arXiv:2601.01942v1 [math.RA] 5 Jan 2026

3-Lie 代数上的非零权修正的 Rota–Baxter 算子

SHUANGJIAN GUO、YUFEI QIN 和 GUODONG ZHOU

摘要。本文引入了 3-Lie 代数上非零权修正 Rota-Baxter 算子的概念，并给出了一些例子。接着，根据 3-Lie 代数的构造，我们给出了非零权修正 Rota-Baxter 算子的多种构造。此外，我们定义了 3-Lie 代数上非零权修正 Rota-Baxter 算子的上同调，其系数取自适当的表示。作为应用，我们研究了由上述上同调生成的非零权修正 Rota-Baxter 算子的形式变形。在本文最后部分，我们构造了两个 $L_\infty[1]$-代数结构，其 Maurer-Cartan 元素分别对应于相对和绝对的非零权修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数结构。最后，我们将本文的 $L_\infty[1]$-代数方法与 Hou、Sheng 和 Zhou 提出的、用于控制相对 Rota-Baxter 3-Lie 算子变形的 $L_\infty[1]$- 代数进行比较。

目录

1. 引言 1
2. 预备知识 3
3. 权为 λ 的修正 Rota-Baxter 算子的构造 5
4. 权为 λ 的修正 Rota-Baxter 算子的上同调 9
5. 权为 λ 的修正的 Rota-Baxter 算子的形式变形 11
6. 权为 λ 的修正的 Rota-Baxter 3-Lie 代数 13
7. $L_\infty[1]$-结构：相对与绝对修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数 17
7.1. $L_\infty[1]$-代数与（广义）导出括号 17
7.2. $L_\infty[1]$-结构：相对修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数 18
7.3. $L_\infty[1]$-结构：绝对修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数 21
7.4. 控制相对修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数与相对 Rota-Baxter 3-Lie 代数的 $L_\infty[1]$-代数结构的比较 24
参考文献 25

1. 引言

Rota-Baxter 代数最初由 Baxter 在研究概率中的涨落理论时引入 [5]。Rota 对 Baxter 的工作进行了进一步研究 [22]，Cartier 也做了相关研究 [7]。后来，Guo 等人 [12, 13, 14] 建立了许多关于 Rota-Baxter 代数的重要结果。Bai 等人[2]

日期：2026年1月6日。2010数学学科分类。16B70 17B56 18D99。关键词和短语。修正的 Rota-Baxter 算子、上同调、Nijenhuis 算子、形式变形、Maurer-Cartan 元、$L_\infty[1]$-代数。

在研究 3-Lie-Yang-Baxter 方程的解时，引入了 3-Lie 代数上的相对 Rota-Baxter 算子的概念。最近，Tang 等人[26] 构造了一个 Lie 3-代数，其 Maurer-Cartan 元素恰好是该 3-Lie 代数上的相对 Rota-Baxter 算子。随后，Hou 等人[17]引入了 3-Lie 代数上的非零权相对 Rota-Baxter 算子，并通过引入 3-post-Lie 代数来描述非零权相对 Rota-Baxter 算子。

修正 Rota-Baxter 李代数 [25]的概念源于修正的经典 Yang-Baxter 方程，后来被应用于非交换广义 Lax 对、Lie 群的仿射几何以及 O-算子等方面的研究 [1, 6]。最近，作者研究了修正的 Rota-Baxter Leibniz 代数 [21], 修正的 r-矩阵 [18] 和修正 Rota-Baxter pre-Lie 代数 [15]。由于 3-Lie 代数定义的特殊性，如何合理地引入 3-Lie 代数上的修正 Rota-Baxter 算子这一概念，是本文的第一个研究动机。

几年前，Bai 等人 [4] 引入了具有任意权的 Rota-Baxter 3-Lie 代数的概念，并证明它们可以由 Rota-Baxter 李代数和前李代数，以及带导子的 Rota-Baxter 交换结合代数导出。最近，我们 [16] 研究了具有任意权的 Rota-Baxter 3-Lie 代数的上同调、阿贝尔扩张和变形理论。如何从修正 Rota-Baxter 李代数构造修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数，以及如何从带导子的修正 Rota-Baxter 交换结合代数构造修正 Rota-Baxter pre-Lie 代数，是研究本文的第二个动机。

利用L_∞-子代数和V-数据进行构造的研究见 [8, 10, 20]。Hou 等人[17]构造了用于控制 3-Lie 代数上权为 λ 的相对 Rota-Baxter 算子的$L_\infty[1]$-代数结构。在论文的最后部分，我们利用导出括号技术构造了两种$L_\infty[1]$-代数结构，其 Maurer-Cartan 元素分别对应于非零权的相对和绝对修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数结构。最后，我们将$L_\infty[1]$-代数方法与 Hou、Sheng 和 Zhou 所发展的、用于控制相对 Rota–Baxter 3-Lie 算子变形的$L_\infty[1]$-代数进行比较。

本文组织如下。第 2 节回顾 3-Lie 代数及其上同调的一些基本定义。第 3 节介绍 3-Lie 代数上的非零权修正 Rota-Baxter 算子的概念，并给出一些例子。第 4 节根据 3-Lie 代数的构造，给出非零权修正 Rota-Baxter 算子的多种构造。第 5 节定义 3-Lie 代数上系数取自适当表示的非零权修正 Rota-Baxter 算子的上同调。在第 6 节，作为应用，我们研究由上述定义的上同调所生成的非零权修正 Rota-Baxter 算子的形式变形。第 7 节，我们在与（相对和绝对）修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数相关的上链复形上构造一个 $L_\infty[1]$-代数结构。我们证明，权为 λ 的修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数结构恰好对应于该 $L_\infty[1]$-代数的 Maurer-Cartan 元素。此外，我们确定一个$\mathrm{L}_\infty[1]$-子代数，用于控制权为 λ 的相对 Rota-Baxter 3-Lie 代数的变形。经过扭曲过程，该子代数给出 Hou 、 Sheng 和 Zhou 构造的 $\mathrm{L}_\infty[1]$- 代数，该代数控制 3-Lie 代数上权为 λ 的相对 Rota-Baxter 算子的变形。

本文中，$\mathbf{k}$ 表示一个特征零域。除非另有说明，所有向量空间、代数、线性映射和张量积均取自$\mathbf{k}$ 。 $\lambda \in \mathbf{k}$ 是一个固定的非零标量，称为权。

2. 预备知识

本节将回顾 [4, 9, 17,19]中的一些关于 3-Lie 代数的基本概念和事实。

定义 2.1。 **3-Lie 代数** 是一个向量空间 g，配备一个斜对称三线性映射

$$[\cdot,\cdot,\cdot]:\wedge^3\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$$

满足基本恒等式

$$[x,y,[u,v,w]]=[[x,y,u],v,w]+[u,[x,y,v],w]+[u,v,[x,y,w]],\qquad x,y,u,v,w\in\mathfrak{g}.$$

定义 2.2。 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot])$ 是一个 3-Lie 代数，V是一个向量空间。**g在 其上**V 的表示是一个线性映射

$$\rho:\wedge^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$$

使得对所有 $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathfrak{g}$,

$$(1)\qquad [\rho(x_1,x_2),\rho(x_3,x_4)]=\rho([x_1,x_2,x_3],x_4)+\rho(x_3,[x_1,x_2,x_4]),$$
$$(2)\qquad \rho(x_1,[x_2,x_3,x_4])=\rho(x_3,x_4)\rho(x_1,x_2)-\rho(x_2,x_4)\rho(x_1,x_3)+\rho(x_2,x_3)\rho(x_1,x_4).$$

定义 2.3. 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot])$ 是一个 3-Lie 代数。定义

$$\mathrm{ad}:\wedge^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),\qquad \mathrm{ad}_{x,y}(z)=[x,y,z].$$

那么 ad 是 g 在 g 上的一个表示，称为**伴随表示**。

定义 2.4. 设 $\mathfrak{g}$是一个 3-Lie 代数。其**导出代数**为

$$\mathfrak{g}^1=[\mathfrak{g},\mathfrak{g},\mathfrak{g}],$$

而中心为

$$C(\mathfrak{g})=\{x\in\mathfrak{g}\mid [x,y,z]=0,\ \forall y,z\in\mathfrak{g}\}.$$

定义 2.5. 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot])$ 和 $(\mathfrak{h},\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 是 3-Lie 代数，且 $\rho:\wedge^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$ 是 g 在 h 上的一个表示。若

$$\rho(x,y)u\in C(\mathfrak{h}),\qquad \rho(x,y)\{u,v,w\}=0,\quad \forall x,y\in\mathfrak{g},\ u,v,w\in\mathfrak{h},$$

则 ρ 称为 g 在 h 上的**作用**。

设（V,ρ）是 3-Lie 代数 g 的一个表示。令

$$C^0_{3\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},V)=V,\qquad C^n_{3\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},V)=\mathrm{Hom}((\wedge^2\mathfrak{g})^{\otimes(n-1)}\wedge\mathfrak{g},\ V),\quad n\geq 1.$$

余边界算子

$$\partial^n_{3\mathrm{Lie}}:C^n_{3\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},V)\to C^{n+1}_{3\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},V)$$

对于 $\mathfrak{X}_i = x_i \wedge y_i$，定义为

$$\begin{aligned}\partial^n_{3\mathrm{Lie}} f(\mathfrak{X}_1,\dots,\mathfrak{X}_n,x_{n+1}) &= (-1)^{n+1}\rho(y_n,x_{n+1})f(\mathfrak{X}_1,\dots,\mathfrak{X}_{n-1},x_n)\\ &+ (-1)^{n+1}\rho(x_{n+1},x_n)f(\mathfrak{X}_1,\dots,\mathfrak{X}_{n-1},y_n)\\ &+ \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\rho(x_j,y_j)f(\mathfrak{X}_1,\dots,\widehat{\mathfrak{X}_j},\dots,\mathfrak{X}_n,x_{n+1})\\ &+ \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}f(\mathfrak{X}_1,\dots,\widehat{\mathfrak{X}_j},\dots,\mathfrak{X}_n,[x_j,y_j,x_{n+1}])\\ &+ \sum_{1\le j<k\le n}(-1)^{j}f(\mathfrak{X}_1,\dots,\widehat{\mathfrak{X}_j},\dots,\mathfrak{X}_{k-1},\\ &\qquad [x_j,y_j,x_k]\wedge y_k + x_k\wedge[x_j,y_j,y_k],\mathfrak{X}_{k+1},\dots,\mathfrak{X}_n,x_{n+1}).\end{aligned}$$

相应的上同调记为

$$H^*_{3\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},V).$$

当 $V = \mathfrak{g}$ 配备伴随表示时，我们记作

$$H^n_{3\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}) = H^n_{3\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}),\qquad n\ge 1.$$

接下来,我们研究 3-Lie 代数的分解及其相关的乘积结构 s.

定义 2.6. [19] 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot])$ 是一个 3-Lie 代数，且 $N:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 是一个线性映射。N 称为 **Nijenhuis 算子**在 $\mathfrak{g}$ 上，若

$$\begin{aligned}[N(x),N(y),N(z)] = N\Big([N(x),N(y),z]+[x,N(y),T(z)]+[N(x),y,N(z)]\\ -N[N(x),y,z]-N[x,N(y),z]-N[x,y,T(z)]\Big).\end{aligned}$$

定义 2.7。 [24] 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 为一个 3-Lie 代数。$\mathfrak{g}$ 上的**几乎乘积结构** 是一个线性自同态$E:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$，满足

$$E^2 = \mathrm{Id},\qquad E\neq\pm\mathrm{Id}.$$

如果几乎乘积结构E 满足以下可积性条件，则称其为**乘积结构**：

$$\begin{aligned}E[x,y,z]_\mathfrak{g} = [Ex,Ey,Ez]_\mathfrak{g}+[Ex,y,z]_\mathfrak{g}+[x,Ey,z]_\mathfrak{g}+[x,y,Ez]_\mathfrak{g}\\ -E[Ex,Ey,z]_\mathfrak{g}-E[x,Ey,Ez]_\mathfrak{g}-E[Ex,y,Ez]_\mathfrak{g}.\end{aligned}$$

注 2.8。 [24] 3-Lie 代数上的乘积结构等价地可视为满足$E^2=\mathrm{Id}$ 的 Nijenhuis 算子E。

定理 2.9。 *[[24, 定理 5。3]]* 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 为一个3-*Lie* 代数。当且仅当$\mathfrak{g}$ 可分解为以下形式时，它存在乘积结构 E:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+\oplus\mathfrak{g}_-,$$

其中$\mathfrak{g}_+$ 和$\mathfrak{g}_-$ 是3-*Lie* 子代数。在这种情况下，E 表示为

$$E(x,u) = (x,-u),\qquad \forall\, x\in\mathfrak{g}_+,\ u\in\mathfrak{g}_-.$$

3. 权为 λ的修正 Rota-Baxter 算子

本节中，我们介绍权为 λ 的Rota-Baxter 代数以及权为 λ的相对（修正）Rota-Baxter 代数的概念，并给出一些性质。

定义 3.1. [4] 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot])$ 是一个 3-Lie 代数，且 $T:\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是一个线性映射。T称为一个**权为** λ 的 $\mathfrak{g}$上的 Rota-Baxter 算子，如果

$$[T(x),T(y),T(z)] = T\Big([T(x),T(y),z] + [x,T(y),T(z)] + [T(x),y,T(z)] + \lambda[T(x),y,z] + \lambda[x,T(y),z] + \lambda[x,y,T(z)] + \lambda^2[x,y,z]\Big).$$

定义 3.2. 设 $(\mathrm{g}, [\cdot,\cdot,\cdot])$ 和 $(\mathrm{h}, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 是 3-Lie 代数。设 $\rho: \wedge^2\mathrm{g} \to \mathrm{gl}(\mathrm{h})$ 是 3-Lie 代数 $(\mathrm{g}, [\cdot,\cdot,\cdot])$ 在 3-Lie 代数 $(\mathrm{h}, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 上的作用，而 $\zeta: \wedge^2\mathrm{h} \to \mathrm{gl}(\mathrm{g})$ 是 $(\mathrm{h}, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 在 $(\mathrm{g}, [\cdot,\cdot,\cdot])$ 上的作用。线性映射 $R:\mathrm{h} \to \mathrm{g}$ 称为从 3-Lie 代数 h 到 3-Lie 代数 g 的一个**相对修正 Rota-Baxter 算子，权为** $\lambda \in \mathbf{k}$，其对应的作用为 ρ 和 ζ，如果$\forall u、v、w \in \mathrm{h}$,

$$[R(u),R(v),R(w)] = R\Big(\rho(R(u),R(v))w + \rho(R(v),R(w))u + \rho(R(w),R(u))v + \lambda\{u,v,w\}\Big) - \lambda\zeta(u,v)R(w) - \lambda\zeta(v,(w)R(u) - \lambda\zeta(w,u)R(v).$$

