排版后的文章将在此处显示与文章类型相符的横幅

arXiv:2601.01934v1 [physics.flu-dyn] 5 Jan 2026

旋转球壳中由天平动驱动的纬向流：周期特征路径的情形

Xu Chang[1]†, Jiyang He[1,2], Benjamin Favier[1],和St´ephane Le Diz`es[1]

[1]艾克斯-马赛大学、法国国家科学研究中心、Centrale Med、IRPHE，法国马赛[2]海洋科学系，香港科技大学，中国香港

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

本研究探讨球壳内核经向天平动所诱发的内部剪切层与平均纬向流的弱非线性动力学。在 He 等人（《流体力学杂志》，第 939 卷，2022 年，A3）关于线性动力学的研究基础上，我们采用类似的设置，结合渐近理论与数值计算，探索非线性区域，并将埃克曼数降至 $E = 10^{-10}$。我们引入特定的强迫频率 $\widehat{\omega} = \sqrt{2}\widehat{\Omega}$，其中 $\widehat{\Omega}$ 表示旋转速率，以生成从临界纬度发出的惯性波束所对应的闭合矩形特征线轨迹。我们的方法拓展了 Le Diz`es（《流体力学杂志》，第 899 卷，2020 年，A21）此前的研究结果，并揭示非线性相互作用主要局限于波束在边界反射的区域附近。我们推导出描述非线性相互作用的具体标度律：相互作用区域的宽度按 $E^{1/3}$ 标度变化，而由此产生的平均纬向流振幅通常按 $E^{1/6}$ 标度变化。然而，在自相似解奇异性更为显著的旋转轴附近，振幅则按 $E^{-1/2}$ 标度变化。此外，我们还考察了遵循不同标度律的波束之间的非线性相互作用。通过与数值结果比较，我们验证了渐近框架的理论预测，并观察到随着埃克曼数减小，二者符合良好。

1. 引言

由引力相互作用产生的天平动、岁差和潮汐等机械力，对于在天体物理和地球物理天体内部产生复杂的流体流动至关重要（Le Bars 等，2015）。在土卫二等天体的地下海洋中，这类驱动会引发动力学过程，而这些过程对于理解此类天体的内部结构至关重要（Noir 等，2009；Thomas 等，2016；Soderlund 等，2024）。天平动驱动湍流产生的能量耗散可能提供维持这些地下海洋的热源，而天平动也被提出作为驱动行星发电机的一种潜在机制（Le Bars 等，2011；Wu & Roberts 2013；Reddy等，2018；Wilson & Kerswell 2018）。在地球海洋中，潮汐流与超临界地形的相互作用是产生强烈而集中的内波束的重要源点，而内波束在潮汐转换中发挥着关键作用（Smith & Young 2003；Balmforth & Peacock 2009；Echeverri & Peacock 2010）。

† 通讯邮箱：xu.chang@univ-amu.fr

摘要不得延伸至第 2 页

在旋转流体中，当外部强迫频率低于旋转频率的两倍时，可在存在规则惯性模态的容器中激发平滑的惯性模态（Greenspan 1968）。然而，在球壳等几何结构中，动力学会变得更加复杂，因为规则惯性模态通常并不存在。相反，振荡黏性集中边界层奇异性会在临界纬度处产生惯性波束（Kerswell 1995；Rieutord & Valdettaro 1997）。早期研究表明，此类波束可由自相似解很好地描述（Moore & Saffman 1969；Thomas & Stevenson 1972）。这些解已被推广至更复杂的情形，例如涉及波束反射或称为吸引子的极限环的情形（Maas 等 1997；Rieutord 等 2001；Le Diz`es & Le Bars 2017）。He 等(2022)拓展了 Le Diz`es & Le Bars (2017) 的工作，通过将线性谐波速度写成许多自相似波束之和，推导出其渐近显式表达式，并将研究推广至球壳这类封闭域。

转向非线性现象时，波束之间的相互作用会带来复杂性，尤其是在波束相交或发生反射时。这类相互作用可能产生平均流和二次谐波修正项。例如，同频波束因反射而相互作用时，会产生显著的平均纬向流和谐波效应（Tabaei & Akylas 2003；Tabaei等2005；Peacock & Tabaei 2005）。这些非线性过程尤为明显地体现为平均纬向流的形成，相关现象已通过实验和数值研究得到广泛记录（Tilgner 2007；Sauret & Le Diz`es 2013；Favier 等2014）。先前研究表明，在不存在惯性波时，黏性边界层内的非线性相互作用能够驱动纬向流。这些流动的特征受到天平动振幅的强烈影响，但基本上与埃克曼数无关，且仅取决于柱坐标变量 $r$（Busse 2010；Sauret & Le Diz`es 2013）。平均流的主要贡献来自主体区域，表现为方位流，其标度为 ϵ^2，其中ϵ 表示小振荡振幅。然而，当天平动频率低于旋转速率的两倍时，惯性波便可能被激发，此时产生的相互作用会变得更加复杂，并影响平均纬向流的结构和行为。在封闭区域的流体动力学研究中，这种复杂的相互作用仍是一项重大挑战，因为波的反射和相互作用可能改变流体的基本行为（C´ebron 等 2021）。

与本研究尤为相关的是，Tilgner（2007）探讨了旋转球壳内受振荡潮汐模态影响的平均流动力学。他的研究发现，雷诺应力主要集中在波束路径上，并在反射点和波束交叉点处达到峰值。在随后对旋转流体和分层流体中薄黏性波束在平坦边界上的反射进行的研究中，Le Diz`es（2020）发现，当天平动频率 ω 小于旋转速率 Ω （$\omega < \Omega$）时，反射过程会同时产生二次谐波修正和平均流修正。在除局部相互作用区域以外的大部分区域内，二次谐波波束的振幅都大于平均流修正。

Le Diz`es（2020）指出，波束反射结构具有特征宽度标度 $E^{1/3}$，并在 $O(E^{1/6})$ 修正下保持自相似性，其中 E 是埃克曼数。对于纯分层流体或旋转流体的情形，平均流修正的振幅为 $\epsilon^2 E^{-1/6}$；但当边界为水平或垂直时，局部平均流修正呈现出独特的三层结构，其中包含显著的 $O(E^{4/9})$ 黏性层。Lin & Noir（2021）近期开展的研究聚焦于球壳中内核边界受天平动强迫时非线性平均流的数值分析。他们观察到，

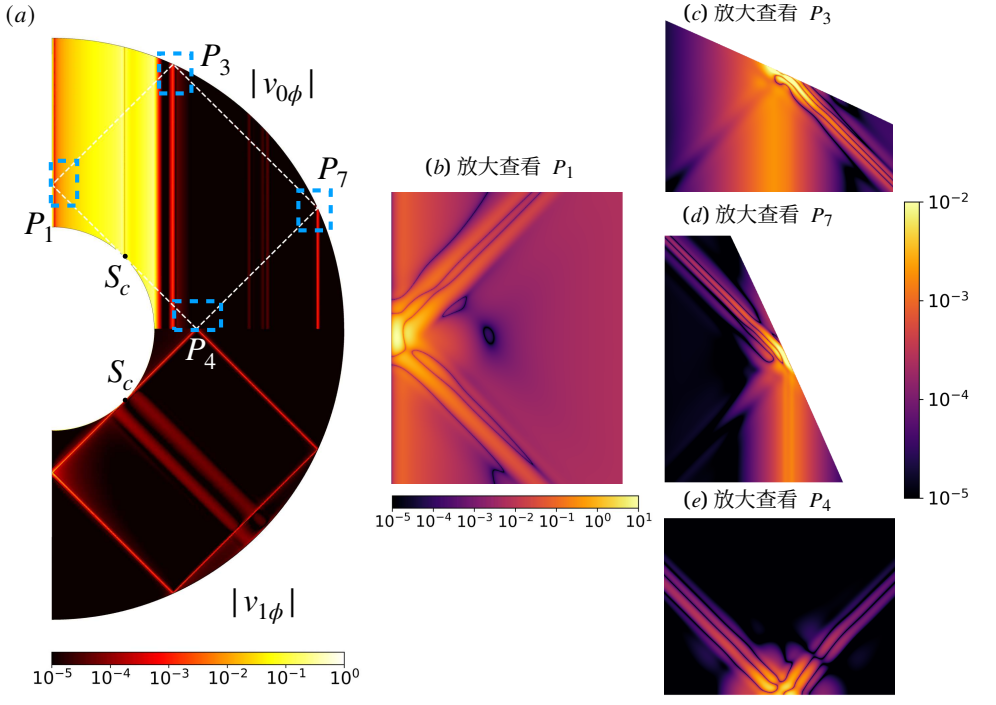

图1：(*a*) 平均流方位角速度振幅 $|v_{0\phi}|$（上半部分）和线性谐波解 $|v_{1\phi}|$（下半部分）的等值线，对应于 $E = 10^{-10}$。谐波解和平均流修正分别以 ε 和 ε^2 归一化，其中 ε 为天平动振幅（见方程（2.2））。临界纬度标记在 S_c 处，其柱坐标为（$\eta\sqrt{1-\omega^2}/4$，~~$\eta\omega/2$~~）。球壳的纵横比为 $\eta = 0.35$，内核的天平动频率为 $\omega = \sqrt{2}$。白色虚线表示从临界纬度发出的特征线的路径。(*b*)–(*e*) 分别为位于 P_1、P_3、P_7 和 P_4 的相互作用点的放大区域。

平均流修正仍局限于反射点附近，其标度约为 $E^{-1/6}$。他们还发现了主体流中的多个带状结构，这些结构与反射点的位置直接对应。然而，理论预测与数值结果之间存在差异，尤其是在埃克曼数增大时，平均流振幅略有增加这一点上。

本文将研究拓展至受内核边界天平动强迫的旋转球壳中的非线性平均流。我们的目标是利用球壳内的线性自相似解，建立一个用于处理平均流修正的理论框架。这需要推广 Le Diz`es（2020）先前的结果，并通过数值积分验证平均流的标度。为便于说明，图1(a) 展示了低埃克曼数 $E = 10^{-10}$下，由内核天平动诱发的球壳内部剪切层及其对应的平均流。我们首先通过直接数值积分线性黏性控制方程，计算线性谐波速度场；随后，基于该速度场，采用伪谱方法计算平均流。对相互作用区域的详细分析表明，如图1(b)-(e)所示，这些区域中的平均流修正显著大于外部区域和主体流带中的修正。这些高振幅区域尤为值得关注，因此我们致力于发展渐近理论，以刻画这些特定区域中的平均流修正。

这种结构 本文的结构如下：第2 节介绍问题的构型和设

置。第2.1 节概述基本方程。在第2.2节中，我们回顾用于求解线性谐波控制方程的数值方法，并将这些方法扩展到非线性平均流问题。第3 节重新审视渐近理论，考察自相似解和标度律。该节还概述了此构型下线性谐波解的结构，并给出相互作用最强点附近该解的近似。第4 节和5节讨论平均流修正。首先，在§4.1节中，我们将数值结果与振荡边界层所产生贡献的已知预测进行比较。随后，我们考察周期光束上的非线性相互作用，尤其是相互作用最强的位置：轴上以及边界上的反射点（§4.2）。我们推导渐近表达式，并将其与数值结果进行比较。在§5节中，我们重点研究强相互作用点产生的平均流带状结构。我们利用可针对这些结构推导出的渐近方案（附录§C），通过数值分析这些带区内解的标度和形式。最后，论文在第6节总结主要发现，并讨论其对其他构型的意义。

2. 理论框架

本文研究一种不可压缩流体的动力学，该流体具有恒定的运动黏度 ν，充满一个球壳，并以恒定速率 Ω绕轴 $\mathbf{e}_z$ 旋转。如图 2(a)所示，流动还受到内核天平动的影响。内核以小振幅 $\widehat{\varepsilon}$ 和频率 $\widehat{\omega} = \sqrt{2}\widehat{\Omega}$发生天平动，相对于旋转系统，其角速度为 $\widehat{\varepsilon}\cos(\widehat{\omega}t)$。按照 He 等（2022）的构型，内、外球形内核的半径分别为 $\widehat{\rho}_i$ 和 $\widehat{\rho}_o$，纵横比为 $\eta = \widehat{\rho}_o/\widehat{\rho}_i = 0.35$，以形成类地球比例。时间和空间分别使用旋转速率的倒数 $1/\Omega$以及球壳的外球半径 $\widehat{\rho}_o$ 进行无量纲化。因此，无量纲内核半径为 η。外核和内核的无量纲角速度分别为 1 和 $1+\varepsilon\cos\ \omega t$，天平动振幅为 $\varepsilon = \widehat{\varepsilon}/\Omega$，频率为 $\omega = \widehat{\omega}/\Omega$。

2.1. 基本方程

在旋转参考系中，以柱坐标表示的速度 $\mathbf{V} = (v_r, v_\phi, v_z)$ 和压力 P 由以下方程支配

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} + 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{V} = -\nabla P + E\nabla^2\mathbf{V}\,, \tag{2.1a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0\,, \tag{2.1b}$$

其中 E 为埃克曼数，定义为 $E = \nu/\widehat{\Omega}\widehat{\rho}_o^2$。

与 He 等人（2022）仅通过省略方程（2.1a）中的平流项来研究线性特性不同，本研究将探讨非线性区域。我们对速度 $\mathbf{V}$ 和压力 P进行如下渐近展开：

$$(\mathbf{V}, P) = \varepsilon(\mathbf{v}_1, p_1)e^{-\mathrm{i}\omega t} + \varepsilon^2\left[(\mathbf{v}_0, p_0) + (\mathbf{v}_2, p_2)e^{-2\mathrm{i}\omega t}\right] + \text{c.c}, \tag{2.2}$$

其中，c.c 表示复共轭，$(\mathbf{v}1, p_1)$ 为线性谐波，$(\mathbf{v}0, p_0)$ 为平均流修正，而 $(\mathbf{v}2, p_2)$ 为次级谐波速度。本文仅关注平均流修正。

三个步骤 需要计算平均流修正。首先，与 He *et a* 类似 *l.*

“流体聚焦”文章不得超过此页数

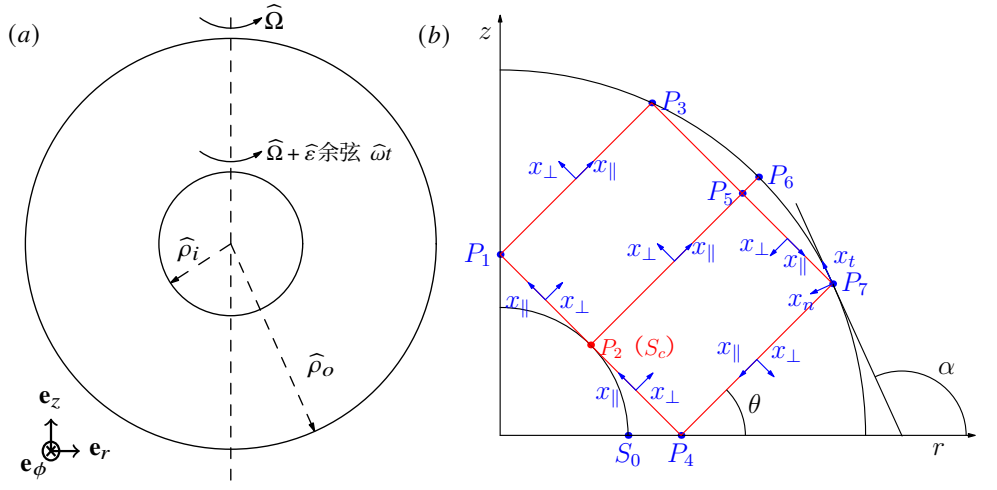

图 2：问题示意图：(*a*) 同心壳层的外半径为 $\widehat{\rho}_o$，并以角速度 $\widehat{\Omega}$旋转；内半径为 $\widehat{\rho}_i$，并以角速度 $\Omega+\widehat{\varepsilon}\cos\,\widehat{\omega}t$ 旋转，天平动的振幅为 $\widehat{\varepsilon}$，频率为 $\widehat{\omega}$；(*b*) 沿向北方向定义了一个局部坐标系。红线表示临界线，而 $x_\parallel$ 和 $x_\perp$ 是局部坐标。向南方向与向北方向相反。

(2022)，通过求解可得到线性响应

$$-\mathrm{i}\omega\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{e}_z\times\mathbf{v}_1 = -\nabla p_1 + E\nabla^2\mathbf{v}_1\,, \tag{2.3a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}_1 = 0\,, \tag{2.3b}$$

$$\text{Inner boundary condition:}\quad \mathbf{v}_1 = r\mathbf{e}_\phi\,, \tag{2.3c}$$

$$\text{Outer boundary condition:}\quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}\,. \tag{2.3d}$$

得到线性谐波速度 $\mathbf{v}_1$ 后，即可在主导阶计算其自相互作用对应的非线性项。由此得到的雷诺应力包含两部分：稳态强迫和以 2ω 振荡的二次谐波。本文将雷诺应力张量的散度（它提供平均流强迫）简称为“雷诺应力”。由于本研究关注平均流，我们只考虑稳态雷诺应力 N_0

$$\mathcal{N}_0 = \mathbf{v}_1\cdot\nabla\mathbf{v}_1^* + \text{c.c}\,, \tag{2.4}$$

