arXiv:2601.01958v1 [math.AT] 5 Jan 2026

紧致复曲面的实同伦类型

JOANA CIRICI

摘要。我们证明，对于紧致复曲面，次数为一的上同调类的所有 Massey 积在长度超过三时均消失。对偶地，基本群的实 Malcev 完备化由二次和三次关系齐次呈示。在非 Kähler 情形下，我们给出一个由曲面的第一Betti数决定的显式呈示。

1. 引言

紧致复曲面是 Kähler 的充要条件是其第一Betti数 b^1 为偶数；在此情形下，流形在有理同伦理论意义下是形式的 [DGMS75]。特别地，Massey 乘积消失。对偶地，可以将紧致 Kähler 流形的基本群的实 Malcev 完备化描述为一个二次关系表示的李代数：其生成元由第一 de Rham 上同调向量空间的对偶给出，而定义二次关系则由上同调上的杯积决定。在非 Kähler 情形下，这一结论不再成立；然而，对于曲面，同伦论仍然施加了很强的限制。我们证明如下：

主定理。 设 S 是一个紧致复非 *Kähler* 曲面。那么：

(1) 不存在长度大于三的 *Massey* 积，从 $H^1(S)$ 到 $H^2(S)$ 。*(2)* $\pi_1(S)$ 的实 *Malcev* 完备化由双分次幂零李代数的下中心列决定。*(*

$$\big(\pi_1(S)/\Gamma_4\big)\otimes\mathbb{R},\ \textit{where}\ \Gamma_2=[\pi_1(S),\pi_1(S)]\ \textit{and}\ \Gamma_{i+1}=[\pi_1(S),\Gamma_i]$$

ect

3) 实 *Malcev* 李代数可由生成元 $\{X_i,Y_i\}_{i=1}^k$ 和 Z及以下关系给出：

满足关系

$$[Z,X_i]=0\quad,\quad [Z,Y_i]=0\quad,\quad \sum_{j=1}^{k}[[X_j,Y_j],X_i]=0\quad \textit{and}\quad \sum_{j=1}^{k}[[X_j,Y_j],Y_i]=0,$$

$\textit{for all}\ 1\le i\le k,\ \textit{where}\ k=\frac{1}{2}(b^1-1).$

特别地，对于非Kähler曲面，基本群的实 Malcev 完备化由第一Betti数决定。这与 Kähler 曲面的情形形成对比；在后者中，还必须考虑杯积的结构。

该定理在以下两个方面都是最优的。首先，存在具有非平凡三重 Massey 积的紧复曲面；赋予任意左不变复结构的 Kodaira–Thurston流形就是这样一个例子。其次，该定理不能推广到相邻的类别：例如，丝状幂零流形是一个四维几乎复流形，它具有辛结构，但不具有可积复结构，并且存在非平凡的四重 Massey 积。更一般地，每个有限表示群都可以实现为闭四维几乎复流形的基本群 [Kot92], 辛四维流形的基本群 [Gom95], 以及具有简单正规交叉奇点的复射影曲面的基本群 [KK14]。特别地，只要放宽可积性条件，或允许射影情形出现奇点，该定理就不再成立。超出四维情形后，众所周知，每个有限表示群都可以在紧复三维流形这一类别中实现；更一般地，也可以在高维复流形这一类别中实现（例如，参见 [ABC+96]相关证明）。这再次表明复曲面确实非常特殊。

复流形基本群的研究传统上聚焦于 Kähler 情形，借助凯勒群理论展开。这些群在有限

资助：加泰罗尼亚政府（2021-SGR-00697 和塞拉·洪特计划）；西班牙国家研究署（CEX2020-001084-M、PID2020-117971GB-C22、PID2024-155646NB-I00 和 EUR2023-143450）。

生成群中属于限制极为严格的一类，受到霍奇理论及相关分析工具所带来强约束的制约。在复维数为二时，关于复曲面基本群的研究成果颇为丰富，涵盖 Kähler 曲面与非 Kähler 曲面；其中，椭圆曲面尤其带来了大量研究成果（参见 [ABC+96]， [FM94]）。特别是，由于小平曲面分类，这些曲面的基本群已知具有相当严格的限制。然而，尽管有理同伦技术已在 Kähler 领域得到广泛应用，在非 Kähler 曲面的研究中，类似技术似乎基本上尚未得到应用。我们希望本研究结果能够推动对紧致非 Kähler 曲面基本群的进一步研究，并超越实 Malcev 完备化的范畴。

这项工作的一个关键理论框架是光滑代数簇，其有理同伦模型带有混合霍奇结构，正如 Morgan 所示 [Mor78]。上链层面存在混合霍奇结构，而上同调中的权受到限制，这意味着对于光滑复代数簇 X，不存在从 k-重 Massey 积$H^1(X)$ 到 $H^2(X)$，其中 $k>4$。对偶地， $\pi_1(X)$ 的实 Malcev 完备化由双分次幂零李代数 $(\pi_1(X)/\Gamma_5)\otimes\mathbb{R}$决定。这对哪些有限表示群能够作为光滑复代数簇的基本群施加了强有力的同伦限制。

证明主定理的策略是按照有理同伦理论的意义，为 de Rham 代数构造一个 1-模型，并赋予其权分解。这个交换微分分次代数在低次数上编码流形的实同伦型。当$b^1=1$ 该模型只是由一个生成元生成的自由代数，因此并不那么有趣。在这种情况下，我们有 1-形式性，任意长度的 Massey 乘积均消失 ≥ 3，且与基本群相关联的实 Malcev 李代数就是一维阿贝尔李代数。

