{k_2}$ 是自由交叉相交的。当我们试图用一个函数界定 $\sum_{i=1}^{t} |\mathcal{F}_i|$ 时，存在两个自由变量 I_1 （ $\mathcal{F}_1$ 的标识）和 I_2 （$\mathcal{F}_2$ 的标识）。与 [15] 中的问题相比，这使得分析相应函数的性质更加困难。为克服这一困难，需要一些新的思路。

2.1 伴侣与奇偶性

现在，我们引入“k-伴侣”和“奇偶性”这两个新概念，并提出一些判据，用以判断一对 L-初始交叉相交族是否彼此极大。

首先，我们需要定义以下概念。

- $\mathcal{F}$ **相对于** $\mathcal{G}$**是极大的**。设 $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{f}$ 和$\mathcal{G} \subseteq \binom{[n]}{g}$ 交叉相交。若 $\mathcal{F}' \subseteq \binom{[n]}{f}$ 和 $\mathcal{G}$ 与 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ 交叉相交时， $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$，则称 $\mathcal{F}$ 相对于 $\mathcal{G}$是极大的。

- **(**$\mathcal{F}$，$\mathcal{G}$**) 是极大的**。当且仅当 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 彼此极大时，(，) 才是极大的。

- F **相对于** G**是极大的**。设 F 和 G 是 $[n]$ 的两个子集。若存在两个 L-初始族 $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{|F|}$ 和 $\mathcal{G} \subseteq \binom{[n]}{|G|}$，其标识分别为 F 和 G，且 $\mathcal{F}$ 相对于 $\mathcal{G}$ 是极大的，则称 F 相对于 G是极大的。

- **(**F，G**) 是极大的**。当且仅当 F和 G 相对于彼此都是极大的时候，数对 (，) 是极大的。

• **极大对族**。如果$|\mathcal{A}_1| = |\mathcal{A}_2|$，且对于每个 $A_1 \in \mathcal{A}_1$，都存在唯一的 $A_2 \in \mathcal{A}_2$，使得 (A_1, A_2) 是极大的，那么我们称集合族 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 为极大对族。

• 令 $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq [n]$。我们记

$$\ell(F) = \begin{cases} \max\{x : [n-x+1, n] \subseteq F\}, & \text{if } \max F = n; \\ 0, & \text{if } \max F < n. \end{cases}$$
$$F^{\mathrm{t}} = [n - \ell(F) + 1, n].$$

• k-**伴侣**。令 F 和 H 为 $[n]$ 的两个子集，且互为伴侣，并满足 $|F| = f$和 $|H| = h$。令 $k \le n - f$为一个整数，我们如下定义 k-伴侣 K：对于$k = h$，令 $K = H$。若 $k > h$，则令 $K = H \cup \{n-k+h+1, \ldots, n\}$。若 $k < h$，则令 K为 $\binom{[n]}{k}$ 中最后一个满足 $K \prec H$的 k-集合；换言之，不存在满足$K \precneqq K' \precneqq H$的 k-集合 K'。我们声称 $|K| = k$。为此，只需检验 $k > h$的情形。事实上，由于 F和 H在最后一个元素处相交，$n' = \max H = f + h - 1 < n - k + h$。这意味着 $K_{\mathrm{t}} = \{n-k+h+1, \ldots, n\}$和 $|K| = |H \cup \{n-k+h+1, \ldots, n\}| = k$。

• **奇偶性**。设 h_1 和 h_2 为正整数，$h_1 \le h_2$、H_1 和 H_2 为 $[n]$ 的子集，大小分别为 h_1 和 h_2。如果 H_1 是 H_2 的 h_1-奇偶（或者 H_2 是H_1的 h_2-奇偶），则称之为 $H_1 \setminus H_{\mathrm{t}1} = H_2 \setminus H_{\mathrm{t}2}$ 且 $\ell(H_2) - \ell(H_1) = h_2 - h_1$。

根据 k-伙伴的定义，我们有以下事实和注记。

事实 2.3。设 a、b、c、n 为正整数，$a \ge b$ 和 $n \ge a + c$，且设 C 为$[n]$的一个 c-子集。假设 A 是 C 的 a-伙伴，且 B 是 C的 b-伙伴，那么 $B \prec A$ 或 A 是 B的a-奇偶。

注 2.4。设 $F \subseteq [n]$ 满足 $|F| = f$ 和 $k \le n - f$。假设 H 是 F 的伴侣，且 K 是 F 的 k-伙伴，那么我们有 $\mathcal{L}(H, k) = \mathcal{L}(K, k)$。

根据命题 2.2 和注 2.4，我们有以下事实。

事实 2.5。设 a、b、n 为正整数，且 $n \ge a + b$。对于满足 $|A| = a$ 的 $A \subseteq [n]$，设 B 为 A 的 b- 伴侣，则 $\mathcal{L}(B, b)$ 和 $\mathcal{L}(A, a)$ 交叉相交；此外，$\mathcal{L}(B, b)$ 是 $\mathcal{L}(A, a)$ 的极大者。

注意，事实 2.5 中提到的集合族 $\mathcal{L}(A, a)$ 和 $\mathcal{L}(B, b)$ 可能不是极大交叉相交族，因为我们不知道 $\mathcal{L}(A, a)$ 是否是 $\mathcal{L}(B, b)$ 的极大者。例如，设 $n = 9$、$a = 3$、$b = 4$ 和 $A = \{2, 4, 7\}$。那么 A 的 b- 伴侣是 $\{1, 3, 4, 9\}$。尽管 $\mathcal{L}(\{1, 3, 4, 9\}, 4)$ 是 $\mathcal{L}(\{2, 4, 7\}, 3)$ 的极大者，但 $\mathcal{L}(\{1, 3, 4, 9\}, 4)$ 和 $\mathcal{L}(\{2, 4, 7\}, 3)$ 不是极大交叉相交族，因为 $\mathcal{L}(\{2, 4, 7\}, 3) \subsetneq \mathcal{L}(\{2, 4, 9\}, 3)$，并且 $\mathcal{L}(\{2, 4, 9\}, 3)$ 和 $\mathcal{L}(\{1, 3, 4, 9\}, 4)$ 是交叉相交族。

事实 2.6。设 a、b、n 为正整数，且 $n \ge a + b$。设 $\mathcal{L}(A、a)$ 和 $\mathcal{L}(B、b)$ 为交叉相交族。若 $\{1, n-a+2, \ldots, n\} \prec A$，则 $B \prec \{1, n-b+2, \ldots, n\}$。

事实 2.7。设 $F \subseteq [n]$，其中 $|F| = f$ 且 $k \le n - f$。假设 K 和 K' 分别是 F 和 $F \setminus F^{\mathrm{t}}$ 的 k- 伙伴，则 $K = K'$。

证明。如果 $\ell(F) = 0$，那么结论成立。假设 $\ell(F) > 0$且 $F = \{x_1, \ldots, x_y\} \cup F^{\mathrm{t}}$。令 H和H'分别为 F和 $F \setminus F_{\mathrm{t}}$的伴侣。于是 $|H| = n - f + 1 > n - f$，从而$k < |H|$，$H = H \cap [x_y - 1] \cup [x_y + 1, n - \ell(F)] \cup \{n\}$且 $H' = H \cap [x_y - 1] \cup \{x_y\}$。回顾一下，$K$和 K'分别是 F和 $F \setminus F^{\mathrm{t}}$的 k-伙伴。根据 k-伴侣的定义可知，若 $k \le |H'| - 1$，则 $K = K'$，如所求；若 $k = |H'|$，则 $K' = H'$和$K = H \cap [x_y - 1] \cup \{x_y\} = H'$，如所求；若 $k > |H'|$，则 $K' = H' \cup [n - k + |H'| + 1, n]$和$K = H \cap [x_y - 1] \cup \{x_y\} \cup [n - k + |H'| + 1, n] = K'$，如所求。□

Frankland Kupavskii [7] 给出了一对极大交叉相交族的充分条件，以及一对极大交叉相交族的必要条件，如下所述。

命题 *2.8*（*Frankl–Kupavskii* [7]）。设 a、b、n 为正整数，且 $n \geq a+b$。设 P 和 Q 是 $[n]$ 的非空子集，且 $|P| \leq a$ 和 $|Q| \leq b$。若 Q 是 P 的伴侣，则 $\mathcal{L}(P,a)$ 和 $\mathcal{L}(Q,b)$ 是极大交叉相交族。反之，若 $\mathcal{L}(A,a)$ 和 $\mathcal{L}(B,b)$ 是极大交叉相交族，且 $|A|=a$ 和 $|B|=b$，令 j 为 $A\cap B$、$P=A\cap[j]$ 和 $Q=B\cap[j]$ 中最小的元素。那么 $\mathcal{L}(P,a)=\mathcal{L}(A,a)$、$\mathcal{L}(Q,b)=\mathcal{L}(B,b)$ 以及 P、Q 满足以下条件：$|P|\leq a$、$|Q|\leq b$，且 Q 是 P 的伴侣。

基于命题 2.8，我们指出一对极大交叉相交族的标识满足的一个充要条件。

引理 2.9. 设 A 和 B 是 $[n]$ 的非空子集，且 $|A|+|B|\leq n$。设 $A'=A\setminus A^{\mathrm{t}}$ 和$B'=B\setminus B^{\mathrm{t}}$。那么，$(A,B)$ 极大，当且仅当 A' 是 B'的伴侣。