其中，* 表示复共轭。平均流响应 $\mathbf{v}_0$ 对应于频率为零的扰动 $\omega = 0$，并由以下线性受迫系统控制：

$$2\mathbf{e}_z\times\mathbf{v}_0 + \nabla p_0 = -\mathcal{N}_0 + E\nabla^2\mathbf{v}_0\,, \tag{2.5a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}_0 = 0\,, \tag{2.5b}$$

$$\text{Inner and outer boundary condition:}\quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}\,. \tag{2.5c}$$

其中，强迫项 N_0 源自线性谐波 v_1的非线性自相互作用。

2.2. 数值方法

为求解第2.1 节概述的方程，并通过渐近分析验证理论预测，我们采用高精度谱方法进行数值积分。此前，Rieutord与Valdettaro（1997）和He等人（2022）曾使用这些方法求解线性控制方程（2.3），这些方法使我们能够捕捉线性

谐波速度剖面$\mathbf{v}_1$如图1（a）所示。我们寻求线性控制方程（2.3*a*）的解，并将其写成涡量形式：

$$-\mathrm{i}\omega\nabla\times\mathbf{v}_1+2\nabla\times(\mathbf{e}_z\times\mathbf{v}_1)=E\nabla\times(\nabla^2\mathbf{v}_1)\,. \tag{2.6}$$

对于这个三维问题，我们采用球坐标（ρ，θ，ϕ），分别表示径向、极向和方位向。速度场在极向和方位向上用球谐函数展开，在径向上用切比雪夫多项式展开：

$$\mathbf{v}_1=\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{+l}u_m^l(\rho)\mathbf{R}_l^m+v_m^l(\rho)\mathbf{S}_l^m+w_m^l(\rho)\mathbf{T}_l^m\,, \tag{2.7}$$

其中，

$$\mathbf{R}_l^m=Y_l^m(\theta,\phi)\mathbf{e}_\rho,\quad \mathbf{S}_l^m=\nabla Y_l^m,\quad \mathbf{T}_l^m=\nabla\times\mathbf{R}_l^m\,. \tag{2.8}$$

将涡量方程（2.6）投影到该基底上，即可使用块三对角算法求解线性方程组。在本文的研究中，我们假设流体响应为轴对称，并在球壳边界上采用无滑移边界条件。对于有兴趣了解更多细节的读者，He 等人（2022）和 He等人（2023）对数值方法及方程组的构建作了详细介绍。

数值求得线性谐波响应后，我们采用伪谱方法计算稳态雷诺应力。随后，求解控制方程（2.5），以确定平均流速 $\mathbf{v}_0$,，如图1（a）所示。平均纬向流的非线性涡量方程表示为

$$2\nabla\times(\mathbf{e}_z\times\mathbf{v}_0)=-\nabla\times(\mathbf{v}_1\cdot\nabla\mathbf{v}_1^*+\mathrm{c.c})+E\nabla\times\nabla^2\mathbf{v}_0\,. \tag{2.9}$$

伪谱数值流程的详细信息见附录A，并如图所示24。我们还研究了这一非线性设置中可能存在的混叠问题，发现无论是否进行去混叠，对结果都没有显著影响。因此，本文讨论的所有结果均未进行去混叠处理。附录A 进一步展示了模拟的收敛性，并在本附录的表1中列出了不同埃克曼数对应的数值分辨率。需要指出的是，为确保非线性模拟和纯线性分析具有相似的收敛特性，前者所需的分辨率高于后者。

3. 谐波解的渐近描述

正如 Moore 和 Saffman（1969）首先证明的那样，在埃克曼数较小的极限下，局部奇异性的传播和黏性平滑可用一个自相似解来描述。这种黏性平滑使波束速度的主要分量呈现出自相似表达式。需要注意的是，源自临界纬度的集中波束与沿临界射线的无黏奇异性相关，正如 Le Diz`es（2024）所指出的那样。

在所讨论的情形中，假设集中波束射线从临界纬度奇异点发出，该处边界与惯性波传播方向局部相切，记为 $S_c(r,\ z)=(\eta\sqrt{1-\omega^2}/4,\ \eta\omega/2)$，并沿两个不同方向传播：顺时针方向（即向北方向）沿路径$S_c\to P_1\to P_3\to P_7\to P_4\to S_c$传播，逆时针方向则称为向南方向。如图2(b)所示，P_1 是特征路径穿过旋转轴的点，P_3 和 P_7 是外边界上的反射点，而 P_4 位于

赤道处，两束波束在此交叉。引入局部坐标系 ($x_\parallel$, $x_\perp$) 来局部描述波束的渐近结构，其中$x_\parallel$ 表示距位于临界纬度点 S_c处源点的距离， $x_\perp$ 表示垂直于波束传播方向测得的距离。为简便起见，假设传播方向的符号不变。考虑向南传播时，相应局部坐标系的方向反转。

在接下来的小节中，我们将给出平均流修正变得显著的各个区域内谐波解的表达式。我们首先回顾 He 等人（2022）关于特征路径的研究结果，然后给出各个相互作用区域附近的渐近表达式。

3.1. 自相似解与标度

对于谐波解，局域集中的波束沿波束射线传播，其宽度为常数，量级为 $E^{1/3}$。Le Diz`es 和 Le Bars（2017）以及 He 等人（2022）采用 Moore 和 Saffman（1969）给出的自相似波束解，描述主导阶下沿波束传播方向的速度 $v_{1\parallel}$，

$$v_{1\parallel} \sim \frac{1}{\sqrt{r}} C_0 H_m(x_\parallel, x_\perp) = \frac{1}{\sqrt{r}} C_0 \left(\frac{x_\parallel}{2\sin\theta}\right)^{-m/3} h_m(\zeta)\,. \tag{3.1}$$

特殊函数 $h_m(\zeta)$ 为，

$$h_m(\zeta) = \frac{e^{-\mathrm{i}m\pi/2}}{(m-1)!}\int_0^{+\infty} e^{\mathrm{i}p\zeta - p^3} p^{m-1} dp\,, \tag{3.2}$$

其中相似变量为，

$$\zeta = \frac{x_\perp}{E^{1/3}}\left(\frac{2\sin\theta}{x_\parallel}\right)^{1/3}\,. \tag{3.3}$$

θ 是惯性波传播方向与赤道面之间的夹角，其中 $\theta = \pi/4$ 使我们的构型中能够形成简单的闭合波路（见图2(b)）。该角度还定义了内部剪切层相对于赤道面的倾角，天平动频率为 $\omega = 2\cos\theta$。函数 m 的指标$h_m(\zeta)$表征导致波束形成的奇异性的性质（Moore 和 Saffman 1969；Thomas 和 Stevenson 1972），复振幅 C_0则表示该奇异性的振幅。LeDiz *m*es（2020）简要回顾了不同构型对应的指标`。具体而言，对于任意轴对称凸天平动物体，例如本研究所考虑的内球，Le Diz`es 和 Le Bars（2017）通过将相似解与临界纬度附近的边界层解匹配，确定了数值 $m = 5/4$ 和 C_0，从而得到

$$C_0^N = E^{1/12}\tilde{C}_0^N = E^{1/12}\frac{e^{\mathrm{i}\pi/2}}{8(2\sin\theta)^{3/4}}, \quad \text{northward ray}\,, \tag{3.4a}$$

$$C_0^S = E^{1/12}\tilde{C}_0^S = E^{1/12}\frac{e^{\mathrm{i}3\pi/4}}{8(2\sin\theta)^{3/4}}, \quad \text{southward ray}\,. \tag{3.4b}$$

表达式（3.1）描述了主要的速度分量。在（r， z）平面上，还存在一个沿$\mathbf{e}_\perp$ 方向的分量，它 $O(E^{1/3})$ 较小。

如方程（3.4）所示，在渐近理论中，速度振幅按 $E^{1/12}$ 进行标度变化。研究观察到，球壳内的内部剪切层在边界上发生反射后仍保持其自相似结构，并在此过程中发生收缩或扩张。研究特别关注了这些剪切层如何沿着一条

周期性矩形路径在天平动强迫的特定频率下传播（He 等2022）。此外，研究发现，在旋转轴上的反射会引起相移，从而有助于描述波束叠加的求和过程收敛。速度分量的最终表达式由这些自相似解推导得到，在（r，z）平面中可简洁表示为：

$$\mathbf{v}_{1_{2D}} \sim \frac{E^{1/12}}{\sqrt{r}}(\tilde{C}_0^N G_m(x_\perp^N, x_\parallel^N, L^N)\mathbf{e}_\parallel^N + \tilde{C}_0^S G_m(x_\perp^S, x_\parallel^S, L^S)\mathbf{e}_\parallel^S)\,. \tag{3.5}$$

其中，新函数 G_m 定义为

$$G_m(x_\perp, x_\parallel, L) = \left(\frac{x_\parallel}{2\sin\theta}\right)^{-m/3} g_m(\zeta, L/x_\parallel)\,, \tag{3.6a}$$

$$g_m(\zeta, L/x_\parallel) = \frac{e^{-\mathrm{i}m\pi/2}}{(m-1)!}\int_0^\infty \frac{e^{\mathrm{i}p\zeta - p^3} p^{m-1}}{1-\mathrm{i}e^{-p^3 L/x_\parallel}}dp\,. \tag{3.6b}$$

这里，L 表示沿矩形特征路径传播一个周期的累积传播距离（显式形式见附录B，方程（B1））。

与方程（*3.2*）中的函数h_m 相比，g_m 的分母来自波束求和，而“i”因子则来自轴上反射所引起的相移。注意$\mathbf{e}_\parallel^S = -\mathbf{e}_\parallel^N$。

表达式（3.5描述了矩形回路上的解 $P_1P_3P_7P_4$。正如 He 等人（2022）所述，由于内核反射，在 S_c 与 P_6 之间还存在一束较弱的次级波束。该次级波束的宽度标度为 $E^{1/6}$，这表明其横向尺度相对较大，在此尺度上黏性扩散可忽略不计。因此，波束的平行速度分量$v_{1\parallel}$ 沿其路径保持恒定。此外，该波束的振幅按 $E^{1/4}$标度变化，远小于主波束上解的振幅。波束沿线的速度剖面可渐近地描述为

$$\mathbf{v}_{1_{2D}} \sim \frac{E^{1/4}}{\sqrt{r}}(\tilde{C}_0^N \check{F}_m(\check{x}_\perp^N, \lambda^N)\mathbf{e}_\parallel^N + \tilde{C}_0^S \check{F}_m(\check{x}_\perp^S, \lambda^S)\mathbf{e}_\parallel^S) \tag{3.7}$$

其中

$$\check{F}_m(\check{x}_\perp, \lambda) = \frac{\check{x}_\perp}{\sqrt{2}}\frac{e^{-\mathrm{i}m\pi/2}}{(m-1)!}\int_0^\infty e^{\mathrm{i}p\lambda(\check{x}_\perp)^2}\frac{e^{-p^3L/\sqrt{2}}p^{m-1}}{1-\mathrm{i}e^{-p^3L/\sqrt{2}}}dp\,, \tag{3.8}$$

其中 $\lambda^N = -\sqrt{2}/4$、$\lambda^S = \sqrt{2}/4$，且 $\check{x}_\perp = x_\perp/E^{1/6}$。

关于该渐近解与线性谐波黏性问题的数值解之间的详细比较，可见 He等（2022）。

方位角速度 $v_{1\phi}$ 可由 $v_{1\parallel}$ 利用下式直接求得

$$v_{1\phi} \sim \pm\mathrm{i}v_{1\parallel}\,, \tag{3.9}$$

其中，正号（分别地，负号）对应于$\mathbf{e}_\parallel$ 与$\mathbf{e}_r$之间的钝角（分别地，锐角）。该方程还表明，当 $\theta = \pi/4$ 时，

$$v_{1\phi} \sim -\sqrt{2}\mathrm{i}v_{1r}. \tag{3.10}$$

由（3.5）和（3.7）定义的速度场，对于 $\theta = \pi/4$，也满足这一显著性质

$$\frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \sim -\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}. \tag{3.11}$$

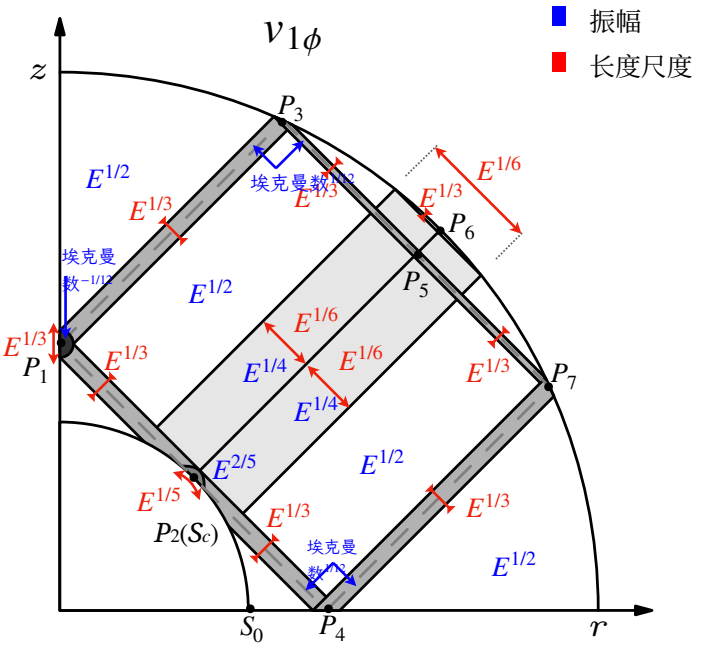

图3：线性谐波解的方位角速度$v_{1\phi}$的埃克曼标度，改编自 He 等人（2022）图4；振幅和长度尺度分别以蓝色和红色表示。

方程（3.9）、（3.10）和（3.11）中的符号 $\sim$ 应理解为等式成立至 $E^{1/3}$ 阶修正项。我们将在下文看到这些方程对于简化雷诺应力表达式的重要性。

关于向北和向南射线传播路径的局部坐标系关系，以及不同波束振幅的更多详细信息，请参见附录B中的表2和表3。下文中，我们通常会将参数m 设为未指定，以展示各种表达式对该参数的依赖关系，但需要注意的是，在本文的分析中 m 和 θ 实际上分别固定为 $m = 5/4$ 和 $\theta = \pi/4$。

图3 展示了渐近分析线性部分推导出的标度行为。在该图中，波束宽度标度以红色表示，振幅标度以蓝色表示。具体而言，主波束的特征是其波束宽度按 $E^{1/3}$ 标度，振幅按 $E^{1/12}$标度。非线性平均流对应的标度将在结果部分5中讨论。

3.2. P_3、 P_4 和 P_7附近的谐波解

波束在相互作用点处反射于外边界 P_3 和 P_7，而两束波在赤道面上的 P_4处相交，见图2(b)。为了描述这些点附近的解，引入局部变量是很方便的

$$\tilde{r}_\beta = \frac{r - r_{P_\beta}}{E^{1/3}}, \quad \tilde{z}_\beta = \frac{z - z_{P_\beta}}{E^{1/3}}, \tag{3.12}$$

并用这些局部变量表示波束的变量 $x_\perp$ 和 $x_\parallel$ 。向北和向南的波束都包含两部分：入射波束对应于到达 P_β 的波束，反射波束对应于离开 P_β 的波束。请注意，点 P_4 不在边界上，但解关于赤道的对称性使波束看起来像是在水平面上发生了反射。我们将采用简洁的记号

用 $\tilde{B}_\beta^{Ni}$、$\tilde{B}_\beta^{Nr}$、$\tilde{B}_\beta^{Si}$、$\tilde{B}_\beta^{Sr}$ 表示 P_β 附近的四个贡献。例如，到达 P_β 的向北入射波束可表示为

$$\tilde{B}_\beta^{Ni}(\tilde{r}_\beta, \tilde{z}_\beta) = \tilde{C}_{0\beta}^{Ni} G_m\left(x_{\perp\beta}^{Ni}, x_{\parallel\beta}^{Ni}, L_\beta^{Ni}\right) , \tag{3.13}$$

其中参数 $\tilde{C}_{0\beta}^{Ni}$和 L_β^{Ni}以及变量 $x_{\perp\beta}^{Ni}$和 $x_{\parallel\beta}^{Ni}$可利用附录 2 中的表 B求得。南向波束的这些量列于表 3中。

在 P_3、P_4 和 P_7 附近的每个局部区域中，我们可以将速度场写成

$$\mathbf{v}_1 \sim \frac{1}{\sqrt{r}} E^{1/12} \tilde{\mathbf{v}}_1 , \tag{3.14}$$

with

$$\tilde{v}_{1r} = 2^{-1/2}\tilde{B}_3^+ , \quad \tilde{v}_{1\phi} = -\mathrm{i}\tilde{B}_3^+ , \quad \tilde{v}_{1z} = 2^{-1/2}\tilde{B}_3^- , \quad \text{for } P_3, \tag{3.15a}$$

$$\tilde{v}_{1r} = -2^{-1/2}\tilde{B}_4^+ , \quad \tilde{v}_{1\phi} = \mathrm{i}\tilde{B}_4^+ , \quad \tilde{v}_{1z} = -2^{-1/2}\tilde{B}_4^- , \quad \text{for } P_4, \tag{3.15b}$$

$$\tilde{v}_{1r} = 2^{-1/2}\tilde{B}_7^- , \quad \tilde{v}_{1\phi} = -\mathrm{i}\tilde{B}_7^- , \quad \tilde{v}_{1z} = -2^{-1/2}\tilde{B}_7^+ , \quad \text{for } P_7, \tag{3.15c}$$