当 $b^1>1$ 时，我们的模型描述如下。记 $H^{\leq 1}_{BC}$ 为由次数 ≤ 1 生成的实 Bott-Chern 上同调子代数。于是， $\mathcal{A}_{\mathrm{dR}}(S)$ 的一个 1-模型为：

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}=H^{\leq 1}_{BC}\otimes\Lambda(\gamma,\gamma^c),\ \text{with } d\gamma=0 \text{ and } d\gamma^c=[\beta]_{BC}.$$

这里， $[\beta]_{BC}$ 表示一个非平凡的实 Bott-Chern 类，它生成映射 $H^1_{BC}\to H^1_{\partial}$ （由恒等映射诱导）的 1 维核。将 Bott-Chern 生成元的权设为 1，并将 γ、 γ^c 的权设为 2，我们便得到一个具有权分解的 1-模型；更一般地说，得到一个具有非常受限权的混合霍奇结构，由此可以推出主定理中的断言。请注意，我们的结果是在 $\mathbb{R}$ 上陈述的，而我们的某些结构性结果是否也在 $\mathbb{Q}$ 上成立，仍是一个开放问题。

近期与本文方法相关的一些结果包括 Vaisman 流形和 Sasakian 流形的模型 [Tie08], [CMDNMY21]，以及横向 Kähler 结构的模型 [IK19]。值得注意的是，根据小平分类，非 Kähler 曲面可分为两大类：VII 类 曲面，均具有 $b^1=1$；以及椭圆曲面，对于后者 $b^1\geq 1$。Belgun [Bel00] 证明了极小非 Kähler 椭圆曲面具有 Vaisman 度量。因此，根据上述研究，它们拥有一个基于基本上同调的简洁模型。我们的同伦论结论有可能通过这一方法得到，因为极小曲面的 1-极小模型不受点处爆破的影响。本文所述的方法更为直接具体，因为它专门针对复曲面的情形。

致谢。感谢 Liviu Ornea 和 Misha Verbitsky 与我讨论引理3.2。我采用 Geoffroy Horel 提出的策略，从 1-极小模型推导出主定理中的 (3) 。也感谢 Jaume Amorós、Jonas Stelzig、Scott Wilson 和 Critical Math 提供有益的讨论与意见。

2. 紧致非 Kähler 曲面的上同调

记 $\mathcal{A}:=\mathcal{A}^*_{\mathrm{dR}}\otimes\mathbb{C}=\bigoplus\mathcal{A}^{*,*}$ 为紧致复曲面的复 de Rham 代数S。其微分可分解为若干分量 $d=\partial+\bar\partial$，其中 ∂ 是 Dolbeault 算子，双次数为$(0,1)$，而 $\bar\partial$ 是它的复共轭。令 H^*_d 表示 S 的复 de Rham 上同调，并令$H^{*,*}_{\bar\partial}$ 表示其 Dolbeault 上同调。在紧致情形下，de Rham 上同调和 Dolbeault 上同调均为有限维，我们记 $b^k:=\dim H^k_d$ 以及 $h^{p,q}:=\dim H^{p,q}_{\bar\partial}$。任意紧致复曲面的 Frölicher 谱序列在第一页退化，因此

$$H^k_d\cong\bigoplus_{p+q=k}H^{p,q}_{\bar\partial}\quad\text{and}\quad b^k=\sum_{p+q=k}h^{p,q}.$$

记 $\Omega^p := \mathcal{A}^{p,0} \cap \operatorname{Ker}\partial$ 为全纯 p-形式空间。在紧致复曲面上，每个全纯 p-形式都是闭的（例如参见 [BHPVdV04]中的引理 IV.2.1），因此对所有$p \geq 0$，我们都有

$$H^{p,0}_{\overline{\partial}} = \Omega^p = \operatorname{Ker} d \cap \mathcal{A}^{p,0}.$$

这给出了一个定义良好的映射

$$H^{1,0}_{\overline{\partial}} \oplus \overline{H^{1,0}_{\overline{\partial}}} \longrightarrow H^1$$

事实上它是单射。在 Kähler 情形下，这个映射是一个同构。在非 Kähler 情形下，对于 $h^{0,1} = h^{1,0} + 1$，存在一个闭形式 γ 使得

$$H^1_d \cong H^{1,0}_{\overline{\partial}} \oplus \overline{H^{1,0}_{\overline{\partial}}} \oplus \langle[\gamma]\rangle.$$

We 将类 $[\gamma]$称为纯性缺陷，其含义是它阻碍紧致复曲面的上同调具有纯 Hodge 结构。 ct non-Kähler 曲面具有纯 Hodge 结构。

我们还将讨论 Bott-Chern 上同调和 Aeppli 上同调，它们分别定义为

$$H^{p,q}_{BC} := \frac{\operatorname{Ker}\partial \cap \operatorname{Ker}\overline{\partial} \cap \mathcal{A}^{p,q}}{\partial\overline{\partial}(\mathcal{A}^{p-1,q-1})} \quad \text{and} \quad H^{p,q}_{A} := \frac{\operatorname{Ker}\partial\overline{\partial} \cap \mathcal{A}^{p,q}}{\partial(\mathcal{A}^{p-1,q}) + \overline{\partial}(\mathcal{A}^{p,q-1})}.$$