证明。设 $|A|=a$ 和 $|B|=b$。由于 $A'=A\setminus A^{\mathrm{t}}$ 和 $B'=B\setminus B^{\mathrm{t}}$，$\mathcal{L}(A,a)=\mathcal{L}(A',a)$，且 $\mathcal{L}(B,b)=\mathcal{L}(B',b)$。首先证明充分性。假设 A' 是 B' 的伴侣。由于 $|A'|\leq|A|$ 和 $|B'|\leq|B|$，根据命题 2.8，$\mathcal{L}(A',a)$ 和 $\mathcal{L}(B',b)$ 是极大交叉相交族。因此，$\mathcal{L}(A,a)$ 和 $\mathcal{L}(B,b)$ 是极大交叉相交族，换言之，(A,B) 是极大的。接下来证明必要性。假设 (A,B) 是极大的。令 j为 $A\cap B$, $P=A\cap[j]$ 和 $Q=B\cap[j]$中的最小元素。根据命题 2.8，$\mathcal{L}(A,a)=\mathcal{L}(P,a)$，$\mathcal{L}(B,b)=\mathcal{L}(Q,b)$；$|P|\leq a$, $|Q|\leq b$，且 P是 Q的伴侣。由于 $\mathcal{L}(A,a)=\mathcal{L}(P,a)$ 且$P\subseteq A$, $A=P\cup\{n-a+|P|+1,\ldots,n\}$。类似地，$B=Q\cup\{n-b+|Q|+1,\ldots,n\}$。注意，$|P|\leq a$, $|Q|\leq b$且 $n\geq a+b$。于是 $|Q|\leq n-a$和 $|P|\leq n-b$。由于 P是 Q的伴侣，且$\max P=\max Q=j$，$|P|+|Q|=j+1$。因此 $j+1-|P|=|Q|\leq n-a$和$j+1-|Q|=|P|\leq n-b$。由此，$j\leq n-a+|P|-1$和 $j\leq n-b+|Q|-1$。所以，$P=A\setminus A^{\mathrm{t}}=A'$和 $Q=B\setminus B^{\mathrm{t}}=B'$。由于 P是 Q的伴侣，A'是 B'的伴侣。 □

事实 2.10. 设 a,b,n 为正整数，且 $n\geq a+b$。假设 A 是 $[n]$的一个 a-子集，且 B 是 A的 b-伴侣。设 A' 是 B的 a-伴侣，则 (A',B) 是极大的。此外，$A\prec A'$。

证明。根据事实 2.5，B对于 A是极大的。因此，$\mathcal{L}([n],A,a)$ 和 $\mathcal{L}([n],B,b)$ 交叉相交。由于 A'是 B的 a-伴侣，再次根据事实 2.5，$\mathcal{L}([n],A',a)$ 和 $\mathcal{L}([n],B,b)$ 交叉相交，且 A'对于 B是极大的。因此，$\mathcal{L}([n],A,a)\subseteq\mathcal{L}([n],A',a)$，即 $A\prec A'$。 □

事实 2.11. 设 a,b,k,n 为正整数，且 $n\geq$最大值$\{a+k,b+k\}$。设 A和 B是 $[n]$ 的两个子集，其大小分别为 $|A|=a$ 和 $|B|=b$。假设 K_a 和 K_b 分别是 A 和 B 的 k-伙伴。若 $A\prec B$，则 $K_b\prec K_a$。特别地，若 A 是 B的 a-奇偶性，则$K_a=K_b$。

证明。设 K_A 和 K_B 分别是 A 和 B的伴侣。由于 $A\prec B$, $K_B\prec K_A$。因此，直接根据 k-伴侣的定义，$K_b\prec K_a$，这正是所需的。对于第二个断言，由于 A是 a-奇偶性 B, $A\setminus A^{\mathrm{t}}=B\setminus B^{\mathrm{t}}$。设 F是 $A\setminus A^{\mathrm{t}}$的 k-伴侣。因此，F也是 $B\setminus B^{\mathrm{t}}$ 的k-伴侣。根据事实 2.7，$K_a=F$和 $K_b=F$。所以 $K_a=K_b$，这正是所需的。 □

定义 2.12。设 $h_1\leq h_2$。对于两个集合族 $\mathcal{H}_1\subseteq\binom{[n]}{h_1}$ 和 $\mathcal{H}_2\subseteq\binom{[n]}{h_2}$，如果以下性质成立，我们称 $\mathcal{H}_1$ 是 $\mathcal{H}_2$ 的 h_1-奇偶性（或称 $\mathcal{H}_2$ 是 $\mathcal{H}_1$的 h_2-奇偶性）：

(i) 对于任意 $H_1\in\mathcal{H}_1$，H_1 的 h_2-奇偶性存在且必须属于 $\mathcal{H}_2$；*(ii)* 对于任意 $H_2\in\mathcal{H}_2$，H_2 要么不存在 h_1- 奇偶性，要么其 h_1- 奇偶性属于 $\mathcal{H}_1$。

根据奇偶性的定义，如果一个集合具有 k 奇偶性，那么它具有唯一的奇偶性。

命题 2.13。 设 f、g、h、n 为正整数，且 $f \geq g$ 和 $n \geq f+h$。 *Let*

$$\mathcal{F} = \left\{ F \in \binom{[n]}{f} : \textit{ there exists } H \in \binom{[n]}{h} \textit{ such that } (F,H) \textit{ is maximal} \right\},$$

$$\mathcal{G} = \left\{ G \in \binom{[n]}{g} : \textit{ there exists } H \in \binom{[n]}{h} \textit{ such that } (G,H) \textit{ is maximal} \right\}.$$

设 $\mathcal{H}_{\mathcal{F}} \subseteq \binom{[n]}{h}$ 和 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}} \subseteq \binom{[n]}{h}$ 是集合族，使得 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ 是极大对族，且 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$ 是极大对族。则有以下性质：

(i) $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{G}$的 f-奇偶性；*(ii)* $\mathcal{H}_{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{F}}$；*(iii)* 对任意 $G \in \mathcal{G}$，设 $F \in \mathcal{F}$是 G 的 f-奇偶性，且设 $H \in \mathcal{H}$ 满足 (F,H) 是极大的，则 (G,H) 是极大的。

证明。若 $f = g$，则 $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}} = \mathcal{H}_{\mathcal{F}}$，结论成立。接下来考虑对某个 $s \geq 1$，$f = g + s$ 的情形。

首先，我们来证明 (i)。设 $G \in \mathcal{G}$。那么存在唯一的 $H \in \mathcal{H}$，使得 (G,H) 是极大的。设 $G' = G \setminus G^{\mathrm{t}} = G \setminus \{n-\ell(G)+1,\ldots,n\}$，且 $H' = H \setminus H^{\mathrm{t}} = H \setminus \{n-\ell(H)+1,\ldots,n\}$。于是，由引理 2.9，$G'$和 H'互为伴侣。因此 $\max G' = |G'| + |H'| - 1 = g - \ell(G) + |H'| - 1 = f - s - \ell(G) + |H'| - 1 \leq f + h - s - \ell(G) - 1 \leq n - \ell(G) - s - 1$。设 $F = G' \cup \{n-\ell(G)+1-s,\ldots,n\}$。那么 $\max G' \leq n - \ell(G) - s - 1$ 蕴含 $F\mathrm{t} = \{n-\ell(G)+1-s,\ldots,n\}$。于是 $G \subseteq F$, $|F| = f$和 $\ell(F) - \ell(G) = f - g = s$。根据奇偶性的定义，$F$是 G的 f-奇偶性。设 $F' = F \setminus F\mathrm{t}$。因此 $F' = G'$。此外，F'和H'互为伴侣。再次由引理 2.9，(F,H) 是极大的。因此 $F \in \mathcal{F}$。所以，为了证明 (i)，我们还需确认定义 2.12 (ii)。设 $F \in \mathcal{F}$。若 F不具有 h_1-奇偶性，则结论成立。假设 G是 F的 h_1-奇偶性。那么 $G \setminus G^{\mathrm{t}} = F \setminus F\mathrm{t}$。由于 $F \in \mathcal{F}$，存在 $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$中的 H，使得 (F,H) 是极大的。由引理 2.9，$F \setminus F^{\mathrm{t}}$是 $H \setminus H^{\mathrm{t}}$的伴侣。因此 $G \setminus G^{\mathrm{t}}$也是 $H \setminus H^{\mathrm{t}}$的伴侣。再次由引理 2.9，$(G,H)$ 是极大的。因此 $G \in \mathcal{G}$。这意味着 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{G}$的 f-奇偶性，证毕。

接下来，我们证明 (ii)。令 $H \in \mathcal{H}_{\mathcal{G}}$。那么存在 $G \in \mathcal{G}$，使得 (G,H) 是极大的。由 (i)，存在 $F \in \mathcal{F}$，使得 F 是 G的 f-奇偶性。由引理 2.9，$G \setminus G^{\mathrm{t}}$ 是 $H \setminus H^{\mathrm{t}}$ 的伴侣。由于 F 是 G的 f-奇偶性，$G \setminus G^{\mathrm{t}} = F \setminus F\mathrm{t}$。因此 $F \setminus F\mathrm{t}$ 是 $H \setminus H^{\mathrm{t}}$ 的伴侣。再次由引理 2.9，(F,H) 也是极大的。这就说明 $\mathcal{H}_{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{F}}$，证毕。

最后，我们证明 (iii)。令 $G \in \mathcal{G}$，并令 F为 G的 f-奇偶性。由 (i)，$F \in \mathcal{F}$。因此存在 $H \in \mathcal{H}$，使得 (F,H) 是极大的。由引理 2.9，$F \setminus F^{\mathrm{t}}$ 是 $H \setminus H^{\mathrm{t}}$ 的伴侣。由于 F 是 G的 f-奇偶性，$G \setminus G^{\mathrm{t}} = F \setminus F\mathrm{t}$。因此 $G \setminus G^{\mathrm{t}}$ 是 $H \setminus H^{\mathrm{t}}$ 的伴侣。再次由引理 2.9，(G,H) 是极大的，正如所需。 □

命题 2.14. 令 $n = k + \ell$，A 为 $[n]$的任意一个 k-子集。那么存在一个 ℓ-集 $B \subset [n]$，使得 (A,B) 是极大的。此外，对于任意 $A \in \binom{[n]}{k}$，令 B为使 (A,B) 极大的 ℓ-集，则有 $M(n,k,\ell) = |\mathcal{L}(A,k)| + |\mathcal{L}(B,\ell)| = \binom{n}{\ell}$。

证明。令 $A \in \binom{[n]}{k}$，并令 B' 为 $A \setminus A^{\mathrm{t}}$的伴侣。由于 $n = k + \ell$，$|B'| \leq \ell$ 以及 $\max B' < n$，换言之，$\ell(B') = 0$。若 $|B'| = \ell$，则令 $B = B'$。若 $|B'| < \ell$，则令 $B = B' \cup [n-\ell+|B'|+1, n]$。由事实 2.9，$(A,B)$ 是极大的。这意味着 $\mathcal{L}(B,\ell) = \binom{[n]}{\ell} \setminus \mathcal{L}(A,k)$，因为 $n = k + \ell$。因此，$M(n,k,\ell) = |\mathcal{L}(A,k)| + |\mathcal{L}(B,\ell)| = \binom{n}{\ell}$，证毕。 □