其中

$$\tilde{B}_\beta^+(\tilde{r}_\beta, \tilde{z}_\beta) = (\tilde{B}_\beta^{Ni} - \tilde{B}_\beta^{Sr}) + (\tilde{B}_\beta^{Nr} - \tilde{B}_\beta^{Si}), \tag{3.16a}$$

$$\tilde{B}_\beta^-(\tilde{r}_\beta, \tilde{z}_\beta) = (\tilde{B}_\beta^{Ni} - \tilde{B}_\beta^{Sr}) - (\tilde{B}_\beta^{Nr} - \tilde{B}_\beta^{Si}). \tag{3.16b}$$

入射波束和反射波束之间存在如下关系：两者使其贡献之和的法向速度在边界上为零。在三点 P_3、P_4 和 P_7 处，这一条件可写为

$$\tilde{B}_3^{Ni}(\tilde{x}_n = 0) = K\tilde{B}_3^{Nr}(\tilde{x}_n = 0) \ , \quad \tilde{B}_3^{Si}(\tilde{x}_n = 0) = (1/K)\tilde{B}_3^{Sr}(\tilde{x}_n = 0), \tag{3.17a}$$

$$\tilde{B}_4^{Ni}(\tilde{x}_n = 0) = \tilde{B}_4^{Nr}(\tilde{x}_n = 0) \ , \quad \tilde{B}_4^{Si}(\tilde{x}_n = 0) = \tilde{B}_4^{Sr}(\tilde{x}_n = 0), \tag{3.17b}$$

$$\tilde{B}_7^{Ni}(\tilde{x}_n = 0) = (1/K)\tilde{B}_7^{Nr}(\tilde{x}_n = 0) \ , \quad \tilde{B}_7^{Si}(\tilde{x}_n = 0) = K\tilde{B}_7^{Sr}(\tilde{x}_n = 0), \tag{3.17c}$$

其中 $\tilde{x}_n = 0$ 表示边界，而

$$K = \frac{\sin(\alpha + \pi/4)}{\sin(\alpha - \pi/4)} \tag{3.18}$$

P_3 处北向波束的收缩因子。

然而，切向速度在边界上并不为零。因此，在局部区域 P_3 和 P_7 存在实际边界的位置，预计会形成黏性边界层。Le Diz`es（2020）研究了这一边界层。研究表明，它会对反射波束产生 $O(E^{1/6})$黏性修正，详见下文第3.5节。

3.3. P_5 和 P_6附近的谐波解

在点 P_5，传播于 S_c 和 P_6 之间的弱波束与传播于 P_3 和 P_7 之间的主波束发生相互作用。在该相互作用区域中，沿主波束方向的长度为 O（$E^{1/3}$）大、O（$E^{1/6}$）长，谐波解呈现出一种特定的近似形式，可写为

$$\mathbf{v}_1 \sim \frac{1}{\sqrt{r}}(E^{1/4}\check{\mathbf{v}}_1 + E^{1/12}\tilde{\mathbf{v}}_1) , \tag{3.19}$$

Rapid 通讯文章不得超过此页长度

with

$$\check{v}_{1r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\check{B}^N - \check{B}^S),\quad \check{v}_{1\phi} = -\mathrm{i}(\check{B}^N - \check{B}^S),\quad \check{v}_{1z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\check{B}^N - \check{B}^S), \tag{3.20a}$$

$$\tilde{v}_{1r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{B}_5^N - \tilde{B}_5^S),\quad \tilde{v}_{1\phi} = -\mathrm{i}(\tilde{B}_5^N - \tilde{B}_5^S),\quad \tilde{v}_{1z} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{B}_5^N - \tilde{B}_5^S)\,, \tag{3.20b}$$

例如，对于向北传播的波束，波束结构由下式给出

$$\check{B}^N = \tilde{C}_0^N \check{F}_m(\check{x}_\perp^N, \lambda^N)\,, \tag{3.21a}$$

$$\tilde{B}_5^N = \tilde{C}_{05}^N G_m(\tilde{x}_{\perp 5}^N, x_{\parallel 5}^N, L_5^N)\,, \tag{3.21b}$$

对 P_6 可得到类似的表达式，只需将 $\tilde{B}_5^N$ 替换为 $\tilde{B}_6^S$，并将 $\tilde{B}_5^S$ 替换为 $\tilde{B}_6^N$。然而，P_6 位于边界上，因此预计会出现黏性修正。由于 P_6 是一个临界点，这种黏性修正比 P_3 和 P_7的修正更大。正如 Le Diz`es (2024) 所示，预计其量级为 $E^{1/12}$。在 P_5处不会产生此类修正。

3.4. P_1 附近的谐波解

点 P_1 处是临界波束到达轴的位置，具有特殊性。在该点，近似式 (3.5) 出现奇异性，这意味着必须在 P_1附近的局部区域采用另一种近似。在该区域中，速度和压力应使用汉克尔变换表示，相关讨论见 Le Diz`es & Le Bars (2017)（附录中的方程 (A1)）以及 He 等人 (2022)（其论文中的方程 (4.1)）。

在 Le Diz`es（2015）中，针对开放域构型推导了解，重点研究沿轴的波束反射局部区域。He等 （2022）将该理论扩展到具有周期性特征的封闭域。引入局部变量$\tilde{r}_1 = r/E^{1/3}$ 和 $\tilde{z}_1 = (z = \sqrt{2}\eta)/E^{1/3}$后，他们证明了 P_1区域内的线性谐波速度可写为

$$\mathbf{v}_1 \sim E^{-1/12}\hat{\mathbf{v}}_1\,, \tag{3.22}$$

其中

$$\hat{v}_{1r} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(Q_1^N + Q_1^S\right)\,, \tag{3.23a}$$

$$\hat{v}_{1\phi} = Q_1^N + Q_1^S\,, \tag{3.23b}$$

$$\hat{v}_{1z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-Q_0^N + Q_0^S\right)\,. \tag{3.23c}$$

函数 $Q_l^N(\tilde{r}_1, \tilde{z}_1)$ 和 $Q_l^S(\tilde{r}_1, \tilde{z}_1)$ 对于 $l = 0, 1$ 定义为

$$Q_l^N(\tilde{r}_1, \tilde{z}_1) = \int_0^\infty \hat{V}^N(\tilde{k}) J_l(\tilde{k}\tilde{r}_1) e^{\mathrm{i}\tilde{k}\tilde{z}_1}\, d\tilde{k}\,, \tag{3.24a}$$

$$Q_l^S(\tilde{r}_1, \tilde{z}_1) = \int_0^\infty \hat{V}^S(\tilde{k}) J_l(\tilde{k}\tilde{r}_1) e^{-\mathrm{i}\tilde{k}\tilde{z}_1}\, d\tilde{k}\,, \tag{3.24b}$$

其中 J_l 为第一类贝塞尔函数。上标 N和 S分别表示北向波束和南向波束。

函数 $\hat{}V^N$和 $\hat{}V^S$通过将汉克尔变换表达式与解（3.5）相匹配得到，该解在 P_1之外有效。正如 He等人(2022) 所示，这将得到以下

表达式：

$$\hat{V}^N = 2^{m/2-3+1/8}\sqrt{\pi}e^{-\mathrm{i}\pi/4}\frac{e^{-\mathrm{i}m\pi/2}}{(m-1)!}\frac{\tilde{k}^{m-1/2}e^{-2x_\parallel^N\tilde{k}^3}}{1-\mathrm{i}e^{-2L\tilde{k}^3}}, \tag{3.25}$$

$$\hat{V}^S = 2^{m/2-3+1/8}\sqrt{\pi}\frac{e^{-\mathrm{i}m\pi/2}}{(m-1)!}\frac{\tilde{k}^{m-1/2}e^{-2x_\parallel^S\tilde{k}^3}}{1-\mathrm{i}e^{-2L\tilde{k}^3}}, \tag{3.26}$$

其中，我们使用了表达式（3.4）来表示 C_0^N和 C_0^S，从而简化了 He等人（2022）式（4.8a,b）给出的表达式。

请注意 $E^{-1/12}$ 中振幅的标度以及 $E^{1/3}$中区域尺寸的标度，图3对此作了说明。为 P_1 区域发展的方法可推广至旋转轴上的任意波束相互作用。特别要注意，在我们当前的分析中，函数 $\hat{V}^N$和 $\hat{V}^S$的分母中含有一项 $1-\mathrm{i}e^{-2Lk^3}$，这是由于临界路径的周期性，需要对无穷多个波束贡献求和而产生的。对于不涉及求和的简单波束相互作用，分母中则不存在这样的项（参见 Le Diz`es 2015）。

3.5. 谐波解的高阶修正

在前几节中，我们给出了相互作用区域内谐波响应的首阶近似。这些表达式基于 Moore 和 Saffman（1969）得到的相似解（3.1），该解已知在开域内有效，其误差可达 $O(E^{1/3})$ 阶，这些误差由沿波束方向的变化引起。

波束在边界处反射时，会产生更大的黏性修正。Le Diz`es（2020）指出，反射时会产生振幅为 $O(E^{1/6})$ 的黏性修正，其振幅小于主波束。他还指出，这种修正具有方程（3.1）的形式，但指标 $m+1$更大。在当前的封闭几何中，这些修正波沿闭合回路传播，叠加后得到形式如（3.5）的表达式，其振幅为 $E^{1/4}$ 量级，且函数 G_{m+1} 取代 G_m。预计在点 P_3 和 P_7 处，无论是北向波束还是南向波束，都会产生这类修正。

对于在 P_2 和 P_6处的反射，预计会产生更大的黏性修正。Le Diz`es（2024）确实指出，在临界点会产生振幅为 $O(E^{1/6})$的修正波束（即其振幅比主波束小 $O(E^{1/12})$）。该波束也具有相似形式（3.1），但指标为 $m+5/4$。与在 P_3 和 P_7处产生的修正一样，预计这一修正会在沿闭合回路传播时不断累积，从而得到形式如（3.5）的表达式，其振幅为 $E^{1/6}$ 量级，函数 $G_{m+5/4}$ 取代 G_m。自然，这些一阶修正本身在 P_2 和 P_6处反射时，会产生$E^{1/4}$ 量级的更高阶修正；在 P_3 和 P_7处反射时，则会产生 $E^{1/3}$ 量级的修正。因此，我们预计谐波解（3.5）的高阶修正由函数$G^N_{m'}$和$G^S_{m'}$的和组成，其中取不同的 m'值，且精度达到$O(E^{5/12})$。这有一个重要后果：包含这些黏性修正的谐波解满足方程（3.10）和（3.11），精度达到 $O(E^{5/12})$。

4. 平均流修正

我们对平均流修正的研究系统地围绕两个主要方面展开：由振荡边界层驱动的整体响应，以及波束交叉区域内的局部相互作用。对于每个相互作用区域，我们详细比较数值解与渐近解，并对其

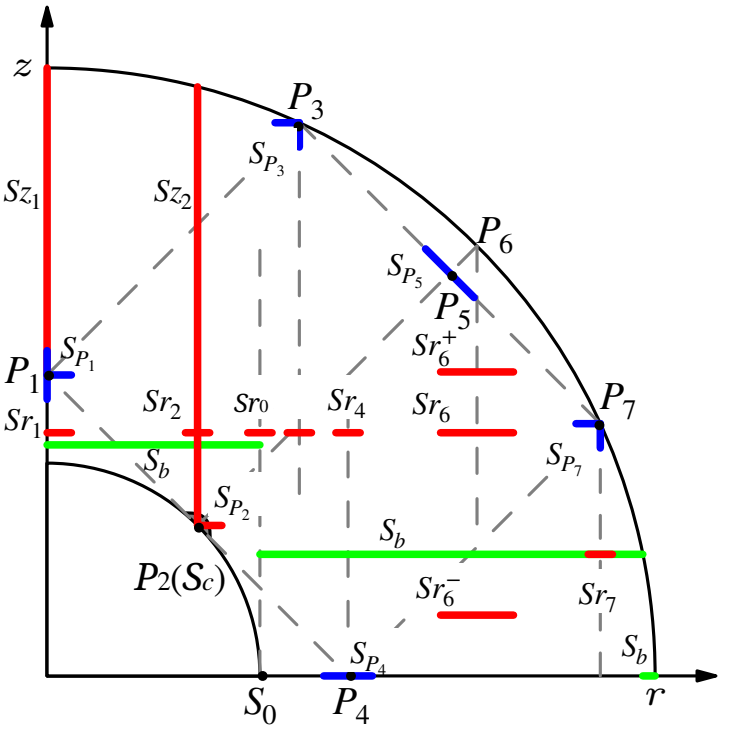

图4：示意图展示了用于比较理论解与数值解的位置切片（蓝色切片）。绿色切片用于展示整体体响应。红色切片对应仅讨论数值解的情况。

相对于埃克曼数的标度行为进行严格分析。该分析涵盖了射流特征和速度振幅的标度。

为清晰展示分析位置，我们采用图4所示的彩色切割系统。蓝色标记表示获得理论解并与数值解进行比较的位置；红色标记表示仅分析数值结果的位置；绿色标记则突出显示用于比较体流解的切片。

4.1. 由边界层产生的主体区域解

本节考察内核上的振荡边界层所驱动的平均流修正。在没有临界纬度和惯性波的情况下，Sauret 与 Le Diz`es（2013）已研究过这种修正。他们确定，球壳内的平均纬向流可直接根据完整球体的解析解推导得出。他们指出，主体区域中会产生量级为 E^0 的方位角速度，$v_{0\phi} = \mathrm{F}(\rho;\omega)$，见其方程（4.27）。此外，他们将分析拓展到 $0 < \omega < 2$ 的情况；在这种条件下会出现惯性波，并对流体产生较弱的非线性效应。在这项奠基性工作的基础上，C´ebron 等人（2021）将理论拓展至非相似椭球壳，并考虑了不同边界处天平动强迫振幅的变化。他们以无量纲形式简洁地表达了平均纬向流的旋转速度，并将其列为论文中的方程（5.5）。

在我们的研究中，我们采用 C´ebron 等人（2021）中的方程（5.5），并在图5的面板（a）中用黑色虚线展示理论预测。我们的数值计算

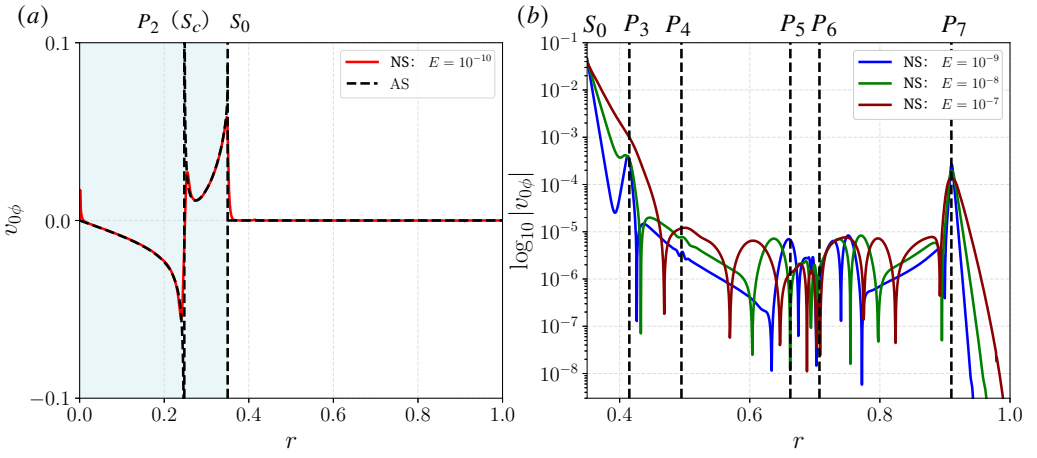

图5： （a） 主体区域中的平均方位角速度 $v_{0\phi}$ 由数值计算预测得到（红色实线， $E = 10^{-10}$）以及理论结果（黑色虚线，基于 Sauret 与 Le Diz`es（2013）和 C´ebron 等 （2021））。浅蓝色背景突出显示了切圆柱内部的内部区域，该区域位于 $r = 0。35$。 （b） 不同埃克曼数下，通过数值计算得到的切圆柱外部对数平均方位角速度。在切圆柱内部，截面取在 S_b 和 $z = 0。4$。对于外部区域，截面最初取在 $z = 0。2$处；随后，当截面到达外边界后，则取在赤道上，见图 4。其中包含数据以及用于计算渐近理论和生成该图的 Jupyter 笔记本的目录可访问https://www.cambridge.org/S0022112025109841/JFM-Notebooks/files/Figure5/Figure5.ipynb。

在 $E = 10^{-10}$ 处与该理论预测高度吻合。这证实，埃克曼边界层内的非线性效应仍是球壳内平均纬向流的重要来源之一。此外，我们确定了两条临界线： $r = \eta/\sqrt{2}$, _ 它标示出临界纬度；以及 $r = \eta$，它表示与内核边界相切的柱面。我们的数值计算证实，即使存在惯性波，C´ebron等人 （2021）的方程（5.5）仍然适用。

在由 S_0发出的带区中，该带区与内核相切，我们预期会出现具有三种不同宽度的斯图尔特森层： $E^{2/7}$ 用于内部层， $E^{1/3}$ 用于内层，以及 $E^{1/4}$ 用于外部层（ Stewartson 1966；Dormy & Soward 2007；Sauret & Le Diz`es 2013）。图6（a）用内部层和外部层变量绘出了方位角速度。该分量的外部标度得到了完美再现。对于径向和轴向速度分量，理论（Sauret & Le Diz`es 2013）对内层所预测的标度 $E^{17/42}$ 和 $E^{5/42}$与数值结果相符，如图6（b、c）所示。