容易验证，

$$H^{1,0}_{BC} \cong H^{1,0}_{\overline{\partial}} = \Omega^1 \text{ and } H^{0,1}_{BC} \cong \overline{H^{1,0}_{\overline{\partial}}} = \overline{\Omega}^1.$$

注意，恒等映射诱导出一个映射 $H^{1,1}_{BC} \to H^{1,1}_{\overline{\partial}}$。此外，还存在一个映射 $\partial : H^{0,1}_{BC} \longrightarrow H^{1,0}_{\overline{\partial}}$ 它由外微分的分量 ∂ 诱导。以下结果本质上归功于 Lamari[Lam99]。关于这一精确表述的证明，可参见 [OV24]或 [VVO21]。

引理 2.1。 对于任意紧致非*Kähler* 曲面，存在一个恰当实形式 $\beta \in \mathcal{A}^{1,1}$ 使得$[\beta]_{BC} \neq 0$ 在 *Bott-Chern* 上同调中非平凡，并且：

(1) 类 $[\beta]_{BC}$ 属于映射 $\partial : H^{1,0}_{BC} \longrightarrow H^{1,0}_{\overline{\partial}}$ 的像。*(2)* 映射 $H^{1,1}_{BC} \to H^{1,1}_{\overline{\partial}}$ 是满射，且其核由 $[\beta]_{BC}$生成。这给出一个短正合列

$$0 \to \langle[\beta]_{BC}\rangle \to H^{1,1}_{BC} \to H^{1,1}_{\overline{\partial}} \to 0.$$

我们可以如下描述纯性缺陷。根据引理 2.1 的 (1)，存在一个 ∂-闭形式$\eta \in \mathcal{A}^{0,1}$ 使得$\overline{[\beta]_{BC}} = [\partial\eta]_{BC}$。因此我们可以写成

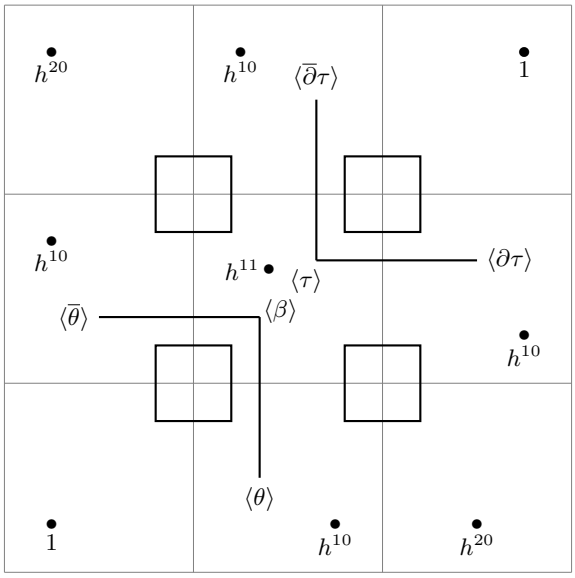
$$\beta = \partial\overline{\eta} + \partial\overline{\partial} f$$

其中 f 是一个光滑函数。令 $\theta := \eta + \partial\overline{f}$，显然有$d\theta = \partial\theta = \beta$；又因为 $\overline{\beta}$ 是实的，所以 θ 的复共轭 $\overline{\theta}$ 满足 $d\overline{\theta} = \partial\overline{\theta} = \beta$。微分形式

$$\gamma := \frac{1}{2\mathbf{i}}(\theta - \overline{\theta})$$

是实的、闭的，并且满足 $d^c\gamma = \beta$，其中 $d^c := \mathbf{i}(\overline{\partial} - \partial)$。因此它生成纯性缺陷。

采用上述对 θ、$\overline{\theta}$ 和 β 的选择，我们得到如下所示的复非Kähler曲面的双复形分解，该分解由不可分解的双复形构成。



在图中，点 表示由微分为零且不属于 ∂ 的像或 ∂ 的像的微分形式生成的向量空间。每个双次数上的点数均已标出。所有数值均由 S 的拓扑决定：记 $\sigma = b^+ - b^-$ 为曲面的符号。于是

$$h^{10} = \frac{1}{2}(b^1 - 1),\ h^{11} = b^-\ \text{and}\ h^{20} = b^+/2.$$

一个方格 表示由其左下角的微分形式 α 生成的向量空间，并带有 $\partial\partial\alpha \neq 0$。每个双次数中都有无穷多个这样的方格。两个开放角分别表示由 $[\beta]_{BC}$ 和一个非平凡 Aeppli 类 $[\tau]_A$ 生成的空间。每种只有一个；在下一节中，我们将证明，如果 $\Omega^1 \neq 0$，那么可以选取 $\beta = \mathbf{i}(x \triangle x)$，其中 $x \in \Omega^1$且 $\tau = \theta \curlywedge \theta$。

上面双次数为 (0, 0) 的图概括了一个众所周知的事实：对于紧致连通复流形，任何满足 $\partial\partial f = 0$ 的光滑复值函数 f 都必须是常数（例如参见 [BHPVdV04] 的引理 IV.2.2）。同样，在双次数 (1, 0) 中，该图告诉我们，如果 $z \in \mathcal{A}^{1,0}$ 满足 $\partial\partial z = 0$，那么 $z = x + a\theta + \partial f$ 其中 $x \in \Omega^1$、 $a \in \mathbb{C}$ 和$f \in \mathcal{C}^\infty$。图中的其他双次数应作类似解释。关于任意双复形都具有这种分解这一事实的证明，请参见 [Ste21] ；关于一些具体例子（包括复曲面的例子），请参见 [SW24] 。