3 非混合型的结果

本节总结我们此前关于非混合型的研究成果 [15]，这些成果将在本文中使用。记

$$\mathbb{R}_1 = \left\{ R \in \binom{[n]}{k_1} : \{1, n-k_1+2, \ldots, n\} \prec R \prec \{k_t, n-k_1+2, \ldots, n\} \right\}.$$

文献 [15] 中定义了两个相关函数如下。

定义 3.1。 设 $t \geq 2$、 k_1、k_2、.....、k_t 为满足 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t$ 和 $n \geq k_1 + k_2$ 的正整数。设 R 和 R' 为满足 $R \prec R'$ 的 $\mathbb{R}_1$。对于每个 $j \in [2,t]$，令 T_j 和 T'_j 分别为 R 和 R' 的 k_j- 伙伴。我们定义*

$$\alpha(R,R') = |\mathcal{L}(R',k_1)| - |\mathcal{L}(R,k_1)|, \tag{2}$$

$$\beta(R,R') = \sum_{j=2}^{t} \big(|\mathcal{L}(T_j,k_j)| - |\mathcal{L}(T'_j,k_j)|\big). \tag{3}$$

值得注意的是，关于 β（R、R'）的 [15] 中的原始定义为 $\sum_{j=2}^{t}\big(|\mathcal{L}$（$T$、$k_j$）$|-|\mathcal{L}$（$T'$、$k_j$）$|\big)$，其中 T、T' 分别是 R、R' 的伙伴。根据注 2.4，这两个定义是等价的。

定义 3.2 $(F_1 < F_2)$。 若 $F_1 \precneqq F_2$ 且不存在满足$|F'| = |F_1|$ 和 $F_1 \precneqq F' \precneqq F_2$ 的 F'，则称 $F_1 < F_2$。

作者证明了以下结果，这构成了 [15]中“单峰方法”的重要组成部分。（事实上， [15]给出了一个更一般的形式。）

命题 3.3 （ [15]中的命题2.12）。 设 $n \geq k_1 + k_2$ 和 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t$。设$F, G \in \mathbb{R}_1$ 满足 $F < G$ 且 最大值 $G = q$。则 ***(i)*** α（F, G）$= 1$。***(ii)*** β（F, G）$= \sum_{j=2}^{t}\binom{n-q}{k_j-\ (q-k_1)}$。***(iii)*** 若对任意 $j \in [t]\setminus\{1\}$，$n = k_1 + k_j$均成立，则 β（F, G）$= t-1$；否则，当 q 严格增大时， β（F, G） 会随之减小，直到 β（F, G）$= 0$。

命题 3.4 （ [15]中的断言4.4）。 †设 $n \geq k_1+k_2$和 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t$。设 $F_1, F'_1, G_1, G'_1 \in \mathbb{R}_1$满足 $F_1 < F'_1, G_1 < G'_1$ 且 最大值 $F'_1 =$最大值 G'_1。则 α（F_1, F'_1）$= \alpha$（G_1, G'_1） 且 β（F_1, F'_1）$=\beta$（G_1, G'_1）。

定义3.5 (c-**序列**)。设 $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ 是一个族，且 $c \in [k]$。如果存在 $A \subseteq [n]$，满足 $|A| = k-c$ 且 $a \geq$最大A，使得 $\mathcal{A} = \{A \sqcup \{a+1,\ldots,a+c\}$、$A \sqcup \{a+2,\ldots,a+c+1\}$、.....、$A \sqcup \{b-c+1,\ldots,b\}\}$，记作 $A_1 \overset{c}{\prec} A_2 \overset{c}{\prec} \cdots \overset{c}{\prec} A_{b-a-c+1}$，其中 $A_1 = A \sqcup \{a+1,\ldots,a+c\}$、$A_2 = A \sqcup \{a+2,\ldots,a+c+1\}$、.....、 $A_{b-a-c+1} = A \sqcup \{b-c+1,\ldots,b\}$，则称 $\mathcal{A}$ 为 c-序列。对于任意包含于 $\mathcal{A}$ 的 A_i、 A_j，我们也称 A_i、 A_j 为 c-序列；特别地，若 $j = i+1$，则记作 $A_i \overset{c}{\prec} A_j$。如果对于最后一个 j，最大值$A_j = n$，则对任意 $i < j$，记作 $A_i \xrightarrow{c} A_j$。

引理 *3.6*（ [15]中的断言 *4.3*）。 ‡设 $n \geq k_1+k_2$和 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t$。设 $A_1, B_1, C_1, D_1 \in \mathbb{R}_1$。假设 A_1, B_1 是 c-序列的，且 C_1, D_1 是 c-序列的，并且 $\max A_1 = \max C_1$ 和 $\max B_1 = \max D_1$。那么 $\alpha(A_1, B_1) = \alpha(C_1, D_1)$，且 $\beta(A_1, B_1) = \beta(C_1, D_1)$。

命题 3.7 ([15]中的命题 3.1)。 设 $n \geq k_1 + k_2$、 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t$ 为正整数。令 $m_i =$最小值$\{k_j :\ j \in [t]\setminus\{i\}\}$。对于每个 $s \in [m_i]$ 和每个 $i \in [t]$，令

$$f_i(\{s\}) = \binom{n}{k_i} - \binom{n-s}{k_i} + \sum_{j\neq i}\binom{n-s}{k_j - x}.$$

Then

$$f_1(\{s\}) = \max\{f_j(\{s\}) : j \in [t]\} \text{ for each } s \in [k_t],$$
$$f_t(\{k_{t-1}\}) \leq \max\{f_1(\{1\}), f_1(\{k_t\})\}.$$

*在参考文献 [15, 中的式 (16) 和 (17) 里取 $i = 1$, $d_1 = \cdots = d_t = 1$ 和 $m_i = k_t$]。 †在 [15], 中，原始表述为 $\mathbb{R}_1(j)$，其中 $j \in [0, k_1 - 1]$; 这里我们取 $j = 0$。 ‡在 [15], 中，原始表述为 $\mathbb{R}_1(j)$，其中 $j \in [0, k_1 - 1]$; 这里我们取 $j = 0$。

定理 3.8 ([15]中的定理 1.9)。 设 n、 $t \geq 2$、 k_1、k_2、.....、k_t 为正整数，且d_1、d_2、.....、d_t 为正数。设 $\mathcal{A}_1 \subseteq \binom{[n]}{k_1}$、$\mathcal{A}_2 \subseteq \binom{[n]}{k_2}$、.....、$\mathcal{A}_t \subseteq \binom{[n]}{k_t}$ 为非空两两交叉相交族，满足 $|\mathcal{A}_i| \geq \binom{n-1}{k_i-1}$，其中 $i \in [t]$。令 m_i 为 k_j中的最小整数，其中 $j \in [t] \setminus \{i\}$。若对所有 $j \in [t] \setminus \{i\}$，均有 $n \geq k_i + k_j$，则

$$\sum_{j=1}^{t} d_j|\mathcal{A}_j| \leq \max\left\{ d_i\binom{n}{k_i} - d_i\binom{n-m_i}{k_i} + \sum_{j\neq i} d_j\binom{n-m_i}{k_j-m_i},\ \sum_{j=1}^{t} d_j\binom{n-1}{k_j-1} \right\}, \tag{4}$$

等号成立当且仅当以下条件之一成立。

(i) $d_i\binom{n}{k_i}-d_i\binom{n-m_i}{k_i}+\sum_{j\neq i} d_j\binom{n-m_i}{k_j-m_i} \geq \sum_{j=1}^{t} d_j\binom{n-1}{k_j-1}$，且存在某个 m_i 元集合 $T \subseteq [n]$，使得 $\mathcal{A}_i = \{F \in \binom{[n]}{k_i} : \ F \cap T \neq \emptyset\}$，并且对于每个 $j \in [t] \setminus \{i\}$，都有 $\mathcal{A}_j = \{F \in \binom{[n]}{k_j} : \ T \subseteq F\}$。

(ii) $d_i\binom{n}{k_i} - d_i\binom{n-m_i}{k_i} + \sum_{j\neq i} d_j\binom{n-m_i}{k_j-m_i} \leq \sum_{j=1}^{t} d_j\binom{n-1}{k_j-1}$，且存在某个 $a \in [n]$，使得对于每个 $j \in [t]$，都有$\mathcal{A}_j = \{F \in \binom{[n]}{k_j} : \ a \in F\}$。

(iii) 对每个 $j \in [t] \setminus \{i\}$ 和 $\sum_{j\neq i} d_j > d_i$， $n = k_i + k_j$ 成立。令 $k_j = k$ 对所有 $j \neq i$成立。若$t = 2$，则 $\mathcal{A}_{3-i} \subseteq \binom{[n]}{k_{3-i}}$，其中 $|\mathcal{A}_{3-i}| = \binom{n-1}{k_{3-i}-1}$ 且 $\mathcal{A}_i = \binom{[n]}{k_i} \setminus \mathcal{A}_{3-i}$。若 $t \geq 3$，则对每个 $j \in [t] \setminus \{i\}$、 $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}_i = \binom{[n]}{k_i} \setminus \mathcal{A}$,—其中 $\mathcal{A}$ 是一个大小为$|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{k-1}$的 k一致相交族。

(iv) 对每个 $j \in [t] \setminus \{i\}$ 和 $\sum_{j\neq i} d_j = d_i$， $n = k_i + k_j$ 成立。令 $k_j = k$ 对所有 $j \neq i$成立。若 $t = 2$，则 $\mathcal{A}_{3-i} \subseteq \binom{[n]}{k_{3-i}}$，其中 $1 \leq |\mathcal{A}_{3-i}| \leq \binom{n-1}{k_{3-i}-1}$ 且 $\mathcal{A}_i = \binom{[n]}{k_i} \setminus \mathcal{A}_{3-i}$。若 $t \geq 3$，则对每个$j \in [t] \setminus \{i\}$、 $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}_i = \binom{[n]}{k_i} \setminus \mathcal{A}$，其中 $\mathcal{A}$ 是一个大小为$1 \leq |\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$的 k一致相交族。