在此情形下，四元组 $((\mathrm{h}, \{\cdot,\cdot,\cdot\}), (\mathrm{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]), \rho, \zeta)$ 称为一个**相对3-Lie 代数对**。此外，五元组 $((\mathrm{h}, \{\cdot,\cdot,\cdot\}), (\mathrm{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]), \rho, \zeta, R)$ 称为一个权为 λ 的**相对修正 Rota-Baxter3-Lie 代数**。

此外，如果

(a) $\mathrm{h} = \mathrm{g}$ 且 $\rho = \zeta = \mathrm{ad}$，则称 $(\mathrm{g}, [\cdot,\cdot,\cdot], R)$ 为权为 λ 的**绝对修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数**，或简称权为 λ的修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数，或修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数；(b) $\zeta: \wedge^2\mathrm{h} \to \mathrm{gl}(\mathrm{g})$ 为零，则称四元组 $((\mathrm{h}, \{\cdot,\cdot,\cdot\}), (\mathrm{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]), \rho, R)$ 为权为 λ 的**相对 Rota-Baxter 3-Lie 代数**。

例3.3. 设 $(\mathrm{g}, [\cdot,\cdot,\cdot])$ 是一个 3-Lie 代数。那么 $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ 是权1的修正的 Rota-Baxter 算子。

例3.4. 设 $(\mathrm{g}, [\cdot,\cdot,\cdot])$ 是一个 3-Lie 代数。那么，当且仅当 $-R$ 是修正的 Rota-Baxter 算子时，R 才是修正的 Rota-Baxter 算子。

例3.5. 给定一个修正的 Rota-Baxter 算子R 以及 3-Lie 代数 g 的一个自同构 $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{g})$，则 $\psi^{-1} \circ R \circ \psi$ 是一个修正的 Rota-Baxter 算子。

例3.6. 设 $(\mathrm{g}, [\cdot,\cdot,\cdot])$ 是一个 3-Lie 代数，其非零括号相对于基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 给出如下：

$$[e_1, e_2, e_3] = e_1.$$

那么，当且仅当$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$是权1的修正的 Rota-Baxter 算子时，

$$[R(e_1),R(e_2),R(e_3)] = R([R(e_1),R(e_2),e_3] + [e_1,R(e_2),R(e_3)] + [R(e_1),e_2,R(e_3)] + [e_1,e_2,e_3]) - [R(e_1),e_2,e_3] - [e_1,R(e_2),e_3] - [e_1,e_2,R(e_3)].$$

经过计算，我们可以得到

$$[R(e_1),R(e_2),R(e_3)] = [a_{11}e_1, a_{22}e_2, a_{33}e_3] + [a_{11}e_1, a_{32}e_3, a_{23}e_2]$$

$$\begin{aligned}&+[a_{21}e_2,a_{12}e_1,a_{33}e_3]+[a_{21}e_2,a_{32}e_3,a_{13}e_1]\\&+[a_{31}e_3,a_{12}e_1,a_{23}e_2]+[a_{31}e_3,a_{22}e_2,a_{13}e_1]\\&=(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13})e_1,\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&R([R(e_1),R(e_2),e_3]+[e_1,R(e_2),R(e_3)]+[R(e_1),e_2,R(e_3)]+[e_1,e_2,e_3])\\&-[R(e_1),e_2,e_3]-[e_1,R(e_2),e_3]-[e_1,e_2,R(e_3)]\\&=R([a_{11}e_1,a_{22}e_2,e_3])+R([a_{21}e_2,a_{12}e_1,e_3])+R([a_{11}e_1,e_2,a_{33}e_3])+R([a_{31}e_3,e_2,a_{13}e_1])\\&+R([e_1,a_{22}e_2,a_{33}e_3])+R([e_1,a_{32}e_3,a_{23}e_2])+R([e_1,e_2,e_3])\\&-[a_{11}e_1,e_2,e_3]-[e_1,a_{22}e_2,e_3]-[e_1,e_2,a_{33}e_3]\\&=((a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}+a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}+a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})a_{11}-a_{22}-a_{33})e_1\\&+(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}+a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}+a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}+1)a_{21}e_2\\&+(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}+a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}+a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}+1)a_{31}e_3.\end{aligned}$$

因此，当且仅当，R 是一个权1的修正的 Rota-Baxter 算子

$$\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}\\&=(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}+a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}+a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})a_{11}-a_{22}-a_{33},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}+a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}+a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}+1)a_{21}\\&=(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}+a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}+a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}+1)a_{31}\\&=0.\end{aligned}$$

特别地，$R_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 和$R_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是权1的修正的 Rota-Baxter 算子。

例 3.7。 设 $(\mathrm{g},[\cdot,\cdot,\cdot])$ 是一个 3-Lie 代数，其非零括号关于基 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 给出如下:

$$[e_2,e_3,e_4]=e_1.$$

那么 $R=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$ 是权1的修正的 Rota-Baxter 算子，当且仅当

$$\begin{aligned}[R(e_2),R(e_3),R(e_4)]=&R([R(e_2),R(e_3),e_4]+[e_2,R(e_3),R(e_4)]+[R(e_2),e_3,R(e_4)]+[e_2,e_3,e_4])\\&-[R(e_2),e_3,e_4]-[e_2,R(e_3),e_4]-[e_2,e_3,R(e_4)].\end{aligned}$$

经过计算，我们可以得到

$$\begin{aligned}[R(e_2),R(e_3),R(e_4)]&=[a_{22}e_2,a_{33}e_3,a_{44}e_4]+[a_{22}e_2,a_{43}e_4,a_{34}e_3]+[a_{32}e_3,a_{23}e_2,a_{44}e_4]\\&+[a_{32}e_3,a_{43}e_4,a_{24}e_2]+[a_{42}e_4,a_{23}e_2,a_{34}e_3]+[a_{42}e_4,a_{33}e_3,a_{24}e_2]\\&=(a_{22}a_{33}a_{44}-a_{22}a_{43}a_{34}-a_{32}a_{23}a_{44}+a_{32}a_{43}a_{24}+a_{42}a_{23}a_{34}-a_{42}a_{33}a_{24})e_1,\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
&R([R(e_2),R(e_3),e_4]+[e_2,R(e_3),R(e_4)]+[R(e_2),e_3,R(e_4)]+[e_2,e_3,e_4])\\
&\quad-[R(e_2),e_3,e_4]-[e_2,R(e_3),e_4]-[e_2,e_3,R(e_4)]\\
&=R([a_{22}e_2,a_{33}e_3,e_4])+R([a_{32}e_3,a_{23}e_2,e_4])+R([e_2,a_{33}e_3,a_{44}e_4])\\
&\quad+R([e_2,a_{43}e_4,a_{34}e_3])+R([a_{22}e_2,e_3,a_{44}e_4])+R([a_{42}e_4,e_3,a_{24}e_2])\\
&\quad+R(e_1)-a_{22}e_1-a_{33}e_1-a_{44}e_1\\
&=(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}+a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34}+a_{22}a_{44}-a_{42}a_{24}+1)R(e_1)-a_{22}e_1-a_{33}e_1-a_{44}e_1\\
&=((a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}+a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34}+a_{22}a_{44}-a_{42}a_{24}+1)a_{11}-a_{22}-a_{33}-a_{44})e_1\\
&\quad+(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}+a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34}+a_{22}a_{44}-a_{42}a_{24}+1)a_{21}e_2\\
&\quad+(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}+a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34}+a_{22}a_{44}-a_{42}a_{24}+1)a_{31}e_3\\
&\quad+(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}+a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34}+a_{22}a_{44}-a_{42}a_{24}+1)a_{41}e_4.
\end{aligned}$$

因此，R 是权1的修正的 Rota-Baxter 算子，当且仅当

$$\begin{aligned}
&a_{22}a_{33}a_{44}-a_{22}a_{43}a_{34}-a_{32}a_{23}a_{44}+a_{32}a_{43}a_{24}+a_{42}a_{23}a_{34}-a_{42}a_{33}a_{24}\\
&=(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}+a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34}+a_{22}a_{44}-a_{42}a_{24}+1)a_{11}-a_{22}-a_{33}-a_{44},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}+a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34}+a_{22}a_{44}-a_{42}a_{24}+1)a_{21}\\
&=(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}+a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34}+a_{22}a_{44}-a_{42}a_{24}+1)a_{31}\\
&=(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}+a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34}+a_{22}a_{44}-a_{42}a_{24}+1)a_{41}=0.
\end{aligned}$$

In particular, $R_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ and $R_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ are modified Rota-Baxter operators of weight 1.

注 3.8。 设$R:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 是满足$R^2=\mathrm{id}$ 的线性映射。则以下条件等价:

(a) R 是权1的修正的 Rota-Baxter 算子；(b) R是 Nijenhuis 算子；(c) R是乘积结构；(d) 向量空间存在直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2,$$

其中 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数。

证明。 假设R 是权1的修正的 Rota-Baxter 算子。直接计算可得R 满足乘积结构的可积性条件。由于$R^2=\mathrm{id}$，因此R 定义了一个乘积结构。反之，每个满足$R^2=\mathrm{id}$ 的乘积结构都是权1的修正的 Rota-Baxter 算子。因此，(a)和(c)等价。

（b）与（c）的等价性由注记2.8得到，而（c）与（d）的等价性由定理2.9得到。因此，四个条件（a）–（d）是等价的。□

命题 3.9. 设$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot])$ 是一个3-李代数。当且仅当$2R+\lambda\,\mathrm{id}$ 是权为 λ^2 的修正的 *Rota-Baxter* 算子时，R 是权为 λ 的 *Rota-Baxter* 算子。

证明. 对于任意x、y、$z \in \mathfrak{g}$，有

$$\begin{aligned}
&[(2R+\lambda\,\mathrm{id})(x),(2R+\lambda\,\mathrm{id})(y),(2R+\lambda\,\mathrm{id})(z)]\\
&=[2Rx+\lambda x,2Ry+\lambda y,2Rz+\lambda z]\\
&=8[Rx,Ry,Rz]+4\lambda[Rx,Ry,z]+4\lambda[R(x),y,Rz]+4\lambda[x,Ry,Rz]\\
&\quad+2\lambda^2[x,y,Rz]+2\lambda^2[x,Ry,z]+2\lambda^2[Rx,y,z]+\lambda^3[x,y,z]\\
&=8R\Big([Rx,Ry,z]+[Rx,y,Rz]+[x,Ry,Rz]+\lambda[Rx,y,z]+\lambda[x,Ry,z]+\lambda[x,y,Rz]+\lambda^2[x,y,z]\Big)\\
&\quad+4\lambda[Rx,Ry,z]+4\lambda[R(x),y,Rz]+4\lambda[x,Ry,Rz]\\
&\quad+2\lambda^2[x,y,Rz]+2\lambda^2[x,Ry,z]+2\lambda^2[Rx,y,z]+\lambda^3[x,y,z]\\
&=(2R+\lambda\,\mathrm{id})\Big([(2R+\lambda\,\mathrm{id})x,(2R+\lambda\,\mathrm{id})y,z]+[x,(2R+\lambda\,\mathrm{id})y,(2R+\lambda\,\mathrm{id})z]\\
&\quad+[(2R+\lambda\,\mathrm{id})x,y,(2R+\lambda\,\mathrm{id})z]+\lambda^2[x,y,z]\Big)-\lambda^2[(2R+\lambda\,\mathrm{id})x,y,z]\\
&\quad-\lambda^2[x,(2R+\lambda\,\mathrm{id})y,z]-\lambda^2[x,y,(2R+\lambda\,\mathrm{id})z].
\end{aligned}$$

证明结束。 □

设 $(\mathfrak{g},\ [\cdot,\cdot,\cdot])$ 是一个 3-Lie 代数，且 R 是权为 λ 的修正的 Rota-Baxter 算子。为了使 $(\mathfrak{g},\ [\cdot,\cdot,\cdot]_R)$ 成为一个 3-Lie 代数，我们总是假设 $\mathfrak{g}^1 \subset C(\mathfrak{g})$，其中

$$[x,y,z]_R=[Rx,Ry,z]+[x,Ry,Rz]+[Rx,y,Rz]+\lambda[x,y,z],\quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}. \tag{3.1}$$

命题 3.10。 设 R 是一个 *3-Lie* 代数上的权为 λ 的修正的 *Rota-Baxter* 算子$(\mathfrak{g},\ [\cdot,\cdot,\cdot])$。则 R 是 *3-Lie* 代数 $(\mathfrak{g},\ [\cdot,\cdot,\cdot]_R)$上的权为 λ 的修正的 *Rota-Baxter* 算子。

证明。 对于任意的 x、y、$z \in \mathfrak{g}$，有

$$\begin{aligned}
&[R(x),R(y),R(z)]_R\\
&=[R^2(x),R^2(y),R(z)]+[R(x),R^2(y),R^2(z)]+[R^2(x),R(y),R^2(z)]+\lambda[R(x),R(y),R(z)]\\
&=R([R^2(x),R^2(y),z]+[R(x),R^2(y),R(z)]+[R^2(x),R(y),R(z)]+\lambda[R(x),R(y),z])-\lambda[R^2(x),R(y),z]\\
&\quad-\lambda[R(x),R^2(y),z]-\lambda[Rx,R(y),R(z)]+R([R(x),R^2(y),R(z)]+[x,R^2(y),R^2z]+[R(x),R(y),R^2(z)]\\
&\quad+\lambda[x,R(y),R(z)])-\lambda[R(x),R(y),R(z)]-\lambda[x,R^2(y),R(z)]-\lambda[x,R(y),R^2(z)]+R([R^2(x),R(y),R(z)]\\
&\quad+[R(x),R(y),R^2(z)]+[R^2(x),y,R^2(z)]+\lambda[R(x),y,R(z)])-\lambda[R^2(x),y,R(z)]-\lambda[R(x),R(y),R(z)]\\
&\quad-\lambda[R(x),y,R^2(z)]+\lambda[R(x),R(y),R(z)]\\
&=R([R^2(x),R^2(y),z]+[R(x),R^2(y),R(z)]+[R^2(x),R(y),R(z)]+\lambda[R(x),R(y),z])-\lambda[R^2(x),R(y),z]\\
&\quad-\lambda[R(x),R^2(y),z]+R([R(x),R^2(y),R(z)]+[x,R^2(y),R^2z]+[R(x),R(y),R^2(z)]+\lambda[x,R(y),R(z)])\\
&\quad-\lambda[R(x),R(y),R(z)]-\lambda[x,R^2(y),R(z)]-\lambda[x,R(y),R^2(z)]+R([R^2(x),R(y),R(z)]+[R(x),R(y),R^2(z)]\\
&\quad+[R^2(x),y,R^2(z)]+\lambda[R(x),y,R(z)])-\lambda[R^2(x),y,R(z)]-\lambda[R(x),R(y),R(z)]-\lambda[R(x),y,R^2(z)]\\
&=R([R(x),R(y),z]_R+[x,R(y),R(z)]_R+[R(x),y,R(z)]_R+\lambda[x,y,z]_R)\\
&\quad-\lambda[R(x),y,z]_R-\lambda[x,R(y),z]_R-\lambda[x,y,R(z)]_R.
\end{aligned}$$