注记 2.2。 如 [DGMS75], 所示，与任意紧致 Kähler 流形相关的双复形分解仅由点和方块组成，这等价于 $\partial\partial$-条件。在我们的情形中，还有两个额外的L形项，因此上图可以看作对非 Kähler 曲面所满足的 $\partial\partial$-条件的一种扰动。在 [SW24], 中，这被称为 $\partial\partial + 3$-条件，因为允许出现具有 3 个顶点的形状。除复曲面外，还有其他满足这一条件的复流形族，例如 Vaisman 流形。

3. 乘法结构

我们汇总紧致非 Kähler 曲面上微分形式的一些乘法性质。首先，我们有（参见 [OV24] 的第 25.2.4 节以及 [Lam99]的引理 6.3）：

引理 3.1。 令 x、 $y \in \Omega^1$ 为全纯 1-微分形式。则：

(1) 乘积 $x \wedge y$ 和 $x \wedge y$ 为零，且乘积 $x \wedge y$ 是 d-恰当的。*(2)* 存在一个光滑函数 f 和一个常数 $c \in \mathbb{C}$，使得

$$x \wedge \overline{y} = \partial\bar{\partial} f + c\beta,\ \textit{with}\ c \in \mathbb{C},$$

其中 β 是引理 d中非平凡 *Bott-Chern* 类的一个实 *2.1*-恰当代表。（*3*）若 $x = y \neq 0$，则在上述公式中，我们有 $c \neq 0$。

证明。 第一条陈述已在 [OV24] 的命题 2.12 中证明。为完整起见，我们给出证明。首先注意，除非 $x \wedge y = 0$，否则我们有

$$\int_S x \wedge y \wedge \overline{x} \wedge \overline{y} > 0.$$

此外，在非 Kähler 情形下，$H^{1,1}_{d}$ 上的交叉形式是负定的（见 [BHPVdV04],定理 IV.2.14），因此任何满足 $[\mu] \in H^{1,1}_{d}$ 的类

$$\int_S \mu \wedge \overline{\mu} = 0$$

必然是平凡的。现在，微分形式 $\mu := x \wedge x$ 是闭的，因此它定义了 $H^{1,1}_{d}$ 中的一个上同调类，显然满足 $\mu \wedge \mu = 0$。因此，$[\mu]$ 是平凡上同调类，所以 μ 是恰当的。特别地，$x \wedge x$ 和 $y \wedge y$ 是恰当的，因此由斯托克斯定理，上面的第一个积分为零。这证明了 $x \wedge y = 0$。证明 $x \wedge y$ 是恰当的过程类似。这就证明了（1）。

由（1）和双复形分解可直接得到陈述（2）。现在证明（3）。由（2），我们可以写成

$$x \wedge \overline{x} = \partial\overline{\partial} f + c\beta$$

对于某个函数 f 和常数 c。假设 $c = 0$。令 w_g 为与高迪雄度量相关联的 (1,1)-形式（因此满足 $\partial\overline{\partial} w_g = 0$）。根据斯托克斯定理，我们有

$$\int_S x \wedge \overline{x} \wedge w_g = \int_S \partial\overline{\partial} f \wedge w_g = \int_S f \wedge \partial\overline{\partial} w_g = 0.$$

Note 然而，$x \wedge x$ 是半正的，并且由于 w_g 是正定的埃尔米特形式，we have

$$\int_S x \wedge \overline{x} \wedge w_g > 0.$$

这就产生了矛盾，因此必有 $c \neq 0$。 □

回顾上一节，$H^1_d \cong \Omega^1 \oplus \overline{\Omega}^1 \oplus [\gamma]$，其中 $[\gamma]$ 表示纯性缺陷，我们可以选取一个代表元

$$\gamma = \frac{1}{2i}(\theta - \overline{\theta}), \text{ with } d\theta = d\overline{\theta} = \beta\,;\, \theta \in \mathcal{A}^{1,0}.$$

其中 $\beta \in \mathcal{A}^{1,1}$ 是引理 2.1中的恰当实形式。以下性质已针对没有复曲线的复曲面在 [OV24],[VVO21] 中得到证明。根据小平分类，事后可知该性质一般情况下也成立。若能给出直接证明则更好。

引理 3.2。 对于任意非零的全纯 1-微分形式 x，乘积 $x \wedge \theta$ 和 $x \wedge \overline{\theta}$ 均非零。

在 $\Omega^1 \neq 0$ 的情形下，上述引理允许我们为上一节双复形分解中所示的双次数为 (1,−1) 的非平凡 Bott-Chern 类和 Aeppli 类选取代表元 $\beta = \mathbf{i}(x \wedge x)$，其中$0 \neq x \in \Omega^1$ 且 $\tau = \theta \wedge \overline{\theta}$。它们互为对偶，具体而言，它们满足如下非退化配对

$$H^{1,1}_{BC} \times H^{1,1}_{A} \longrightarrow \mathbb{C}\,;\, ([\beta]_{BC}, [\tau]_A) \mapsto \int_S \beta \wedge \tau = \mathbf{i} \int_S x \wedge \overline{x} \wedge \theta \wedge \overline{\theta} \neq 0.$$