4 定理1.7的证明

记

$$\lambda_1 := \sum_{i=1}^{t} \binom{n-1}{k_i-1},$$
$$\lambda_2 := \sum_{i=1}^{2} \left(\binom{n}{k_i} - \binom{n-k_t}{k_i} \right) + \sum_{i=3}^{t} \binom{n-k_t}{k_i-k_t}.$$

回顾例 1.5 和例 1.6。显然，在例 1.5 中， $\sum_{i=1}^{t} |\mathcal{G}_i| = \lambda_1$；在例1.6 中，$\sum_{i=1}^{t} |\mathcal{H}_i| = \lambda_2$。因此，我们有如下注记。

注 4.1。 设 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t$ 和 $k_1 + k_3 \leq n < k_1 + k_2$。若 $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t)$ 是一个极值$(n, k_1, \ldots, k_t)$-交叉相交系统，则

$$\sum_{i=1}^{t} |\mathcal{F}_i| \geq \max\{\lambda_1,\ \lambda_2\}.$$

以下注记由事实 2.6 推出

注 *4.2.* 设 $d \geq 2$ 是一个整数。我们考虑 d 个 L-初始集合族 $\mathcal{L}([n], A_1, a_1), \ldots, \mathcal{L}([n], A_d, a_d)$，其中 $|A_1| = a_1, \ldots, |A_d| = a_d$。对于某个固定的 $i \in [d]$，令 $S \subseteq [d] \setminus \{i\}$ 为所有满足 $n \geq a_i + a_j$ 的 $j \in [d] \setminus \{i\}$ 的集合。假设 $\{1, n-a_i+2, \ldots, n\} \preceq A_i$。若对于每个 $j \in S$， $\mathcal{L}(A_i, a_i)$ 与 $\mathcal{L}(A_j, a_j)$ 交叉相交，则 $\mathcal{L}(A_j, a_j)$，$j \in S$ 是两两交叉相交族，因为对于任意 $j \in S$， $\mathcal{L}(A_j, a_j)$ 的每个成员都包含 *1*。

引理 4.3. 设 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t \geq 2$ 和 $k_1+k_3 \leq n < k_1+k_2$。假设 $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t)$ 是一个 L-初始极值 $(n, k_1, \ldots, k_t)$-交叉相交系统，其标识为 $I_1, I_2, \ldots, I_t$，分别对应 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_t$。则 $|\mathcal{F}_1| \geq \binom{n-1}{k_1-1}$ 和 $|\mathcal{F}_2| \geq \binom{n-1}{k_2-1}$，等价地说，$\{1, n-k_1+2, \ldots, n\} \prec I_1$ 和$\{1, n-k_2+2, \ldots, n\} \prec I_2$。

证明。如果对所有 $i \in [t]$ 都有 $|\mathcal{F}_i| < \binom{n-1}{k_i-1}$，那么 $\sum_{i=1}^{t} |\mathcal{F}_i| < \lambda_1$，这与注 4.1 矛盾。因此，存在 $i \in [t]$ 使得 $|\mathcal{F}_i| \geq \binom{n-1}{k_i-1}$。

首先，我们考虑如下情形：对每个 $j \in [2]$，$i \in [3,t]$ 且 $I_j \preceq \{1, n-k_j+2, \ldots, n\}$。由于 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t \geq 2$ 且 $n \geq k_1 + k_3$，对所有 $j \in [t] \setminus \{i\}$ 都有 $n \geq k_i + k_j$。令$m_i = \min\{k_j : j \in [t] \setminus \{i\}\}$。在定理 3.8 中取 $d_1 = d_2 = \cdots = d_t = 1$，得到

$$\sum_{j=1}^{t} |\mathcal{F}_j| = \max\left\{ \sum_{j=1}^{t} \binom{n-1}{k_j-1}, \binom{n}{k_i} - \binom{n-m_i}{k_i} + \sum_{j \in [t]\setminus\{i\}} \binom{n-m_i}{k_j-m_i} \right\}.$$

注意到 $n > k_i + m_i$，且对每个 $j \in [2]$，$I_j \preceq \{1, n-k_j+2, \ldots, n\}$。我们只需满足定理 3.8(i)。因此，

$$\sum_{j=1}^{t} |\mathcal{F}_j| = \binom{n}{k_i} - \binom{n-m_i}{k_i} + \sum_{j \in [t]\setminus\{i\}} \binom{n-m_i}{k_j-m_i}.$$

在命题 3.7 中令 $s = m_i$，可得

$$\binom{n}{k_i} - \binom{n-m_i}{k_i} + \sum_{j \notin \{2,i\}} \binom{n-m_i}{k_j-m_i} \leq \max\left\{ \binom{n}{k_1} - \binom{n-k_t}{k_1} + \sum_{j=3}^{t} \binom{n-k_t}{k_j-k_t}, \sum_{j \neq 2} \binom{n-1}{k_j-1} \right\}.$$

由于 $m_i \geq k_t \geq 2$、$\binom{n-m_i}{k_2-m_i} < \binom{n-1}{k_2-1}$ 和 $\binom{n-m_i}{k_2-m_i} < \binom{n}{k_2} - \binom{n-k_t}{k_2}$。因此，$\sum_{j=1}^{t} |\mathcal{F}_j| < \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$，这与注 4.1 矛盾。

因此 $i \in [2]$。不妨设 $i = 1$。由于 $n < k_1 + k_2$，于是任意两个集合族 $\mathcal{G} \subseteq \binom{[n]}{k_1}$ 和 $\mathcal{H} \subseteq \binom{[n]}{k_2}$ 都是自由交叉相交的。注意，对于每个 $j \in [3,t]$，$n \geq k_1 + k_j$ 与 $\mathcal{F}_1$ 交叉相交于 $\mathcal{F}_j$。由于 $\{1, n-k_1+2, \ldots, n\} \prec I_1$，根据注 4.2，$\mathcal{F}_j$ 的每个成员都包含 1。由于 $(\mathcal{F}_1, \ldots\ldots, \mathcal{F}_t)$ 是极值的，所有包含 1 的 k_2-子集都包含于 $\mathcal{F}_2$ 中，因此 $|\mathcal{F}_2| \geq \binom{n-1}{k_2-1}$，如所要求。 □

定义 4.4。对于集合 $A \subset [n]$，我们定义相应的 A 的 k-集 $B \subset [n]$ 如下：如果 A 具有 k-奇偶性，则令 B 为 A的 k-奇偶性；否则，令 B 为满足 $B < A$的 k-集。

设 $k < \ell$，对于两个集合 P，R，若 $P < R$的大小为 $|P| = |R| = \ell$，根据 P，R 是否具有 k-奇偶性进行分类讨论，可得以下事实。

事实 4.5。设 $k < \ell$为正整数，P、$R \in \binom{[n]}{\ell}$和 $\{1, n-l+2, \ldots, n\} \preceq P < R$。那么，存在分别对应于 P 和 R的 k-集，记为 P' 和 R'。此外，$P' \prec R'$，且 $P' = R'$当且仅当 R 不具有 k-奇偶性。

命题 4.6。设 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t \geq 2$ 和 $k_1 + k_3 \leq n < k_1 + k_2$。假设$(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t)$ 是一个 L-初始极值$(n, k_1, \ldots, k_t)$-交叉相交系统，其标识集 $I_1, I_2, \ldots, I_t$分别对应于 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_t$。则满足以下性质：

(i) I_2 是 I_1 对应的 k_2-集；

(ii) 对每个 $i \in [3,t]$，I_i 都是 I_1 的 k_i-伴侣。

证明。 根据引理 4.3，我们有 $\{1, n-k_1+2, \ldots, n\} \prec I_1$ 和 $\{1, n-k_2+2, \ldots, n\} \prec I_2$。对于每个 $i \in [3,t]$，令 P_i，Q_i 分别为 I_1，I_2 的 k_i- 伴侣。

首先，我们考虑这种情况： $I_2 \prec I_1$。设 $i \in [3,t]$。由于 $n \geq k_1 + k_i \geq k_2 + k_i$ 和 $I_2 \prec I_1$，根据事实 2.11， $P_i \prec Q_i$。注意到 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_i$ 交叉相交，且 $n \geq k_1 + k_i$。根据事实 2.5， P_i 相对于 I_1是极大的。因此， $I_i \prec P_i$。根据注 4.2，$(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{L}(P_3, k_3) \ldots, \mathcal{L}(P_t, k_t))$ 是一个交叉相交系统。由于 $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t)$ 是极值的， $I_i = P_1$，即 I_i 是 I_1的 k_i-伴侣，由此得到 (ii)。因此， I_2 在不超过 I_1的条件下是字典序极大的。于是， I_2 是 I_1对应的 k_2-集，由此得到 (i)。

接下来，我们考虑以下情形： $I_1 \prec I_2$。设 $i \in [3,t]$。利用与上述类似的论证可得， I_i 是 I_2 的 k_i 伴侣。根据事实 2.11，要证明命题 4.6，只需证明 I_1 是 I_2 的 k_1 奇偶性。为此，我们需要以下断言。

断言 4.7. (I_2, I_3) 是极大的。

证明。 反设 (I_2, I_3) 不是极大的。设 I_2' 是 I_3 的 k_2 伴侣。注意， I_3 是 I_2 的 k_3 伴侣。由于 (I_2, I_3) 不是极大的，根据事实 2.10， $I_2 \precneqq I_2'$，且 (I_2', I_3) 是极大的。因此， I_2 和 I_2' 共享同一个 k_3 伴侣 I_3。于是，对于每个 $i \in [3,t]$，它们也共享同一个 k_i 伴侣 I_i。因此，$(\mathcal{F}_1, \mathcal{L}(I_2', k_2)\ \mathcal{F}_3, \ldots, \mathcal{F}_t)$ 是交叉相交的。然而， $\mathcal{F}_2 \subsetneqq \mathcal{L}(I_2', k_2)$，这与 $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t)$ 是极值的这一事实矛盾。断言 4.7 证毕。 □

继续证明命题 4.6。由于 $n \geq k_1 + k_3$ 和 $k_1 \geq k_2$，结合命题 2.13 与断言 4.7， I_2 具有 k_1-奇偶性。由于 $I_1 \prec I_2$ 和 $(\mathcal{F}_1, \ldots\ldots, \mathcal{F}_t)$ 是极值的， I_1 是 I_2 的 k_1-奇偶性。这就完成了命题 4.6 的证明。

□

对于每个 $i \in [2]$，记作

$$\mathcal{R}_i = \left\{ R \in \binom{[n]}{k_i} : \{1, n-k_i+2, \ldots, n\} \prec R \prec \{k_t, n-k_i+2, \ldots, n\} \right\}.$$

对于每个 $i \in [3,t]$，记作

$$\mathcal{R}_i = \left\{ R \in \binom{[n]}{k_i} : [k_t] \cup [n-k_i+k_t+1, n] \prec R \prec \{1, n-k_i+2, \ldots, n\} \right\}.$$

由引理 4.3 和命题 4.6，我们得到以下结论 rk.