需要指出的是，先前的理论框架通常假设，仅在内核边界施加强迫时，切圆柱外部的速度仍为零。与这一假设相反，图5(b)所示的数值结果表明，存在惯性波时情况并非如此。我们确实观察到主体区域中存在量级为 $E^{1/3}$的方位流。在外球壳内的速度剖面中，还可以看到明显的峰值。这些峰值对应于特定区域：从临界纬度发出的剪切层在这些区域发生相互作用，原因可能是它们在边界处反射，也可能是在流体内部相交。尽管这些带状结构较弱，但它们似乎具有与内核边界层所产生的平均流相同的 E^0 标度。这一观察为接下来的研究问题提供了重要背景：这些微弱的非线性纬向波束源自何处？如何确定其对应的振幅和波束宽度？本研究的目标之一便是回答这些问题。

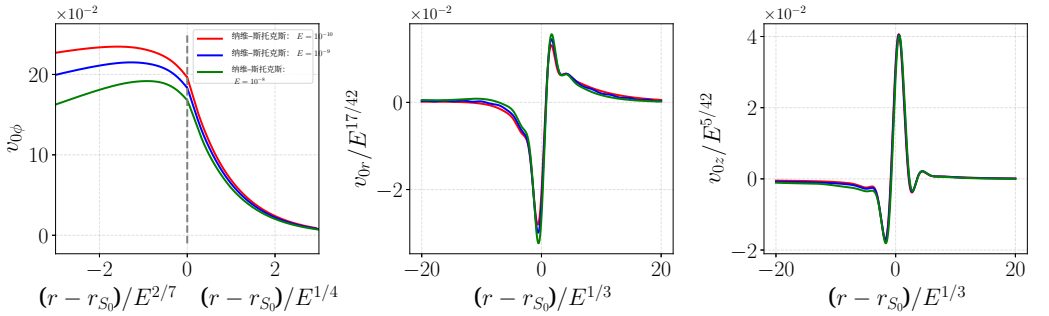

图6： Sr_0 处的长度和振幅标度可通过三个埃克曼数对应的速度剖面看出。方位速度分量$v_{0\phi}$ 中观察到的不同标度源于斯图尔特森层。

在接下来的章节中，我们将解释这些微弱的非线性纬向波束的起源，并展示所观察到的埃克曼标度。

4.2. 波束沿线相互作用产生的解

控制平均流修正的方程（2.5）以柱坐标表示为

$$-2v_{0\phi} + \frac{\partial p_0}{\partial r} = -\mathcal{N}_{0r} + E\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)v_{0r}, \tag{4.1a}$$

$$2v_{0r} = -\mathcal{N}_{0\phi} + E\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)v_{0\phi}, \tag{4.1b}$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\mathcal{N}_{0z} + E\Delta v_{0z}, \tag{4.1c}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_{0r}) + \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} = 0, \tag{4.1d}$$

其中，雷诺应力 $\mathrm{N}_0 = (\mathrm{N}_{0r},\ \mathrm{N}^{0\phi},\ \mathrm{N}_{0z})$ 为

$$\mathcal{N}_{0r} = v_{1r}\frac{\partial v_{1r}^*}{\partial r} + v_{1z}\frac{\partial v_{1r}^*}{\partial z} - \frac{v_{1\phi}v_{1\phi}^*}{r} + \text{c.c}\,, \tag{4.2a}$$

$$\mathcal{N}_{0\phi} = v_{1r}\frac{\partial v_{1\phi}^*}{\partial r} + v_{1z}\frac{\partial v_{1\phi}^*}{\partial z} + \frac{v_{1r}v_{1\phi}^*}{r} + \text{c.c}\,, \tag{4.2b}$$

$$\mathcal{N}_{0z} = v_{1r}\frac{\partial v_{1z}^*}{\partial r} + v_{1z}\frac{\partial v_{1z}^*}{\partial z} + \text{c.c}\,. \tag{4.2c}$$

利用谐波解满足的性质（3.10）和（3.11），可以沿波束简化雷诺应力表达式。利用（3.10）和（3.11）可得

$$\mathcal{N}_{0r} \sim \frac{\partial}{\partial r}\left(|v_{1r}|^2 - |v_{1z}|^2\right) - 4\frac{|v_{1r}|^2}{r}\,, \tag{4.3a}$$

$$\mathcal{N}_{0\phi} \sim 2\frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{Im}(v_{1r}v_{1z}^*)\,, \tag{4.3b}$$

$$\mathcal{N}_{0z} \sim -\frac{\partial}{\partial z}\left(|v_{1r}|^2 - |v_{1z}|^2\right)\,. \tag{4.3c}$$

如果我们忽略 忽略黏性项，可以得到方程（4.1）的一个特解 s

$$v_{0r} = -\frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{Im}(v_{1r}v_{1z}^{*}), \tag{4.4a}$$

$$v_{0\phi} = \frac{\partial}{\partial r}\left(|v_{1r}|^2 - |v_{1z}|^2\right) - 2\frac{|v_{1r}|^2}{r}, \tag{4.4b}$$

$$v_{0z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\,\mathrm{Im}(v_{1r}v_{1z}^{*}). \tag{4.4c}$$

由于谐波速度$\mathbf{v}_1$随空间变量变化，对于主波束，该变量的标度为$E^{1/3}$；对于次级波束，其标度为$E^{1/6}$，与该解（4.4）相关的黏性项仍然很小。因此，预计该表达式沿波束均有效。

然而，使用（3.5）求值时，该解很小，量级为$E^{1/6}$；使用（3.7）求值时，量级为$E^{1/2}$。只有在两个波束相交时，该解才会变大，也就是在局部区域P_β。接下来的小节将给出三个典型相互作用区域中的标度及解的表达式。

4.2.1. 局部区域 P_3、 P_4 和 P_7中的解

在这些点附近，主导阶特解可简化为

$$\mathbf{v}_0 \sim \frac{1}{r}E^{-1/6}\tilde{\mathbf{v}}_0\,, \tag{4.5}$$

with

$$\begin{pmatrix}\tilde{v}_{0r}\\ \tilde{v}_{0\phi}\\ \tilde{v}_{0z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial\widetilde{\mathcal{N}}_{P_\beta}}{\partial\tilde{z}_\beta}\\ \dfrac{\partial\widetilde{\mathcal{M}}_{P_\beta}}{\partial\tilde{r}_\beta}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial\widetilde{\mathcal{N}}_{P_\beta}}{\partial\tilde{r}_\beta}\end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

~ ~其中，函数 M^{P_β} 和 N^{P_β} 定义为

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{P_3} = 2\mathrm{Re}\widetilde{\mathcal{Q}}_3\,,\quad \widetilde{\mathcal{M}}_{P_4} = 2\mathrm{Re}\widetilde{\mathcal{Q}}_4\,,\quad \widetilde{\mathcal{M}}_{P_7} = -2\mathrm{Re}\widetilde{\mathcal{Q}}_7\,, \tag{4.7a}$$

$$\widetilde{\mathcal{N}}_{P_3} = -2\mathrm{Im}\widetilde{\mathcal{Q}}_3\,,\quad \widetilde{\mathcal{N}}_{P_4} = -2\mathrm{Im}\widetilde{\mathcal{Q}}_4\,,\quad \widetilde{\mathcal{N}}_{P_7} = -2\mathrm{Im}\widetilde{\mathcal{Q}}_7\,, \tag{4.7b}$$

with

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_\beta(\tilde{r}_\beta,\tilde{z}_\beta) = (\tilde{B}_\beta^{Ni} - \tilde{B}_\beta^{Sr})(\tilde{B}_\beta^{Nr*} - \tilde{B}_\beta^{Si*})\,. \tag{4.8}$$

从这些表达式可以看出，只剩下四个非线性贡献。它们都局限于局部相互作用区域。这一结果与我们的数值计算结果一致，也符合我们的预期。这进一步支持了这样一种观点：纬向流的主要源点局限于入射波束与反射波束相互作用的 $O(E^{1/3})$ 区域。

由（4.6），还可以得到与该解相关的法向速度和切向速度：

$$\tilde{v}_{0n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial\widetilde{\mathcal{N}}_{P_\beta}}{\partial\tilde{x}_t},\quad \tilde{v}_{0t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial\widetilde{\mathcal{N}}_{P_\beta}}{\partial\tilde{x}_n}\,. \tag{4.9}$$

由（3.17）可知，表达式（4.7）结合（4.8），在边界（$\tilde{x}_n = 0$）~处可简化为 $\mathcal{N}^{P_\beta}$（$\tilde{x}_n = 0$） $= 0$。这意味着边界处的法向速度为零。

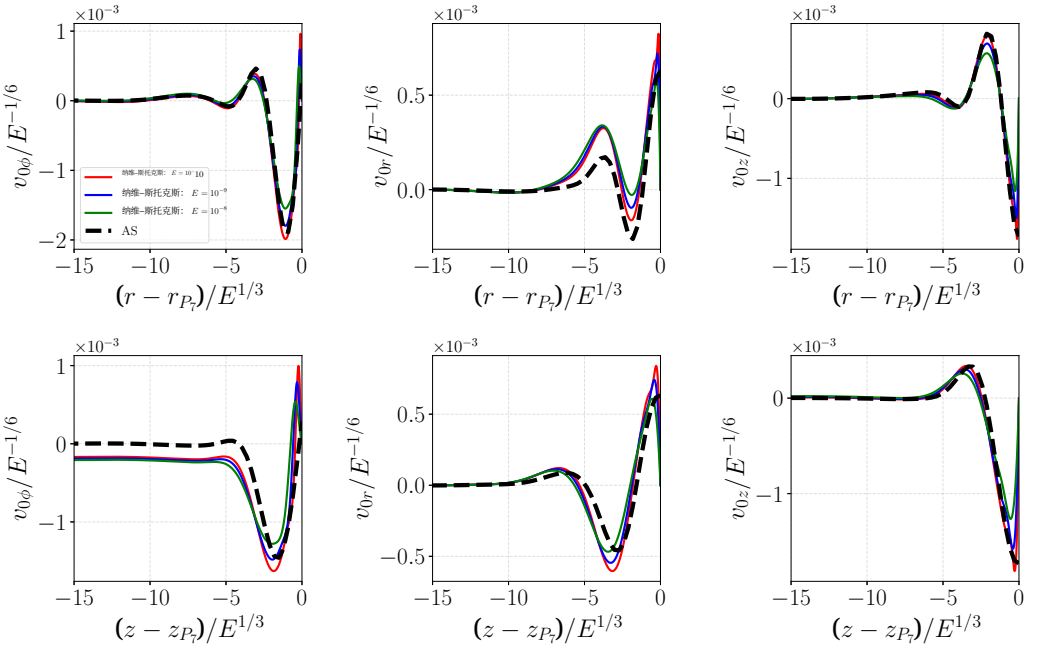

图7：渐近解的三个速度分量剖面（*AS*）以及局部区域内不同埃克曼数下的数值解 P_7，沿两个方向的切线（S_{P_7} 见图 4）。用于计算渐近理论并生成此图的数据目录及 Jupyter 笔记本可通过以下链接访问：https://www.cambridge.org/S0022112025109841/JFM-Notebooks/files/Figure7/Figure7.ipynb。

因此，不可穿透条件自动得到满足。这有一个重要后果：这意味着特解（4.6）就是每个 P_β附近局部区域中的主阶解。我们将把这一表达式与每个$\sim$ $\sim P_\beta$附近的数值解进行比较。由于函数 $\mathcal{M}^{P_\beta}$ 和 $\mathcal{N}^{P_\beta}$ 都局域化，因此在这一阶，所有速度分量也都局域于 P_β 附近。

图 7 比较了 P_7附近三个渐近速度分量的剖面与三种不同埃克曼数下的数值解。比较对象为垂直和水平切片 S_{P_7}，如图 4所示。正如预期，随着埃克曼数减小，渐近理论结果与数值数据的吻合度越来越高。然而，在边界附近，径向速度 v_{0r}和轴向速度 v_{0z}仍存在差异。这些差异源于数值计算采用了无滑移边界条件，使数值解在边界处趋于零，而渐近解仅满足不可穿透条件。正如 Le Diz`es（2020）所示，还可以在宽度为 $O(E^{1/2})$ 的黏性边界层中构造另一种近似，以捕捉这一行为。

此外，沿 z轴（与旋转轴平行）的方位角速度，随着远离局部相互作用点，在渐近理论中趋于零。然而，数值结果显示，主体区域中存在振幅较小的纬向流（见图7左下图）。这一点在图1中也很明显，主体区域内可见数条弱带。下一节将利用附录C中的结果讨论这些带状结构的标度。

图中分别展示了两个相似相互作用区域 P_3 和 P_4以及数值结果8 和9。关于边界层差异以及主体区域中方位角速度差异的图 7 所作出的观察在此处同样适用

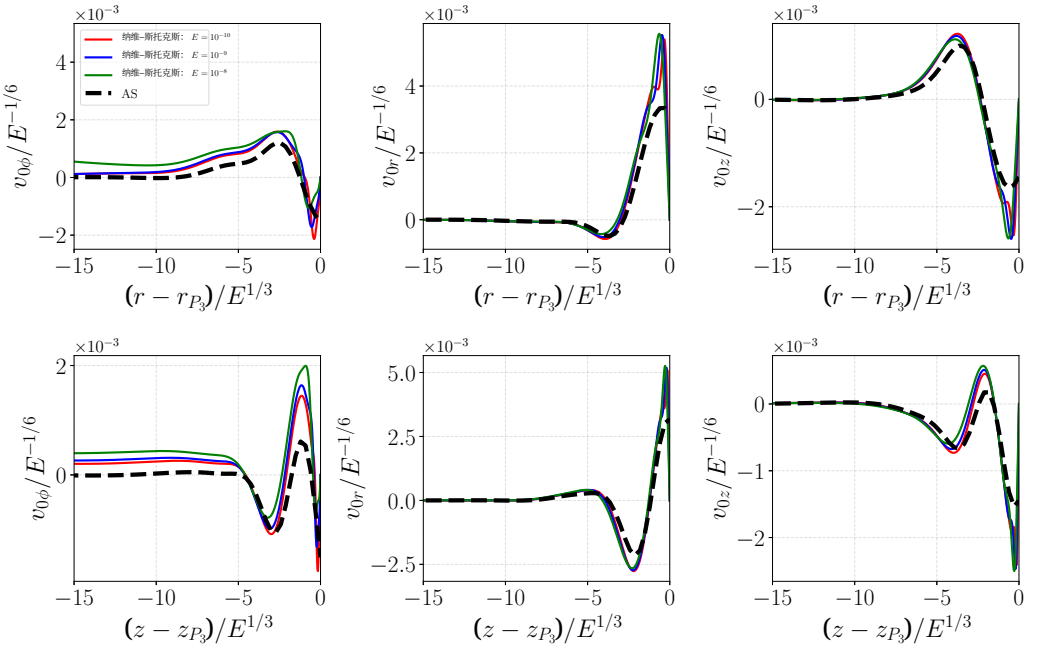

图8：图注与图 7相同，但位于局部区域 P_3 （截面位于 S_{P_3}）。用于计算渐近理论并生成此图的数据和 Jupyter 笔记本所在目录可通过以下链接访问：
https://www.cambridge.org/S0022112025109841/JFM-Notebooks/files/Figure8/ Figure8.ipynb。

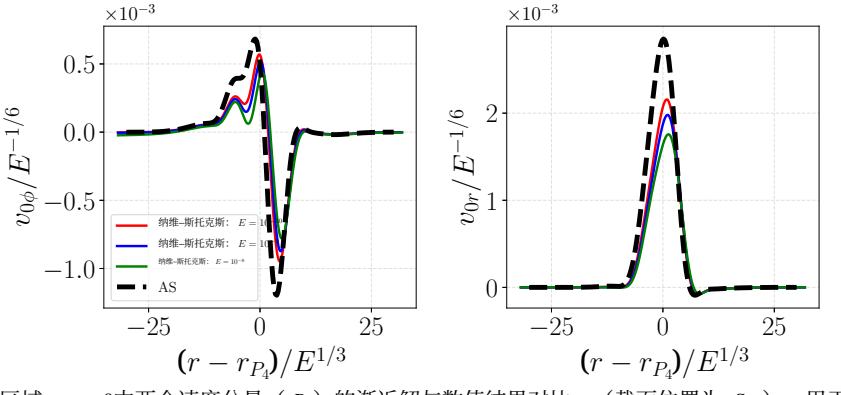

图9：局部区域 $v_{0z} = 0$中两个速度分量（ P_4）的渐近解与数值结果对比。（截面位置为 S_{P_4}）。用于计算渐近理论并生成此图的数据和 Jupyter 笔记本所在目录可通过以下链接访问：https://www.cambridge.org/S0022112025109841/JFM-Notebooks/files/Figure9/Figure9.ipynb。

在此处，值得注意的是，位于赤道面上的 P_4附近，轴向速度 v_{0z} 因对称性保持为零。此外，随着埃克曼数的减小，比较结果有所改善，这与其他局部位置的发现一致。

在这三个特定位置， P_7、 P_3和 P_4 ，渐近分析得出了相一致的标度行为：相互作用区域的标度为 $E^{1/3}$，而振幅的标度为 $E^{-1/6}$，这对三个速度分量均成立。不过请注意，在这些点处，重新标度后的速度仍然很小，其量级为 10^{-3}。这解释了为什么在图1所示的等值线图中，这些区域并不更加明显。