因此，R 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},\ [\cdot,\cdot,\cdot]_R)$ 上权为 λ 的修正的 Rota-Baxter 算子。 □

4. 权为 λ 的修正的 Rota–Baxter 算子的构造

本节根据 3-Lie 代数的构造，给出权为 λ 的修正的 Rota-Baxter 算子的各种构造。

引理 4.1。 （[3]）设 （$\mathfrak{g}$， $[\cdot,\cdot]$）是一个李代数，且 $\mathfrak{g}^*$ 是 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间。设 $f \in \mathfrak{g}^*$满足 f（$[x, y]$） $= 0$ 对所有 x， $y \in \mathfrak{g}$成立。则在 3-李代数 $\mathfrak{g}$ 上存在一个结构，其定义为

$$[x, y, z]_f = f(x)[y, z] + f(y)[z, x] + f(z)[x, y], \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

定义 4.2。 线性映射 R： $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 称为权为 $\lambda \in \mathbf{k}$ 的修正的 Rota-Baxter 算子；或者，若 R 在李代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ 上满足以下条件，则简称为李代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ 上的修正的 Rota-Baxter 算子

$$[R(x), R(y)] = R\Big([R(x), y] + [x, R(y)]\Big) + \lambda[x, y], \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

定理 4.3。 设 R 是李代数 （$\mathfrak{g}$， $[\cdot,\cdot]$）上权为 λ 的修正的 *Rota-Baxter* 算子，$f \in \mathfrak{g}^*$ 满足 f（$[x, y]$） $= 0$ 对任意 x， $y \in \mathfrak{g}$成立。则当且仅当 R 满足以下条件时，R 是 3-李代数 （$\mathfrak{g}$， $[\cdot,\cdot,\cdot]_f$）上权为λ 的修正的 *Rota-Baxter* 算子

$$\begin{aligned}
&R\Big(f(x)[Ry, Rz] + f(y)[Rz, Rx] + f(z)[Rx, Ry] + \lambda f(x)[y, z] + \lambda f(y)[z, x] + \lambda f(z)[x, y]\Big)\\
&\quad - \lambda f(x)[Ry, z] - \lambda f(x)[y, Rz] - \lambda f(y)[Rz, x] - \lambda f(y)[z, Rx] - \lambda f(z)[Rx, y] - \lambda f(z)[x, Ry]\\
&\quad - 2\lambda f(Ry)[z, x] - 2\lambda f(Ry)[z, x] - 2\lambda f(Rz)[x, y] = 0.
\end{aligned}$$

证明。 对于任意x、y、$z \in \mathfrak{g}$，有

$$\begin{aligned}
[Rx, Ry, Rz]_f &= f(Rx)[Ry, Rz] + f(Ry)[Rz, Rx] + f(Rz)[Rx, Ry]\\
&= R(f(Rx)[Ry, z] + f(Rx)[y, Rz]) + R(f(Ry)[Rz, x] + f(Ry)[z, Rx])\\
&\quad + R(f(Rz)[Rx, y] + f(Rz)[Rx, y]) + \lambda f(Rx)[y, z] + \lambda f(Ry)[z, x]\\
&\quad + \lambda f(Rz)[x, y].
\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
&R([Rx, Ry, z]_f + [x, Ry, Rz]_f + [Rx, y, Rz]_f + \lambda[x, y, z]_f) - \lambda[Rx, y, z]_f - \lambda[x, Ry, z]_f - \lambda[x, y, Rz]_f\\
&= R\Big(f(Rx)[Ry, z] + f(Ry)[z, Rx] + f(z)[Rx, Ry] + f(x)[Ry, Rz] + f(Ry)[Rz, x] + f(Rz)[x, Ry]\\
&\quad + f(Rx)[y, Rz] + f(y)[Rz, Rx] + f(Rz)[Rx, y] + \lambda f(x)[y, z] + \lambda f(y)[z, x] + \lambda f(z)[x, y]\Big)\\
&\quad - \lambda f(Rx)[y, z] - \lambda f(y)[z, Rx] - \lambda f(z)[Rx, y] - \lambda f(x)[Ry, z] - \lambda f(Ry)[z, x] - \lambda f(z)[x, Ry]\\
&\quad - \lambda f(x)[y, Rz] - \lambda f(y)[Rz, x] - \lambda f(Rz)[x, y]\\
&= R\Big(f(x)[Ry, Rz] + f(y)[Rz, Rx] + f(z)[Rx, Ry] + \lambda f(x)[y, z] + \lambda f(y)[z, x] + \lambda f(z)[x, y]\Big)\\
&\quad - \lambda f(x)[Ry, z] - \lambda f(x)[y, Rz] - \lambda f(y)[Rz, x] - \lambda f(y)[z, Rx] - \lambda f(z)[Rx, y] - \lambda f(z)[x, Ry]\\
&\quad + [Rx, Ry, Rz]_f - 2\lambda f(Ry)[z, x] - 2\lambda f(Rx)[y, z] - 2\lambda f(Rz)[x, y].
\end{aligned}$$

那么，R是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_f)$ 上权为 λ的修正的 Rota-Baxter 算子，当且仅当R 满足

$$\begin{aligned}
&R\Big(f(x)[Ry, Rz] + f(y)[Rz, Rx] + f(z)[Rx, Ry] + \lambda f(x)[y, z] + \lambda f(y)[z, x] + \lambda f(z)[x, y]\Big)\\
&\quad - \lambda f(x)[Ry, z] - \lambda f(x)[y, Rz] - \lambda f(y)[Rz, x] - \lambda f(y)[z, Rx] - \lambda f(z)[Rx, y] - \lambda f(z)[x, Ry]\\
&\quad - 2\lambda f(Ry)[z, x] - 2\lambda f(Ry)[z, x] - 2\lambda f(Rz)[x, y] = 0.
\end{aligned}$$

□

例4.4。 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ 是由下式给出的三维李代数

$$[e_1, e_2] = e_2,$$

其中 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基。由引理 4.1，迹函数 $f \in \mathfrak{g}^*$，其中 $\begin{cases} f(e_1) = 1、f(e_2) = 0、f(e_3) = 1, \end{cases}$

诱导出一个 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_f)$，其以相同的基定义为

$$[e_1, e_2, e_3]_f = e_2.$$

考虑由 $\begin{pmatrix} & & 13 \\ a_{11} & a_{12} & a_{23} \\ & & 33 \end{pmatrix} a_{21}\, a_{22}\, a a_{31}\, a_{32}\, a$ 关于基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 定义的线性映射 $R: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$。定义

$$Re_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3,\quad Re_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3,\quad Re_3 = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3$$

为了得到R 是李代数 $\mathfrak{g}$ 上权1的修正的 Rota-Baxter 算子，我们需要

$$[Re_i, Re_j] = R([Re_i, e_j] + [e_i, Re_j]) + [e_i, e_j],\quad i, j = 1, 2, 3.$$

通过直接计算，我们得出R 是李代数$\mathfrak{g}$上权1的修正的 Rota-Baxter 算子，当且仅当

$$a_{11} = -a_{22},\quad a_{22}^2 + a_{12}a_{21} + 1 = 0.$$

由定理 4.3，R 是 3-Lie 代数（$\mathfrak{g}$，$[\cdot,\cdot,\cdot]_f$）上的权1修正的 Rota-Baxter 算子，当且仅当

$$2a_{33} + 2a_{22}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - 2a_{22} = 0,$$

and

$$a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} = 2.$$

定义4.5。 [15] 线性映射$R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$称为前李代数（$\mathfrak{g}$，$*$）上的权$\lambda$ 修正的 Rota-Baxter 算子，如果 R 满足以下条件

$$R(x) * R(y) = R(R(x) * y + x * R(y)) + \lambda x * y,\quad \forall x, y \in \mathfrak{g},$$

以下结论可由定义直接验证，因此省略证明。

引理 4.6。 设 R 是前李代数 $(\mathfrak{g}, *)$ 上权为 λ 的修正的 *Rota-Baxter* 算子。那么，R 是李代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_*)$ 上权为 λ 的修正的 *Rota-Baxter* 算子，其中 $[\cdot,\cdot]_*$ 定义为

$$[x, y]_* = x * y - y * x,\quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

引理 4.7。 设 R 是交换结合代数 $(\mathfrak{g}, \cdot)$ 上权为 λ 的修正的 *Rota-Baxter* 算子，D 是满足 $D \circ R = R \circ D$ 的导子。那么，R 是前李代数 $(\mathfrak{g}, *)$ 上权为 λ 的修正的 *Rota-Baxter* 算子，其中

$$x * y = Dx \cdot y,\quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

根据定理 4.3 和引理 4.6，我们可知

定理 4.8。 设 R 是前李代数 $(\mathfrak{g},*)$上的权为 λ 的修正的 *Rota-Baxter* 算子，$f\in\mathfrak{g}^*$ 满足 $f(x*y-y*x)=0$ 对于任意 $x,y\in\mathfrak{g}$。定义

$$[x,y,z]_f=f(x)(y*z-z*y)+f(y)(z*x-x*z)+f(z)(x*y-y*x),\forall x,y,z\in\mathfrak{g},$$

那么，R 是 3-李代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_f)$ 上的权为 λ 的修正的 *Rota–Baxter* 算子，当且仅当 R 满足

$$\begin{aligned}&R\Big(f(x)(Ry*Rz-Rz*Ry)+f(y)(Rz*Rx-Rx*Rz)+f(z)(Rx*Ry-Ry*Rx)+\lambda f(x)(y*z-z*y)\\&+\lambda f(y)(z*x-x*z)+\lambda f(z)(x*y-y*x)\Big)-\lambda f(x)(Ry*z-z*Ry)\\&-\lambda f(x)(y*Rz-Rz*y)-\lambda f(y)(Rz*x-x*Rz)-\lambda f(y)(z*Rx-Rx*z)\\&-\lambda f(z)(Rx*y-y*Rx)-\lambda f(z)(x*Ry-Ry*x)-2\lambda f(Ry)(z*x-x*z)\\&-2\lambda f(Rx)(y*z-z*y)-2\lambda f(Rz)(x*y-y*x)=0.\end{aligned}$$

引理 4.9。 *(*[4]*)* 设 $(\mathfrak{g},\cdot)$ 是一个交换结合代数，D 是一个导子，并且 $f\in\mathfrak{g}^*$ 满足对于所有的 $x,y\in\mathfrak{g}$，都有 $f(D(x)\cdot y)=f(x\cdot D(y))$。那么 $(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot,\cdot\}_{f,D})$ 是一个3-李代数，其中括号定义为

$$\{x,y,z\}_{f,D}=\begin{vmatrix}f(x)&f(y)&f(z)\\D(x)&D(y)&D(z)\\x&y&z\end{vmatrix},\tag{4.1}$$

对于任意 x、y、$z\in\mathfrak{g}$。

定理 4.10。 设$(\mathfrak{g},\ \cdot,\ R)$ 是权为 λ 的交换修正的 *Rota-Baxter* 代数，D 是一个导子，且 $D\circ R=R\circ D$，$f\in\mathfrak{g}^*$满足 $f(D(x)\cdot y)=f(x\cdot D(y))$。那么，$R$ 是3-*Lie* 代数$(\mathfrak{g},\ \{\cdot,\cdot,\cdot\}_{f,\ D})$ 上的权为 λ 的修正的 *Rota-Baxter* 算子，当且仅当 R 满足

$$\begin{aligned}&R\Big(f(x)(DRy\cdot Rz-DRz\cdot Ry)+f(y)(DRz\cdot Rx-DRx\cdot Rz)+f(z)(DRx\cdot Ry-DRy\cdot Rx)\\&+\lambda f(x)(Dy\cdot z-Dz\cdot y)+\lambda f(y)(Dz\cdot x-Dx\cdot z)+\lambda f(z)(Dx\cdot y-Dy\cdot x)\Big)\\&-\lambda f(x)(DRy\cdot z-Dz\cdot Ry)-\lambda f(x)(Dy\cdot Rz-DRz\cdot y)-\lambda f(y)(DRz\cdot x-Dx\cdot Rz)\\&-\lambda f(y)(Dz\cdot Rx-DRx\cdot z)-\lambda f(z)(DRx\cdot y-Dy\cdot Rx)-\lambda f(z)(Dx\cdot Ry-DRy\cdot x)\\&-2\lambda f(Ry)(Dz\cdot x-Dx\cdot z)-2\lambda f(Rx)(Dy\cdot z-Dz\cdot y)-2\lambda f(Rz)(Dx\cdot y-Dy\cdot x)=0.\end{aligned}$$

证明。 结论可直接由引理4.6 和定理 4.8得出。 □

5. 权为 λ的修正 Rota-Baxter 算子的上同调

本节中，我们在向量空间 g 上构造 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_R)$ 的一个表示，并定义 3-Lie 代数上权为 λ 的修正 Rota-Baxter 算子的上同调。

引理 5.1。 设 $R:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 是一个权为 λ 的 3-李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot])$上的修正的 *Rota-Baxter* 算子。定义 $\rho_R:\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 为

$$\rho_R(x,y)z=[Rx,Ry,z]-R([Rx,y,z]+[x,Ry,z])+\lambda[x,y,z],\quad\forall x,y,z\in\mathfrak{g}.\tag{5.1}$$