注4.8。 设 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t \geq 2$ 和 $k_1 + k_3 \leq n < k_1 + k_2$。若 $(\mathcal{F}_1$、……、$\mathcal{F}_t)$ 是一个具有标识集 I_1、I_2、……、I_t 的 $\mathcal{F}_1$、$\mathcal{F}_2$、……、$\mathcal{F}_t$ 的 L-初始极值 $(n$、k_1、……、$k_t)$-交叉相交系统，则对于每个 $i \in [t]$，都有 $I_i \in \mathcal{R}_i$。

命题4.9。 设 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t \geq 2$ 和 $k_1 + k_3 \leq n < k_1 + k_2$，并设 $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t)$是一个 L-初始极值$(n, k_1, \ldots, k_t)$-交叉相交系统，其标识集为 $I_1, I_2, \ldots, I_t$，分别对应于$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_t$。若集合 I_1 为 $\{1, n-k_1+2, \ldots, n\}$ 或 $\{k_t, n-k_1+2, \ldots, n\}$，则 $\sum_{i=1}^{t} |\mathcal{F}_i| =$ 最大值$\{\lambda_1, \lambda_2\}$。

证明。 由命题 4.6 (i)，若 $I_1 = \{1, n-k_1+2, \ldots, n\}$，则 $I_2 = \{1, n-k_2+2, \ldots, n\}$；若 $I_1 = \{k_t, n-k_1+2, \ldots, n\}$，则 $I_2 = \{k_t, n-k_2+2, \ldots, n\}$。

首先假设 $I_1 = \{1, n-k_1+2, \ldots, n\}$。根据命题 4.6 (ii)，对于每个 $i \in [3,t]$， I_i 是 I_1 的 k_i 伴侣，因此， $I_i = \{1, n-k_i+2, \ldots, n\}$。于是 $\sum_{i=1}^{t} |\mathcal{F}_i| = \lambda_1$。

接下来，假设 $I_1 = \{k_t, n-k_1+2, \ldots, n\}$。再次由命题 4.6 (ii)，对每个$i \in [3,t]$，$I_i = \{1, \ldots, k_t, n-k_i+k_t+1, \ldots, n\}$。因此 $\sum_{i=1}^{t} |\mathcal{F}_i| = \lambda_2$。 □

设 $(\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_t)$ 是一个 L-初始极值 $(n,k_1,\ldots,k_t)$-交叉相交系统，满足 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t \geq 2$ 且 $k_1+k_3 \leq n < k_1+k_2$。注4.8 告诉我们，对于每个$i \in [t]$，$\mathcal{F}_i$的所有可能标识。命题4.9 表明，若 $\mathcal{F}_1$ 的标识是 $\mathcal{R}_1$的第一个或最后一个成员，则$\sum_{i=1}^{t}|\mathcal{F}_i|$ 等于 λ_1 或 λ_2。一个自然的问题是，当 $\mathcal{F}_1$ 的标识位于 $\mathcal{R}_1$的中间区域时，$\sum_{i=1}^{t}|\mathcal{F}_i|$ 是否大于 λ_1 和 λ_2。下述定理表明，除一个特殊情形外，答案是否定的。

定理 4.10。假设 $t \geq 4$、$k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t \geq 2$ 和 $k_1+k_3 \leq n < k_1+k_2$。此外，假设若 $t=4$ 与 $k_1=k_2$ 和 $k_3=k_4$，则 $n > k_1+k_3$。令 $(\mathcal{F}_1、\ldots、\mathcal{F}_t)$ 为一个具有 I_1 个 $\mathcal{F}_1$ 的 L-初始 $(n、k_1、\ldots、k_t)$-交叉相交系统。若 $\{1,n-k_1+2,\ldots,n\} \subsetneqq I_1 \subsetneqq \{k_t,n-k_1+2,\ldots,n\}$，则 $(\mathcal{F}_1、\ldots、\mathcal{F}_t)$ 不是极值的。

为了证明定理 4.10，我们的思路是寻找一个 $(n,\ k_1,\ \ldots,\ k_t)$-交叉相交系统 $(\mathcal{L}(K_1,\ k_1)、\ldots、\mathcal{L}(K_t,\ k_t))$，使得对于每个 $i \in [t]$，都有 $K_i \in \mathcal{R}_i$ $\sum_{i=1}^{t}|\mathcal{L}(K_i,\ k_i)| > \sum_{i=1}^{t}|\mathcal{F}_i|$。为此，我们将证明下面函数 $f(R_1)$ 的“单峰性”，其中 $R_1 \in \mathcal{R}_1$。为此，我们首先需要进行一些准备工作。

定义 4.11。设 s、s'、t 是整数，满足 $s \geq s' \geq 1$、$t \geq s+1$、$k_1=\cdots=k_{s'} > k_{s'+1} \geq \cdots \geq k_t$，且 $k_1+k_{s+1} \leq n < k_{s-1}+k_s$。假设 R_1、$R_1' \in \mathcal{R}_1$ 满足 $R_1 \prec R_1'$。对于每个$i \in [s+1,t]$，令 R_i、R_i' 分别为 R_1、R_1' 的 k_i-伙伴；对于每个 $i \in [2,s]$，令 R_i、R_i' 分别为 R_1、R_1' 对应的 k_i-集。对于每个 $i \in [s]$，记

$$\alpha_i(R_1,R_1') = |\mathcal{L}(R_i',k_i)| - |\mathcal{L}(R_i,k_i)|,$$
$$\gamma(R_1,R_1') = \sum_{i=1}^{s}\alpha_i(R_1,R_1'),$$
$$\delta(R_1,R_1') = \sum_{i=s+1}^{t}\big(|\mathcal{L}(R_i,k_i)| - |\mathcal{L}(R_i',k_i)|\big).$$

比较定义 4.11 和定义 3.1，可得以下注记。

注 4.12。设 s、s'、t 是整数，满足 $s \geq s' \geq 1$、$t \geq s+1$、$k_1=\cdots=k_{s'} > k_{s'+1} \geq \cdots \geq k_t$ 和 $k_1+k_{s+1} \leq n < k_{s-1}+k_s$。设 R_1、$R_1' \in \mathcal{R}_1$ 满足 $R_1 \prec R_1'$。在定义 *3.1* 中用 k_1、k_{s+1}、…、k_t 替换 k_1、k_2、…、k_t，可知 $\delta(R_1、R_1') = \beta(R_1、R_1')$，且对于每个 $i \in [s']$，$\alpha_i(R_1、R_1') = \alpha(R_1、R_1')$。

定义 4.13。设 s、s'、t 为整数，满足 $s \geq s' \geq 1$、$t \geq s+1$、$k_1=\cdots=k_{s'} > k_{s'+1} \geq \cdots \geq k_t$，且 $k_1+k_{s+1} \leq n < k_{s-1}+k_s$。设 $R_1 \in \mathcal{R}_1$。对于每个 $i \in [2,s]$，令 R_i 为 R_1 对应的 k_i- 集；对于每个 $i \in [s+1,t]$，令 R_i 为 R_1的 k_i-伴侣。记

$$f(R_1) = \sum_{i=1}^{t}|\mathcal{L}(R_i,k_t)|.$$

由定义 4.11 和定义 5.1，对于满足 $R_1 \prec R_1'$的两个集合 $R_1,R_1' \in \mathcal{R}_1$，有

$$f(R_1') - f(R_1) = \gamma(R_1,R_1') - \delta(R_1,R_1'). \tag{5}$$

注 4.14。设 s、s'、t 为整数，满足 $s \geq s' \geq 1$、$t \geq s+1$，且 $k_1+k_{s+1} \leq n < k_{s-1}+k_s$。设 $R_1 \in \mathcal{R}_1$。对于每个 $i \in [2,s]$，令 R_i为 R_1对应的 k_i-集；对于每个 $i \in [s+1,t]$，令 R_i 为 R_1 的 k_i-伴侣。则 $(\mathcal{L}(R_1,k_1)\ldots,\mathcal{L}(R_t,k_t))$是一个$(n,k_1,\ldots,k_t)$-交叉相交系统。

证明。由于 $n < k_{s-1}+k_s$，$\mathcal{L}(R_1,k_1)\ldots,\mathcal{L}(R_s,k_s)$ 两两交叉相交。令 $i \in [s],j \in [s+1,t]$，并令 $R_{i,j}$ 为 R_i 的 k_j-伴侣。由事实 2.5，$\mathcal{L}(R_i,k_i)$ 和 $\mathcal{L}(R_{i,j},k_j)$ 是

交叉相交。注意， R_j 是 R_1 的 k_j-伴侣，并且 $R_i \prec R_1$。由事实 2.11， $R_j \prec R_{i,j}$。因此， $\mathcal{L}(R_i, k_i)$ 和 $\mathcal{L}(R_j, k_j)$ 交叉相交。由于 $R_1 \in \mathcal{R}_1$ 和 R_i 是 R_1 的对应 k_i-集， $\{1, n-k_i+2, \ldots, n\} \prec R_i \prec R_1$。因此，由注 4.2 可得，$\mathcal{L}(R_{s+1}, k_{s+1}) \ldots, \mathcal{L}(R_t, k_t)$ 两两交叉相交。因此，$(\mathcal{L}(R_1, k_1) \ldots, \mathcal{L}(R_t, k_t))$ 是一个 $(n, k_1, \ldots, k_t)$-交叉相交系统。 □

结合命题 4.6 和注 4.14，并在定义 4.13 中取 $s = 2$ ，可知若 $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t)$ 是具有标识 I_1 的 $\mathcal{F}_1$ 的极值 L-初始 $(n, k_1, \ldots, k_t)$-交叉相交族，则

$$\sum_{i=1}^{t} |\mathcal{F}_i| = f(I_1) = \max\{f(R_1) : R_1 \in \mathcal{R}_1\}.$$

因此，要证明定理 4.10，只需证明以下定理 .