特别地，根据这些识别以及双复形分解，可以轻易描述 Dolbeault、de Rham 和 Bott-Chern 上同调的乘积结构。以下结果将特别有用。记 $H^{\leq 1}_{BC}$ 为由次数≤ 1上的 $H^{*,*}_{BC}$ 生成的子代数。我们有：

引理 3.3. 假设 $k := \dim \Omega^1 > 0$。代数 $H^{\leq 1}_{BC}$ 由元素 $\{x_i, x_j\}_{j=1}^k$生成，唯一的非平凡乘积为 $x_i \cdot \bar{x}_i = x_1 \cdot \bar{x}_1$，对所有 $i \neq 1$均成立。

证明。 首先回忆，我们有同构 $H^{1,1}_{BC} \cong \Omega^1$ 以及 $H^{0,0}_{BC} \cong \Omega^1$。取一个基 $\{x_j\}$，它属于 Ω^1。由引理3.1的（2）可得

$$x_i \wedge x_j = 0,\, \overline{x}_i \wedge \overline{x}_j = 0 \text{ and } x_i \wedge \overline{x}_j = c_{ij}\beta + \partial\overline{\partial} f_{ij},$$

其中 β 是 $[\beta]_{BC} \in H^1$的一个代表元，$\overset{1}{BC}$ 并且 $f_{ij} \in \mathcal{C}^\infty$。由引理 3.1的（3），我们不妨设$\beta = \mathbf{i}(x_1 \wedge x_1)$，因此特别有 $[\beta]_{BC} \in H^{\leq 1}_{BC}$。由此可以将 $H^{\leq 1}_{BC}$ 描述为由 $\{[x_i], [x_j]\}$ 生成的代数，其乘法结构为

$$[x_i] \cdot [x_j] = 0,\ [\overline{x}_i] \cdot [\overline{x}_j] = 0 \text{ and } [x_i] \cdot [\overline{x}_j] = c_{ij}[\beta]_{BC},$$

以及 $c_{ii} \neq 0$ 和 $c_{ji} = -c_{ij}$。此外，由于对于任意全纯微分形式 x，$c_{11} = \mathbf{i}$ 和 $\mathbf{i}(x \wedge x)$ 总是半正的，因此我们有 $c_{ii} \in -\mathbf{i}\mathbb{R}^+$。因此，矩阵 $\mathbf{i}c_{ij}$ 是对称正定的，所以通过改变基，我们可以假设对所有 $i \neq j$ 和 $c_{ii} = -\mathbf{i}$，$c_{ij} = 0$ 对所有 i均成立。□

我们还将使用以下引理，它是由引理 3.2 与双复形分解直接推出的：

引理 3.4。设 $f \in \mathcal{C}^\infty$ 满足 $\partial\overline{\partial} f \wedge \Omega^1 = \partial\overline{\partial} f \wedge \Omega^1 = 0$，并设 $x \in \Omega^1$。则：

(1) $\overline{\partial} f \wedge x = 0$。*(2)* 对某个 $g \in \mathcal{C}^\infty$，$\partial f \wedge x = \partial\overline{\partial} g$，且满足 $\partial\overline{\partial} g \wedge \Omega^1 = \partial\overline{\partial} g \wedge \Omega^1 = 0$。

证明。由于 $\overline{\partial} f \wedge x = \overline{\partial}(f \wedge x) \in \mathrm{Im}(\overline{\partial})$，我们可以写成 $\overline{\partial} f \wedge x = \overline{\partial} w$，其中 $w \in \mathcal{A}^{0,1}$。但由于 $\partial\overline{\partial} f \wedge x = 0$，这给出 $\partial\overline{\partial} w = 0$，从而推出 $w = 0$。对于第二个恒等式，注意到我们可以写成

$$\overline{\partial} f \wedge x = \partial\overline{\partial} g + a\beta + \overline{\partial} z,$$

其中某个常数 a，且 $z \in \mathcal{A}^{1,0}$ 满足条件：若 $z \neq 0$，则 $\partial\overline{\partial} z \neq 0$。由于

$$\partial(\overline{\partial} f \wedge x) = \partial\overline{\partial} f \wedge x = 0,$$

由此可得 $z = 0$。假设 $a \neq 0$。那么我们可以选取

$$\theta = \frac{1}{a}(f \cdot x + \partial g),$$

因此 $\theta \cdot x = \partial(g \cdot x)$。由于 $\partial(\theta \cdot x) = 0$ 这意味着 $g \cdot x = 0$ 因此 $\theta \wedge x = 0$，这与引理 3.2矛盾。因此 $a = 0$ 引理得证。□

4. 非凯勒曲面的 1-模型

首先回顾有理同伦理论中 1-模型的概念：

定义 4.1。设 $f : A \to B$ 是交换微分分次代数之间的映射。若 $H^1(f)$ 是同构且 $H^2(f)$ 是单射，则称 f 为 *1*-拟同构 。交换微分分次代数 A 的 *1*-模型 是一个交换微分分次代数 $\mathcal{M}$，并附有一串连接 $\mathcal{M}$ 与 A的 1-拟同构。

当 $b^1 = 1$ 时，$\mathcal{A}_{\mathrm{dR}}(S)$ 的一个 1-模型由 $\Lambda(\gamma)$ 给出，其中 $[\gamma]$ 生成 H^1_d。从现在起我们假设 $b^1 > 1$。这意味着全纯 1-微分形式空间 Ω^1 非平凡，因此 Bott-Chern 上同调在次数 1 上也非平凡。