那么（$\mathfrak{g}$，ρ_R）是3-李代数（$\mathfrak{g}$，$[\cdot,\cdot,\cdot]_R$）的表示。

证明。 对于任意 $x_1,x_2,x_3,x_4,x \in \mathfrak{g}$，由（3.1）和（5.1），可得

$$
\begin{aligned}
&(\rho_R(x_1,x_2) \circ \rho_R(x_3,x_4) - \rho_R(x_3,x_4) \circ \rho_R(x_1,x_2) - \rho_R([x_1,x_2,x_3]_R, x_4) - \rho_R(x_3,[\\
&x_1,x_2,x_4]_R))(x) = \rho_R(x_1,x_2)([Rx_3,Rx_4,x] - R[Rx_3,x_4,x] - R[x_3,Rx_4,x] + \lambda[\\
&x_3,x_4,x]) - \rho_R(x_3,x_4)([Rx_1,Rx_2,x] - R[Rx_1,x_2,x] - R[x_1,Rx_2,x] + \lambda[x_1,x_2,\\
&x]) - [R[x_1,x_2,x_3]_R, Rx_4,x] + R([R[x_1,x_2,x_3]_R, x_4,x] + [[x_1,x_2,x_3]_R,Rx_4,x])\\
&- \lambda[[x_1,x_2,x_3]_R, x_4,x] + [R[x_1,x_2,x_4]_R,Rx_3,x] - R([R[x_1,x_2,x_4]_R, x_3,x] + [[\\
&x_1,x_2,x_4]_R, Rx_3,x]) + \lambda[[x_1,x_2,x_4]_R, x_3,x] = [Rx_1,Rx_2,[Rx_3,Rx_4,x]] - R([\\
&Rx_1,x_2,[Rx_3,Rx_4,x]] + [x_1,Rx_2,[Rx_3,Rx_4,x]]) + [x_1,x_2,[Rx_3,Rx_4,x]] - [Rx_1,\\
&Rx_2,R[Rx_3,x_4,x]] + R([Rx_1,x_2,R[Rx_3,x_4,x]] + [x_1,Rx_2,R[Rx_3,x_4,x]]) - [x_1,\\
&x_2,R[Rx_3,x_4,x]] - [Rx_1,Rx_2,R[x_3,Rx_4,x]] + R([Rx_1,x_2,R[x_3,Rx_4,x]] + [x_1,\\
&Rx_2,R[x_3,Rx_4,x]]) - [x_1,x_2,R[x_3,Rx_4,x]] + \lambda[Rx_1,Rx_2,[x_3,x_4,x]] - \lambda R[Rx_1,\\
&x_2,[x_3,x_4,x]] - \lambda R[x_1,Rx_2,[x_3,x_4,x]] + \lambda^2[x_1,x_2,[x_3,x_4,x]]_{\mathfrak{g}} - [Rx_3,Rx_4,[\\
&Rx_1,Rx_2,x]] + R([Rx_3,x_4,[Rx_1,Rx_2,x]] + [x_3,Rx_4,[Rx_1,Rx_2,x]]) - [x_3,x_4,[\\
&Rx_1,Rx_2,x]] + [Rx_3,Rx_4,R[Rx_1,x_2,x]] + R([Rx_3,x_4,R[Rx_1,x_2,x]] - [x_3,Rx_4,\\
&R[Rx_1,x_2,x]]) + [x_3,x_4,R[Rx_1,x_2,x]] + [Rx_3,Rx_4,R[x_1,Rx_2,x]] - R([Rx_3,x_4,\\
&R[x_1,Rx_2,x]] - [x_3,Rx_4,R[x_1,Rx_2,x]]) + [x_3,x_4,R[x_1,Rx_2,x]] - \lambda[Rx_3,Rx_4,[x\\
&_1,x_2,x]] + \lambda R[Rx_3,x_4,[x_1,x_2,x]] + \lambda R[x_3,Rx_4,[x_1,x_2,x]] - \lambda^2[x_3,x_4,[x_1,x_2,\\
&x]] - [[Rx_1,Rx_2,Rx_3],Rx_4,x] - [[Rx_1,x_2,x_3],Rx_4,x] - [[x_1,Rx_2,x_3],Rx_4,x] - [[\\
&x_1,x_2,Rx_3],Rx_4,x] + R[[Rx_1,x_2,x_3],x_4,x] + R[[Rx_1,Rx_2,Rx_3],x_4,x] + R[[x_1,\\
&Rx_2,x_3],x_4,x] + R[[x_1,x_2,Rx_3],x_4,x] + R[[Rx_1,Rx_2,x_3],Rx_4,x] + R[[x_1,Rx_2,\\
&Rx_3],Rx_4,x] + R[[Rx_1,x_2,Rx_3],Rx_4,x] + R[[x_1,x_2,x_3],Rx_4,x] - \lambda[[Rx_1,Rx_2,\\
&x_3],x_4,x] - \lambda[[x_1,Rx_2,Rx_3],x_4,x] - \lambda[[Rx_1,x_2,Rx_3],x_4,x] - \lambda^2[[x_1,x_2,x_3],\\
&x_4,x] + [[Rx_1,Rx_2,Rx_4],Rx_3,x] + [[Rx_1,x_2,x_4],Rx_3,x] + [[x_1,Rx_2,x_4],Rx_3,x]\\
&+ [[x_1,x_2,Rx_4],Rx_3,x] - R[[Rx_1,Rx_2,Rx_4],x_3,x] - R[[Rx_1,x_2,x_4],x_3,x] - R[[\\
&x_1,Rx_2,x_4],x_3,x] - R[[x_1,x_2,Rx_4],x_3,x] - R[[Rx_1,Rx_2,x_4],Rx_3,x] - R[[x_1,\\
&Rx_2,Rx_4],Rx_3,x] - R[[Rx_1,x_2,Rx_4],Rx_3,x] - R[[x_1,x_2,x_4],Rx_3,x] + \lambda[[Rx_1,\\
&Rx_2,x_4],x_3,x] + \lambda[[x_1,Rx_2,Rx_4],x_3,x] + \lambda[[Rx_1,x_2,Rx_4],x_3,x] + \lambda^2[[x_1,x_2,x\\
&_4],x_3,x] = 0.
\end{aligned}
$$

同理，我们有

$$\rho_R(x_1,[x_2,x_3,\ x_4]_R) = \rho_R(x_3,x_4) \circ \rho_R(x_1,x_2) - \rho_R(x_2,x_4) \circ \rho_R(x_1,x_3) + \rho_R(x_2,x_3) \circ \rho_R(x_1,x_4).$$

证明完毕。 □

令 $\partial_R : C_3^n{}_{\text{Lie}}(\mathfrak{g}) \to C_3^{n+1}{}_{\text{Lie}}(\mathfrak{g})$ 为 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_R)$ 在表示 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot])$ 中的相应余边界算子。更准确地说，$\partial_R : C_3^n{}_{\text{Lie}}(\mathfrak{g}) \to C_3^{n+1}{}_{\text{Lie}}(\mathfrak{g})$ 定义为

$$(\partial_R f)(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_n,x_{n+1})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{1\le j<k\le n} (-1)^j f(\mathfrak{x}_1,\dots,\hat{\mathfrak{x}}_j,\dots,\mathfrak{x}_{k-1},[x_j,y_j,x_k]_R\wedge y_k + x_k\wedge[x_j,y_j,y_k]_R,\mathfrak{x}_{k+1},\dots,\mathfrak{x}_n,x_{n+1})\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\rho_R(x_j,y_j)f(\mathfrak{x}_1,\dots,\hat{\mathfrak{x}}_j,\dots,\mathfrak{x}_n,x_{n+1})\\
&\quad+(-1)^{n+1}(\rho_R(y_n,x_{n+1})f(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_{n-1},x_n)+\rho_R(x_{n+1},x_n)f(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_{n-1},y_n)),
\end{aligned}
$$

对于 $\mathrm{X}_i = x_i\wedge y_i\in\wedge^2\mathfrak{g}$, $i=1,\cdots,n$ 以及 $x_{n+1}\in\mathfrak{g}$。

显然，$f\in C^1_{3\,\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g})$ 是闭的，当且仅当

$$
\begin{aligned}
&[f(x),Ry,Rz]+[Rx,f(y),Rz]+[Rx,Ry,f(z)]\\
&=R([f(x),Ry,z]+[Rx,f(y),z])+[x,f(y),Rz]+[x,Ry,f(z)]+[Rx,y,f(z)]+[f(x),y,Rz])\\
&\quad+f([Rx,Ry,z]+[x,Ry,Rz]+[Rx,y,Rz]+\lambda[x,y,z])-\lambda[f(x),y,z]-\lambda[x,f(y),z]-\lambda[x,y,f(z)].
\end{aligned}
$$

对于任意 $\mathrm{X}=x\wedge y\in\wedge^2\mathfrak{g}$，我们定义 $d_R(\mathrm{X}):\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 为

$$d_R(\mathfrak{x})x = R[\mathfrak{x},x]-[\mathfrak{x},Rx],\quad \forall\mathfrak{x}\in\wedge^2\mathfrak{g},x\in\mathfrak{g},$$

命题 5.2. 设 R 是一个权为 λ 的修正的 *Rota-Baxter* 算子，作用于一个 3-李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot])$。则 d_R $(\mathfrak{x})$ 是 3-李代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_R)$ 上取值于系数 $(\mathfrak{g},\rho_R)$的一个 *1*-余循环。

证明。 通过直接计算即可得到结论。 □

定理 5.3. 设 R 是一个权为 λ 的修正的 *Rota-Baxter* 算子，作用于一个 3-李代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_R)$，并关于一个表示 $(\mathfrak{g},\rho_R)$。定义 n-余链集合为

$$C^n_{\mathrm{R}}(\mathfrak{g}) = \begin{cases} C^n_{3\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}), & n\ge 2,\\ \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}, & n=1.\end{cases}$$

定义 D_R： $C^n{}_{\mathrm{R}}(\mathfrak{g})\to C^{n+1}{}_{\mathrm{R}}(\mathfrak{g})$为

$$D_R = \begin{cases}\partial_R, & n\ge 2,\\ d_R, & n=1.\end{cases}$$

我们记

$$Z^n_R(\mathfrak{g}) = \{f\in C^n_R(\mathfrak{g})\mid D_Rf=0\}\ \text{ and }\ B^n_R(\mathfrak{g}) = \{D_Rg\mid g\in C^{n-1}_R(\mathfrak{g})\}$$

分别为n-上循环和n-上余边界空间。相应的商

$$H^n_R(\mathfrak{g}) := Z^n_R(\mathfrak{g})/B^n_R(\mathfrak{g}),\ \text{for } n\ge 1$$

称为n阶上同调群，而上链复形$(\oplus^{\infty}{}_{n=1}C^n_R(\mathfrak{g}),D_R)$的上同调定义为修正的 Rota-Baxter 算子R的上同调。

6. 权为 λ的修正的 Rota-Baxter 算子的形式变形

本节研究 3-Lie 代数上权为 λ的修正的 Rota-Baxter 算子的形式变形。

定义 6.1。 设R是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot])$ 上的修正的 Rota-Baxter 算子，且 $\hat{}R:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 是一个线性映射。如果存在正数 $\epsilon\in\mathbf{k}$，使得 $R_t = R + t\hat{}R$ 对于所有 $t\in(-\epsilon,\epsilon)$ 仍然是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot])$ 上的修正的 Rota-Baxter 算子，则称 $\hat{}R$生成了修正的 Rota-Baxter 算子R的线性变形。

定义 6.2。 设R是 3-Lie 代数 (g, $[\cdot,\cdot,\cdot]$) 上的修正的 Rota-Baxter 算子。若存在 X $\in$ g $\wedge$ g，使得$R_t^1 = R + t\hat{R}_1$和$R_t^2 = R + t\hat{R}_2$等价，则称这两个线性变形等价，其中

$$\varphi_t = \mathrm{id} + t\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}},$$

满足以下条件:

$$(a) \quad \varphi_t([x,y,z]) = [\varphi_t(x), \varphi_t(y), \varphi_t(z)], \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g},$$
$$(b) \quad R_t^2 \circ \varphi_t = \varphi_t \circ R_t^1,$$

定理 6.3。 设 R: g $\to$ g 生成修正的 *Rota–Baxter* 算子$\hat{R}$ 的线性变形。那么 R 是一个 *1*-余循环。
设 R_t^1和 R_t^2 是由$\hat{R}_1$ 和$\hat{R}_2$ 分别生成的 R 的等价线性变形。那么$\hat{R}_1$ 和$\hat{R}_2$ 属于同一个上同调类 $H_R^2(\mathfrak{g})$。

证明。S $\hat{}$ 由于$R_t = R + tR$都是修正的 Rota-Baxter 算子，对于任意x、y、$z \in$g，我们有 e

$$\begin{aligned}
&[R_t x, R_t y, R_t z] \\
&= R_t([R_t x, R_t y, z] + [x, R_t y, R_t z]_{\mathfrak{g}} + [R_t x, y, R_t z] + \lambda[x,y,z]) \\
&\quad - \lambda[R_t x, y, z] - \lambda[x, R_t y, z] - \lambda[x, y, R_t z],
\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}
&[\hat{R}x, Ry, Rz] + [Rx, \hat{R}y, Rz] + [Rx, Ry, \hat{R}z] \\
&= R([\hat{R}x, Ry, z] + [Rx, \hat{R}y, z]) + [x, \hat{R}y, Rz] \\
&\quad + [x, Ry, \hat{R}z] + [Rx, y, \hat{R}z] + [\hat{R}x, y, Rz]) \\
&\quad + \hat{R}([Rx, Ry, z] + [x, Ry, Rz] + [Rx, y, Rz]_{\mathfrak{g}} + \lambda[x,y,z]) \\
&\quad - \lambda[\hat{R}x, y, z] - \lambda[x, \hat{R}y, z] - \lambda[x, y, \hat{R}z],
\end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}
&[Rx, \hat{R}y, \hat{R}z] + [\hat{R}x, \hat{R}y, Rz] + [\hat{R}x, Ry, \hat{R}z] \\
&= \hat{R}([\hat{R}x, Ry, z] + [Rx, \hat{R}y, z] + [x, \hat{R}y, Rz] \\
&\quad + [x, Ry, \hat{R}z] + [\hat{R}x, y, Rz] + [Rx, y, \hat{R}z] \\
&\quad + R([\hat{R}x, \hat{R}y, z] + [x, \hat{R}y, \hat{R}z] + [\hat{R}x, y, \hat{R}z]),
\end{aligned} \tag{6.2}$$

and

$$[\hat{R}x, \hat{R}y, \hat{R}z] = \hat{R}([\hat{R}x, \hat{R}y, z] + [x, \hat{R}y, \hat{R}z] + [\hat{R}x, y, \hat{R}z]). \tag{6.3}$$

$\hat{}$根据（6.1），R 是一个1-余循环。

如果R_t^1 an d R_t^2是R的等价线性变形，那么存在X $\in$ g $\wedge$g，使得 at

$$(\mathrm{id} + t\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}})(R + t\hat{R}_1)(u) = (R + t\hat{R}_2)(\mathrm{id} + t\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}})(u), \quad \forall u \in \mathfrak{g},$$

这意味着

$$\hat{R}_1(u) - \hat{R}_2(u) = R[\mathfrak{x}, u] - [\mathfrak{x}, Ru], \quad \forall u \in \mathfrak{g}, \tag{6.4}$$

由（6.4），我们得到

$$\hat{R}_1 - \hat{R}_2 = \partial_R(x).$$

因此，$\hat{R}_1$ 和 $\hat{R}_2$ 属于同一个上同调类H_R^2(g)。 □

定义 6.4. 由 $\hat{}R$ 生成的修正的 Rota-Baxter 算子R 的线性变形是平凡的，若存在一个 $X \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$，使得 $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} + t\mathrm{ad}_x$ 是从$R_t = R + t\hat{}R$ 到R的同构。

定义 6.5. 设 R 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot])$ 上的修正的 Rota-Baxter 算子。若元素 $X \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ 满足下式，则称其为与 R 相关的 Nijenhuis 元

$$[[\mathfrak{x}, x], [\mathfrak{x}, y], [\mathfrak{x}, z]] = 0, \tag{6.5}$$

$$[x, [\mathfrak{x}, y], [\mathfrak{x}, z]] + [[\mathfrak{x}, x], [\mathfrak{x}, y], z] + [[\mathfrak{x}, x], y, [\mathfrak{x}, z]] = 0, \tag{6.6}$$

$$[\mathfrak{x}, R[\mathfrak{x}, x]] = [\mathfrak{x}, [\mathfrak{x}, Rx]]. \tag{6.7}$$