定理 4.15。 设 s, s', t 为满足 $s \geq s' \geq 1$, $t \geq s+1$, $k_1 = \cdots = k_{s'} > k_{s'+1} \geq \cdots \geq k_t$ 和 $k_1 + k_{s+1} \leq n < k_{s-1} + k_s$ 的整数。此外，假设若 $n = k_1 + k_t$，则 $s' \neq t - s$。令 $R_1 \in \mathcal{R}_1$。若 $\{1, n-k_1+2, \ldots, n\} \subsetneq R_1 \subsetneq \{k_t, n-k_1+2, \ldots, n\}$，则存在 $K_1 \in \mathcal{R}_1$ 使得 $f(K_1) > f(R_1)$。

为证明上述定理，我们需要以下引理，其证明将在下一节给出。我们强调，这个引理对于我们后续的论文 [16] 至关重要，该论文将处理最一般的情形 $n \geq k_1 + k_t$。

引理 4.16. 设 s, s', t 为整数，且满足 $s \geq s' \geq 1$, $t \geq s+1$, $k_1 = \cdots = k_{s'} > k_{s'+1} \geq \cdots \geq k_t$，且 $k_1 + k_{s+1} \leq n < k_{s-1} + k_s$。设 $A_1, B_1, C_1 \in \mathcal{R}_1$ 满足 $A_1 \setminus At_1 = A \sqcup \{a, a+1\}$, $B_1 = A \sqcup \{a\} \sqcup [n - \ell(B_1) + 1, n]$ 且 $C_1 = A \sqcup \{a+1\} \sqcup [n - \ell(B_1) + 1, n]$（其中 $max\ A < a$）。那么 $\delta(A_1, B_1) = \delta(B_1, C_1)$ 且 $\gamma(A_1, B_1) \leq \gamma(B_1, C_1)$ 。

我们将应用命题 3.3 和引理 4.16 来证明定理 4.15。

定理 *4.15* 的证明。反设

$$f(R_1) = \max\{f(F_1) : F_1 \in \mathcal{R}_1\}. \tag{6}$$

我们不妨设 R_1 是满足 (6) 的 $\mathcal{R}_1$ 中的第一个成员，且 $\{1, n-k_1+2, \ldots, n\} \subsetneq R_1 \subsetneq \{k_t, n-k_1+2, \ldots, n\}$。下面分两种情形讨论。

情形 1。 $\ell(R_1) > 0$。在这种情形下， $R_1^t = [n - \ell(R_1) + 1, \ n]$。记

$$P_1 = R_1 \setminus \{n - \ell(R_1) + 1\} \cup \{\max(R_1 \setminus R_1^t) + 1\}$$
$$Q_1 = R_1 \setminus \{\max(R_1 \setminus R_1^t)\} \cup \{\max(R_1 \setminus R_1^t) + 1\}.$$

由于 $\{1, n-k_1+2, \ldots, n\} \subsetneq R_1 \subsetneq \{k_t, n-k_1+2, \ldots, n\}$, P_1, Q_1 都包含在 $\mathcal{R}_1$中，且 $\{1, n-k_1+2, \ldots, n\} \subsetneq P_1 \subsetneq \{k_t, n-k_1+2, \ldots, n\}$。根据 R_1的选取，我们有 $f(P_1) < f(R_1)$。由 (5) 可知， $f(R_1) = f(P_1) + \gamma(P_1, \ R_1) - \delta(P_1, \ R_1)$。因此，

$$\gamma(P_1, R_1) > \delta(P_1, R_1) \tag{7}$$

注意到 P_1, R_1, Q_1 满足引理 4.16 的条件，分别对应于 A_1, B_1, C_1。由引理 4.16 可得 $\delta(P_1, R_1) = \delta(R_1, \ Q_1)$ 以及 $\gamma(P_1, \ R_1) \leq \gamma(R_1, \ Q_1)$。将这些结果与（7）结合，并根据（5），可得

$$f(Q_1) = f(R_1) + \gamma(R_1, Q_1) - \delta(R_1, Q_1) \geq f(R_1) + \gamma(P_1, R_1) - \delta(P_1, R_1) > f(R_1),$$

这与（6）矛盾。

情形 2. $\ell(R_1) = 0$。令 P_1', $Q_1' \in \mathcal{R}_1$ 满足 $P_1' < R_1 < Q_1'$。（回顾一下，‘$<$’定义于定义 3.2。）由于 $\{1, n-k_1+2, \ldots, n\} \subsetneq R_1 \subsetneq \{k_t, n-k_1+2, \ldots, n\}$, P_1', Q_1' 均为

包含于 $\mathcal{R}_1$ 中。因此 $f(P_1') \leq f(R_1)$。根据 (5)，$f(R_1) = f(P_1') + \gamma(P_1', R_1) - \delta(P_1', R_1)$。因此，

$$\gamma(P_1', R_1) \geq \delta(P_1', R_1) \tag{8}$$

对于每个 $i \in [2, s]$，分别令 P_i'、R_i、Q_i' 为 P_1'、R_1、Q_1' 所对应的 k_i-集；对于每个 $i \in [s+1, t]$，分别令 P_i'、R_i、Q_i' 为 P_1'、R_1、Q_1' 的 k_i-伙伴。

Sin由事实 4.5，对于 $i \in [s'+1, s]$，ce $\ell(R_1) = 0$ 和 $k_i < k_1$，我们有如下断言。

断言 4.17。对于每个 $i \in [s'+1, s]$，都有 $P_i' = R_i \prec Q_i'$。

注意到 $P_1' < R_1 < Q_1'$。因此，断言 4.17 给出

$$\gamma(P_1', R_1) = s' \leq \gamma(R_1, Q_1'). \tag{9}$$

由于 max R_1 <max Q_1' 和 $P_1' < R_1 < Q_1'$，结合命题 3.3 和注 4.12，我们得到以下三种情况之一：$\delta(P_1', R_1) > \delta(R_1, Q_1')$；$\delta(P_1', R_1) = \delta(R_1, Q_1') = 0$；$\delta(P_1', R_1) = \delta(R_1, Q_1') = t - s$，其中最后一种情况当且仅当 $n = k_1 + k_t$ 发生。因此 $\delta(P_1', R_1) \geq \delta(R_1, Q_1')$。如果在 (8) 中 $\gamma(P_1', R_1) > \delta(P_1', R_1)$，那么由 (9) 可得

$$f(Q_1') = f(R_1) + \gamma(R_1, Q_1') - \delta(R_1, Q_1') \geq f(R_1) + \gamma(P_1', R_1) - \delta(P_1', R_1) > f(R_1),$$

这与 (6) 矛盾。因此，在 (8) 中有 $\gamma(P_1', R_1) = \delta(P_1', R_1)$。如果在 (9) 中有 $\delta(P_1', R_1) > \delta(R_1, Q_1')$，或者 $\gamma(P_1', R_1) <\gamma(R_1, Q_1')$，那么

$$f(Q_1') = f(R_1) + \gamma(R_1, Q_1') - \delta(R_1, Q_1') > f(R_1) + \gamma(P_1', R_1) - \delta(P_1', R_1) \geq f(R_1),$$

这与 (6) 矛盾。因此

$$t - s = \delta(R_1, Q_1') = \delta(P_1', R_1) = \gamma(P_1', R_1) = \gamma(R_1, Q_1') = s',$$

以及 $n = k_1 + k_t$。这与定理 4.15 的条件矛盾。

定理 4.15 的证明至此完成。 □

因此，定理 4.10 的证明完成。现在我们准备证明定理 1 .7.

定理*1.7*的证明。设 $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t)$ 是一个极值 $(n, k_1, \ldots, k_t)$-交叉相交系统，其中 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_t$ 和 $k_1 + k_3 \leq n < k_1 + k_2$。

我们首先考虑以下情形：$k_t = 1$。假设 $|\mathcal{F}_t| = s$。那么 $\mathcal{F}_t = \{\{1\}, \ldots, \{s\}\}$。由于（$\mathcal{F}_1$，...，$\mathcal{F}_t$）是一个交叉相交系统，因此对任意 $i \in [t-1]$ 和任意 $F \in \mathcal{F}_i$，都有 $[s] \subseteq F$。于是，

$$\sum_{i=1}^{t} |\mathcal{F}_i| = \sum_{i=1}^{t-1} \binom{n-s}{k_i - s} + s \leq \lambda_1,$$

这正是所需的。注意，上述等号成立当且仅当 $s = 1$，也就是说，对某个$x \in [n]$，有 $\mathcal{F}_t = \{x\}$。因此，（$\mathcal{F}_1$，...，$\mathcal{F}_t$）与例 1.5 中定义的（$\mathcal{G}_1$，...，$\mathcal{G}_t$）同构，证毕。

接下来，我们考虑以下情形：$t = 3$。由定理 1.2，$|\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_3| \leq \binom{n}{k_1} - \binom{n-k_3}{k_1} + 1$。显然，$|\mathcal{F}_2| \leq \binom{n}{k_2} - \binom{n-k_3}{k_2}$，因为 $\mathcal{F}_2$ 中的每个 k_2-集都与 $\mathcal{F}_3$中的每个 k_3-集相交。因此，$\sum_{i=1}^{3} |\mathcal{F}_i| \leq \lambda_2$，这正是所需的。上界能够达到当且仅当 $|\mathcal{F}_2| = \binom{n}{k_2} - \binom{n-k_3}{k_2}$。这意味着存在某个 k_3-集 A，使得 $\mathcal{F}_3 = \{A\}$ 且 $\mathcal{F}_2 = \{F \in \binom{[n]}{k_2} : F \cap A \neq \emptyset\}$。因此，$\mathcal{F}_1 = \{F \in \binom{[n]}{k_1} : F \cap A \neq \emptyset\}$。所以，（$\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_3$，$\mathcal{F}_3$）与例1.6中定义的（$\mathcal{H}_1$，$\mathcal{H}_2$，$\mathcal{H}_3$）同构，证毕。