我们将首先构造一个复模型，之后再说明同样的构造如何适用于实数域。考虑如下交换微分双分次代数：

$$\mathcal{M} := H^{\leq 1}_{BC} \otimes \Lambda(\Theta, \overline{\Theta}),$$

其中 Θ 和 Θ 分别表示双次数为 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 的元素，而 $H^{\leq 1}_{BC}$是引理3.3中描述的代数。在 $\mathcal{M}$ 上定义微分如下：

$$d\Theta = d\overline{\Theta} = [\beta]_{BC}.$$

定理4.2. 设 S 是一个满足 $b^1 > 1$的紧致非*Kähler*曲面。则微分双分次代数 $(\mathcal{M}, d)$ 是 $\mathcal{A}_{\mathrm{dR}}(S) \otimes \mathbb{C}$的一个*1*-模型。

在开始正式证明之前，我们先借助紧 Kähler 流形形式性的证明来说明证明策略。在该情形下，通过考虑包含映射和投影映射，可以证明 de Rham 上同调是复 de Rham 代数的一个模型：

$$(H_{\overline{\partial}}, 0) \xleftarrow{p} (\mathrm{Ker}\,\overline{\partial}, \partial) \xrightarrow{i} (\mathcal{A}_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbb{C}, d)$$

那么，$\partial\overline{\partial}$-引理保证这些映射都是拟同构。在我们的情形中，$\partial\overline{\partial}$-引理需要由第2节所述双复形分解给出的各种规则取代，而 H_∂则由上文定义的代数 $\mathcal{M}$ 取代。中间代数$(\mathrm{Ker}\,\partial, \partial)$在精神上将非常相似，只需作少量调整，具体见下文的证明。

证明。我们构造一串 1-拟同构，连接 $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\mathrm{dR}}(S) \otimes \mathbb{C}$ 和 $\mathcal{M}$。为此，先记 $\mathcal{B}$ 为由以下子空间生成的 $\mathcal{A}$ 的子代数：

$$\Omega^0 \oplus \Omega^1 \oplus \overline{\Omega}^1 \oplus \langle\overline{\theta}\rangle \oplus \overline{\partial}\mathcal{D} \oplus \partial\overline{\partial}\mathcal{D},$$

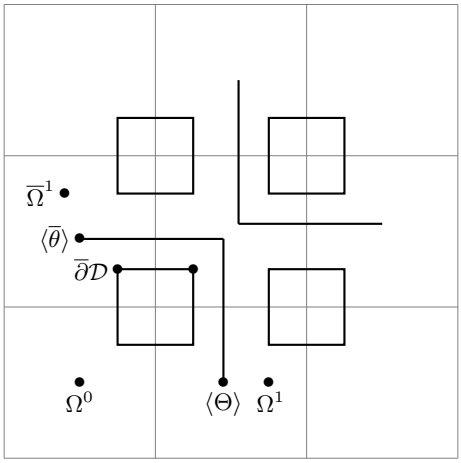
其中

$$\mathcal{D} := \{f \in \mathcal{C}^\infty; \partial\overline{\partial} f \wedge \Omega^1 = \partial\overline{\partial} f \wedge \overline{\Omega}^1 = 0\}.$$

由构造可知，$d(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$，且 $\beta = \mathbf{i}(x_1 \wedge x_1) \in \mathcal{B}$。现在，考虑由下式给出的微分分次代数：

$$\mathcal{B} \otimes \Lambda(\Theta) \text{ with } d\Theta = \beta.$$

该代数的生成元如下方的圆点所示。



定义映射 $\varphi\colon \mathcal{B}\otimes\Lambda(\Theta) \to \mathcal{A}$，使其在 $\mathcal{A}$ 的子空间上为包含映射，并令 $\varphi(\Theta) := \theta$。这样，$\varphi$ 与微分相容。此外，φ 显然是乘法的。

为定义映射 $\psi\colon \mathcal{B}\otimes\Lambda(\Theta) \to \mathcal{M}$，我们将 Ω^0, Ω^1 和 $\overline{\Omega}^1$ 映至它们的 Bott-Chern 类，并将 Θ 和 $\overline{\theta}$ 映至对应的同名元素。空间 $\overline{\partial}\mathcal{D}$ 和 $\partial\overline{\partial}\mathcal{D}$ 映至 0。

映射 ψ 与微分相容，因为

$$\psi(d\Theta) = \psi(\beta) = [\beta]_{BC} = d\psi(\Theta).$$

要证明 ψ 是乘法的，只需验证以下内容：

- 设 $x,\ y \in \Omega_1$，则由引理2.1中的 (2)，可得 $x \wedge y = \partial\overline{\partial} g + c\beta$ 因此

$$\psi(x) \wedge \psi(\overline{y}) = [x \wedge \overline{y}]_{BC} = c[\beta]_{BC} = \psi(x \wedge \overline{y}).$$

- 设 $x \in \Omega^1$ 和 $f \in \mathcal{D}$。则由引理3.4 中的 (2)，可得 $\partial f \wedge x = \partial g$，其中 $g \in \overline{\mathcal{D}}$。因此可得

$$\psi(\overline{\partial} f) \wedge \psi(x) = \psi(\overline{\partial} f \wedge x) = 0.$$

此外，由引理3.4 中的 (1)，可得 $\partial f \wedge x = 0$ 因此

$$\psi(\overline{\partial} f) \wedge \psi(\overline{x}) = \psi(\overline{\partial} f \wedge \overline{x}) = 0.$$

