arXiv:2601.01936v1 [quant-ph] 5 Jan 2026

量子跃迁概率的齐性

Gerd Niestegge

德国阿豪斯 gerd.niestegge@web.de,
https://orcid.org/0000-0002-3405-9356

摘要

1952年和1965年，H.-C. Wang 与 U. Hirzebruch 证明，具有凸度量的二点齐次紧空间与球面、实射影空间、复射影空间、八元数射影空间和穆方平面等距，也与简单欧几里得约当代数中的极小幂等元集合或纯态集合等距。本文揭示这些数学成果对于量子力学跃迁概率的物理意义。我们证明，在所有简单欧几里得约当代数中，这种跃迁概率都具有最大程度的齐性，其中包括常见的有限维希尔伯特空间量子理论。这些代数的原子部分，或者等价地说，其态空间的极边界，可以通过纯粹的拓扑方法加以刻画。这与许多近期旨在从凸紧集之中区分整个态空间的其他方法有重要区别。当将 E_6-对称双八元数射影平面用作量子逻辑时，会出现一个有趣的非齐次跃迁概率案例。

关键词： 量子理论基础；量子信息；量子概率；欧几里得约当代数；量子逻辑；凸度量；两点齐性；双八元数射影平面

1 引言

一个重要的数学成果 [11, 17] 是，以下对象都是具有两点齐性和凸度量的紧空间，并且任何具有凸度量的两点齐性紧空间都与其中某一个等距同构：球面、实射影空间、复射影空间、八元数射影空间和穆方平面。另一方面，这些对象与有限维单的欧几里得约当代数的原子部分（或者等价地说，与态空间的极边界——纯态）相一致；这些代数也被称为形式实代数，而非欧几里得约当代数。它们包括自旋因子、实数($\mathbb{R}$)、复数($\mathbb{C}$)、四元数($\mathbb{H}$)上的厄米 $n \times n$阶矩阵代数（$n = 3$，4、5、.....），以及八元数($\mathbb{O}$)上的厄米 3×3阶矩阵代数，并赋予乔丹乘积。复矩阵代数构成了有限维量子理论的通常模型。

在此，我们揭示这些已确立的数学成果对于量子力学跃迁概率的意义。根据 Hirzebruch 的结果，我们得知，在所有单纯欧几里得乔丹代数中，这种跃迁概率都具有最大程度的齐性。随后，Wang 的一条定理仅凭拓扑方法刻画了这些代数的原子部分，或者等价地说，刻画了它们状态空间的极边界

（即纯态空间）。这与许多近期旨在区分凸紧集 [1, 4, 12, 13, 16] 中整个状态空间的其他方法有着重要区别。

在非阿贝尔、非单（可约）情形下，跃迁概率变为非齐次。还有一种更有趣的非齐次情形：当将 E_6-对称双八元数射影平面 [2, 3, 6, 7, 9] 用作量子逻辑时。

第 2 节简要概述欧几里得约当代数理论，并聚焦于本文所需的理论问题。第 3 节讨论跃迁概率及其齐次性特征。第 4 节研究这一特征与度量空间两点齐性之间的关系，并陈述我们的主要结果。第 5 节讨论非齐次跃迁概率。

2 欧几里得约当代数

欧几里得约当代数与形式实约当代数以及有限维 JB 代数完全相同，尽管这三种结构的定义略有不同 [1, 8, 10]。所有定义的共同之处在于：它们都是实数上的含单位元代数，配备一个可交换但不满足结合律的乘积 $\circ$，并满足乔丹恒等式 $a\circ(a^2\circ b) = a^2\circ(a\circ b)$。这里用 $\mathbb{I}$表示单位元。若一个欧几里得约当代数不能表示为若干子代数的直和，则称其为单的或不可约的。单纯欧几里得约当代数包括自旋因子、 $n\times n$上的厄米矩阵代数（配备乔丹乘积），以及 $\mathbb{R}$、 $\mathbb{C}$、 $\mathbb{H}$ 上的厄米矩阵代数；此外，仅在 $n = 3$ 的情形下，还包括 $\mathbb{O}$ [1, 10] 上的厄米矩阵代数。这些矩阵代数分别记作 $H_n(\mathbb{R})$、$H_n(\mathbb{C})$、 $H_n(\mathbb{H})$ 和 $H_3(\mathbb{O})$。