接下来，我们考虑以下情形：$t = 4$、$k_1 = k_2$、$k_3 = k_4$ 和 $n = k_1 + k_3$。在此情形下，$|\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_4| \leq \binom{n}{k_1}$ 和 $|\mathcal{F}_2| + |\mathcal{F}_3| \leq \binom{n}{k_1}$。因此 $\sum_{i=1}^{4} |\mathcal{F}_i| \leq 2\binom{n}{k_1} = \lambda_1 = \lambda_2$，如所要求。由于

$(\mathcal{F}_1, \ldots\ldots, \mathcal{F}_4)$ 是极值的， $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ 和 $\mathcal{F}_3 = \overline{\mathcal{F}_4}$。注意， $n > k_3 + k_4$ 和 $n = k_1 + k_3$。那么$\mathcal{F}_3$是一个相交族，且 $\mathcal{F}_1 = \binom{[n]}{k_1} \setminus \mathcal{F}_3$，证毕。

现在，只需在以下条件下证明定理1.7。

$$k_t \geq 2,\ t \geq 4 \text{ and if } t = 4 \text{ with } k_1 = k_2 \text{ and } k_3 = k_4, \text{ then } n > k_1 + k_3. \tag{10}$$

定量部分可由定理 2.1、命题4.9和定理 4.10立即推出。我们将证明，在条件 (10) 下，$(\mathcal{F}_1、\ldots、\mathcal{F}_t)$ 与例1.5或例1.6同构。

根据引理 4.3、命题4.9、定理 4.10和定理 2.1，我们可以得出：对于每个 $i \in [t]$，要么 $|\mathcal{F}_i| = \binom{n-1}{k_i-1}$，要么 $|\mathcal{F}_1| = \binom{n}{k_1} - \binom{n-k_t}{k_1}$、$|\mathcal{F}_2| = \binom{n}{k_2} - \binom{n-k_t}{k_2}$ 和 $|\mathcal{F}_i| = \binom{n-k_t}{k_i-k_t}$ 对每个 $i \in [3,t]$都成立。若出现第一种情况，则 $(\mathcal{F}_1、\mathcal{F}_3、\ldots、\mathcal{F}_t)$ 是一个 $(n、k_1、k_3、\ldots、k_t)$-交叉相交系统，且满足 $\sum_{i=1、\ i\neq 2}^{t} |\mathcal{F}_i| = \sum_{i=1、\ i\neq 2}^{t} \binom{n-1}{k_i-1}$。注意， $k_1 > k_3$ 和 $t \geq 4$。根据定理 1.4 (i)，$(\mathcal{F}_1、\ldots、\mathcal{F}_t)$ 与 $(\mathcal{G}_1、\ldots、\mathcal{G}_t)$ 同构，后者定义于例 1.5。若出现第二种情况，则 $(\mathcal{F}_1、\mathcal{F}_3、\ldots、\mathcal{F}_t)$ 是一个 $(n、k_1、k_3、\ldots、k_t)$-交叉相交系统，且满足 $\sum_{i=1、\ i\neq 2}^{t} |\mathcal{F}_i| = \binom{n}{k_1} - \binom{n-k_t}{k_1} + \sum_{i=3}^{t} \binom{n-k_t}{k_i-k_t}$。根据定理 1.4 (i)，$(\mathcal{F}_1、\ldots、\mathcal{F}_t)$ 与 $(\mathcal{H}_1、\ldots、\mathcal{H}_t)$ 同构，后者定义于例1.6。至此，定理1.7的证明完成。 □

5 引理 4.16 的证明

根据定义 4.11，我们有如下注记。

注 *5.1.* 设 $s、s'、t$ 为整数，满足 $s \geq s' \geq 1、\ t \geq s+1、\ k_1 = \cdots = k_{s'} > k_{s'+1} \geq \cdots \geq k_t$ 和 $k_1 + k_{s+1} \leq n < k_{s-1} + k_s$。假设 $A_1、B_1、C_1 \in \mathcal{R}_1$ 满足 $A_1 \prec B_1 \prec C_1$。那么对于任意 $i \in [s]$，$\alpha_i(A_1, C_1) = \alpha_i(A_1, B_1) + \alpha_i(B_1, C_1)$，以及 $\gamma(A_1, C_1) = \gamma(A_1, B_1) + \gamma(B_1, C_1)$，$\delta(A_1, C_1) = \delta(A_1, B_1) + \delta(B_1, C_1)$。

根据奇偶性的定义，我们有如下注记。

注 5.2. 设 $s、s'、t$ 为正整数，且 $s \geq s' \geq 1、\ t \geq s+1、\ k_1 = \cdots = k_{s'} > k_{s'+1} \geq \cdots \geq k_t$ 且 $k_1 + k_{s+1} \leq n < k_{s-1} + k_s$。那么对于任意 $R \in \mathcal{R}_1$ 和 $i \in [2,s]$， R 具有 k_i-奇偶性，当且仅当 $|R \setminus R_t| \leq k_i$。

命题 5.3. 设 $s、s'、t$ 为整数，且 $s \geq s' \geq 1、\ t \geq s+1、\ k_1 = \cdots = k_{s'} > k_{s'+1} \geq \cdots \geq k_t$ 及 $k_1 + k_{s+1} \leq n < k_{s-1} + k_s$。设 $R_1、R_1' \in \mathcal{R}_1$，满足 $R_1 < R_1'$ 和 $R = R_1' \setminus R_1'^{\,t}$。那么对于每个 $i \in [s]$，我们有

$$\alpha_i(R_1, R_1') = \binom{\ell(R_1')}{k_i - |R|}.$$

特别地， $\alpha_i(R_1, R_1') = 0$ 当且仅当 $\ell(R_1') < k_1 - k_i$。此外，若 $\ell(R_1') = 0$，则$\gamma(R_1, R_1') = s'$。

证明。设 $i \in [s]$。显然，若 $i \in [s']$，则 $\alpha_i(R_1, R_1') = 1 = \binom{\ell(R_1')}{\ell(R_1')} = \binom{\ell}{(R_1')_{k_i-|R|}}$。接下来考虑$i \in [s'+1, s]$。在此情形下， $k_i < k_1$。设 R_i 和 R_i' 分别为 R_1 和R_1'对应的 k_i-集。于是 $R_i \prec R_i'$，此外 $\alpha_i(R_1, R_1') \geq 0$ 且 $\alpha_i(R_1, R_1') = 0$ 当且仅当$R_i = R_i'$。根据事实 4.5，$R_i = R_i'$ 当且仅当 R_1' 不具有 k_i-奇偶性，即根据注 5.2， $\ell(R_1') < k_1 - k_i$。特别地，若 $\ell(R_1') = 0$，则 $\alpha_i(R_1, R_1') = 0 = \binom{\ell}{(R_1')_{k_i-|R|}}$。因此，$\gamma(R_1, R_1') = s'$，证毕。我们完成了 R_1' 不具有 k_i-奇偶性这一情形的证明。

接下来，我们假设 R_i' 是 R_1'的 k_i-奇偶性。因此， $\ell(R_1') \geq k_1 - k_i$。在这种情况下，由于$R_1 < R_1'$，$\ell(R_1) = \ell(R_1') - 1$。我们首先假设 R_1 不具有 k_i-奇偶性。于是， $\ell(R_1) \leq k_1 - k_i - 1$。由于 $\ell(R_1) = \ell(R_1') - 1$， $\ell(R_1') = k_1 - k_i$。注意， $\ell(R_1') = k_1 - |R|$。因此， $k_i = |R|$ 和 $R_i' = R$。注意， $R_1 < R_1'$， $\ell(R_1) = \ell(R_1') - 1$，且 R_1 不具有 k_i- 奇偶性。根据对应的 k_i- 集的定义，我们得到 $R_i < R_i'$。因此， $\alpha_i(R_1, R_1') = 1 = \binom{\ell}{(R_1')_{k_i-|R|}}$，证毕。

最后，我们假设 R_i 是 R_1的 k_i-奇偶性。因此， $\ell(R_1) \geq 1$。令 $k_1 - k_i = k$。在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned}
R_1' &= R \cup [n - \ell(R_1') + 1, n];\\
R_1 &= R \cup \{n - \ell(R_1')\} \cup [n - \ell(R_1') + 2, n];\\
R_i &= R \cup \{n - \ell(R_1')\} \cup [n - \ell(R_1') + 2 + k, n];\\
R_i' &= R \cup [n - \ell(R_1') + 1 + k, n] = R \cup [n - k_i + |R| + 1, n].
\end{aligned}$$

令 A 为满足 $R_i < A$ 的 k_i-集。那么

$$A = R \cup \{n - \ell(R_1') + 1, \ldots, n - \ell(R_1') + k_i - |R|\}.$$

记 $\mathcal{F} = \{F \in \binom{[n]}{k_i} : A \prec F \prec R_i'\}$. 于是 $\alpha_i(R_1, R_1') = |\mathcal{F}| = \binom{n-(n-\ell(R_1'))}{k_i-|R|} = \binom{\ell(R_1')}{k_i-|R|}$，如所需。 □

命题 5.4。设 s、s'、t 为满足 $s \geq s' \geq 1$、$t \geq s+1$、$k_1 = \cdots = k_{s'} > k_{s'+1} \geq \cdots \geq k_t$ 及 $k_1 + k_{s+1} \leq n < k_{s-1} + k_s$ 的整数。设 F_1、F_1'、G_1、$G_1' \in \mathcal{R}_1$ 满足 $F_1 < F_1'$、$G_1 < G_1'$ 以及最大值 F_1' =最大值 G_1'。那么

(i) $\delta(F_1, F_1') = \delta(G_1, G_1')$；

(ii) 若 $\ell(F_1') \leq \ell(G_1')$，则 $\gamma(F_1, F_1') \leq \gamma(G_1, G_1')$；若 $\ell(F_1') = \ell(G_1')$，则 $\gamma(F_1, F_1') = \gamma(G_1, G_1')$。