这证明了 ψ 是乘法的。

接下来我们证明映射 φ和 ψ 是 1-拟同构。

$H^1_d(\varphi)$ 是一个同构：$\mathcal{B}\otimes\Lambda(\Theta,\Theta)$ 中的一个次数为 1 的元素具有如下形式

$$\xi = x + \overline{y} + \overline{\partial} g + a\Theta + b\overline{\theta},$$

其中 $x, y \in \Omega^1$, $a, b \in \mathbb{C}$ 和 $g \in \mathcal{D}$。因此，其微分为

$$d\xi = \partial\overline{\partial} g + (a+b)\beta.$$

由于 β 定义了一个非平凡的 Bott-Chern 类，要使 ξ 闭合，我们必须有 $g = 0$ 和 $b = -a$。因此，我们可以写成

$$\xi = x + \overline{y} + a(\Theta - \overline{\theta}).$$

现在，假设 $\varphi(\xi)$ 是 d-正合的，例如 $\xi = dh$。那么

$$\overline{\partial}\xi = a\beta = \partial\overline{\partial} h.$$

由于 $[\beta]_{BC} \neq 0$，我们必有 $a = 0$ 和 $h = 0$，从而得到 $x = y = 0$。这证明了单射性。满射性显而易见，因为 $\varphi(\Theta - \theta)$ 生成了纯性缺陷。

$H^1_d(\psi)$ 是一个同构：令 $\xi = x + y + a(\Theta - \theta)$ 如前所述为一个次数为 1 的 d-闭元素。则 $\psi(\xi) = [x]_{BC} + [y]_{BC} + a(\Theta - \theta)$，它永远不是 d-恰当的。满射性显然，因为$H^1(\mathcal{M})$ 同构于 $\Omega^1 \oplus \Omega^1 \oplus \langle \Theta - \Theta \rangle$。

$H^2_d(\varphi)$ 是单射：令 ξ 为 $\mathcal{B} \otimes \Lambda(\Theta, \Theta)$ 中一个次数为 2 的 d-闭元素。写作 $\xi = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2$，其中 ξ_i 的双次数为 $(i, 2-i)$，条件 $d\xi = 0$ 给出

$$\partial\xi_0 + \bar{\partial}\xi_1 = 0 \text{ and } \partial\xi_1 + \bar{\partial}\xi_2 = 0.$$

我们将证明，事实上有 $\partial\xi = \partial\xi = 0$。为此，首先注意到，唯一一个带有$\partial \neq 0$ 的生成元是 Θ。假设 ξ 有一项是 Θ 的倍数。这样的项将具有以下形式

$$(x + \overline{y} + \bar{\partial} f + a\bar{\theta}) \wedge \Theta,$$

其中 $x,\ y \in \Omega^1$、 $f \in \mathcal{D}$和 $a \in \mathbb{C}$。因此， ξ 的微分包含一项，它是 Θ 的倍数：

$$(\partial\bar{\partial} f + a\beta) \wedge \Theta.$$

因此，要使 ξ 闭合，必须有 $\partial\partial f + a\beta = 0$。由于 β 定义了一个非平凡的 Bott-Chern 类，这就迫使 $a = 0$ 和 $\partial\partial f = 0$ （这意味着 $f = 0$）。这表明， ξ 中是 Θ 倍数的项只有 $(\Omega^1 \oplus \Omega^1) \wedge \Theta$ 中的那些；其微分为零，因为根据假设，$\Omega^1 \wedge \beta = 0$ 和 $\Omega^1 \wedge \beta = 0$。这就证明了 $\partial\xi = 0$；并且由于 ξ 是 d-闭的，我们也有 $\partial\xi = 0$。现在，由于 $\partial\xi_1 = 0$，可知 $\varphi(\xi_1)$ 不是 ∂-恰当的。类似地， $\varphi(\xi_2)$ 也不是 ∂-恰当的。现在， ξ_1 具有如下形式

$$\xi_1 = x \wedge \overline{y} + \Theta \wedge \overline{y} + \bar{\partial} f \wedge x + \partial\bar{\partial} g,$$

与 $f,\ g \in \mathcal{D}$。利用引理 3.1 和 3.4 的乘法性质，可得 ξ_1 与d上同调等价于 $\Theta \wedge y$。由引理 3.2， $\varphi(\Theta \wedge y) = \theta \wedge y$ 永远不是 d- 恰当的。

$H^2_d(\psi)$ 是单射：由于 $\mathcal{M}$ 中唯一的非平凡微分是 $d\Theta = d\Theta = \beta$，只需注意，若 $\psi(\xi) = c[\beta]_{BC}$，则有 $[\xi]_{BC} = c[\beta]_{BC}$，因此 $\xi = \partial\partial g + c\beta$ 在$\mathcal{B} \otimes \Lambda(\Theta,\ \Theta)$ 中是 d-恰当的。□

上述定理给出了一个复模型，因为我们使用了微分形式的复分解以及复算子 ∂ 和 $\bar{\partial}$。不过，同一证明稍作调整也可得到如下实模型：在实 de Rham 代数 $\mathcal{A}_{\mathrm{dR}}(S)$上，考虑实算子 $d_c = \mathbf{i}(\bar{\partial} - \partial)$。那么$(\mathcal{A}_{\mathrm{dR}}(S)\ d,\ d_c)$ 是一个双复形，且第 2 节中的双复形分解同样适用。Bott-Chern 上同调定义为

$$H^k_{BC} := \frac{\operatorname{Ker} d \cap \operatorname{Ker} d_c \cap \mathcal{A}^k}{dd_c(\mathcal{A}^{k-1})}.$$