任意欧几里得约当代数 A 都具有序关系 $\leq$，其中 $0 \leq a$ 当且仅当 $a \in \left\{x^2 | x \in A\right\}$。线性泛函 $\mu\colon A \to \mathbb{R}$ 若满足对所有 $x \in A$都有 $0 \leq \mu(x^2)$，则称其为正的；若 μ 为正且满足 $\mu(\mathbb{I}) = 1$，则称 μ 为态。状态空间记为 S_A。

A 中的幂等元构成一个正交模格，也称为量子逻辑 L_A。一对 $p, q \in L_A$ 若满足 $p + q \leq \mathbb{I}$，则称为正交；并且 $p' := \mathbb{I} - p$成为 p的正交补。 L_A 中的最小非零元称为原子 或本原元； E_A 表示包含这些原子的集合。对每个原子 $p \in E_A$，存在唯一的态 $\mu \in S_A$ 满足 $\mu(p) = 1$。此态是 S_A的一个极点；这意味着 μ 是一个纯态。

A 的自同构是一个可逆正变换 $T\colon A \to A$，其正逆变换为正变换，且 $T(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$。这些自同构构成一个群，记作 $Aut(A)$。由于 A 的维数有限，因此这是一个紧群。

A 具有一个迹；这是一个正线性泛函，在所有自同构下保持不变，并且对原子 $p \in E_A$ 满足 $trace(p) = 1$。此外，$A \ni a \to trace(p \circ a)$ 是唯一满足 $\mu(p) = 1$ 的态 μ。

对于任意 $p \in L_A$，子空间 $\{p, A, p\}$ 都成为一个以 p 为单位元的子代数。若 p 是一个原子，则 $\{p, A, p\} = \mathbb{R}p$。这里我们使用所谓的三重乘积，其定义如下：$\{x, y, x\} := 2x \circ (x \circ y) - x^2 \circ y$，其中 $x,\ y \in A$。

若 A 是单的，且原子 p、$q \in E_A$ 正交，则它们是强连通 [1, 10]的；这意味着存在一个元素

$$v \in \{p, A, q\} \subseteq \{p + q, A, p + q\}$$

满足 $v^2 = p + q$（v 是所谓的对称元）。于是 $a := (v + p + q)/2$ 是幂等元，且满足 $a \leq p + q$、$0 \neq a \neq p + q$ 和 $p \neq a \neq q$。因此 a 是一个原子。

引理1： 对于单的欧几里得约当代数A 中的任意两个原子 p 和 q，存在第三个原子 e 满足

$$\arccos \sqrt{trace(p \circ q)} = \arccos \sqrt{trace(q \circ e)} + \arccos \sqrt{trace(e \circ p)}.$$

证明。取 $u := p \vee q$，考虑子代数 $\{u, A, u\}$，其中 u 成为单位元。取 $p' := u - p$，存在某个 $s,\ t \in \mathbb{R}$，且乘积 $p \circ q$ 属于三个元素u、p、q的线性包。由于这些元素是幂等元，且 $u \circ p = p, u \circ q = q$，它们生成了 $\{u, A, u\}$的一个约当子代数 A_o，其维数不超过3。在 $dim(A_o)$的情形下，$= 1$ 成立，因此我们可以取 $e = p = q$。

我们首先考虑 $dim(A_o) = 3$ 的情形。如果 $A_o = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$，单位元$u$ 不可能成为两个原子的上确界。因此，A_o 必定同构于由厄米 2×2 阶实矩阵组成并赋予乔丹乘积的代数。$H_2(\mathbb{R})$ 中的原子是以下矩阵

$$e_t := \begin{pmatrix} cos^2(t) & -sin(t)cos(t) \\ -sin(t)cos(t) & sin^2(t) \end{pmatrix}$$