定理 6.6. 设 R 是3-*Lie* 代数$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot])$上的修正的 *Rota-Baxter* 算子。那么，对于任意 *Nijenhuis* 元$\mathfrak{x} \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$，$R_t = R + t\partial_R(\mathfrak{x})$都是修正的 *Rota-Baxter* 算子 R 的平凡线性变形。

证明。 取 $\hat{}R = \partial_R(\mathfrak{x})$，对于任意 x、y、$z \in \mathfrak{g}$，有 $\hat{}Rx = R[\mathfrak{x}、x] - [\mathfrak{x}，Rx]$。 为证明 R_t 是R的线性变形，我们需要验证 (6.3) 成立；事实上，我们有

$$\begin{aligned}
&\hat{R}([\hat{R}x, \hat{R}y, z] + [x, \hat{R}y, \hat{R}z] + [\hat{R}x, y, \hat{R}z]) - [\hat{R}x, \hat{R}y, \hat{R}z] \\
&= R[\mathfrak{x}, [R[\mathfrak{x}, x] - [\mathfrak{x}, Rx], R[\mathfrak{x}, y] - [\mathfrak{x}, Ry], z]] \\
&\quad - [\mathfrak{x}, R[R[\mathfrak{x}, x] - [\mathfrak{x}, Rx], R[\mathfrak{x}, y] - [\mathfrak{x}, Ry], z]] \\
&\quad + R[\mathfrak{x}, [x, R[\mathfrak{x}, y] - [\mathfrak{x}, Ry], R[\mathfrak{x}, z] - [\mathfrak{x}, Rz]]] \\
&\quad - [\mathfrak{x}, R[x, R[\mathfrak{x}, y] - [\mathfrak{x}, Ry], R[\mathfrak{x}, z] - [\mathfrak{x}, Rz]]] \\
&\quad + R[\mathfrak{x}, [R[\mathfrak{x}, x] - [\mathfrak{x}, Rx], y, R[\mathfrak{x}, z] - [\mathfrak{x}, Rz]])] \\
&\quad - [\mathfrak{x}, R[R[\mathfrak{x}, x] - [\mathfrak{x}, Rx], y, R[\mathfrak{x}, z] - [\mathfrak{x}, Rz]])] \\
&\quad - [R[\mathfrak{x}, x] - [\mathfrak{x}, Rx], R[\mathfrak{x}, y] - [\mathfrak{x}, Ry], R[\mathfrak{x}, z] - [\mathfrak{x}, Rz]] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

因此，R_t 是修正的 Rota-Baxter 算子 R 的线性变形。由于 X 是 Nijenhuis 元，我们有 $(\mathrm{id} + \mathrm{tad}_x)[x, y, z] = [x + t[X, x], y + t[X, y], z + t[X, z]]$ 以及 $R(x + t[X, x]) = (\mathrm{id} + \mathrm{tad}_x)(Rx + t\hat{}Rx)$。因此，$R_t = R + t\partial_R(X)$ 是修正的 Rota-Baxter 算子 R 的平凡线性变形。□

命题 6.7。 设 $\hat{}R$ 生成 *3-Lie* 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot])$上的修正的 *Rota-Baxter* 算子 R 的线性变形，其中 3-*Lie*。则由 ω 定义为

$$\begin{aligned}
\omega(x, y, z) = &[Rx, \hat{R}y, z] + [\hat{R}x, Ry, z] + [Rx, y, \hat{R}z] + [\hat{R}x, y, Rz] \\
&+ [x, \hat{R}y, Rz] + [x, Ry, \hat{R}z],
\end{aligned}$$

生成由修正的 *Rota-Baxter* 算子 R 给出的 3-*Lie* 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_R)$ 的线性变形。

证明。 对于任意 x、y、$z \in \mathfrak{g}$，我们有

$$\begin{aligned}
[x, y, z]_{R_t} = &[Rx, Ry, z] + [x, Ry, Rz] + [Rx, y, Rz] + \lambda[x, y, z] + t([Rx, \hat{R}y, z] \\
&+ [\hat{R}x, Ry, z] + [Rx, y, \hat{R}z] + [\hat{R}x, y, Rz] \\
&+ [x, \hat{R}y, Rz] + [x, Ry, \hat{R}z]) \\
= &[x, y, z]_R + t\omega(x, y, z).
\end{aligned}$$

由于 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_{R_t})$ 是 3-Lie 代数，我们有 ω 由修正的 Rota-Baxter 算子 R 给出的 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_R)$ 的一个线性变形生成。□

定理 6.8。 设 $\mathfrak{x} \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ 是与修正的 *Rota-Baxter* 算子 R 相关的 *Nijenhuis* 元。则 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}$ 是 3-*Lie* 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_R)$ 上的 *Nijenhuis* 算子。

证明. 对任意 $x,y,z \in \mathfrak{g}$, 由 (6.5)-(6.7), 可得

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}x, \mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}y, \mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}z]_R\\
&= [R[\mathfrak{x},x], R[\mathfrak{x},y], z] + [x, R[\mathfrak{x},y], R[\mathfrak{x},z]] + [R[\mathfrak{x},x], y, R[\mathfrak{x},z]]\\
&\quad + \lambda[[\mathfrak{x},x],[\mathfrak{x},y],[\mathfrak{x},z]]\\
&= [R[\mathfrak{x},x], R[\mathfrak{x},y], z] + [x, R[\mathfrak{x},y], R[\mathfrak{x},z]] + [R[\mathfrak{x},x], y, R[\mathfrak{x},z]].
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}([\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}x, \mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}y, z]_R + [x, \mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}y, \mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}z]_R + [\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}x, y, \mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}z]_R\\
&\quad - \mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}([\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}x, y, z]_R + [x, \mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}y, z]_R + [x, y, \mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}z]_R - \mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}[x,y,z]_R))\\
&= \mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}\Big([[\mathfrak{x},x],[\mathfrak{x},y],z]_R + [x,[\mathfrak{x},y],[\mathfrak{x},z]]_R + [[\mathfrak{x},x],y,[\mathfrak{x},z]]_R\\
&\quad - \mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}([[\mathfrak{x},x],y,z]_R + [x,[\mathfrak{x},y],z]_R + [x,y,[\mathfrak{x},z]]_R - \mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}[x,y,z]_R)\Big)\\
&= \mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}\Big([R[\mathfrak{x},x],R[\mathfrak{x},y],z] + [[\mathfrak{x},x],R[\mathfrak{x},y],Rz] + [R[\mathfrak{x},x],[\mathfrak{x},y],Rz]\\
&\quad + [Rx,R[\mathfrak{x},y],[\mathfrak{x},z]] + [x,R[\mathfrak{x},y],R[\mathfrak{x},z]] + [Rx,[\mathfrak{x},y],R[\mathfrak{x},z]]\\
&\quad + [R[\mathfrak{x},x],Ry,[\mathfrak{x},z]] + [[\mathfrak{x},x],Ry,R[\mathfrak{x},z]] + [R[\mathfrak{x},x],y,R[\mathfrak{x},z]]\\
&\quad - \mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}([R[\mathfrak{x},x],Ry,z] + [R[\mathfrak{x},x],y,Rz] + [[\mathfrak{x},x],Ry,Rz] + [Rx,R[\mathfrak{x},y],z]\\
&\quad + [x,R[\mathfrak{x},y],Rz] + [Rx,[\mathfrak{x},y],Rz] + [Rx,Ry,[\mathfrak{x},z]] + [x,Ry,R[\mathfrak{x},z]]\\
&\quad + [Rx,y,R[\mathfrak{x},z]] - [[\mathfrak{x},Rx],Ry,z] - [Rx,[\mathfrak{x},Ry],z] - [Rx,Ry,[\mathfrak{x},z]]\\
&\quad - [[\mathfrak{x},x],Ry,Rz] - [x,[\mathfrak{x},Ry],Rz] - [x,Ry,[\mathfrak{x},Rz]]\\
&\quad - [[\mathfrak{x},Rx],y,Rz] - [Rx,[\mathfrak{x},y],Rz] - [Rx,y,[\mathfrak{x},Rz]])\Big)\\
&= \mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}\Big([R[\mathfrak{x},x],R[\mathfrak{x},y],z] + [Rx,R[\mathfrak{x},y],[\mathfrak{x},z]]\\
&\quad + [x,R[\mathfrak{x},y],R[\mathfrak{x},z]] + [R[\mathfrak{x},x],y,R[\mathfrak{x},z]] - [R[\mathfrak{x},x]],[\mathfrak{x},Ry],z]\\
&\quad - [R[\mathfrak{x},x],y,[\mathfrak{x},Rz]] - [Rx,R[\mathfrak{x},y]],[\mathfrak{x},z]]\\
&\quad - [x,R[\mathfrak{x},y],[\mathfrak{x},Rz]] - [x,[\mathfrak{x},Ry],R[\mathfrak{x},z]] - [[\mathfrak{x},Rx],y,R[\mathfrak{x},z]]\\
&\quad + [[\mathfrak{x},Rx],[\mathfrak{x},Ry],z] + [x,[\mathfrak{x},Ry],[\mathfrak{x},Rz]] + [Rx,[\mathfrak{x},y],[\mathfrak{x},Rz]]\Big)\\
&= [[\mathfrak{x},R[\mathfrak{x},x]],R[\mathfrak{x},y],z] + [[\mathfrak{x},Rx],R[\mathfrak{x},y],[\mathfrak{x},z]] + [[\mathfrak{x},x],R[\mathfrak{x},y],R[\mathfrak{x},z]]\\
&\quad + [[\mathfrak{x},R[\mathfrak{x},x]],Ry,[\mathfrak{x},z]] - [[\mathfrak{x},R[\mathfrak{x},x]],[\mathfrak{x},Ry],z] - [[\mathfrak{x},R[\mathfrak{x},x]],[\mathfrak{x},y],Rz]\\
&\quad - [[\mathfrak{x},R[\mathfrak{x},x]],y,[\mathfrak{x},Rz]] - [[\mathfrak{x},[\mathfrak{x},Rx]],R[\mathfrak{x},y],z] - [[\mathfrak{x},Rx],R[\mathfrak{x},y]],[\mathfrak{x},z]]\\
&\quad - [[\mathfrak{x},x],R[\mathfrak{x},y],[\mathfrak{x},Rz]] - [[\mathfrak{x},x],[\mathfrak{x},Ry],R[\mathfrak{x},z]] - [[\mathfrak{x},[\mathfrak{x},Rx]],y,R[\mathfrak{x},z]]\\
&\quad + [[\mathfrak{x},[\mathfrak{x},Rx]],[\mathfrak{x},Ry],z]\\
&= [[\mathfrak{x},Rx],R[\mathfrak{x},y],[\mathfrak{x},z]] + [[\mathfrak{x},x],R[\mathfrak{x},y],R[\mathfrak{x},z]] + [[\mathfrak{x},R[\mathfrak{x},x]],Ry,[\mathfrak{x},z]]\\
&\quad - [[\mathfrak{x},R[\mathfrak{x},x]],y,[\mathfrak{x},Rz]] - [[\mathfrak{x},Rx],R[\mathfrak{x},y]],[\mathfrak{x},z]] - [[\mathfrak{x},x],R[\mathfrak{x},y],[\mathfrak{x},Rz]]\\
&\quad - [[\mathfrak{x},x],[\mathfrak{x},Ry],R[\mathfrak{x},z]] - [[\mathfrak{x},R[\mathfrak{x},x]],y,R[\mathfrak{x},z]]\\
&= [R[\mathfrak{x},x],R[\mathfrak{x},y],z] + [x,R[\mathfrak{x},y],R[\mathfrak{x},z]] + [R[\mathfrak{x},x],y,R[\mathfrak{x},z]].
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&[\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}x,\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}y,\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}z]_R\\&=\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}([\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}x,\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}y,z]_R+[x,\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}y,\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}z]_R+[\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}x,y,\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}z]_R\\&-\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}([\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}x,y,z]_R+[x,\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}y,z]_R+[x,y,\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}z]_R-\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}[x,y,z]_R)).\end{aligned}$$

这意味着 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{x}}$ 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_R)$ 上的 Nijenhuis 算子。 □

7. $L_\infty[1]$-结构与（相对及绝对）修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数

7.1. $L_\infty[1]$-代数与（广义）导出括号。

本小节回顾 $L_\infty[1]$-代数的一些预备知识。

定义 7.1. $L_\infty[1]$-代数是一个二元组 $(L=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}L_i,\{l_k\}^\infty{}_{k=1})$，由一个分次向量空间$L=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}L_i$ 以及一组 $\{l_k\}^\infty{}_{k=1}$ 组成，其中的多重线性映射$l_k:L^{\otimes k}\to L$ （对于 $k\geq 1$）次数为 1，并满足

- 分次对称性：$l_k(x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes x^{\sigma(k)})=\epsilon(\sigma)l_k(x_1\otimes\cdots\otimes x_k)$，对任意 $\sigma\in S_k$ 和 $k\geq 1$；- 高阶 Jacobi 恒等式：

$$\sum_{i+j=n+1}\sum_{\sigma\in S_{(i,n-i)}}\epsilon(\sigma)l_j\left(l_i\left(x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(i)}\right)\otimes x_{\sigma(i+1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(n)}\right)=0,$$

对于 $x_1,\ldots,x_n\in L$和 $n\geq 1$。这里，$S_{(i,n-i)}$是所有（i，$n-i$）-交错置换的集合，即满足以下条件的置换 $\sigma\in S_n$：

$$\sigma(1)<\cdots<\sigma(i_1),\sigma(i_1+1)<\cdots<\sigma(i_1+i_2),\ldots,\sigma(i_1+\cdots+i_{r-1}+1)<\cdots<\sigma(n).$$

且 $\epsilon(\sigma)=\epsilon(\sigma;x_1,\ldots,x_n)$ 是分次语境下标准的 Koszul 符号。

在全文中，所有 $L_\infty[1]$-代数均假设为弱滤过的。换言之，某些无穷求和总是收敛的。

定义 7.2。 设 $(L=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}L_i,\{l_k\}^\infty{}_{k=1})$ 是一个 $L_\infty[1]$-代数。若元素 $\alpha\in L_0$ 满足以下条件，则称其为 Maurer-Cartan 元素：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}l_k(\alpha\otimes\cdots\otimes\alpha)=0.$$

命题 7.3。 [11, 扭曲过程] 设 α 是一个 L 的 *Maurer-Cartan* 元素$_\infty[1]$-代数 L。L 上扭曲后的 $L_\infty[1]$-代数结构由一列多重线性映射 $l_n^\alpha:L^{\otimes n}\to L$ 定义如下：

$$l_n^\alpha(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}l_{n+i}\left(\underbrace{\alpha\otimes\cdots\otimes\alpha}_{i\ times}\otimes x_1\otimes\cdots\otimes x_n\right),\quad\forall x_1,\ldots,x_n\in L,$$

只要无穷级数收敛（或在有限情形下终止）

特别地，*Maurer-Cartan* 元素 $\alpha\in L_0$ 会诱导一个一阶微分算子 l

$$l_1^\alpha(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}l_{i+1}(\underbrace{\alpha\otimes\cdots\otimes\alpha}_{i\ times}\otimes x),$$