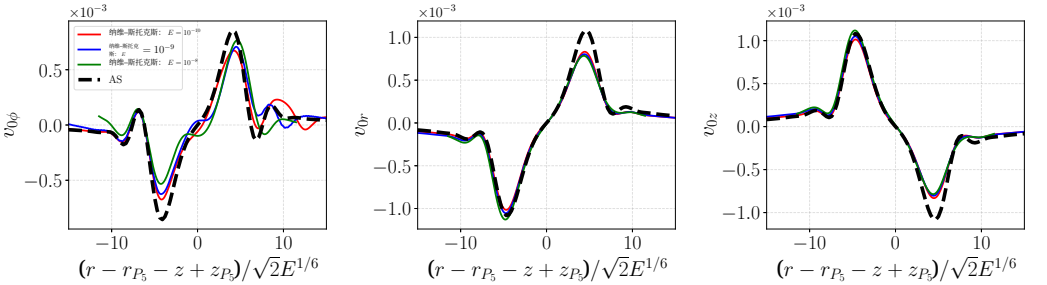

图10：局部区域处速度剖面的渐近解与数值结果对比P_5（截面位于S_{P_5}）。用于计算渐近理论并生成此图的数据目录和 Jupyter 笔记本可通过以下地址访问：https://www.cambridge.org/S0022112025109841/JFM-Notebooks/files/Figure10/Figure10.ipynb。

4.2.2. P_5 和 P_6局部区域中的解

次级弱波束在 P_5处的主体区域与主临界波束相遇。这一情形很有意思，因为两条波束的标度不同。

平均流修正较弱，其表达式为

$$\mathbf{v}_0 \sim \frac{1}{r} E^0 \check{\mathbf{v}}_0 \,, \tag{4.10}$$

with

$$\begin{pmatrix} \check{v}_{0r} \\ \check{v}_{0\phi} \\ \check{v}_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial \check{\mathcal{N}}_{P_5}}{\partial \tilde{z}_5} \\ \dfrac{\partial \check{\mathcal{M}}_{P_5}}{\partial \tilde{r}_5} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial \check{\mathcal{N}}_{P_5}}{\partial \tilde{r}_5} \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

其中

$$\check{\mathcal{M}}_{P_5} = 2\,\mathrm{Re}\left((\check{B}^N - \check{B}^S)(\tilde{B}_5^{N*} - \tilde{B}_5^{S*}) \right), \tag{4.12}$$

$$\check{\mathcal{N}}_{P_5} = -2\,\mathrm{Im}\left((\check{B}^N - \check{B}^S)(\tilde{B}_5^{N*} - \tilde{B}_5^{S*}) \right). \tag{4.13}$$

这些表达式与点 P_4 附近得到的表达式相似：在 P_4 处，Nr 和 Si 波束现在是较强的 S 和 N 波束，它们在 P_3 与 P_7 之间传播；而在 P_4 处，Ni 和 Sr 波束则是较弱的 S 和 N 波束，它们在 P_2 与 P_6 之间传播（见图 2(b)）。注意，由于 $\check{B}^S$ 和 $\check{B}^N$ 是慢变量 $\check{x}_\perp = \underline{E}^{1/6}$（$\tilde{z}_5 - \tilde{r}_5$）$/\sqrt{2}$ 的函数，式（4.11）中的空间导数只应作用于 $\tilde{B}_5^S$ 和 $\tilde{B}_5^N$。

在图 10中，我们将方程（4.11）给出的渐近解与三种不同埃克曼数下的数值结果进行了比较。次级弱波束的宽度标度较大，见 $E^{1/6}$。我们通过沿平行于临界波束的方向，在 P_3 至 P_7 （见图 4，S_{P_5}）进行剖面截线来分析该波束。由于弱波束具有反对称性，垂直方向上的截线（即沿 $z = r$ 线）为零。

局部区域的宽度标度为 $E^{1/6}$，而另一方向的标度为 $E^{1/3}$。振幅标度为 E^0，明显弱于其他局部相互作用区域。尽管两个波束的标度因子不同，渐近方法仍表明整体精度良好。渐近理论与数值解吻合良好，并且随着埃克曼数减小而呈现收敛。

然而，图10右侧观察到了一些扰动，具体而言是在 $v_{0\phi}$ 分量中。这些扰动源于切割剖面受到从点 P_6发出的弱带区影响，如图 5(b) 所示。

在局部区域 P_6中，可以得到一个与（4.11）形式相同的特解。然而，正如我们将在§5 和附录 C 中看到的，这个特解会被一个额外的齐次解修正；该齐次解描述了与垂直带区相关的平均流修正，其来源为 P_6。因此，不能将其直接与数值结果进行比较。

4.2.3. 局部区域 P_1中的解

对于旋转轴上的点，必须使用谐波解的表达式（3.23）。由此可得平均流的以下表达式

$$\mathbf{v}_0 = E^{-1/2}\hat{\mathbf{v}}_0\,, \tag{4.14}$$

with

$$\hat{v}_{0r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial\tilde{z}_1}\left\{\mathrm{Re}\left[(Q_1^N + Q_1^S)(-Q_0^{N*} + Q_0^{S*})\right]\right\} \tag{4.15a}$$

$$\hat{v}_{0\phi} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}_1}\left\{\left|Q_1^N + Q_1^S\right|^2 - \left|-Q_0^N + Q_0^S\right|^2\right\} - \frac{\left|Q_1^N + Q_1^S\right|^2}{\tilde{r}_1} \tag{4.15b}$$

$$\hat{v}_{0z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{r}_1} + \frac{1}{\tilde{r}_1}\right)\left\{\mathrm{Re}\left[(Q_1^N + Q_1^S)(-Q_0^{N*} + Q_0^{S*})\right]\right\}\,. \tag{4.15c}$$

在图 11中，我们将方程（4.15）给出的渐近解与三个不同埃克曼数下的数值结果进行比较。所分析的剖面取自 S_{P_1}，其中包括一个沿垂直于旋转轴方向的剖面，以及另一个沿旋转轴方向的剖面（见图 4）。由于系统具有轴对称性，沿旋转轴方向仅考虑轴向速度分量，因为另外两个分量 v_{0r} 和 $v_{0\phi}$恒为零。

局部区域的宽度按 $E^{1/3}$ 标度变化，而振幅按 $E^{-1/2}$ 标度变化。尽管渐近解与数值结果整体上吻合良好，尤其是方位角分量，但在轴附近较小的 v_{0r} 分量中观察到明显偏差。He 等 （2022）的线性谐波解中也已观察到这一差异。我们推测，这可能是由高阶修正项造成的；由于主导阶解的数值较小，这些修正项可能变得不可忽略。

5. 带状结构的数值标度

在上一节中，我们分析了内核振荡边界层在相互作用区域和主体区域内产生的平均流修正项。这些是主要贡献。如图1所示，数值结果还揭示了主体区域内存在微弱的垂直束状带。这些带状结构源自局部相互作用区域。然而，已证明在这些区域计算得到的主导阶平均流修正项是局部化的。因此，观测到的带状结构必定与高阶效应有关。要为这些带状结构中的速度场求得近似解也更加复杂，因为这需要对谐波解进行高阶展开。尽管如此，通过渐近推理，仍可对每条带状结构中速度场的标度和结构获得一些总体认识。相关结果总结于附录C，并将用于解释下文给出的数值结果。

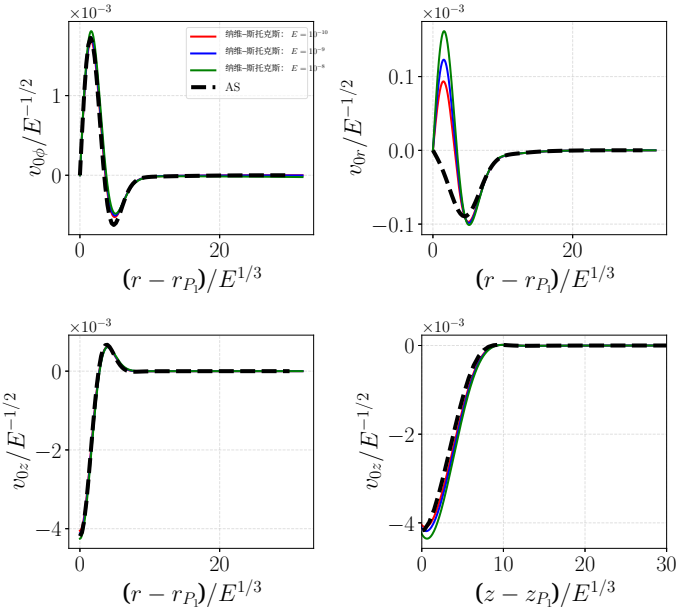

图11：局部区域速度剖面的渐近解与数值结果的比较 P_1。（截线位置为 S_{P_1}）。用于计算渐近理论并生成此图的数据及 Jupyter 笔记本所在目录可通过以下链接访问：https://www.cambridge.org/S0022112025109841/JFM-Notebooks/files/Figure11/Figure11.ipynb。

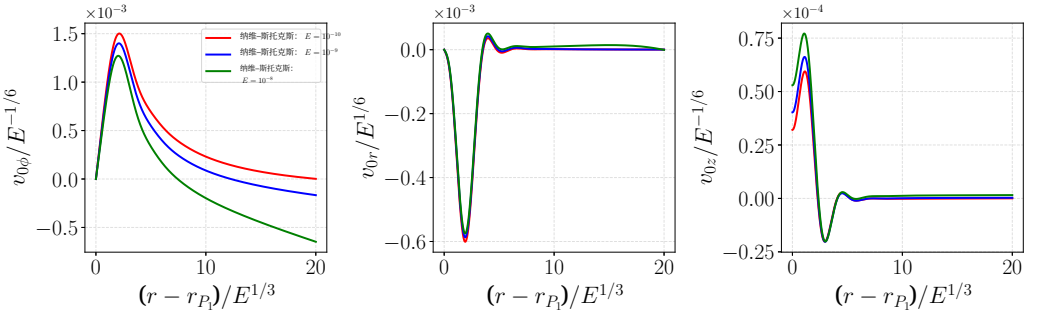

图12：起源于 P_1 的带区中的速度标度。沿截线 Sr_1（如图 4 所示），对三个不同的埃克曼数 $E = 10^{-8}$、$E = 10^{-9}$ 和 E^{-10}进行变化。（a）方位角速度。（b）径向速度。（c）轴向速度。这些标度由理论（附录 C）预测。

图12 展示了与旋转轴对齐的垂直带的标度；沿图 Sr_1 4所示的剖线进行分析。在 $r = 0$附近，该带的宽度按 $E^{1/3}$标度。正如附录中所述，该带内的轴向和方位速度分量的振幅应 $E^{1/3}$ 小于 P_1附近局部区域内的振幅。因此，预期标度为 $E^{-1}/^{6}$，适用于$v_{0\phi}$；而 v_{0z}，以及 $O(E^{1/6})$适用于 v_{0r}。图12所示的数值结果证实了这些标度。该带内平均流修正项沿轴向坐标的变化也很复杂，如图13(a)所示。

图 14 展示了两个不同区域中的标度行为：临界纬度区域（在截面 S_{P_2}处分析）以及由此在主体区域形成的纬向带状区域（在截面 Sr_2处分析）。临界纬度区域的水平宽度标度为 $E^{2/5}$，而相应带区的宽度为 $O(E^{1/5})$。如附录 C所述，带区中方位角速度的标度取决于局部区域 P_2产生的埃克曼抽吸，而后者

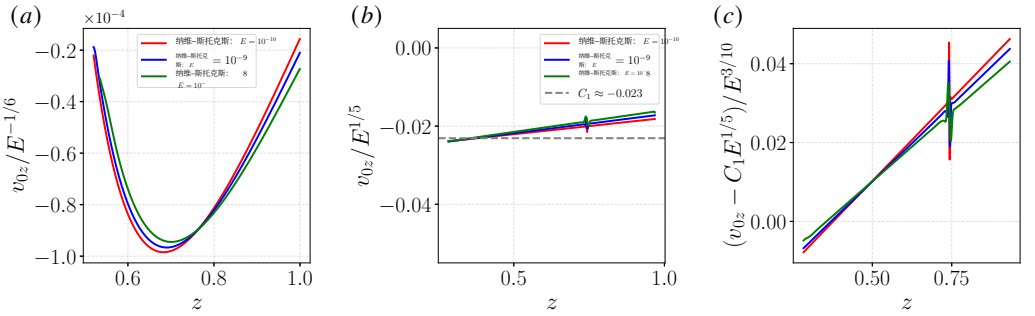

图13：源自 P_1 和 P_2的带状结构的垂直依赖性。(a)：源自 P_1的带区。沿轴的轴向速度（截线 Sz_1），表明其与垂直坐标 z呈非线性依赖关系；(b)、(c)：源自 P_2的带区。沿截线 Sz_2的轴向速度随 z 的变化，显示出在 $E^{1/5}$ 阶时表现均匀 (b)，在 $E^{3/10}$阶时呈线性变化。(b) 和 (c) 中靠近 $z \approx 0.75$ 处的速度局部变化，对应于穿过 P_1 和 P_4之间的主波束与其交叉的位置。

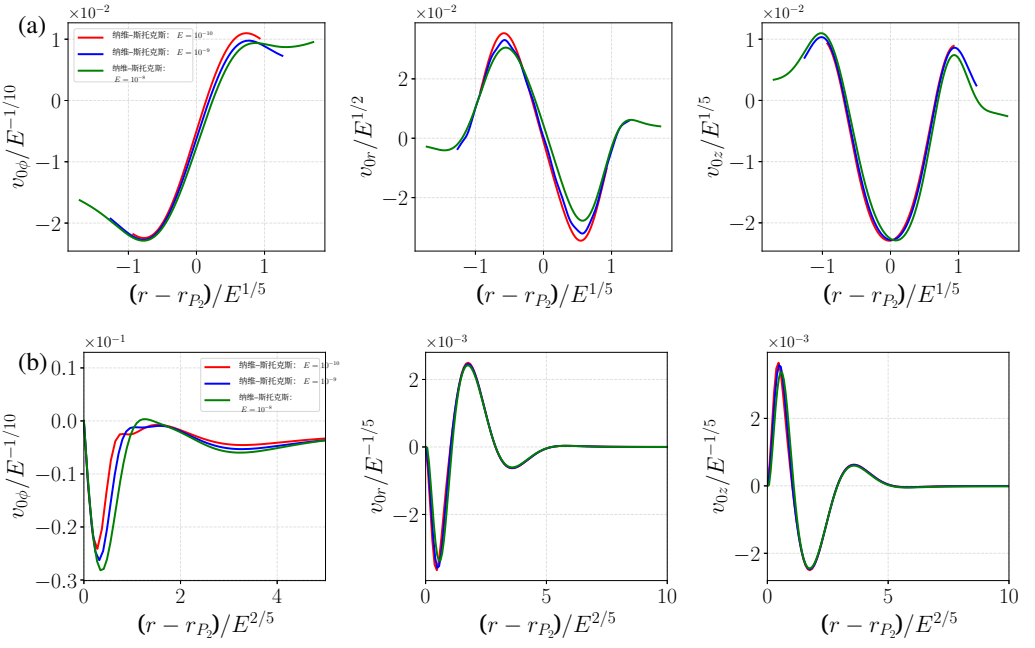

图14：局部区域 P_2 （(b) 中的截线 S_{P_2}）以及源自 P_2 的带区（(a) 中的截线 Sr_2）内的速度标度。

难以通过解析方法求得。然而，各分量的标度彼此相关。图 14(a) 中，我们提出 $E^{-1/10}$ 下 $v_{0\phi}$的标度为 $E^{1/2}$， v_{0r} 的标度为 $E^{1/5}$，而v_{0z} 的标度为 P_2；这与由 14(b) 中给出的带区内平均流修正预期结构一致。图 P_2 展示了局部区域 v_{0r} 中的标度行为，可能与带区中观测到的标度相符。特别是，预期 v_{0z} 和$E^{-1/5}$ 在 $E^{1/5}$中的标度会产生量级为 的埃克曼抽吸，这与带区中观测到的轴向速度振幅相符。图 13(b,c) 中，我们观察到，从 $E^{1/5}$开始，带区内的轴向速度在主导阶 $E^{3/10}$沿轴向方向保持均匀，但在次阶呈线性变化，这与理论预测一致。

图 15 和 16 分别给出了沿截线 Sr_3 和 Sr_7的速度剖面。我们采用了渐近分析所预测的标度，即方位角速度和轴向速度分量的振幅为E^0，径向速度的振幅为 $E^{1/3}$ （见