满足 $t \in \mathbb{R}$。于是

$$trace(e_s \circ e_t) = [cos(s)cos(t) + sin(s)sin(t)]^2 = cos^2(s - t)$$

满足 $s,\ t \in \mathbb{R}$。对于 $p = e_s$ 和 $q = e_r$，原子 $e := e_r$（其中 $r := (s + t)/2$）于是满足上述恒等式。

现在讨论 $dim(A_o) = 2$ 的情形，其中 p 和 q 正交。由于A是单的，$\{u, A, u\}$ 包含另一个满足 $p \neq a \neq q$ 的原子 a。如果原子p 和 a 正交，就会得到 $a = u - p = q$，而这是不可能的。因此，$u,\ p,\ a$ 生成一个包含 $q = u - p$ 的三维子代数，我们便可像在 $dim(A_o) = 3$ 的情形中那样继续。□

任意简单欧几里得约当代数中的集合 E_A A 构成一个黎曼流形，而引理1也可由以下事实推出

$$d(p, q) = \arccos \sqrt{trace(p \circ q)},\ p, q \in E_A,$$

是该流形上的测地距离。

3 跃迁概率

对于量子逻辑 L 和状态空间 S，从$p \in L$ 到 $q \in L$ 的 跃迁概率 存在，并且在 $0 \leq s \leq 1$的条件下变为 s，如果

$$\{\mu \in S | \mu(p) = 1\} \subseteq \{\mu \in S | \mu(q) = s\}$$

成立 [14, 15]; 记作 $\mathbb{P}(q|p) := s$。

对于任意欧几里得约当代数 A 的量子逻辑 L_A 和状态空间 S_A，当且仅当存在某个 $s \in \mathbb{R}$ 使 $\{p, q, p\} = sp$ 成立时， L_A 中的元素 p 和 q 的跃迁概率存在；在此情况下， $\mathbb{P}(q|p) = s$ [15]。当 p是一个原子时，对于所有 $q \in L_A$， $\mathbb{P}(q|p)$都存在，并且 $\mathbb{P}(q|p) = trace(\{p, q, p\}) = trace(p \circ q)$。

自同构 $T \in Aut(A)$ 将 L_A 映射到 L_A，并将 E_A 映射到 E_A。此外，对于任意态 $\mu \in S_A$，映射 $A \ni a \to \mu(Ta)$ 在 S_A中定义了另一个态。因此，跃迁概率在变换 $T \in Aut(A)$ 下保持不变:

$$\mathbb{P}(q|p) = \mathbb{P}(Tq|Tp)$$

对于所有 p， $q \in E_A$，我们所能期待的跃迁概率的最大程度的齐性是以下条件:

> 对于两对原子 p_1, q_1 和p_2, q_2，只要满足 $\mathbb{P}(q_1|p_1) = \mathbb{P}(q_2|p_2)$，就存在一个变换 $T \in Aut(A)$，使得 $Tp_1 = p_2$和 $Tq_1 = q_2$。

如果满足这一条件，我们就称跃迁概率是齐次的。

另一种较宽松的齐次性条件称为比特对称性 [13]，它假设存在 $T \in Aut(A)$，使得对于原子 p_1, q_1, p_2, q_2，仅当 $\mathbb{P}(q_1|p_1) = 0 = \mathbb{P}(q_2|p_2)$ 时，满足 $Tp_1 = p_2$和 $Tq_1 = q_2$。

阿贝尔欧几里得约当代数具有形式 $\mathbb{R}e_1 \oplus ... \oplus \mathbb{R}e_n$，其原子为 $e_1, ..., e_n$。它们表示有限经典概率空间。自同构是原子的置换，而上述齐次性条件则变得平凡。