这使 (L,l_1^α) 成为一个上链复形。相应的上同调群称为由 *Maurer-Cartan* 元素 α 诱导的上同调。

一类重要的 $L_\infty[1]$-代数源自 V-数据 [27]。回顾一下，V-数据是一个四元组 $(V, \mathfrak{a}, \mathcal{P}, \triangle)$，其中

(a) V 是一个分次李代数（其分次李括号为 $[\,,\,]$）；(b) $\mathfrak{a} \subset V$ 是一个阿贝尔分次李子代数；(c) $\mathcal{P} : V \to \mathfrak{a}$ 是一个投影映射，且满足 $\ker(\mathcal{P}) \subset V$ 是一个分次李子代数；(d) 并且 $\triangle \in \ker(\mathcal{P})^1$ 满足 $[\triangle, \triangle] = 0$。

使用V-数据构造L_∞-子代数的研究见 [8, 10, 20]。我们在以下简化定理中总结这一方法。

定理 7.4。 设$(V, \mathfrak{a}, \mathcal{P}, \triangle)$ 是一个 V-数据。假设 $V' \subset V$ 是一个满足 $[\triangle, V'] \subset V'$ 的分次李子代数。那么，分次向量空间 $V'[1] \oplus \mathfrak{a}$ c 带有一个 $L_\infty[1]$-代数结构，其多重线性运算为

$$\begin{aligned}
l_1(x[1] \otimes a) &= (-[\triangle, x][1],\ \mathcal{P}(x + [\triangle, a])),\\
l_2(x[1] \otimes y[1]) &= (-1)^{|x|}[x, y][1],\\
l_k(x[1] \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1}) &= \mathcal{P}[\cdots[[x, a_1], a_2], \ldots, a_{k-1}], \quad \text{for } k \geq 2,\\
l_k(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) &= \mathcal{P}[\cdots[[\triangle, a_1], a_2], \ldots, a_k], \quad \text{for } k \geq 2.
\end{aligned}$$

其中 x、y 是 V' 中的齐次元素，$a_1, \ldots\ldots$、a_k 是 $\mathfrak{a}$ 中的齐次元素。除上述元素的排列外，所有其他多重线性运算均为零。

此外，设 $\iota :\ V'' \hookrightarrow V'$ 是分次李代数的一个单态射，满足 $[\triangle, \iota(V'')] \subset \iota(V'')$。则分次向量空间 $V''[1] \oplus \mathfrak{a}$ 也具有一个 $L_\infty[1]$-代数结构，其多重线性运算为：

$$\begin{aligned}
l'_1(x[1] \otimes a) &= (-\iota^{-1}[\triangle, \iota(x)][1],\ \mathcal{P}(\iota(x) + [\triangle, a])),\\
l'_2(x[1] \otimes y[1]) &= (-1)^{|x|}\iota^{-1}[\iota(x), \iota(y)][1],\\
l'_k(x[1] \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1}) &= \mathcal{P}[\cdots[[\iota(x), a_1], a_2], \ldots, a_{k-1}], \quad \text{for } k \geq 2,\\
l'_k(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) &= \mathcal{P}[\cdots[[\triangle, a_1], a_2], \ldots, a_k], \quad \text{for } k \geq 2.
\end{aligned}$$

其中 x、y 是 V'' 中的齐次元素，$a_1, \ldots\ldots$、a_k 是 $\mathfrak{a}$ 中的齐次元素。此外，该映射 ι 诱导出一个 $L_\infty[1]$-代数的单态射：

$$\tilde{\iota} : (V_{\mathfrak{b}}[1] \oplus \mathfrak{a}, \{l_k^{\mathrm{RB}}\}_{k\geq 1}) \longrightarrow (V_{r\mathrm{Pair}}[1] \oplus \mathfrak{a}, \{l_k^{m\mathrm{RB}}\}_{k\geq 1}), \quad (f[1], \theta) \mapsto (\iota(f)[1], \theta).$$

7.2. **$L_\infty[1]$-相对修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数的结构**。在本小节中，我们利用导出括号技术构造一个 $L_\infty[1]$-代数，其 Maurer-Cartan 元素与权为 λ的相对修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数结构的集合一一对应。

定理 7.5。 [23] 配备分次交换子括号的分次向量空间 $C^*_{3\text{李}}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$

$$[P, Q]_{\mathrm{R}} = P \circ Q - (-1)^{pq} Q \circ P, \quad \forall P \in C^p_{3\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), Q \in C^q_{3\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}),$$

是一个分次李代数，其中 $P \circ Q \in C_3^{p+q}$(李)$(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ 定义为

$$
\begin{aligned}
&(P\circ Q)\left(\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_{p+q},x\right)\\
&=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{(k-1)q}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}(k-1,q)}(-1)^{\sigma}P\left(\mathfrak{x}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{x}_{\sigma(k-1)},Q\left(\mathfrak{x}_{\sigma(k)},\cdots,\mathfrak{x}_{\sigma(k+q-1)},x_{k+q}\right)\wedge y_{k+q},\mathfrak{x}_{k+q+1},\cdots,\mathfrak{x}_{p+q},x\right)\\
&+\sum_{k=1}^{p}(-1)^{(k-1)q}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}(k-1,q)}(-1)^{\sigma}P\left(\mathfrak{x}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{x}_{\sigma(k-1)},x_{k+q}\wedge Q\left(\mathfrak{x}_{\sigma(k)},\cdots,\mathfrak{x}_{\sigma(k+q-1)},y_{k+q}\right),\mathfrak{x}_{k+q+1},\cdots,\mathfrak{x}_{p+q},x\right)\\
&+\sum_{\sigma\in\mathbb{S}(p,q)}(-1)^{pq}(-1)^{\sigma}P\left(\mathfrak{x}_{\sigma(1)},\cdots,\mathfrak{x}_{\sigma(p)},Q\left(\mathfrak{x}_{\sigma(p+1)},\cdots,\mathfrak{x}_{\sigma(p+q-1)},\mathfrak{x}_{\sigma(p+q)},x\right)\right),
\end{aligned}
$$

对所有$\mathfrak{x}_i=x_i\wedge y_i\in\wedge^2\mathfrak{g}$，$i=1,2,\cdots,p+q$ 和 $x\in\mathfrak{g}$。此外，$\mu:\wedge^3\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ 是一个 3-李括号，当且仅当$\mu\in C_3^2$(李)$(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ 使得 $[\mu,\mu]_{\mathrm{R}}=0$。

命题 7.6. 将分次向量空间 C_3^*(李-作用)$(\mathfrak{h},\mathfrak{g})$ 记为

$$
\bigoplus_{n\geq 0}\bigoplus_{i_1,\ldots,i_n\in\{0,1\}}\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}\left(V_{i_1}\otimes\cdots\otimes V_{i_n}\otimes(\wedge^3\mathfrak{g}\oplus(\wedge^2\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{g})),\mathfrak{g}\right)\\ \oplus\ \mathrm{Hom}\left(V_{i_1}\otimes\cdots\otimes V_{i_n}\otimes(\wedge^3\mathfrak{h}\oplus(\wedge^2\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{h})),\mathfrak{h}\right)\end{pmatrix}
$$

其中 $V_0=\wedge^2\mathfrak{h}$ 且 $V_1=\wedge^2\mathfrak{g}$。那么 C_3^*(李-作用)$(\mathfrak{h},\mathfrak{g})$ 是分次李代数的子代数

$$
(C^*_{3\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h},\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}),[\cdot,\cdot]_{\mathrm{R}}).
$$

此外，一个四元组

$$
((\mathfrak{h},\mu),(\mathfrak{g},\pi),\rho,\zeta)
$$

构成 当且仅当 $\delta:=\pi+\rho+\mu+\zeta\in(V_{r\mathrm{Pair}})^1$ 满足.....时，它是一个相对的3-李代数对 s

$$
[\delta,\delta]_{\mathrm{R}}=0,
$$

其中

$$
\pi\in\mathrm{Hom}(\wedge^3\mathfrak{g},\mathfrak{g}),\quad \mu\in\mathrm{Hom}(\wedge^3\mathfrak{h},\mathfrak{h}),\quad \rho\in\mathrm{Hom}(\wedge^2\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{h},\mathfrak{h}),\quad \zeta\in\mathrm{Hom}(\wedge^2\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{g},\mathfrak{g}).
$$

证明。记

$$
\bigoplus_{n\geq 0}\bigoplus_{i_1,\ldots,i_n\in\{0,1\}}\left(\mathrm{Hom}(V_{i_1}\otimes\cdots\otimes V_{i_n}\otimes\left((\wedge^3\mathfrak{g})\oplus(\wedge^2\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{g})\right),\mathfrak{g})\right)
$$

为$V_{\mathfrak{g}}$ 且

$$
\bigoplus_{n\geq 0}\bigoplus_{i_1,\ldots,i_n\in\{0,1\}}\left(\mathrm{Hom}(V_{i_1}\otimes\cdots\otimes V_{i_n}\otimes\left((\wedge^3\mathfrak{h})\oplus(\wedge^2\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{h})\right),\mathfrak{h})\right)
$$

分别记为$V_{\mathfrak{h}}$。对于任意$P\in V_{\mathfrak{g}}$、$Q\in V_{\mathfrak{h}}$ 和$R\in V_{r\mathrm{Pair}}$，我们可以证明$P\circ R\in V_{\mathfrak{g}}$ 且$Q\circ R\in V_{\mathfrak{h}}$。因此，$V_{r\mathrm{Pair}}$ 是C_3^* 李代数$(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h},\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h})$的子代数。

对于所有 $\delta\in(V_{r\mathrm{Pair}})^1$，，都可以将 δ 分解为 $\delta=\pi+\rho+\mu+\zeta$，其中 $\pi\in\mathrm{Hom}(\wedge^3\mathfrak{g},\mathfrak{g})$，$\mu\in\mathrm{Hom}(\wedge^3\mathfrak{h},\mathfrak{h})$，$\rho\in\mathrm{Hom}(\wedge^2\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{h},\mathfrak{h})$ 且 $\zeta\in\mathrm{Hom}(\wedge^2\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{g},\mathfrak{g})$。由于 $[\delta,\delta]_{\mathrm{R}}=0$，我们有

$$
[\mu,\mu]_{\mathrm{R}}=0,\ [\pi,\pi]_{\mathrm{R}}=0,\ \rho\circ\rho=\rho\circ\pi\text{ and }\zeta\circ\zeta=\zeta\circ\mu.
$$

根据定理 7.5，μ 和 π 分别在 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g}$ 上定义 3-Lie 括号。$\rho\circ\rho=\rho\circ\pi$等价于 ρ 和 π 满足方程（1）（2）。因此，$\rho:\wedge^2\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}$ 是 $(\mathfrak{g},\pi)$ 在 $(\mathfrak{h},\mu)$ 上的作用。同理，$\mu:\wedge^2\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 是 $(\mathfrak{h},\mu)$ 在 $(\mathfrak{g},\pi)$ 上的作用。

反之亦然。 □

根据定理7.4 和命题7.6，我们可以构造如下的L_∞-代数 a.

命题 7.7。 设$\mathfrak{g}$和$\mathfrak{h}$是两个向量空间。那么我们有如下的 V-数据$(V, \mathfrak{a}, \mathcal{P}, \Delta)$:

(a) 分次李代数 $(V, [\cdot,\cdot])$ 由 $\left(C^*_{3\,\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}, \mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}), [\cdot,\cdot]_{\mathrm{R}}\right)$ 给出; *(b)* 阿贝尔分次李子代数 $\mathfrak{a}$ 由

$$\mathfrak{a} = C^*_{3\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = \oplus_{n\geq 0} C^n_{3\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Hom}\left(\underbrace{\wedge^2\mathfrak{h}\otimes\cdots\otimes\wedge^2\mathfrak{h}}_{n\ times}\wedge\mathfrak{h}, \mathfrak{g}\right);$$

(c) $\mathcal{P}: L \to L$ 是到子空间 $\mathfrak{a}$ 上的投影;

(d) $\Delta = 0 \in$ 核 $(\mathcal{P})$ [1]。

令 $V_{r\mathrm{Pair}} = C^*_{3\ \mathrm{Lie-act}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$, 我们得到一个 L_∞-代数 $(V_{r\mathrm{Pair}}[1]\oplus\mathfrak{a}, \{l_k\}_{k\geq 1})$, 其中

$$\begin{aligned} &l_2^{m\mathrm{RB}}(f[1]\otimes g[1]) = [f,g]_{\mathrm{R}}[1]\\ &l_k^{m\mathrm{RB}}(f[1]\otimes\theta_1\otimes\ldots\otimes\theta_{k-1}) = \mathcal{P}\left[\cdots[[f,\theta_1]_{\mathrm{R}},\theta_2]_{\mathrm{R}},\ldots,\theta_{k-1}\right]_{\mathrm{R}},\ for\ k\geq 2 \end{aligned}$$

for all $\theta_1,\ldots,\theta_{k-1}\in\mathfrak{a}$ *and* $f, g\in V_{r\mathrm{Pair}}$.