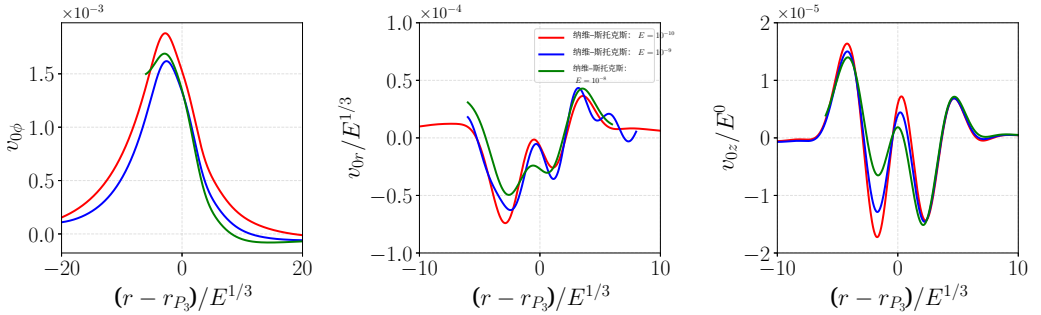

图15：与图12相同的图注，但针对起源于 P_3 （切口 Sr_3）的带区。

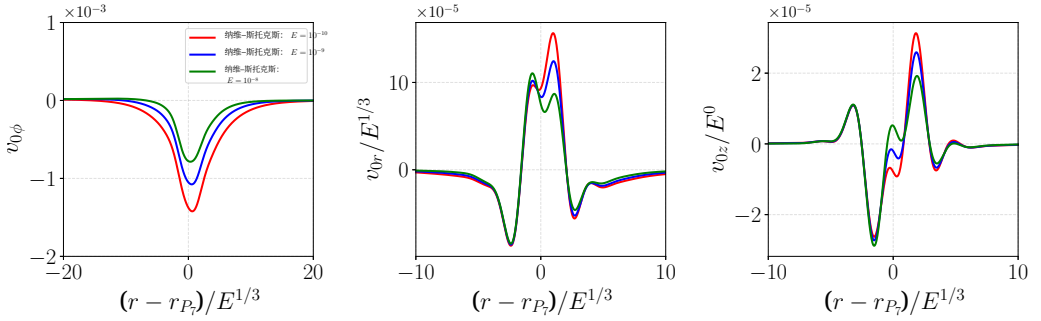

图16：与图12相同的图注，但针对起源于 P_7 （切口 Sr_7）的带区。

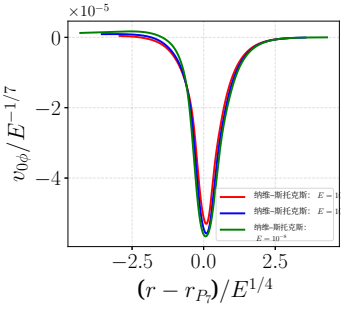

图17：起源于 P_7 （切口 Sr_7）的带区中方位角速度的替代标度。

附录 C）。这些标度与数值结果一致。然而，对于从 P_7延伸出的带区中的方位角速度，另一种标度似乎更符合数值数据（见图 17）。目前，我们尚无理论依据来解释这种替代标度。

如附录C所述，预计不会由 P_4形成显著的带区，这一点在图1（e）中已很明显。在图18中，我们确认数值结果与理论预测的 $E^{1/6}$ 标度一致，且对方位角速度分量和轴向速度分量均如此。

外核临界点处发出的微弱带状结构在图 1(a) 中可见。这一带状结构并非与局部区域 P_5 有关，因为该区域预计不会产生任何可见的带状结构；它实际上与 P_6 有关。正如附录 C所述，该带区内的速度场结构颇为特殊。其宽度的标度为 $E^{1/6}$，与局部区域 P_6的宽度一致。然而，与从 P_3 和 P_7发出的带状结构不同，这里的轴向速度显著弱于方位角速度，并随 z线性变化。所采用的标度

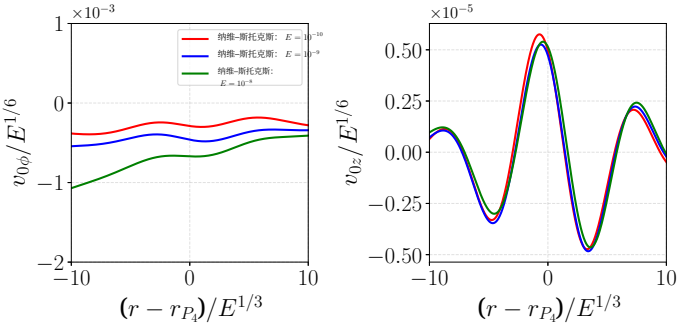

图18：图注与图 12相同，但这里展示的是起源于 P_4 （截线 Sr_4）的带区。标度为 $E^{1/2}$ 的极弱径向速度未予绘出。

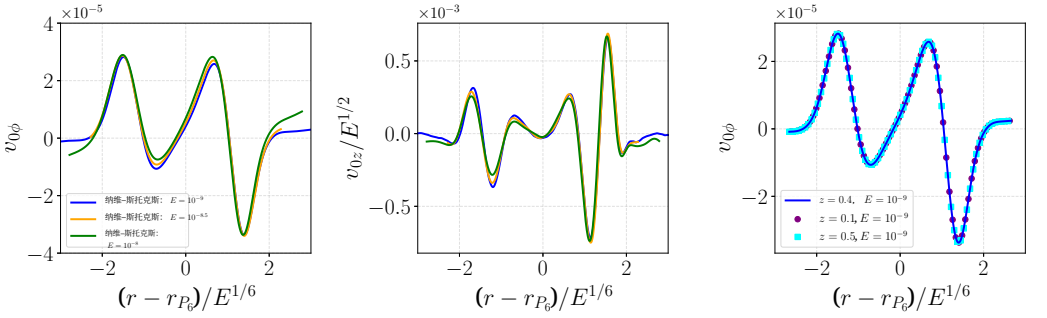

图19：起源于 P_6 的带区中的速度标度。(a) 沿截线Sr_6，方位角速度随 r 变化；(b) 沿截线 Sr_6，轴向速度随 r 变化；(c) 沿截线 Sr_6、 Sr_6^+和 Sr_6^-，不同 z 下的方位角速度随 r 变化，分别对应 $z = 0.4$、 $z = 0.5$ 和 $z = 0.1$。

图 19(a,b)- E^0 在 $v_{0\phi}$下， $E^{1/2}$ 在 v_{0z} - 的结果均与理论分析的预测一致。径向速度预计为 $O(E^{2/3})$，但其过于微弱，无法准确分辨，因此未绘出。在图 19(c) 中，我们证明方位角速度沿垂直方向保持均匀，这与理论预期相符。

6. 结论

本研究采用数值方法和渐近方法，分析了旋转振荡球壳中谐波解的非线性自相互作用所产生的平均流修正。我们重点研究了内核以频率 $\widehat{\omega} = \sqrt{2}\widehat{\Omega}$振荡的情形；此时谐波解呈现出简单的结构，主要由沿闭合矩形周期路径传播的临界点波束组成。利用 He 等人（2022）得到的谐波解渐近结构，我们推导出了埃克曼数较小时主导平均流修正的表达式。这些理论预测与埃克曼数范围为 10^{-8} 至 10^{-10}的数值结果进行了比较，为数值方法和渐近方法提供了有力验证。此外，我们还推导了较弱平均流带的标度律，并与数值数据进行了比较。这项分析使我们得以全面了解平均流修正的结构，图 20、21 和22总结了三个速度分量的结果。

主要发现如下。我们证明，最大的平均流修正局限于不同方向传播的两个波束相交的区域。在这些局部重叠区域中，三个速度分量具有相同的标度。

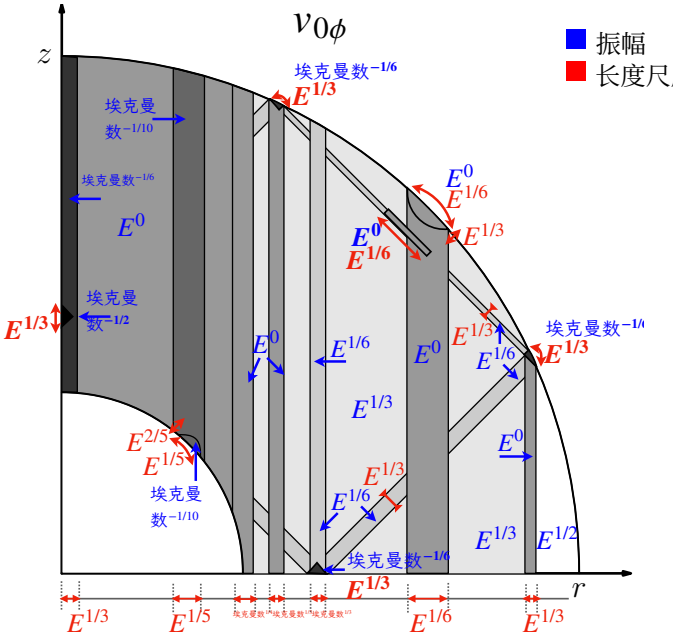

图 20：平均流修正的方位角速度 $v_{0\phi}$ 的埃克曼标度。蓝色和红色分别表示振幅和长度尺度标度。粗体标示的标度已通过渐近解验证。

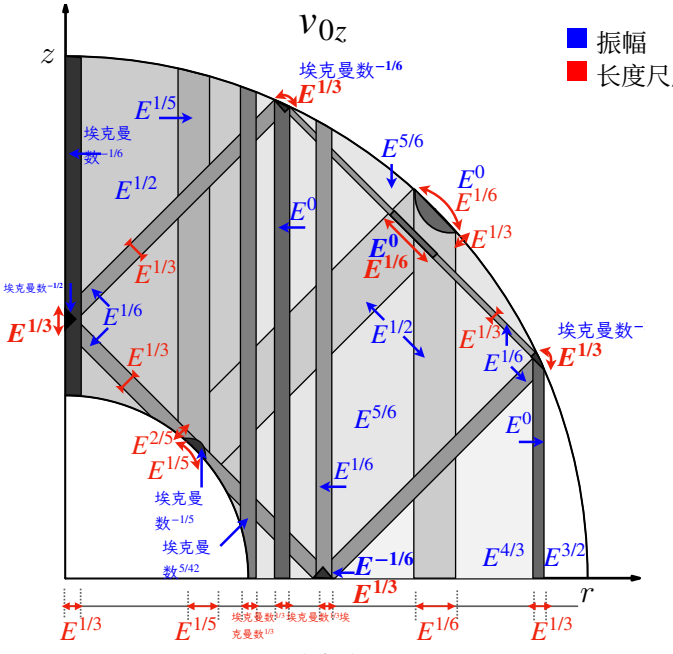

图 21：与图20中的说明相同，但展示的是速度分量 v_{0z}。

最大的修正项为 $E^{-1/2}$ 阶，出现在临界波束到达旋转轴的局部区域 P_1。我们还在区域 P_3 和 P_7 中发现了 $E^{-1/6}$ 阶的显著修正项；临界波束会在这些区域的外边界上反射。此外，在区域 P_4 中，临界波束与其在赤道上的对称波束相交，也会产生显著修正项。较弱的贡献，其标度

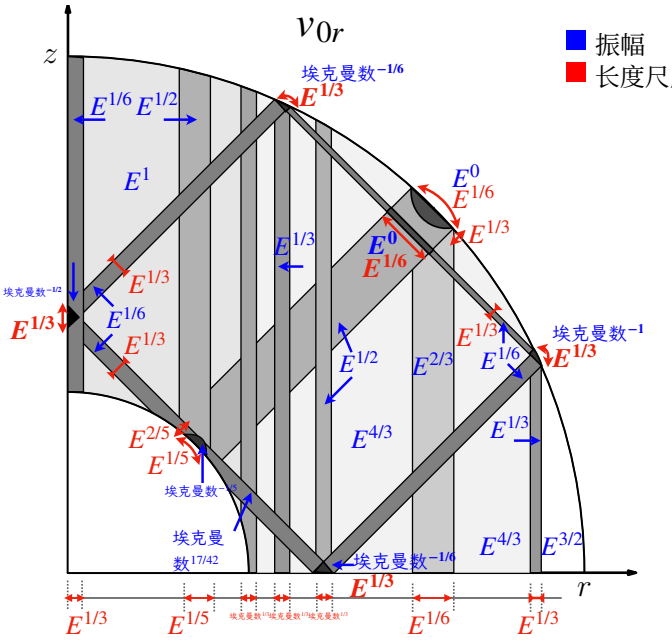

图22：图注与图20相同，但展示的是速度分量 v_{0r}。

已在区域 P_5 和 P_6 观测到如 E^0 这样的现象；在这些区域，主临界波束与在内核和外核临界点之间传播的较宽、较弱的次级波束相互作用。

我们进一步证明，这些强烈的局部相互作用可以成为较弱的平均流带的源，这些流带与旋转轴对齐。我们表明，从外边界上的区域 P_3 和 P_7 会生成平均流带，其轴向速度和方位角速度量级为 E^0 ，径向速度量级为 $E^{1/3}$，从而证实了Le Diz`es（2020）提出的黏性生成机制。当局部相互作用发生在远离边界处时，如区域 P_1 和 P_4，生成的平均流带相对较弱。在所有这些宽度为 $E^{1/3}$的流带中，速度场和压力场具有复杂的轴向结构，因此不会形成Taylor-Proudman柱。相比之下，位于内核和外核上的临界点区域 P_2 和P_6 会生成更宽的平均流带。这些流带表现为Taylor-Proudman柱，其特征是占主导地位的方位速度分量不随轴向坐标变化，同时伴有弱得多的轴向和径向速度分量。

本研究重点关注平均流修正。不过，预计还会存在双谐波修正，其标度为谐波解的平方。对于所考虑的频率， 2ω 位于惯性波的频率范围之外。因此，双谐波修正预计不会传播。然而，正如 Le Diz`es（2020）所解释的，这类修正仍会在相互作用区域内产生。我们预计，它们在局部区域 P_β中的标度与平均流修正相同，但不会从这些区域发射波束。

在本研究中，我们考虑了对内核施加黏性章动强迫，由此产生了一个振幅为 $E^{1/12}$ 的谐波响应。对于振幅更大的谐波响应，例如无黏强迫所产生的响应，预计会有更大的平均流修正。He等人 (2025)研究了相同的几何结构，但采用了不同的强迫方式，即内核垂直振荡。当采用相同频率时，他们表明，可以得到类似的

谐波解，其能量集中于相同的矩形临界射线结构中，但具有不同的相似指数 $m = 1/2$，且振幅标度更大，为 $E^{-1}/^{6}$。对此解也可以进行类似分析，其振幅比当前谐波解大 $E^{-1/4}$。我们预计，临界波束与自身相互作用所产生的平均流修正也会有类似结果，具体而言，这些修正出现在局部相互作用区域 P_β 内，以及从这些点延伸出的带状结构中。不过，由于平均流修正与谐波解振幅的平方成正比，因此在这种情况下，所有此类修正都会放大 $E^{-1/2}$ 倍。具体而言，这会使振幅标度分别达到：$E^{-3}/2$（在 P_1 中）、$E^{-2}/^{3}$（在 P_3、P_4 和 P_7 中），以及 $E^{-1/2}$（在从 P_3、P_6 和 P_7 延伸出的带状结构中）。

我们的结果为文献中先前观察到的现象提供了一些理论依据。例如，Favier等人（2014）研究的潮汐驱动纬向流中，已观察到差分旋转倾向于在波束于边界处反射的位置受到驱动，不过其埃克曼数远高于本文讨论的数值，强迫频率也有所不同。此外，Tilgner（2007）和 Favier等人（2014）报告了差分旋转体积平均能量的初步标度，其指数范围从 $E^{-1}/2$ 到 $E^{-3}/2$（另见 Morize等人（2010）对完整球体实验中方位角速度观测结果的标度 $E^{-3/10}$，不过完整球体与本文研究的球壳关系不大）。由于这些作者研究的是潮汐驱动流，其标度应与我们对无黏强迫的预测进行比较。根据局部分析，我们预计，P_1 周围局部区域内差分旋转的体积平均能量标度为 E^{-2}，而 P_3、P_4 和 P_7 周围局部区域内的标度为 $E^{-2/3}$。预计从 P_3、P_6 和 P_7 延伸出的带状结构所对应的体积平均能量标度为 $E^{-2/3}$。我们的预测与现有标度相符，尤其是我们预计在埃克曼数趋于零的极限下会出现强烈的纬向流。但请注意，我们的方法仅适用于弱非线性极限，不过它清晰地区分了不同的纬向流贡献，而 Tilgner（2007）和 Favier等人（2014）采用的体积平均方法无法做到这一点。最后请注意，P_1 附近旋转轴上的最强响应，可能与 Shmakova等人（2021）和 Liu等人（2022）在振荡环面的研究中讨论的聚焦效应有关。谐波解和平均流修正都在 P_1 附近达到最大振幅，这使我们得以考虑未来发展一种强非线性理论，其中非线性效应集中在该点附近。从定性角度看，我们预测的局部修正和轴向带状结构与 Subbotin等人（2022、2023）的实验稳态纬向流型一致；不过，我们不作定量比较，因为那些实验中的强迫和可达到的埃克曼数与本研究所考虑的渐近区间存在显著差异。

这些针对无黏性强迫和黏性强迫的标度，确定了本研究所采用的弱非线性方法的有效范围。要求平均流修正保持较小，意味着在黏性情况下，强迫振幅 ϵ 必须远小于$E^{1/4}$，而在无黏性情况下必须远小于 $E^{3/4}$。若进一步要求平均流修正小于谐波解，则会得到更为严格的条件。这分别导致黏性情况下的约束 $\epsilon \ll E^{5/12}$，以及无黏性情况下的约束$\epsilon \ll E^{7/6}$。该条件还确保平均流修正的梯度保持较小，从而保证谐波束的传播在主导阶上不会受到平均流修正的扰动。

弱非线性解也可能因失稳而失去物理相关性。谐波解呈现出强烈的剪切区域，这些区域可能不稳定。与这种剪切相关的不稳定性阈值可通过粗略估算得到：将每一层内的涡量与具有特征