证明。由于 $F_1 < F_1', G_1 < G_1'$ 且 max F_1' =max G_1'，由命题 3.4 和注 4.12 可得

$$\delta(F_1, F_1') = \delta(G_1, G_1'),$$

且对每个 $i \in [s']$,

$$\alpha_i(F_1, F_1') = \alpha_i(G_1, G_1'). \tag{11}$$

注意到

$$|F_1' \setminus F_1'^{\mathrm{t}}| + \ell(F_1') = |G_1' \setminus G_1'^{\mathrm{t}}| + \ell(G_1') = k_1. \tag{12}$$

若 $\ell(F_1') \leq \ell(G_1')$，则对每个 $i \in [s'+1, s]$，由命题 5.3 和式 (12) 可得 at

$$\alpha_i(F_1, F_1') = \binom{\ell(F_1')}{k_i - |F_1' \setminus F_1'^{\mathrm{t}}|} \leq \binom{\ell(G_1')}{k_i - |G_1' \setminus G_1'^{\mathrm{t}}|} = \alpha_i(G_1, G_1'). \tag{13}$$

结合 (11) 和 (13)，我们得到

$$\gamma(F_1, F_1') = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i(F_1, F_1') \leq \sum_{i=1}^{s} \alpha_i(G_1, G_1') = \gamma(G_1, G_1'), \tag{14}$$

如所需。此外，若 $\ell(F_1') = \ell(G_1')$，则 (13) 中取等号，因此 (14) 中也取等号。命题 5.4 的证明至此完成。 □

命题 *5.5.* 设 s, s', t 为整数，满足 $s > s' \geq 1$, $t \geq s+1$, $k_1 = \cdots = k_{s'} > k_{s'+1} \geq \cdots \geq k_t$ 且 $k_1 + k_{s+1} \leq n < k_{s-1} + k_s$。设 $d \geq 1$ 且 $A_1, B_1, C_1, D_1 \in \mathcal{R}_1$。假设 A_1, B_1 是 d-顺序的，且 C_1, D_1 是 d-顺序的，并且 *max* A_1 =*max* C_1 且 *max* B_1 =*max* D_1。那么 $\gamma(A_1, B_1) = \gamma(C_1, D_1)$，且 $\delta(A_1, B_1) = \delta(C_1, D_1)$。特别地，若 $A_1 \xrightarrow{d} B_1$, $C_1 \xrightarrow{d} D_1$ 且 *max* A_1 =*max* C_1，则 $\gamma(A_1, B_1) = \gamma(C_1, D_1)$，且 $\delta(A_1, B_1) = \delta(C_1, D_1)$。

证明。根据 A_1, B_1, C_1, D_1 的定义，由引理 3.6 和注 4.12 可知，对于每个 $i \in [s']$，$\delta(A_1, B_1) = \delta(C_1, D_1)$ 且 $\alpha_i(A_1, B_1) = \alpha_i(C_1, D_1)$ 成立。接下来，只需证明对于每个 $i \in [s'+1, s]$，$\alpha_i(A_1, B_1) = \alpha_i(C_1, D_1)$。令 $i \in [s'+1, s]$。记

$$\mathcal{A} = \left\{R \in \binom{[n]}{k_1} : A_1 \prec R \prec B_1\right\},$$

$$\mathcal{B}=\Big\{T\in\binom{[n]}{k_1}:C_1\prec T\prec D_1\Big\}.$$

由于 $\alpha_1(A_1,B_1)=\alpha_1(C_1,D_1)$，$|\mathcal{A}|=|\mathcal{B}|=:h$。令 $\mathcal{A}=\{R_1,R_2,\dots,R_h\}$ 和 $\mathcal{B}=\{T_1,T_2,\dots,T_h\}$，其中 $R_1\prec R_2\prec\cdots\prec R_h$ 和 $T_1\prec T_2\prec\cdots\prec T_h$。对于任意 $j\in[h]$，有 $\ell(R_j)=\ell(T_j)$ 且 $|R_j\setminus R_j^{\mathrm{t}}|=|T_j\setminus T_j^{\mathrm{t}}|$。因此，根据命题 5.3，对于任意 $j\in[h-1]$，$\alpha_i(R_j,R_{j+1})=\alpha_i(T_j,T_{j+1})$。此外，根据注 5.1，我们得出

$$\alpha_i(A_1,B_1)=\sum_{j\in[h-1]}\alpha_i(R_j,R_{j+1})=\sum_{j\in[h-1]}\alpha_i(T_j,T_{j+1})=\alpha_i(C_1,D_1),$$

如所要求。 □

现在，我们准备证明引理 4.16。

引理 4.16 的证明。根据 A_1、B_1 和 C_1 的定义，我们有 $\ell(C_1)\geq\ell(B_1)>\ell(A_1)\geq 0$。因此 $\max B_1=\max C_1=n$。若 $\ell(C_1)>\ell(B_1)$，则 $A_1<B_1<C_1$；根据命题 5.4，我们有 $\delta(A_1,B_1)=\delta(B_1,C_1)$ 且 $\gamma(A_1,B_1)\leq\gamma(B_1,C_1)$，从而得证。接下来不妨设 $\ell(C_1)=\ell(B_1)$。令 A_1' 和 B_1' 为满足 $A_1<A_1'$ 和 $B_1<B_1'$ 的 k_1-集。于是 $\max A_1'=\max B_1'$，$\max B_1=\max C_1=n$。注意到，$\ell(C_1)=\ell(B_1)$ 蕴含 $A_1<B_1<C_1$ 不会发生。因此，$A_1'\neq B_1$ 和 $B_1'\neq C_1$，以及 A_1'、B_1 是 $(\ell(A_1)+1)$-顺序的，B_1'、C_1 是 $(\ell(A_1)+1)$-顺序的。根据命题 5.5，$\gamma(A_1',B_1)=\gamma(B_1',C_1)$ 且 $\delta(A_1',B_1)=\delta(B_1',C_1)$。由于 $A_1<A_1'$ 和 $B_1<B_1'$ 且 $\max A_1'=\max B_1'$，根据命题 5.4，$\gamma(A_1,A_1')\leq\gamma(B_1,B_1')$ 且 $\delta(A_1,A_1')=\delta(B_1,B_1')$。鉴于注 5.1，我们有

$$\begin{aligned}\gamma(A_1,B_1)&=\gamma(A_1,A_1')+\gamma(A_1',B_1)\leq\gamma(B_1,B_1')+\gamma(B_1',C_1)=\gamma(B_1,C_1),\\ \delta(A_1,B_1)&=\delta(A_1,A_1')+\delta(A_1',B_1)=\delta(B_1,B_1')+\delta(B_1',C_1)=\delta(B_1,C_1),\end{aligned}$$

如所需。 □

6 致谢

我们感谢安德烈·库普瓦斯基提出的许多有益意见和建议。

参考文献

[1] R. Ahlswede, L.H. Khachatrian，有限集系统的完全交定理，《European J. Combin.》18 (2) (1997) 125–136。[2] P. Borg, C. Feghali，集合的子集的交叉相交族的大小总和的最大值，《离散数学》345 (2022)，第 112981 号。[3] I. Dinur, S. Safra，关于近似最小顶点覆盖的困难性，《数学年刊》162 (2005) 439–485。[4] D. Ellis，极值组合学中的交问题：新旧定理、技巧与问题，（2021），arXiv:2107.06371v8。[5] P. Erd˝os, C. Ko, R. Rado，有限集系统的交定理，《牛津数学季刊》2 (12) (1961) 313–320。[6] P. Frankl，关于非平凡交叉相交族大小总和的最大值，Combinatorica 44 (1) (2024) 15–35。

[7] P. Frankl, A. Kupavskii, $\{0,1\}$-向量的 Erd˝os–Ko–Rado 定理，组合理论杂志 A 辑 155 (2018)，157–179。[8] P. Frankl, A. Kupavskii，关于不相交交叉相交族的尖锐结果，《European J. Combin.》86 (2020) 103089。[9] P. Frankl, N. Tokushige，关于交叉相交族的一些最佳可能不等式，组合理论杂志 A 辑 61 (1992) 87–97。[10] P. Frankl, N. Tokushige，关于交叉相交族的一些不等式，组合学、概率与计算 7 (3) (1998) 247–260。[11] P. Frankl, N. Tokushige，有限集交问题导论，组合理论杂志 A 辑 144 (2016) 157–211。[12] P. Frankl, J. Wang，希尔顿–米尔纳定理的乘积版本，组合理论杂志 A 辑 200 (2023)，第 105791 号。[13] P. Frankl, J. Wang，关于相交族最大多样性的改进界，《European J. Combin.》118 (2024)，第 103885 号。[14] Y. Huang, Y. Peng, J. Wang，非空两两交叉相交族的大小总和的最大值，J. Combin. Theory Ser. B 178 (2026) 145–163。[15] Y. Huang, Y. Peng，非空两两交叉相交族，组合理论杂志 A 辑 211 (2025)，第 105981 号。[16] Y. Huang, Y. Peng，最大两两交叉相交族的完整解答（II），（2025），准备中。[17] A.J.W. Hilton, E.C. Milner，有限集系统的一些交定理，《牛津数学季刊》2 (18) (1967年) 369–384。[18]A.J.W. Hilton，带度条件的 Erd˝os–Ko–Rado 定理，未发表手稿，1976。[19] A.J.W. Hilton，有限集子集族集合的一个交定理，《伦敦数学学会杂志》2 (1977) 369–376。[20] G.O.H. Katona，有限集的一个定理，载于：图论，蒂哈尼讨论会论文集，Akad´emai Kiad´o，（1968）187–207。[21] N. Keller, N. Lifshitz，超图的 Junta 方法与 Erd˝os-Chv´atal 单纯形猜想，《Adv. Math.》392 (2021) 107991。[22] J.B. Kruskal，复形中的单纯形数量，载于：数学优化技术，加州大学出版社，（1963）251–278。[23] A. Kupavskii，大型相交族的结构与性质，arXiv:1810.00920。[24] C. Shi, P. Frankl, J. Qian，关于非空交叉相交族，Combinatorica，42 (2022) 1513–1525。[25] J. Wang, H. Zhang，二分图的非平凡独立集与交叉相交族，J. Combin. Theory, Ser. A 120 (2013) 129–141。[26] Y. Wu, L. Feng, Y. Li，半捆绑交叉相交族的一个结果，Adv. in Applied Math. 169 (2025)，第 102912 号。

[27] M. Zhang，T. Feng，关于非空交叉相交族的一则注记，European J. Combin. 120 (2024) 103968。