虽然跃迁概率的齐次性是一项最高要求，但在通常的希尔伯特空间量子理论中也能满足这一要求。在该理论中，代数 A 由有界自伴线性算子组成，而原子 p、q则成为一维子空间上的投影。采用狄拉克符号，我们得到 $p = |\varphi><\varphi|$ 和 $p = |\psi><\psi|$，其中 φ、ψ 是希尔伯特空间中的归一化向量。跃迁概率为 $\mathbb{P}(q|p) = trace(pq) = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2$。这等于向量 φ 与 ψ之间夹角的余弦平方。再取两个原子 $p_o = |\varphi_o><\varphi_o|$ 和 $p_o = |\psi_o><\psi_o|$，其归一化向量分别为 φ_o、ψ_o，且 $\mathbb{P}(q|p) = \mathbb{P}(q_o|p_o)$，则 φ 与 ψ 之间的夹角 α、$0 \leq \alpha < \pi$，与 φ_o和 ψ_o之间的夹角相同。现在我们选取一个酉变换 u_1，将 φ 映至 φ_o。φ_o 与 $u_1\psi$ 之间的夹角为 α，且与 φ_o 和 ψ_o之间的夹角相同。因此，存在一个绕 φ_o 的旋转 u_2，将 $u_1\psi$ 映至 ψ_o。于是 $u_2u_1\varphi = \varphi_o$ 和 $u_2u_1\psi = \psi_o$。所需的变换T 对于自伴算子 a而言，成为映射 $Ta := u_2u_1au_1^{-1}u_2^{-1}$。

在下一节中，我们将进一步确定具有齐次跃迁概率的情形。

4 两点齐性度量空间

如果存在第三个点 $x_o \in X$，使得某个空间 X 上的度量 d 满足以下条件，则称其为凸：

$$d(x_1, x_2) = d(x_1, x_o) + d(x_o, x_2)$$

对于任意一对 x_1，$x_2 \in X$ [17]。这意味着，对于中间点 x_o，三角不等式取等号。紧空间 X 上的度量 d 总可以通过归一化，使得 $sup\{d(x,\ y)|x,\ y \in X\} = 1$。

具有度量 d 的度量空间 X 称为两点齐性 [5,11, 17], ，如果对于空间中具有相等距离$d(a_1,\ b_1) = d(a_2,\ b_2)$的任意两对点 a_1，b_1 和 a_2，b_2，存在该空间的一个等距变换，将 a_1 映射到 b_1，并将 a_2 映射到 b_2。

现在我们将看到两点齐性如何与传输概率的齐性相联系，并找出许多具有齐次跃迁概率的情形，其中包括通常量子理论的有限维版本。

定理1（Hirzebruch 1965年）： 任意简单欧几里得约当代数 A 的原子部分 E_A 都成为一个具有归一化凸度量的两点齐性紧度量集

$$d(p, q) := \frac{2}{\pi} arccos\left(\sqrt{trace(p \circ q)}\right) = \frac{2}{\pi} arccos\left(\sqrt{\mathbb{P}(q|p)}\right)$$

对于 $p, q \in E_A$，且跃迁概率是齐次的。

证明。 [11] 中的命题2.3之后的推论指出，(E_A, d) 是一个两点齐次紧度量集。显然，度量 d 是归一化的；其凸性由引理1得出。

现在假设，对于 E_A中的两对原子 p_1, q_1和 p_2, q_2，有 $\mathbb{P}(q_1|p_1) = \mathbb{P}(q_2|p_2)$。由于对于 $p, q \in E_A$，我们有 $\mathbb{P}(q|p) = trace(p \circ q)$，由[11] 命题2.3可得一个变换 $T \in Aut(A)$，满足 $Tp_1 = p_2$，且 $Tq_1 = q_2$(T是反射的组合)。□

具有凸度量的两点齐性紧集是一种相当抽象的拓扑构造，令人惊讶的是，它们最终都对应于某种具有齐次跃迁概率的量子模型，正如我们接下来将看到的。

定理2（Wang 1952年）： 设(X, d) 是一个配备归一化度量 d 的紧度量空间。如果(X, d) 是两点齐性的，且度量 d 是凸的，则存在一个等距变换 τ，将 X 映到某个单的简单欧几里得约当代数 A 的原子部分 E_A，并且

$$cos^2\left(\frac{\pi}{2} d(x, y)\right) = trace((\tau x) \circ (\tau y)) = \mathbb{P}(\tau x|\tau y)$$