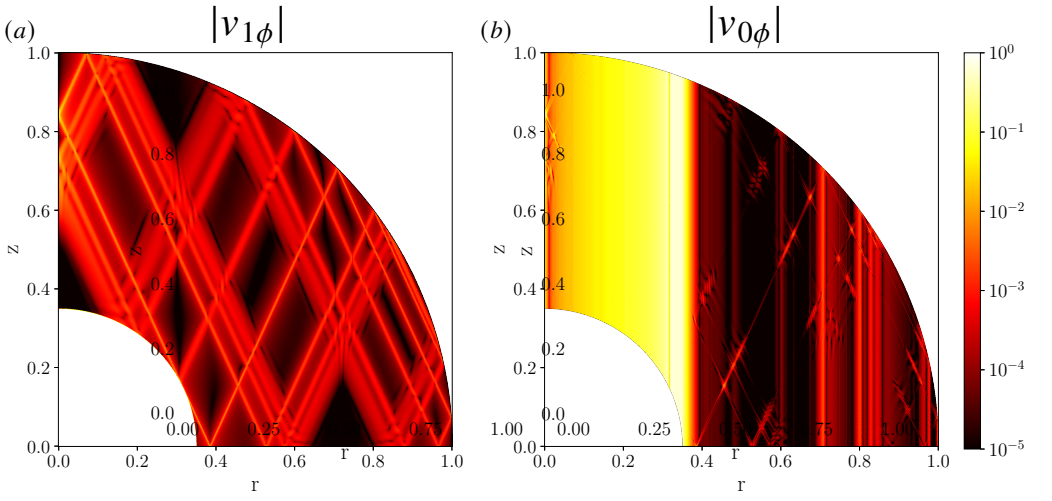

图23：(a) 谐波线性方位速度振幅的等值线 $|v_{1\phi}|$。蓝线表示从源点 S_c 出发的临界线。(b) 在 $E = 10^{-9}$ 时的平均流方位角速度 $|v_{0\phi}|$，内核的天平动频率为 $\omega = 0。8317$。

波长且与层宽度相当的扰动所受的黏性阻尼进行平衡。对于天平动强迫，这给出了内球上斯托克斯–埃克曼层发生不稳定性的条件$\varepsilon > O(E^{1/2})$，以及主内部剪切层（宽度为 $E^{1/3}$）和次级内部剪切层（宽度为 $E^{1/6}$）均发生不稳定性的条件 $\varepsilon > O(E^{7/12})$。这些限制比弱非线性分析的有效性条件更严格。若能通过专门针对谐波解进行稳定性分析，或借助直接数值模拟，获得更精确的不稳定性阈值估计，将很有价值。

值得强调的是，此处展示的结果对应于结构相对简单的谐波解，其中波束交叉次数有限。对于其他强迫频率，谐波响应可能复杂得多，涉及临界点波束的多次反射，以及波吸引子的形成（He 等 2023）。图 23(a)展示了一个此类谐波响应的示例，其天平动频率为 $\widehat{\omega} = 0。8317\Omega$。图 23(b)给出了根据该谐波响应数值计算得到的平均流修正方位角速度等值线。尽管复杂性有所增加，平均流修正的许多特征仍然相似。由内核边界层振荡产生的主要贡献依然存在。主体区域波束交点处的局部贡献也清晰可见，此外还可看到从波束在边界上的反射位置延伸出的带状结构。对于局部贡献和发射出的带状结构，预计类似的渐近分析仍然成立。事实上，在这种情况下，解的结构可能更简单，因为主波束现在是单个临界点波束（相似指数为 $m = 5/4$，振幅标度与 $E^{1/12}$ 相同），且仅沿一个方向传播；这与我们之前的情况不同，之前涉及沿两个方向传播的无穷多个波束。因此，只要分析局限于远离吸引子的区域，我们仍然预期波束交点处存在类似的、量级为 $E^{-1/6}$ 的局部贡献，以及宽度为 $O(E^{1/3})$、速度标度为 E^{0} 的带状结构，它们源自外边界上的反射点。

致谢。 X. C. 完成了数值模拟，开展了渐近分析以及理论与数值结果之间的比较，制作了所有图表，并撰写了初稿。J. H. 开发了数值代码。B. F. 设计了研究方案，负责数值方面的指导，并审阅和编辑了稿件。S. L. D. 设计了研究方案，负责理论方面的指导，并审阅和编辑了

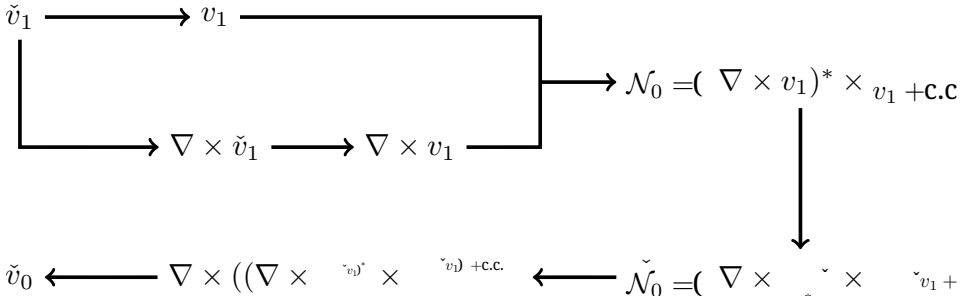

图24：伪谱方法的工作流程示意图。

稿件。感谢艾克斯-马赛高性能计算中心授予我们使用其高性能计算资源的权限。本研究获准使用GENCI分配给IDRIS的高性能计算资源，分配编号为A0140407543和A0180407543。作者感谢Yufeng Lin教授提供用于比较的数值模拟数据。

利益声明。 作者声明不存在利益冲突。

补充材料。 该目录存储了用于在不同截面位置（见图 4）验证埃克曼标度的数值计算数据、标度参数和 Jupyter 笔记本，数值计算结果见 https://www.cambridge.org/S0022112025109841/JFM-Notebooks/files/Figure_num_scaling/mean-num-scaling.ipynb。这项验证对应图 6 以及第 5 节中的图。

作者 ORCID。
Xu Chang，https://orcid.org/0000-0002-5200-3022；Jiyang He，https://orcid.org/0000-0003-4176-1829；Benjamin Favier，https://orcid.org/0000-0002-1184-2989；St´ephane Le Diz`es，https://orcid.org/0000-0001-6540-0433。

附录A. 数值收敛细节

伪谱方法的工作流程如图所示24。基于谐波解在谱空间中的线性速度 $\check{v}_1$ ，本文采用伪谱方法计算稳态雷诺应力，进而得到平均流。对于角向分量，我们使用 SHTns软件包将球谐系数高效地变换到物理空间（Schaeffer 2013）。

我们测试了两种去混叠方法：对球谐系数进行传统的 2/3截断，以及使用 SHTns软件包针对角向维度的抗混叠功能（Schaeffer 2013）。由于我们在物理空间中使用切比雪夫微分矩阵，因此径向无需进行去混叠。在我们的分辨率下，这两种方法所得结果与未进行去混叠的模拟结果完全相同，因此本文展示的所有结果均未应用去混叠操作。

通过切比雪夫系数和球谐分量的谱来检验不同分辨率下谱代码的收敛性，方法与Rieutord与Valdettaro（1997）相同。图25 展示了最小埃克曼数 $E = 10^{-10}$下的谱。我们已验证，对于所有埃克曼数，表1所示的分辨率均确保比值 $Es_{\min}/Es_{\max}$ 小于 10^{-8}，其中 $Es_{\min}$ 和 $Es_{\max}$ 分别是能谱的最小值和最大值。这确保了所有长度尺度均得到充分分辨，直至较小的耗散结构；图25中高波数处观察到的指数截断也证实了这一点。

埃克曼数	切比雪夫网格分辨率 N	球谐网格分辨率 L
$E = 10^{-6}$	300	600
$E = 10^{-7}$	300	900
$E = 10^{-8}$	900	3000
$E = 10^{-9}$	900	3500
$E = 10^{-10}$	2500	8000

表1：不同埃克曼数下的分辨率

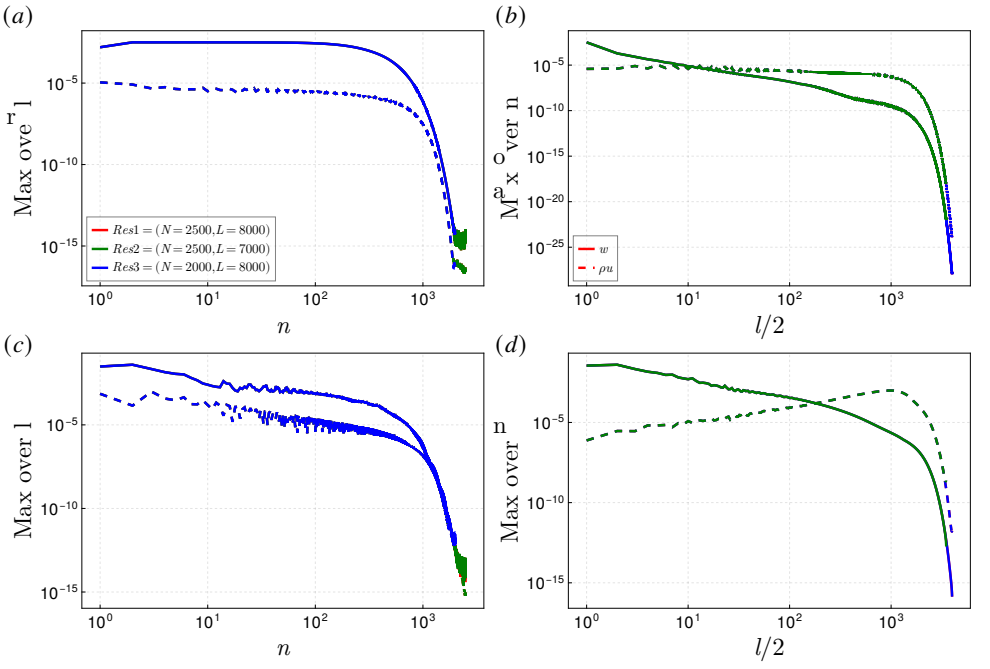

图25：在 $E = 10^{-10}$ 处，采用三种不同分辨率 $Res1$ = (2500,8000)、 $Res2$ = (2500,7000) 和 $Res3$ = (2000,8000) 时，(*a*) 线性切比雪夫系数、(*b*) 线性球谐分量、(*c*) 非线性切比雪夫系数和 (*d*) 非线性球谐分量的谱比较，红色、绿色和蓝色曲线分别对应这三种分辨率。环向分量（w 实线）和径向分量（ρu 虚线）已分开。对于每个 l 和 n，取另一谱分量上的最大值。

附录B. 调和解的参数

沿主矩形回路的谐波解参数列于表2 和3 中，分别对应北向波束和南向波束。它们采用以下量

$$L = l_1 + l_2 + l_3 K^{-3} + l_4 + l_5 \tag{B 1}$$

with

$$l_1 = \eta, \quad l_2 = \sqrt{1-\eta^2} - \eta, \quad l_2 = 2\eta, \quad l_4 = l_2, \quad l_5 = l_1, \tag{B 2}$$

and

$$K = \frac{\sin(\alpha + \pi/4)}{\sin(\alpha - \pi/4)}. \tag{B 3}$$

Critical line	$x_{\parallel}^{N}$	$x_{\perp}^{N}$	$\tilde{C}_0^N$	L^N
$S_c \to P_1$	$\frac{-r+z}{\sqrt{2}}$	$\frac{r+z-\sqrt{2}\eta}{\sqrt{2}}$	$\tilde{C}_0^N$	L
$P_1 \to P_3$	$l_1+\frac{r+z-\sqrt{2}\eta}{\sqrt{2}}$	$\frac{-r+z-\sqrt{2}\eta}{\sqrt{2}}$	$\mathrm{i}\tilde{C}_0^N$	L
$P_3 \to P_7$	$(l_1+l_2)K^3+\frac{r-z+\sqrt{2}\eta}{\sqrt{2}}$	$\frac{-r-z+\sqrt{2-2\eta^2}}{\sqrt{2}}$	$\mathrm{i}K^{-1/4}\tilde{C}_0^N$	K^3L
$P_7 \to P_4$	$l_1+l_2+l_3K^{-3}+\frac{-r-z+\sqrt{2-2\eta^2}}{\sqrt{2}}$	$\frac{r-z-\sqrt{2}\eta}{\sqrt{2}}$	$\mathrm{i}\tilde{C}_0^N$	L
$P_4 \to S_c$	$l_1+l_2+l_3K^{-3}+l_4+\frac{-r+z+\sqrt{2}\eta}{\sqrt{2}}$	$\frac{r+z-\sqrt{2}\eta}{\sqrt{2}}$	$\mathrm{i}\tilde{C}_0^N$	L

表 2：一个周期内向北路径的坐标、振幅和传播距离。

Critical line	$x_{\parallel}^{S}$	$x_{\perp}^{S}$	$\tilde{C}_0^S$	L^S
$S_c \to P_4$	$\frac{-r-z+\sqrt{2}\eta}{\sqrt{2}}$	$\frac{-r-z+\sqrt{2}\eta}{\sqrt{2}}$	$\tilde{C}_0^S$	L
$P_4 \to P_7$	$l_5+\frac{r+z-\sqrt{2}\eta}{\sqrt{2}}$	$\frac{-r+z+\sqrt{2}\eta}{\sqrt{2}}$	$\tilde{C}_0^S$	L
$P_7 \to P_3$	$(l_5+l_4)K^3+\frac{-r+z+\sqrt{2}\eta}{\sqrt{2}}$	$\frac{r+z-\sqrt{2-2\eta^2}}{\sqrt{2}}$	$K^{-1/4}\tilde{C}_0^S$	K^3L
$P_3 \to P_1$	$l_5+l_4+l_3K^{-3}+\frac{-r-z+\sqrt{2-2\eta^2}}{\sqrt{2}}$	$\frac{r-z+\sqrt{2}\eta}{\sqrt{2}}$	$\tilde{C}_0^S$	L
$P_1 \to S_c$	$l_5+l_4+l_3K^{-3}+l_2+\frac{r-z+\sqrt{2}\eta}{\sqrt{2}}$	$\frac{-r-z+\sqrt{2}\eta}{\sqrt{2}}$	$\mathrm{i}\tilde{C}_0^S$	L

表 3：一个周期内向南路径的坐标、振幅和传播距离。

附录 C. 平均流带

本节分析主体区域内由局部相互作用区域 P_β 产生的平均流带的结构。这些带状结构的特别之处在于，它们存在于雷诺应力非常小的流体区域。因此，相应的速度场预计满足齐次方程。

C.1. 由 P_3、P_4 和 P_7 产生的带状结构

我们首先考虑由局部区域 P_3, P_4 和 P_7 产生的带状结构。这些区域的宽度为 $E^{1/3}$ 量级，因此可以预期带状结构也具有相同的宽度。因此，自然可以引入局部径向变量 $\tilde{r} = E^{-1/3}(r - r_{P_\beta})$，并对速度场采用以下试探形式：

$$\mathbf{v}_0 = (E^{1/3}v_{0r}, v_{0\phi}, v_{0z}, E^{1/3}p_0)(\tilde{r}, z). \tag{C 1}$$

于是，速度场满足以下方程组

$$-2v_{0\phi}+\frac{\partial p_0}{\partial \tilde{r}}=0, \tag{C 2a}$$

$$2v_{0r}-\frac{\partial^2 v_{0\phi}}{\partial \tilde{r}^2}=0, \tag{C 2b}$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z}-\frac{\partial^2 v_{0z}}{\partial \tilde{r}^2}=0, \tag{C 2c}$$

$$\frac{\partial v_{0r}}{\partial \tilde{r}}+\frac{\partial v_{0z}}{\partial z}=0. \tag{C 2d}$$

对于 P_3 和 P_7，解应在$^{-z_{P_\beta}}$至$^{z_{P_\beta}}$范围内有效，并且轴向速度分量相对于赤道平面满足反对称条件。这意味着，由 P_3 和 P_7 产生的带状结构的通解形式为

$$v_{0r}=-\frac{\mathrm{i}}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}A(k)k^3\cosh(k^3z/2)e^{\mathrm{i}k\tilde{r}}dk, \tag{C 3a}$$

$$v_{0\phi}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}A(k)k\cosh(k^3z/2)e^{\mathrm{i}k\tilde{r}}dk, \tag{C 3b}$$

$$v_{0z}=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}A(k)k\sinh(k^3z/2)e^{\mathrm{i}k\tilde{r}}dk, \tag{C 3c}$$

$$p_0=\int_{-\infty}^{+\infty}A(k)\cosh(k^3z/2)e^{\mathrm{i}k\tilde{r}}dk. \tag{C 3d}$$