定理 *7.8.* 沿用以上所有记号。假设存在映射 $\pi \in Hom(\wedge^3 g, g)$、$\mu \in Hom(\wedge^3 h, h)$、$\rho \in Hom(\wedge^2 g\otimes h, h)$、$\zeta \in Hom(\wedge^2 h\otimes g, g)$、$T \in Hom(h, g)$, 且 $\delta = \pi+\rho+\lambda(\mu+\zeta)$, 其中 λ 非零。

那么, $(\delta[1], T) \in (V_{r\mathrm{Pair}}[1]\oplus\mathfrak{a})^0$ 是 $L_\infty[1]$-代数 $(V_{r\mathrm{Pair}}[1]\oplus\mathfrak{a}, \{l^{m\mathrm{RB}}{}_k\}_{k\geq 1})$ 中的 *Maurer-Cartan* 元素, 当且仅当 $((\mathfrak{h},\pi),(\mathfrak{g},\mu),\rho,\zeta,T)$ 构成相对修正 *Rota-Baxter* 3-李代数结构。

证明。 令 $(\delta[1], T) \in (V_{r\mathrm{Pair}})^0$。那么, δ可分解为 $\delta = \pi+\rho+\lambda(\mu+\zeta)$, 并且有

$$\begin{aligned} &l_2^{m\mathrm{RB}}((\delta[1]\otimes T),(\delta[1]\otimes T)) = ([\delta,\delta]_{\mathrm{R}}[1], 2\mathcal{P}[\delta,T]_{\mathrm{R}}),\\ &l_2^{m\mathrm{RB}}((\delta[1],T)\otimes(\delta[1],T))\\ &\quad = (0, 24\mathcal{P}[[[\delta,T]_{\mathrm{R}},T]_{\mathrm{R}},T]_{\mathrm{R}}), \end{aligned}$$

其中, 对所有 $(u、v、w)\in\wedge^2\mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}[\delta,T]_{\mathrm{R}}(u,v,w)\\ &\quad = -\lambda T\mu(u,v,w) + \lambda\left(\zeta(u,v)Tw + \zeta(v,w)Tu + \zeta(w,u)Tv\right),\\ &\mathcal{P}[[[\delta,T]_{\mathrm{R}},T]_{\mathrm{R}},T]_{\mathrm{R}}(u,v,w)\\ &\quad = \pi(Tu,Tv,Tw) - T\left(\rho(Tu,Tv)w + \rho(Tv,Tw)u + \rho(Tw,Tu)v\right). \end{aligned}$$

那么, 当且仅当, 元素 $(\delta[1]、T)\in(V_{r\mathrm{Pair}})^0$是 $(V_{r\mathrm{Pair}}[1]\oplus\mathfrak{a}、\{l^{m\mathrm{RB}}{}_k\}_{k\geq 1})$ 中的 Maurer-Cartan 元素

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}l_k^{m\mathrm{RB}}\Big((\delta[1],T)\otimes\cdots\otimes(\delta[1],T)\Big)\\ &= \frac{1}{2!}l_2^{m\mathrm{RB}}((\delta[1],T)\otimes(\delta[1]\otimes T) + \frac{1}{4!}l_4^{m\mathrm{RB}}((\delta[1],T)\otimes(\delta[1],T)\otimes(\delta[1],T),(\delta[1],T))\\ &= 0, \end{aligned}$$

也就是说,

$$\left(\frac{1}{2!}[\delta,\delta]_{\mathrm{R}}[1], \frac{1}{2!}\mathcal{P}[\delta,T]_{\mathrm{R}} + \frac{1}{4!}\mathcal{P}[[[\delta,T]_{\mathrm{R}},T]_{\mathrm{R}},T]_{\mathrm{R}}\right) = 0. \tag{7.8}$$

由方程7.8的第一分量可得

$$[\delta,\delta]_{\mathrm{R}}=0.$$

因此，根据命题 7.6，这意味着四元组 $((\mathfrak{h},\mu),(\mathfrak{g},\pi),\rho,\zeta)$ 定义了一个相对 3-Lie 代数对结构。

由截面分量可得

$$\begin{aligned}\pi(Tu,Tv,Tw)=&T\left(\rho(Tu,Tv)w+\rho(Tv,Tw)u+\rho(Tw,Tu)v\right)\\&\lambda\left(-\zeta(u,v)Tw-\zeta(v,w)Tu-\zeta(w,u)Tv+T\mu(u,v,w)\right),\end{aligned}$$

这表明 T 是相对 3-Lie 代数对 $((\mathfrak{h},\mu),(\mathfrak{g},\pi),\rho,\zeta)$ 上的权 λ相对修正 Rota-Baxter 算子。

因此，元素 $(\delta[1],T)\in(V_{r\mathrm{Pair}})^0$ 是 Maurer-Cartan 元素，当且仅当 $((\mathfrak{h},\pi),(\mathfrak{g},\mu),\rho,\zeta,T)$ 定义了一个相对修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数结构。□

7.3. $L_\infty[1]$**-结构与（绝对）修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数**。 在本小节中，我们将构造一个 $L_\infty[1]$-结构，其 Maurer-Cartan 元素与权为 λ 的修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数结构集合一一对应。通过命题 $L_\infty[1]$-代数的 Maurer-Cartan 元素，并利用命题 7.3 中所述的扭曲过程，在该算子空间上限制得到的上同调与修正 Rota-Baxter 算子所对应的上同调一致，如定理 5.3所述。

设 $\mathfrak{g}$ 是一个向量空间。考虑 $\mathfrak{g}$ 的另一个副本，记作 $\mathfrak{g}'$，并令 $\mathfrak{h}:=\mathfrak{g}'$。定义以下上链复形：

$$L:=C^*_{3\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}',\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}'),\qquad V_{r\mathrm{Pair}}:=C^*_{3\mathrm{Lie\text{-}act}}(\mathfrak{g}',\mathfrak{g}),$$

$$\mathfrak{a}:=C^*_{3\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}',\mathfrak{g})=\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{Hom}\left(\underbrace{\wedge^2\mathfrak{g}'\otimes\cdots\otimes\wedge^2\mathfrak{g}'}_{n\text{ times}}\wedge\mathfrak{g}',\mathfrak{g}\right).$$

如第 7.2 小节所示，分次向量空间

$$V_{r\mathrm{Pair}}[1]\oplus\mathfrak{a}$$

具有 $L_\infty[1]$-代数结构，其高阶运算记作 $\{l^{m\mathrm{RB}}{}_k\}_{k\geq 1}$。更确切地说，我们有如下分解：

$$V_{r\mathrm{Pair}}=\mathfrak{V}_1\oplus\mathfrak{V}_2\oplus\mathfrak{V}_3\oplus\mathfrak{V}_4,$$

其中：

$$\begin{aligned}
\mathfrak{V}_1&=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{V}_1(n),\quad \mathfrak{V}_1(n+1)=\bigoplus_{i_1,\ldots,i_n\in\{0,1\}}\mathrm{Hom}\left(V_{i_1}\otimes\cdots\otimes V_{i_n}\otimes\wedge^3\mathfrak{g},\mathfrak{g}\right),\\
\mathfrak{V}_2&=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{V}_2(n),\quad \mathfrak{V}_2(n+1)=\bigoplus_{i_1,\ldots,i_n\in\{0,1\}}\mathrm{Hom}\left(V_{i_1}\otimes\cdots\otimes V_{i_n}\otimes\wedge^2\mathfrak{g}'\otimes\mathfrak{g},\mathfrak{g}\right),\\
\mathfrak{V}_3&=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{V}_3(n),\quad \mathfrak{V}_3(n+1)=\bigoplus_{i_1,\ldots,i_n\in\{0,1\}}\mathrm{Hom}\left(V_{i_1}\otimes\cdots\otimes V_{i_n}\otimes\wedge^3\mathfrak{g}',\mathfrak{g}'\right),\\
\mathfrak{V}_4&=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{V}_4(n),\quad \mathfrak{V}_4(n+1)=\bigoplus_{i_1,\ldots,i_n\in\{0,1\}}\mathrm{Hom}\left(V_{i_1}\otimes\cdots\otimes V_{i_n}\otimes\wedge^2\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}',\mathfrak{g}'\right),
\end{aligned}$$

其中 $V_0:=\wedge^2\mathfrak{g}'$ 和 $V_1:=\wedge^2\mathfrak{g}$。

记

$$V_{\mathrm{Pair}} := \bigoplus_{n\geq 0} V_{\mathrm{Pair}}(n) \text{ and } V_{\mathrm{Pair}}(n) := \mathrm{Hom}\left(\underbrace{\wedge^2\mathfrak{g}\otimes\cdots\otimes\wedge^2\mathfrak{g}}_{n \text{ times}}\wedge\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\right).$$

考虑分次空间的嵌入映射，对每个$n \geq 1$ 定义如下：

$$\nu\colon V_{\mathrm{Pair}}(n) \longrightarrow V_{r\mathrm{Pair}}(n) = \mathfrak{V}_1(n)\oplus\mathfrak{V}_2(n)\oplus\mathfrak{V}_3(n)\oplus\mathfrak{V}_4(n),$$
$$f \longmapsto \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1},i_n,j\in\{0,1\}} f^j_{i_1,\ldots,i_{n-1},i_n},$$

其中各分量定义如下：

对于$x_1\wedge y_1 \in V_{i_1}$，……，$x_{n-1}\wedge y_{n-1}\in V_{i_{n-1}}$ 以及：

(i) $x, y, z \in \mathfrak{g}$, define $f^1_{i_1,\ldots,i_{n-1},1} \in \mathfrak{V}_1(n)$ by

$$f^1_{i_1,\ldots,i_{n-1},1}(x_1\wedge y_1\otimes\cdots\otimes x_n\wedge y_n\otimes x\wedge y\wedge z) := f(x_1\wedge y_1\otimes\cdots\otimes x_n\wedge y_n\otimes x\wedge y\wedge z),$$

(ii) $x, y \in \mathfrak{g}'$ and $z\in\mathfrak{g}$, define $f^1_{i_1,\ldots,i_{n-1},0}\in\mathfrak{V}_2(n)$ by

$$f^1_{i_1,\ldots,i_{n-1},0}(x_1\wedge y_1\otimes\cdots\otimes x_n\wedge y_n\otimes x\wedge y\otimes z) := f(x_1\wedge y_1\otimes\cdots\otimes x_n\wedge y_n\otimes x\wedge y\wedge z),$$

(iii) $x, y, z\in\mathfrak{g}'$, define $f^0_{i_1,\ldots,i_{n-1},0}\in\mathfrak{V}_3(n)$ by

$$f^0_{i_1,\ldots,i_{n-1},0}(x_1\wedge y_1\otimes\cdots\otimes x_n\wedge y_n\otimes x\wedge y\wedge z) := f(x_1\wedge y_1\otimes\cdots\otimes x_n\wedge y_n\otimes x\wedge y\wedge z),$$

(iv) $x, y\in\mathfrak{g}$ and $z\in\mathfrak{g}'$, define $f^0_{i_1,\ldots,i_{n-1},1}\in\mathfrak{V}_4(n)$ by

$$f^0_{i_1,\ldots,i_{n-1},1}(x_1\wedge y_1\otimes\cdots\otimes x_n\wedge y_n\otimes x\wedge y\otimes z) := f(x_1\wedge y_1\otimes\cdots\otimes x_n\wedge y_n\otimes x\wedge y\wedge z).$$

命题 7.9 **.** 嵌入映射 $\nu\colon V_{\mathrm{Pair}}\to V_{r\mathrm{Pair}}$ 是分次李代数的单态射 *a.*

证明。 对于$f\in V_{\mathrm{Pair}}(n)$ 和 $g\in V_{\mathrm{Pair}}(m)$，我们计算：

$$\begin{aligned}[\nu(f),\nu(g)]_{\mathrm{R}} &= \left[\sum_{i_1,\ldots,i_n,\,i\in\{0,1\}} f^i_{i_1,\ldots,i_n},\ \sum_{j_1,\ldots,j_m,\,j\in\{0,1\}} g^j_{j_1,\ldots,j_m}\right]_{\mathrm{R}}\\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_{m+n},\,i,j\in\{0,1\}}\left(f^i_{i_1,\ldots,i_n}\circ g^j_{i_{n+1},\ldots,i_{m+n}} - (-1)^{mn} g^i_{i_1,\ldots,i_m}\circ f^j_{i_{m+1},\ldots,i_{m+n}}\right),\end{aligned}$$

其中，对于每个 $i_1,\ldots\ldots,\ i_{m+n-1}\in\{0,1\}$，各分量属于以下空间：

$$\sum_{i\in\{0,1\}}\left(f^i_{i_1,\ldots,i_n}\circ g^1_{i_{n+1},\ldots,i_{m+n-1},1} - (-1)^{mn} g^i_{i_1,\ldots,i_m}\circ f^1_{i_{m+1},\ldots,i_{m+n-1},1}\right)\in\mathrm{Hom}\left(V_{i_1}\otimes\cdots\otimes V_{i_{m+n-1}}\otimes\wedge^3\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}\right),$$

$$\sum_{i\in\{0,1\}}\left(f^i_{i_1,\ldots,i_n}\circ g^1_{i_{n+1},\ldots,i_{m+n-1},0} - (-1)^{mn} g^i_{i_1,\ldots,i_m}\circ f^1_{i_{m+1},\ldots,i_{m+n-1},0}\right)\in\mathrm{Hom}\left(V_{i_1}\otimes\cdots\otimes V_{i_{m+n-1}}\otimes\wedge^2\mathfrak{g}'\otimes\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}\right),$$

$$\sum_{i\in\{0,1\}}\left(f^i_{i_1,\ldots,i_n}\circ g^0_{i_{n+1},\ldots,i_{m+n-1},0} - (-1)^{mn} g^i_{i_1,\ldots,i_m}\circ f^0_{i_{m+1},\ldots,i_{m+n-1},0}\right)\in\mathrm{Hom}\left(V_{i_1}\otimes\cdots\otimes V_{i_{m+n-1}}\otimes\wedge^3\mathfrak{g}',\ \mathfrak{g}'\right),$$

$$\sum_{i\in\{0,1\}}\left(f^i_{i_1,\ldots,i_n}\circ g^0_{i_{n+1},\ldots,i_{m+n-1},1} - (-1)^{mn} g^i_{i_1,\ldots,i_m}\circ f^0_{i_{m+1},\ldots,i_{m+n-1},1}\right)\in\mathrm{Hom}\left(V_{i_1}\otimes\cdots\otimes V_{i_{m+n-1}}\otimes\wedge^2\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}',\ \mathfrak{g}'\right).$$

因此，我们有

$$[\nu(f),\nu(g)]_{\mathrm{R}} = \nu\left(f\circ g - (-1)^{mn} g\circ f\right)[1] = \nu\left([f,g]_{\mathrm{R}}\right),$$

也就是说，

$$\nu\colon V_{\mathrm{Pair}}\to V_{r\mathrm{Pair}}$$

是分次李代数的单态射。 □

根据定理 7.4 和命题 7.9，我们有以下命题：

命题 7.10。

$$\left(V_{\mathrm{Pair}}[1]\oplus\mathfrak{a},\{l_k^{\mathrm{ab}}\}_{k\geq 1}\right)$$

是一个带有以下运算的 $L_\infty[1]$-代数

$$l_2^{\mathrm{ab}}(f[1]\otimes g[1])=\nu^{-1}[\nu(f),\nu(g)]_{\mathrm{R}}[1],$$
$$l_k^{\mathrm{ab}}(f[1]\otimes\theta_1\otimes\cdots\otimes\theta_{k-1})=\mathcal{P}\left[\cdots[[\nu(f),\theta_1]_{\mathrm{R}},\theta_2]_{\mathrm{R}},\ldots,\theta_{k-1}\right]_{\mathrm{R}},\quad \text{for } k\geq 2,$$

对所有 θ_1、……、$\theta_{k-1}\in\mathfrak{a}$ 和 f、$g\in V_{\mathrm{Pair}}$。

此外，ν 诱导出一个 $L_\infty[1]$-代数的单态射：

$$\tilde{\nu}:\left(V_{\mathrm{Pair}}[1]\oplus\mathfrak{a},\{l_k^{\mathrm{ab}}\}_{k\geq 1}\right)\longrightarrow\left(V_{r\mathrm{Pair}}[1]\oplus\mathfrak{a},\{l_k^{m\mathrm{RB}}\}_{k\geq 1}\right),$$
$$(f[1],\theta)\longmapsto(\nu(f)[1],\theta).$$

定理 7.11。沿用上述所有记号。假设存在映射 $\pi\in\mathrm{Hom}(\wedge^3\mathfrak{g},\mathfrak{g})$、$T\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$，且 λ 是非零平方。

那么，当且仅当 $(\pi[1],\lambda^{-1/2}T)\in(V_{\mathrm{Pair}}[1]\oplus\mathfrak{a})^0$ 是 $L_\infty[1]$-代数 $(V_{\mathrm{Pair}}[1]\oplus\mathfrak{a},\{l^{\mathrm{ab}}{}_k\}_{k\geq 1})$ 中的 *Maurer-Cartan* 元素时，$((\mathfrak{g},\pi),\rho,\zeta,T)$ 构成一个修正的 *Rota-Baxter 3-Lie* 代数结构。