对于 $x, y \in X$。

证明。这是 Wang定理VI [17]。将他在第 [17] 节中为 E_A 引入的度量归一化，得到

$$\frac{2}{\pi} arccos\left(\sqrt{trace(p\circ q)}\right)$$

对于 p， $q\in E_A$，这就得到了上述公式。 □

两两正交原子的最大数目在自旋因子的情况下为 2，在 n 的 n×n 阶矩阵代数的情况下为 n 。在相应的度量空间 X 中，这对应于两两距离达到最大值的元素的最大数目。采用归一化度量时，这个最大距离为 1。然而，一个尚未解决的问题是：如何找出度量空间的性质，从而揭示相应的矩阵代数是由四种数域（$\mathbb{R}$、 $\mathbb{C}$、 $\mathbb{H}$、 $\mathbb{O}$）中的哪一种构造而成。

5 非齐次跃迁概率

非齐次跃迁概率的例子俯拾皆是。考虑任意一个非平凡的简单欧几里得约当代数 $A_1\neq\mathbb{R}$ ，以及它与任意另一个欧几里得约当代数 A_2的直和 $A:=A_1\oplus A_2$ 。现在，在 A_1 中任取两个正交原子 p 和 q_1 ，再取一个原子 $q_2\in A_2$。那么 $\mathbb{P}(q_1|p)=0=\mathbb{P}(q_2|p)$。然而，不可能存在满足 $Tp=p$ 且 $Tq_1=q_2$ 的变换 $T\in Aut(A)$，因为 $Tp\in A_1$ 意味着 $T(A_1)=A_1$。

现在我们将着手解决更困难的任务：构造一个具有非齐次跃迁概率的不可约例子。这个例子将是八元射影平面 $(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2$，它是具有 Cartan 标记 $EIII$ [2] 的紧对称空间。其等距群是例外李群 E_6 [3]。

请注意，这种通用术语容易引起误解，因为 $(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2$ 并非通常意义上的射影平面，而只是在更广义的意义上才是射影平面 [2, 3, 7, 9]。我们可以利用单的约当代数 $H_3(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})$ 构造一个表示。它们是以 $\mathbb{C}\otimes\mathbb{O}$ 中的元素为矩阵项、关于八元数共轭为厄米的 3×3 阶矩阵。对角线上的元素是复数。在 $H_3(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})$ [9], 上有一个取值于 $\mathbb{R}$ 的正定内积 $\langle x|y\rangle:=trace(x\circ y^*+y\circ x^*)/2$，但 $H_3(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})$ 并非欧几里得（形式实）约当代数；这里 x^* 表示共轭转置矩阵。对于 $x\in H_3(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})$，Freudenthal乘积 $\times$ 定义如下：

$$x\times x:=x^2-x\ trace(x)-\frac{1}{2}\left[trace(x^2)-(trace(x))^2\right]I,$$

其中， I 表示对角线上的元素为 1、其余元素为 0 的矩阵 [6, 9]。于是

$$(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2=\{p\in H_3(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})|\ \langle p|p\rangle=1 \text{ and } p\times p=0\}/\sim$$

满足以下等价关系： $p_1\sim p_2:\Leftrightarrow p_1=p_2$ 或 $p_1=-p_2$。$(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2$ 中的一个点是等价类 $\bar{p}:=\{p,-p\}$。遗憾的是

文献中常常省略这种等价关系及等价类的构造。另一种严谨的数学定义是：将$(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2$中的点定义为$H_3(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})$中满足 $p\in H_3(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})$ 和 $p\times p=0$ 的一维线性子空间 $\mathbb{R}p$，并选取 $\mathbb{R}p$ 中的归一化元素作为代表元 [7]。对于每个点 $\bar{p}\in(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2$，集合

$$\bar{p}^{\perp}:=\left\{\bar{q}\in(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2|\,\langle p|q\rangle=0\right\}$$