其中，$A(k)$ 是由 $z=z_{P_\beta}$处的边界条件确定的函数。具体而言，$A(k)$ 由靠近 P_β的边界处产生的埃克曼抽吸决定。我们已经看到，在 $E^{-1/6}$阶，埃克曼抽吸为零。这解释了为什么带区的阶数小于 $E^{-1/6}$。正如 Le Diz`es（2020）所示，埃克曼抽吸最早出现在 E^0阶。若将这一阶的埃克曼抽吸记为 $w_\infty(\tilde{r})=\tilde{v}_{0z}(\tilde{r},\ \tilde{z}=-\infty)$，则函数 $A(k)$ 可直接由条件 $v_{0z}(\tilde{r},\ z_{P_\beta})=w_\infty(\tilde{r})$ 求得，从而得到

$$A(k)=-\frac{2\hat{w}_\infty}{k\sinh(k^3z_{P_\beta}/2)}, \tag{C 4}$$

其中，$\hat{}w_\infty$ 是 w_∞的傅里叶变换。

对于从赤道面上的点 P_4 发出的带区，解必须在带区的两端满足不可穿透条件，对应于$z=\pm z_4=\pm\sqrt{1-2\eta^2}$。由此得到 $z>0$的以下形式：

$$v_{0r}=-\frac{\mathrm{i}}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}A(k)k^3\cosh(k^3(z-z_4)/2)e^{\mathrm{i}k\tilde{r}}dk, \tag{C 5a}$$

$$v_{0\phi}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}A(k)k\cosh(k^3(z-z_4)/2)e^{\mathrm{i}k\tilde{r}}dk, \tag{C 5b}$$

$$v_{0z}=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}A(k)k\sinh(k^3(z-z_4)/2)e^{\mathrm{i}k\tilde{r}}dk, \tag{C 5c}$$

$$p_0=\int_{-\infty}^{+\infty}A(k)\cosh(k^3(z-z_4)/2)e^{\mathrm{i}k\tilde{r}}dk. \tag{C 5d}$$

振幅 $A(k)$ 现在由 $z=0$ 附近 P_4处雷诺应力产生的轴向通量确定。我们已经看到，在阶数 $E^{-1/6}$ 下它为零。我们进一步声称，

它在阶数 $E^{-1/12}$ 和 E^{0} 下也消失，这是由于这些阶数下的雷诺应力具有相似的形式。事实上，如第 3.5节所示，截至 $O(E^{1/3})$，对主导阶谐波解的黏性修正与主波束具有相似的结构。它们还满足用于推导平均流修正表达式（4.4）的两个关键性质—（3.10）和（3.11）—，该表达式尤其不表现出轴向通量。

因此，产生非零轴向通量的第一项修正预计将比主导项小 $E^{1/3}$ 一个量级，即处于 $E^{1/6}$阶。若将该通量记为 $E^{1/6}w_{\infty}(\tilde{r})$，则通过施加条件$v_{0z}(\tilde{r}, z=0) = E^{1/6}w_{\infty}(\tilde{r})$可得到函数 $A(k)$，从而有

$$A(k) = E^{1/6}\frac{2\hat{w}_{\infty}}{k\sinh(k^3 z_{Q_4}/2)}\,. \tag{C 6}$$

因此，我们预计由 P_4 产生的带区将比源自 P_3 和 P_7的带区小 $E^{1/6}$ 一个量级。

值得强调的是，由三个点 P_3、P_4 和 P_7 发出的带状结构中的速度场取决于轴向坐标 z。因此，这些带状结构并非Taylor-Proudman柱；在Taylor-Proudman柱中，轴向速度分量和方位速度分量沿旋转轴保持不变。这里，由于径向尺度很小，负责产生轴向变化的黏性效应会在柱体的O(1)轴向范围内变得可观测。

C.2. 从 P_1 发出的带区

对于起源于点 P_1 的带区，由于存在圆柱奇点，分析略有不同。我们仍然引入局部变量 $\tilde{r} = E^{-1/3}r$，并对平均流修正项采用相同的试探形式（C1）。控制方程变为：

$$-2v_{0\phi} + \frac{\partial p_0}{\partial \tilde{r}} = 0, \tag{C 7a}$$

$$2v_{0r} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}^2}\right)v_{0\phi} = 0, \tag{C 7b}$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}\right)v_{0z} = 0, \tag{C 7c}$$

$$\frac{\partial v_{0r}}{\partial \tilde{r}} + \frac{v_{0r}}{\tilde{r}} + \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} = 0. \tag{C 7d}$$

在 P_1 两侧，我们分别得到满足 $z = z_1^{+} = 1$ 处和 $z = z_1^{-} = \eta$ 处不可穿透条件的解。这些解的形式如下：

$$v_{0r}^{\pm} = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} A^{\pm}(k)k^3\cosh(k^3(z-z_1^{\pm})/2)J_1(k\tilde{r})dk, \tag{C 8a}$$

$$v_{0\phi}^{\pm} = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} A^{\pm}(k)k\cosh(k^3(z-z_1^{\pm})/2)J_1(k\tilde{r})dk, \tag{C 8b}$$

$$v_{0z}^{\pm} = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} A^{\pm}(k)k\sinh(k^3(z-z_1^{\pm})/2)J_0(k\tilde{r})dk, \tag{C 8c}$$

$$p_0^{\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty} A^{\pm}(k)\cosh(k^3(z-z_1^{\pm})/2)J_0(k\tilde{r})dk, \tag{C 8d}$$

其中，上标 + 指的是区域 $z_{P_1} < z \leqslant 1$，上标 –指的是$\eta \leqslant z < z_{P_1}$。函数 $A^{\pm}(k)$由与 P_1附近局部解的匹配条件确定。如前所示，在阶数 $E^{-1/2}$下，局部解

局限于 P_1附近，因此不会产生任何平均流带。基于与 P_4情形相同的理由，阶数为 $E^{-5/12}$和 $E^{-1}/^3$的修正项也局限于局部，不会导致任何非局部带状结构。首个非局部贡献预计出现在阶数 $E^{-1/6}$。函数 $A^{\pm}$可通过以下关系与 P_1 周围局部区域内方位速度和轴向速度的跃变 $E^{-1}/^6\delta\hat{v}$和 $E^{-1/6}\delta\,\hat{}w$ 联系起来

$$v_{0\phi}^{+}(\tilde{r}, z = z_{P_1}) - v_{0\phi}^{-}(\tilde{r}, z = z_{P_1}) = E^{-1/6}\delta\hat{v}(\tilde{r}), \tag{C 9a}$$

$$v_{0z}^{+}(\tilde{r}, z = z_{P_1}) - v_{0z}^{-}(\tilde{r}, z = z_{P_1}) = E^{-1/6}\delta\hat{w}(\tilde{r}). \tag{C 9b}$$

与源自 P_3、 P_4 和 P_7的带状结构一样，从 P_1 延伸出的带区也具有轴向依赖性。

C.3. *Bands issued from P_2 and P_6*

从局部区域 P_2 和 P_6 延伸出的带区与前文讨论的不同，因为它们的径向宽度大于 $E^{1/3}$。因此，方位角速度不再依赖轴向坐标 z。这些带区于是成为Taylor-Proudman柱。

对于 P_6，适当的径向变量和速度渐近假设分别为 $\check{r} = (r - r_{P_6})/E^{1/6}$ 和

$$\mathbf{v}_0 = (E^{2/3}v_{0r}, v_{0\phi}, E^{1/2}v_{0z}, E^{1/6}p_0)(\check{r}, z). \tag{C 10}$$

由此得到以下控制方程：

$$-2v_{0\phi} + \frac{\partial p_0}{\partial \check{r}} = 0, \tag{C 11a}$$

$$2v_{0r} - \frac{\partial^2 v_{0\phi}}{\partial \check{r}^2} = 0, \tag{C 11b}$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = 0, \tag{C 11c}$$

$$\frac{\partial v_{0r}}{\partial \check{r}} + \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} = 0. \tag{C 11d}$$

上述试探形式和方程表明，主体区域内量级为 1 的方位角速度，只有与量级为 $E^{1/2}$ 的轴向速度相容。特别是（C11b,d）意味着，轴向速度相对于赤道面必须是反对称的，因此必须满足

$$v_{0z} = -z\frac{\partial v_{0r}}{\partial \check{r}} = -\frac{z}{2}\frac{\partial^3 v_{0\phi}}{\partial \check{r}^3}, \tag{C 12}$$

对于给定的方位角速度分布$v_{0\phi}$（$\check{r}$）。然而，我们在 O（1）§4.2.2 中计算得到的特解预计会产生量级为 $E^{1/3}$的埃克曼抽吸。同样，主体区域内量级为 O（1）的方位角速度也会产生相同量级的埃克曼抽吸。这两项贡献必须相互抵消，才能确保与主体区域内的轴向流动相容。该匹配条件确定函数$v_{0\phi}$（$\check{r}$），由此即可完全确定带区内的速度和压力场。

P_2 的情况更为复杂，因为原则上， $E^{1/5}$ 和 $E^{1/6}$ 径向尺度都有可能。假设 $E^{1/5}$ 尺度占主导地位，我们引入 $\bar{r} = (r - r_{P_2})/E^{1/5}$ 以及以下试探形式

$$\mathbf{v}_0 = (E^{3/5}v_{0r}, v_{0\phi}, E^{2/5}v_{0z}, E^{1/5}p_0)(\bar{r}, z). \tag{C 13}$$

所得方程与（C11）中的方程类似，只是将 $\check{r}$ 替换为 $\bar{r}$。与 P_6的情形一样，主阶方位角速度分量必须与 z无关。然而，

轴向速度现在可能与 z 呈线性关系，其标度由试探形式（C 13）规定；也可能与 z 无关且幅值更大。需要注意的是，预计具有 $O(1)$ 方位角速度的主体解会在内核和外核处产生 $O(E^{3/10})$ 埃克曼抽吸。这些埃克曼抽吸在两个边界处有所不同，并且大于主体区域中可能存在的线性轴向流。因此，必须选择主体区域中的方位角速度，使得由雷诺应力驱动的解在 P_2中产生的埃克曼抽吸，恰好抵消主体解在外边界处产生的埃克曼抽吸。这种抵消使得主体区域中的轴向流在主导阶上可以与 z无关。尽管精确计算埃克曼抽吸颇具挑战，但上述推理使我们能够推导出各速度分量的相对阶数。例如，如果 P_2中的埃克曼抽吸为 $O(E^{1/5})$，那么在主体区域中，我们预计：$v_{0\phi} = O(E^{-1/10})$、$v_{0z} = O(E^{1/5})$ 以及 $v_{0r} = O(E^{1/2})$。还预计轴向速度在 $E^{3/10}$ 阶具有较弱的轴向依赖性，其形式由该带区对应于方程（C 12）的类比式给出。

最后，我们简要讨论一下由 P_5产生的带区。与 P_1的情况相同，这种带区是由 $v_{0\phi}$ 和 v_{0z} 在局部区域 P_5两侧的跃变所产生的。由于两条相互作用射线束的尺度不同，这些跃变预计为 $E^{2/3}$量级。 v_{0z} 的跃变必须由外边界处同阶的埃克曼抽吸来补偿。这要求带区中的方位角速度达到 $E^{1/3}$量级。该速度振幅与主体区域中的背景方位角速度相当，这也解释了为何图 P_5 中看不到由其产生的明显带区：1 和5(b)。

参考文献

Balmforth, N. J. & Peacock, T. 2009 超临界地形引起的潮汐转换。《物理海洋学杂志》39 (8), 1965–74. Busse, F. H. 2010 旋转球形腔体的天平动所产生的平均纬向流。《流体力学杂志》650 (650), 505–512. C´ebron, D., Vidal, J., Schaeffer, N., Borderies, A. & Sauret, A. 2021 旋转椭球体中弱机械强迫诱导的平均纬向流。《流体力学杂志》916, A39. Dormy, E. & Soward, A. M. 2007 天然发电机的数学方面。Chapman and Hall/CRC. Echeverri, P. & Peacock, T. 2010 任意二维地形引起的内部潮汐生成。《流体力学杂志》659, 247–66. Favier, B., Barker, A. J., Baruteau, C. & Ogilvie, G. I. 2014 潮汐强迫旋转流体天体中惯性波的非线性演化。Mem. R. Astron. Soc. 439 (1), 845–860. Greenspan, H. P. 1968《旋转流体理论》。剑桥大学出版社。He, J., Favier, B. & Le Diz`es, S. 2025 无界和有界旋转流体中垂直振荡圆柱产生的内部剪切层。JFM 1015, A38. He, J., Favier, B., Rieutord, M. & Le Diz`es, S. 2022 经向摆动球壳中的内部剪切层：周期特征路径的情形。《流体力学杂志》939, A3. He, J., Favier, B., Rieutord, M. & Le Diz`es, S. 2023 经向摆动球壳中的内部剪切层：吸引子的情形。《流体力学杂志》974, A3. Kerswell, R. R. 1995 振荡埃克曼边界层临界区域产生的内部剪切层。《流体力学杂志》298, 311–25. Le Bars, M., C´ebron, D. & Le Gal, P. 2015 天平动、岁差和潮汐驱动的流动。《流体力学年度评论》47 (1), 163–193. Le Bars, M., Wieczorek, M. A., Karatekin, ¨O, C´ebron, D. & Laneuville, M. 2011 早期月球的撞击驱动发电机。《自然》479 (7372). Le Diz`es, S. 2015 经向摆动圆盘的波场与纬向流。《流体力学杂志》782, 178–208. Le Diz`es, S. 2020 振荡内部剪切层的反射：非线性修正。《流体力学杂志》899, A21. Le Diz`es, S. 2024 旋转和分层流体中的临界斜率奇异性。《物理评论：流体》9 (3), 034803. Le Diz`es, S. & Le Bars, M. 2017 经向摆动物体产生的内部剪切层。《流体力学杂志》826, 653–675。

Lin, Y. & Noir, J. 2021 球壳中的章动驱动惯性波与平均纬向流。《地球物理与天体物理流体动力学》115 (3), 258–279. Liu, J., Oberlack, M., Wang, Y., Delache, A. & Godeferd, F. S. 2022 垂直环形强迫对惯性波的聚焦。《物理流体》34 (8), 086601. Maas, L. R. M., Benielli, D., Sommeria, J. & Lam, F. A. 1997 在受限稳定分层流体中观测到内波吸引子。《自然》388 (6642), 557–61. Moore, D. W. & Saffman, P. G. 1969 旋转流体中自由垂直剪切层的结构及缓慢上升物体产生的运动。《皇家学会哲学汇刊 A 辑》264 (1156), 597–634. Morize, C., Le Bars, M., Le Gal, P. & Tilgner, A. 2010 潮汐驱动纬向风的实验测定。《物理评论快报》104 (21), 214501. Noir, J., Hemmerlin, F., Wicht, J., Baca, S. M. & Aurnou, J. M. 2009 行星核和地下海洋中天平动驱动流动的实验与数值研究。《地球与行星内部物理学》173 (1), 141–52. Peacock, T. & Tabaei, A. 2005 反射内波波束中非线性效应的可视化。《物理流体》17 (6), 061702. Reddy, K. S., Favier, B. & Le Bars, M. 2018 机械强迫驱动椭球体中的湍流运动学发电机。《地球物理研究快报》45 (4), 1741–1750. Rieutord, M., Georgeot, B. & Valdettaro, L. 2001 旋转球壳中的惯性波：吸引子与渐近谱。《流体力学杂志》435, 103–44. Rieutord, M. & Valdettaro, L. 1997 341, 77 99 旋转球壳中的惯性波。《流体力学杂志》– 。Sauret, A. & Le Diz

` 2013 **718**, es. 球

181, 209

壳中章动诱导的平均流。《流体力学杂志》– 。Schaeffer, N. 2013 面向伪谱数值模拟的高效球谐变换。《地球化学、地球物理与地球系统》14 (3), 751–758. Shmakova, N., Voisin, B., Sommeria, J. & Fl´or, J.-B. 2021 大斯托克斯数下的内波与惯性重力波聚焦。《物理评论：流体》6 (11), 114804. Smith, S. G. L. & Young, W. R. 2003 陡峭海脊处的潮汐转换。《流体力学杂志》495, 175–91. Soderlund, K. M., Rovira-Navarro, M., Le Bars, M., Schmidt, B. E. & Gerkema, T. 2024 冰覆卫星的物理海洋学。《海洋科学年度评论》16 (1), 25–53. Stewartson, K 1966 关于近乎刚性旋转。第二部分。《流体力学杂志》26 (1), 131–144. Subbotin, S., Shmakova, N., Ermanyuk, E. & Kozlov, V. 2022 振荡内核旋转球体中的斯图尔特森层不稳定性与三波共振。《物理流体》34 (6), 064103. Subbotin, S., Shmakova, N., Kozlov, V. & Ermanyuk, E. 2023 进动盖板产生的惯性波吸引子的非线性状态：纬向流与罗斯贝波。《物理流体》35 (7), 074110. Tabaei, A. & Akylas, T. R. 2003 非线性内重力波束。《流体力学杂志》482, 141–61. Tabaei, A., Akylas, T. R. & Lamb, K. G. 2005 反射和碰撞内波波束中的非线性效应。《流体力学杂志》526, 217–43. Thomas, N. H. & Stevenson, T. N. 1972 黏性内波的相似解。《流体力学杂志》54 (3), 495–506. Thomas, P. C., Tajeddine, R., Tiscareno, M. S., Burns, J. A., Joseph, J., Loredo, T. J., Helfenstein, P. & Porco, C. 2016 土卫二测得的物理天平动表明其存在全球地下海洋。《伊卡洛斯》264, 37–47. Tilgner, A. 2007 惯性模态驱动的纬向风。《物理评论快报》99 (19), 194501. Wilson, A. & Kerswell, R. R.

2018 ´ **500**, 天平动

41, 46

能否维持土卫二海洋? 《地球与行星科学快报》– 。Wu, C.-C. & Roberts, P. H. 2013 关于由经向天平动通过地形驱动的发电机。《地球物理与天体物理流体动力学》107 (1-2), 20–44。