证明。设 $(\pi[1],\lambda^{-1/2}T)\in(V_{r\mathrm{Pair}})^0$。那么我们有

$$l_2^{\mathrm{ab}}((\pi[1],\lambda^{-1/2}T)\otimes(\pi[1],\lambda^{-1/2}T))=\left(\nu^{-1}[\nu(\pi),\nu(\pi)]_{\mathrm{R}}[1],\ 2\lambda^{-1/2}\mathcal{P}[\nu(\pi),T]_{\mathrm{R}}\right),$$
$$l_4^{\mathrm{ab}}((\nu(\pi)[1],\lambda^{-1/2}T)\otimes\cdots\otimes(\nu(\pi)[1],\lambda^{-1/2}T))=\left(0,\ 24\lambda^{-3/2}\mathcal{P}[[[\nu(\pi),T]_{\mathrm{R}},T]_{\mathrm{R}},T]_{\mathrm{R}}\right).$$

对所有 $(u,v,w)\in\wedge^2\mathfrak{h}$，计算得：

$$\mathcal{P}[\nu(\pi),T]_{\mathrm{R}}(u,v,w)=-T\pi(u,v,w)+(\pi(u,v,Tw)+\pi(v,w,Tu)+\pi(w,u,Tv)),$$

$\mathcal{P}[[[\nu(\pi),\ T]_{\mathrm{R}},\ T]_{\mathrm{R}},\ T]_{\mathrm{R}}(u,\ v,\ w)=\pi(Tu,\ Tv,\ Tw)-T(\pi(Tu,\ Tv,\ w)+\pi(Tv,\ Tw,\ u)+\pi(Tw,\ Tu,\ v))$。

因此，元素 $(\pi[1],\lambda^{-1/2}T)\in(V_{r\mathrm{Pair}})^0$ 是 $L_\infty[1]$- 代数 $(V_{\mathrm{Pair}}[1]\oplus\mathfrak{a},\{l^{\mathrm{ab}}{}_k\}_{k\geq 1})$ 中的 Maurer-Cartan 元素，当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}l_k^{\mathrm{ab}}\left((\pi[1],\lambda^{-1/2}T)^{\otimes k}\right)=\frac{1}{2}l_2^{\mathrm{ab}}\left((\pi[1],\lambda^{-1/2}T)^{\otimes 2}\right)+\frac{1}{24}l_4^{\mathrm{ab}}\left((\pi[1],\lambda^{-1/2}T)^{\otimes 4}\right)=0.$$

也就是说，

$$[\pi,\pi]_{\mathrm{R}}=0,$$

and

$$\pi(Tu,Tv,Tw)=T(\pi(Tu,Tv,w)+\pi(Tv,Tw,u)+\pi(Tw,Tu,v))$$
$$+\lambda(-\pi(u,v,Tw)-\pi(v,w,Tu)-\pi(w,u,Tv)+T\pi(u,v,w)).$$

因此，元素 $(\pi[1],\lambda^{-1/2}T)\in(V_{r\mathrm{Pair}})^0$ 是 Maurer-Cartan 元素，当且仅当三元组 $(\mathfrak{g},\pi,T)$ 定义了一个修正 Rota-Baxter 3-Lie 代数结构。□

注 7.12。设 R 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},\pi)$ 上权为 λ 的修正 Rota-Baxter 算子。那么元素

$$\alpha:=(\pi[1],\lambda^{-1/2}T)$$

是 $L_\infty[1]$-代数（$V_{\mathrm{Pair}}[1]\oplus\mathfrak{a}$，$\{l^{\mathrm{ab}}{}_k\}_{k\geq 1}$）中的一个 Maurer-Cartan 元素。通过命题 α7.3中所述的扭曲过程（限制到$\mathfrak{a}$）得到的上链复形的上同调，与定理 5.3中定义的上链复形的上同调一致。

7.4. **相对修正 Rota-Baxter *3*-Lie 代数与相对 Rota-Baxter 3-Lie 代数的控制性 L-代数结构。** Hou、Sheng 和 Zhou [17]构造了 3-Lie 代数上权为 $L_\infty[1]$的相对 Rota-Baxter 算子的控制性 λL-代数结构。本小节将构造一个控制相对修正 *Rota-Baxter 3-Lie* 代数变形的 L$_\infty$-子代数，它是小节 $L_\infty[1]$7.2中引入的L-代数的子代数。该子代数同时控制相对 Rota-Baxter 算子和底层 3-Lie 代数结构的变形。

命题 7.13。 设 $V_\mathfrak{h}$ 是 $V_{r\mathrm{Pair}}$的一个子空间，且 $\iota:\ V_\mathfrak{h} \hookrightarrow V_{r\mathrm{Pair}}$ 是自然嵌入。则 ι 在 $V_\mathfrak{h}[1]\oplus\mathfrak{a}$上诱导出一个 L_∞-子代数结构 $\{l^{\mathrm{RB}}{}_k\}_{k\geq 1}$，以及一个 L_∞-态射

$$\begin{aligned}\tilde{\iota}:(V_\mathfrak{h}[1]\oplus\mathfrak{a},\{l_k^{\mathrm{RB}}\}_{k\geq1}) &\longrightarrow (V_{r\mathrm{Pair}}[1]\oplus\mathfrak{a},\{l_k^{m\mathrm{RB}}\}_{k\geq1})\\ (f[1],\theta) &\longrightarrow (\iota(f)[1],\theta),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&l_2^{\mathrm{RB}}(f[1]\otimes g[1]) = \iota^{-1}[\iota(f),\iota(g)]_{\mathrm{R}}[1]\\ &l_k^{\mathrm{RB}}(f[1]\otimes\theta_1\otimes\ldots\otimes\theta_{k-1}) = \mathcal{P}\Big[\cdots[[\iota(f),\theta_1]_{\mathrm{R}},\theta_2]_{\mathrm{R}},\ldots,\theta_{k-1}\Big]_{\mathrm{R}},\ \textit{for } k\geq 2\end{aligned}$$

for all $\theta_1,\ldots,\theta_{k-1}\in\mathfrak{a}$ *and* $f,g\in V_\mathfrak{h}$.

证明。 由命题 7.2的证明可知， $V_\mathfrak{h}$ 也是分次李代数 $V_{r\mathrm{Pair}}$的一个子代数。因此，由定理 7.4可知，括号 $\iota^{-1}[\iota(-),\ \iota(-)]$ 是良定义的，且映射

$$\tilde{\iota}:\ \left(V_\mathfrak{h}[1]\oplus\mathfrak{a},\{l_k^{\mathrm{RB}}\}_{k\geq1}\right)\longrightarrow\left(V_{r\mathrm{Pair}}[1]\oplus\mathfrak{a},\{l_k^{m\mathrm{RB}}\}_{k\geq1}\right)$$

是一个 L_∞-态射。 □

定理 7.14。 沿用上述所有记号。设存在映射 $\pi\in\mathrm{Hom}(\wedge^3\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, $\mu\in\mathrm{Hom}(\wedge^3\mathfrak{h},\mathfrak{h})$, $\rho\in\mathrm{Hom}(\wedge^2\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{h},)$, $T\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{h},\mathfrak{g})$ 以及 $\delta=\pi+\rho+\lambda\mu$，且其权 λ 非零。

那么，$(\delta[1],T)\in(V_\mathfrak{h}[1]\oplus\mathfrak{a})^0$ 是 $L_\infty[1]$-代数 $(V_\mathfrak{h}[1]\oplus\mathfrak{a},\{l^{\mathrm{RB}}{}_k\}_{k\geq1})$中的一个 *Maurer-Cartan* 元素，当且仅当 $((\mathfrak{h},\pi),(\mathfrak{g},\mu),\rho,T)$ 是一个相对*Rota-Baxter* 3-*Lie* 代数结构。

证明。 与定理 7.8的证明相同，此处略去细节。 □

注记 7.15。 设 $\alpha=((\mathfrak{h},\pi),(\mathfrak{g},\mu),\rho,T)$ 是一个具有平凡 T 的相对Rota-Baxter 3-Lie代数。根据定理 7.14， α 也是 $L_\infty[1]$-代数 $(V_\mathfrak{h}[1]\oplus\mathfrak{a},\{l^{\mathrm{RB}}{}_k\}_{k\geq1})$ 中的一个 Maurer-Cartan 元素。

根据命题 7.3，我们得到由 Maurer-Cartan 元素 α诱导的 $V_\mathfrak{h}[1]\oplus$ 上的扭曲 $L_\infty[1]$-代数结构 $\{(l^{\mathrm{RB}})^\alpha{}_k\}_{k\geq1}$。事实上，扭曲 $L_\infty[1]$-代数 $(V_\mathfrak{h}[1]\oplus\mathfrak{a},\{(l^{\mathrm{RB}})^\alpha{}_k\}_{k\geq1})$ 的子代数 $\mathfrak{a}$ 与 Hou、Sheng 和 Zhou 在 [17] 的第 4 节中引入的 $L_\infty[1]$-代数一致。这个 $L_\infty[1]$-代数控制了 3-Lie 代数 $(\mathfrak{h},\pi)$、$(\mathfrak{g},\mu)$ 上权 λ 的相对 Rota-Baxter 算子的变形理论，以及它们之间的作用 ρ。

致谢。本研究得到国家重点研发计划（编号：2024YFA1013803）、国家自然科学基金（编号：12161013）、布鲁塞尔自由大学 OZR3762 项目、FWO 高级研究项目 G004124N、上海 PMMP 重点实验室（编号：22DZ2229014）以及贵州省基础研究计划（自然科学）（编号：MS[2026]996）的资助。

作者贡献 所有作者贡献均等。

数据可用性 本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

声明

利益冲突作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。**伦理审批**不适用。

参考文献

[1] C. Bai、L. Guo 和 X. Ni，非阿贝尔广义 Lax 对、经典 Yang-Baxter 方程与 PostLie 代数，《数学物理通讯》297 (2010)，553-596。2[2] C. Bai、L. Guo 和 Y. Sheng，3-Lie 代数的双代数、经典 Yang-Baxter 方程与 Manin 三元组，《理论与数学物理进展》23 (2019)，27-74。1[3] R. Bai、C. Bai 和 J. Wang，3-Lie 代数的 Pealization，《数学物理杂志》51(2010)，063505。9[4] R. Bai 、 L. Guo 、 J. Li 和 Y. Wu，Rota-Baxter 3-Lie 代数，《数学物理杂志》54 (2013)，063504。2, 3, 5, 11[5] G. Baxter，一个解可由简单代数恒等式得到的分析问题，《太平洋数学杂志》10(1960)，731-742。1[6] M. Bordemann，广义 Lax 对、修正的经典 Yang-Baxter 方程与李群的仿射几何，《数学物理通讯》135(1990)，201-216。2[7] P. Cartier，论自由 Baxter 代数的结构，《数学进展》9(1972)，253-265。1[8] A. Das 和 S. Mishra，结合 Rota-Baxter 代数的 L_∞-变形与同伦 Rota-Baxter 算子，《数学物理杂志》63，051703 (2022)。2, 18[9] V. T. Filippov，n-Lie 代数，《西伯利亚数学杂志》26(1985)，126-140。3[10] Y. Fr´egier、M. Zambon，通过导出括号同时变形代数与态射，《纯粹与应用代数杂志》219(2015)，0022-4049。2, 18[11] E. Getzler，幂零 $L_\infty[1]$-代数的李理论，《数学年刊》170(2009)，271-301。17[12] L. Guo，自由 Baxter 代数的性质，《数学进展》151(2000)，346-374。1[13] L. Guo 和 W. Keigher，Baxter 代数与洗牌乘积，《数学进展》150(2000)，117-149。1[14] L. Guo 和 W. Keigher，论自由 Baxter 代数：完备化与内部构造，《数学进展》151(2000)，101-127。1[15] S. Guo、Y. Li 和 D. Wang，二项扩张的 Rota-Baxter 前李代数及扩展 Rota-Baxter 前李代数的非阿贝尔扩张，《数学研究》80(2025)，96。2, 10[16] S. Guo、Y. Qin、K. Wang 和 G. Zhou，任意权 Rota-Baxter 3-Lie 代数的变形与上同调理论，《几何与物理杂志》183(2023)，104704。2[17] S. Hou、Y. Sheng 和 Y. Zhou，3-Lie 代数上的 3-post-Lie 代数与非零权相对 Rota-Baxter 算子，《代数杂志》615 (2023)，103-129。2, 3, 8, 24[18] J. Jiang 和 Y. Sheng，修正 r-矩阵的变形及相关代数结构的上同调，《非交换几何杂志》19(2025)，429-450。2[19] J. Liu、Y. Sheng、Y. Zhou 和 C. Bai，n-Lie 代数上的 Nijenhuis 算子，《理论与数学物理通讯》65 (2016)，659-670。3, 4[20] W. Lyu、Z. Qi、J. Yang 和 G. Zhou，任意权微分李代数的形式变形、上同调理论与 $L_\infty[1]$-结构，《几何与物理杂志》205(2024)，105308。2, 18 [21] B. Mondal 和 R. Saha，权为 λ 的修正 Rota-Baxter Leibniz 代数的上同调，《代数及其应用杂志》24(2023)，2550157。2[22] G.-C. Rota，Baxter 代数与组合恒等式，I，《美国数学会通报》75 (1969)，325-329；G.-C. Rota，Baxter 代数与组合恒等式，II，《美国数学会通报》75 (1969)，330-334。1[23] M. Rotkiewicz，n-Lie 代数的上同调环，《数学摘录》20 (2005)，219-232 18[24] Y. Sheng、R. Tang，3-Lie 代数上的辛结构、乘积结构与复结构，《代数杂志》508 (2018)，256-300。4[25] M. A. Semenov-Tian-Shansky，什么是经典 r-矩阵？《泛函分析及其应用》17(1983)，254-272。2[26] R. Tang、S. Hou 和 Y. Sheng，Lie 3-代数与 3-Lie 代数上相对 Rota-Baxter 算子的变形，《代数杂志》567(2021)，37-62。2[27] Th. Voronov，高阶导出括号与同伦代数，《纯粹与应用代数杂志》202(1-3)(2005)，133-153。18

(Shuangjian Guo) 贵州财经大学数学与统计学院，贵州 550025，中华人民共和国

电子邮箱：shuangjianguo@126.com

（Yufei Qin）数学科学学院、教育部 MEA 重点实验室、上海 PMMP 重点实验室、华东师范大学，上海 200241，中华人民共和国

数学与数据科学系，布鲁塞尔自由大学，普莱因大道2号，1050 布鲁塞尔，比利时电子邮箱：Yufei.Qin@vub.be（通讯作者）

（Guodong Zhou）数学科学学院、上海 PMMP 重点实验室、华东师范大学，上海 200241，中华人民共和国电子邮箱：gdzhou@math.ecnu.edu.cn