是该几何中的一条直线，并且对于每条直线 l，都有唯一的点 $\bar{p}$ 满足$l=\bar{p}^{\perp}$ [7]。

现在，我们的量子逻辑 L 由点、直线、空集和全集（$\mathbb{C}\otimes\mathbb{O}$）$\mathbb{P}^2$组成。点成为原子，空集表示零元，而全集（$\mathbb{C}\otimes\mathbb{O}$）$\mathbb{P}^2$ 表示量子逻辑 L 中的 $\mathbb{I}$ 元。由于我们没有真正的射影平面 [2]，因此这个量子逻辑不是格，而只是一个按集合包含关系排序的偏序集，并带有一种正交补运算：它将原子 $\bar{p}$ 映射为 $\bar{p}^{\perp}$，将直线 $\bar{p}^{\perp}$映射为原子 $\bar{p}$，当然还将 0 映射为 $\mathbb{I}$，并将 $\mathbb{I}$ 映射为 0。请注意，原子、点和直线不是约当代数 H_3（$\mathbb{C}\otimes\mathbb{O}$）中的元素；量子逻辑也不是它的子集，因此其中的元素不能表示可观测量。

对每个原子 $\bar{p}$，我们通过 $\mu_{\bar{p}}(\bar{q}):=|\langle p|q\rangle|\leq 1$ 和 $\mu_{\bar{p}}(\bar{q}^{\perp}):=1-|\langle p|q\rangle|$，在点 $\bar{q}$ 和直线 $\bar{q}^{\perp}$ 上得到一个态 $\mu_{\bar{p}}$ L。当然，$\mu_{\bar{p}}(0):=0$ 且 $\mu_{\bar{p}}(\mathbb{I}):=1$。$\left\{\mu_{\bar{p}}|\bar{p}\in(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2\right\}$ 的凸包成为状态空间 S。于是，对于任意原子 $\bar{p}$ 和任意 $v\in L$，都有 $\mathbb{P}(v|\bar{p})=\mu_{\bar{p}}(v)$；两个原子 $\bar{p}$ 和 $\bar{q}$ 之间的跃迁概率为 $\mathbb{P}(\bar{q}|\bar{p})=|\langle q|p\rangle|$。紧空间 $(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2$ 上的凸度量是

$$d(p,q):=arccos(\sqrt{|\langle p|q\rangle|})=arccos(\sqrt{\mathbb{P}(q|p)}).$$

此度量未经归一化，但$(2/\pi)d$ 是归一化的。跃迁概率不是齐次的，因为那将意味着上述度量是两点齐次的，而定理2排除了这种可能。不过，这一跃迁概率的 E_6对称元颇具特色。此外，L 包含许多子系统，它们具有更令人满意的结构，并且同构于 $H_3(\mathbb{R})$、$H_3(\mathbb{C})$、$H_3(\mathbb{H})$和 $H_3(\mathbb{O})$中的量子逻辑。

更广义意义上的其他射影平面还有$(\mathbb{H}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2$ 和$(\mathbb{O}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2$，其例外对称群分别为 E_7 和 E_8 [3]。相应对称空间的Cartan标记分别为 EVI 和 $EVIII$。目前尚不清楚在这些情形下是否也能构造出上述量子逻辑、状态空间和跃迁概率。

6 结论

我们已经看到，量子理论跃迁概率具有最大程度的齐性。不仅作为量子力学常见模型的复矩阵代数具备这一特征，所有其他简单欧几里得约当代数也同样如此。

Wang 和 Hirzebruch 的成熟数学成果表明，简单欧几里得约当代数的原子部分，或者说其纯态空间，可以通过纯粹的拓扑方法以非常基本的方式加以刻画。这与许多较新的方法有着重要区别；后者旨在从凸紧集 [1, 4, 12, 13, 16] 中区分出整个态空间。在探寻量子概率的起源时，我们最终发现了一种纯粹的拓扑结构。

通常的量子理论跃迁概率的齐次性并不局限于其有限维版本，但定理1和定理2要求有限维。不幸的是，目前尚无一种拓扑刻画能够将原子系统或状态空间的极端边界（纯态系统）推广到涵盖无限维量子理论的情形，因为此时紧致性要求采用无法由度量定义的弱拓扑。此外，在无限维量子理论中，II型和III型冯·诺伊曼因子发挥着重要作用，但它们不包含任何原子。

除了可约（非单）情形外，我们还发现了另一种具有非齐次转移概率的不可约情形。这是一个相当奇特的模型。双八元数射影平面构成量子逻辑，其原子形成对称空间 $EIII$；其等距群是例外李群 E_6。与广为人知、具有丰富数学结构的欧几里得 Jordan 代数的量子逻辑和状态空间相比，这个模型远没有那么令人满意，但它具有例外 E_6对称性，有时被视为粒子物理学中内部对称性的候选者 [6, 9]。尽管该模型的整体结构似乎相当薄弱，但它包含一些子系统，在许多方面具有更令人满意且更为人熟知的矩阵代数 $H_3(\mathbb{R})$、 $H_3(\mathbb{C})$、 $H_3(\mathbb{H})$ 和 $H_3(\mathbb{O})$ 的量子逻辑结构。

经费信息 - 不适用**数据可用性** - 不适用**利益冲突** - 不适用

参考文献

[1] E. M. Alfsen 和 F. W. Shultz。《 *Geometry of state spaces of operator algebras*》。Birkh¨auser，巴塞尔，瑞士，2003年。[2] K. Atsuyama。对称空间E6/SO(10)·SO(2)与射影平面之间的联系。《*Kodai Mathematical Journal*》，8(2):236–248，1985。(www.jstage.jst.go.jp/article/kodaimath1978/8/2/8 2 236/ article/-char/ja/)。[3] J. Baez。八元数。《*Bulletin of the American Mathematical Society*》，39 2 145 205，2002 10 1090 0273 0979 05 01052 9 ( ): – . (doi: . /S - - - -)。[4] H. Barnum 和 J. Hilgert。凸体的谱性质。《*Theory* 30 315 344, 2020 10 48550 1904 03753 》，: –。(doi: . /arXiv. .)。[5] G. Birkhoff。几何的度量基础I。《*Transactions of the American Mathematical Society* 55 3 465 492, 1944 10 2307 1990304 》，( ): –。(doi: . /)。*Journal of Lie*

[6]S. Catto。例外射影几何与内部对称性，2003年。(doi:10.48550/arXiv.hep-th/0302079)。[7] D. Corradetti、A. Marrani、D. Chester 和 R. Aschheim。共轭物质。双八元数 Veronese 向量与 Cayley–Rosenfeld 平面。《*International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* 19 09 2250142, 2022 》，( ): 。(10.1142/S0219887822501420)。[8] J. Faraut 和 A. Kor´anyi。《*Analysis on symmetric cones*》。牛津大学出版社，1994年。[9] F. G¨ursey。粒子物理学中的八元数结构。载于 *Group Theoretical Methods in Physics: Seventh International Colloquium and Integrative Conference on Group Theory and Mathematical Physics Held in Austin Texas , , , September 11– , , 16 1978* 508 521 2005 10 1007 3 540 09238 2 117 第 – 页。施普林格，。(doi: . / - - - -)。[10] H. Hanche-Olsen 和 E. Størmer。《*Jordan operator algebras*》。Pitman，马萨诸塞州波士顿，1984年。[11] U. Hirzebruch。《¨关于 Jordan 代数和秩为 1 的紧致黎曼对称空间。¨》，90(5):339–354，1965年。(doi:10.1007/BF01112353)。[12] B. Mielnik。量子态几何。《*Communications in Mathematical Physics* 9 55 80, 1968 10 1007 01654032 》，: –。(doi: . /BF)。[13] M. P. M¨uller 和 C. Ududec。可逆计算的结构决定了量子理论的自对偶性。《 *Physical Review Letters*》，108(13):130401，2012年。(doi:10.1103/PhysRevLett.108.130401)。[14] G. Niestegge。量子概率的代数起源。《 *Entropy*》，22(11):1196，2020年。(doi:10.3390/e22111196)。[15]G. Niestegge。量子力学跃迁概率的一种通用方法。《*Proceedings Royal Society A*》，478:20210821，2022年。(doi:10.1098/rspa.2021.0821)。[16] G. Niestegge。凸集与自对偶锥中的量子跃迁概率。《*Proceedings Royal Society A*》，480:20230941，2024年。(doi:10.1098/rspa.2023.0941)。[17] H.-C. Wang。两点齐性空间。《*Annals of Mathematics*》，55(1):177–191，1952年。(doi:10.2307/1969427)。