由引理 3.3 并取实基 $u_i = x_i + x_i$ 和 $v_i = \mathbf{i}(x_i - x_i)$，代数 $H^{\leq 1}_{BC}$ 由以下元素生成 $\{u_i, v_i\}_{i=1}^k$，其中 $k = \dim \Omega^1$，且唯一的非平凡乘积为 $u_i \cdot v_i = [\beta]_{BC}$ 对所有 i。

非平凡的 Bott-Chern 类 $[\beta]_{BC}$ 是实的，因此我们可以定义一个实微分分次代数如下：令

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}} := H^{\leq 1}_{BC} \otimes \Lambda(\gamma, \gamma^c) \text{ with } d(\gamma) = 0 \text{ and } d(\gamma^c) = [\beta]_{BC}.$$

将上述证明中的 ∂ 和 $\bar{\partial}$ 分别替换为 d 和 d_c，即可立即得到一个实模型：

定理 4.3. 设 S 是一个具有 $b^1 > 1$的紧致非 *Kähler* 曲面。则微分分次代数 $(\mathcal{M}_{\mathbb{R}}, d)$ 是 $\mathcal{A}_{\mathrm{dR}}(S)$ 的一个 *1*-模型。

注 4.4. 注意，$H^{\leq 1}_{BC}$ 只是一个亏格为 $k = \dim \Omega^1$, 的紧致曲线的模型，因此$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ 与以这样的曲线为底的环面纤维化的模型一致。这与满足 $b^1 > 1$ 的极小非 Kähler 曲面是椭圆的这一事实相符 [Bel00]。

5. 同伦论中的权

本节回顾权分解理论如何对微分分次代数的同伦类型给出非平凡的推论。稍后将把这一理论应用于上一节构造的 1-模型。

定义 5.1。 交换微分分次代数 (A, d) 的权分解 是一个直和分解 $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A_p$ ， 满足

$$d : A_p^n \to A_p^{n+1} \text{ and } A_p^n \times A_q^m \to A_{p+q}^{n+m}.$$

注意，权分解在上同调上定义了一个双分次:

$$H_p^n(A) := H^n(A_p).$$

若权分解满足 纯 性， $H_p^n(A) = 0$ 对所有 $p \neq n$均成立。以下是众所周知的结果（例如参见 [BCMC20] 中的命题 3.3）：

命题 5.2。 如果一个（交换）微分分次代数存在纯权分解，那么它就是形式的。特别地，所有高阶 *Massey* 积都消失。

我们将考察权分解的一些较弱性质。虽然这些性质不能推出形式性，却仍能推出某些 Massey 积消失。先回顾 Massey 积的定义。

定义 5.3。 设 A 是一个微分分次代数， $x_1, \cdots, x_k \in H^*$是上同调类，其中 $k \geq 3$。 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 的一个定义系统 是由元素 $\{x_{i,j}\}$组成的集合，其中 $1 \leq i \leq j \leq k$ 满足 $(i, j) \neq (1, k)$，其中 $x_i = [x_{i,i}]$ 且

$$d(x_{i,j}) = \sum_{q=i}^{j-1} (-1)^{|x_{i,q}|} x_{i,q} x_{q+1,j}.$$

考虑上循环

$$\gamma(x_{i,j}) := \sum_{q=1}^{k-1} (-1)^{|x_{1,q}|} x_{1,q} x_{q+1,k}.$$

k元 *Massey* 积 $\langle x_1, \cdots, x_k\rangle$ 定义为所有可能的定义系统所对应的上同调类 $[\gamma(x_{i, j})]$,构成的集合。如果平凡上同调类属于其定义集合，则称该 Massey 积是平凡的 。

注记 5.4. 注意，三重 Massey 积 $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ 非空的条件是 $x_1x_2 = 0$ and$x_2x_3 = 0$。对于 $k > 3$, 类似地要求某些 q 元 Massey 积（其中 $q < k$）以某种相容的方式平凡，从而至少存在一个定义系统。

下面的结果专为我们讨论紧致非 Kähler 曲面的情形而设:

引理 5.5. 设 A 是一个带有权分解 $A = \bigoplus A_p$ 的微分分次代数。假设上同调中诱导的权满足

$$H^1(A) = H_1^1 \oplus H_2^1 \text{ and } H^2(A) = H_2^2 \oplus H_3^2.$$

那么，对于 $k > 3$，不存在从 $H^1(A) \to H^2(A)$ 出发的 k 元 *Massey* 积。

证明。 设 $k > 3$。假设对于 $i = 1, \cdots, k$， 有 $x_i \in H^1_{w_i}(A)$。我们将证明 $\langle x_1, \cdots, x_k\rangle$ 是平凡的。一个定义系统 $\{x_{i,j}\}$ 由次数为 1、权为 $w(x_{i,j}) = \sum_{q=i}^{j} w_i$ 的元素给出。上式中 $\gamma(x_{i,j})$ 的表达式迫使其权为 $w = \sum_{i=1}^{k} w_i$。 因此， k 元 Massey 积 $\langle x_1, \cdots, x_k\rangle$ 属于 $H^2_w(A)$。现在，由于 $w_i \in \{1, 2\}$，我们有 $w \geq k > 3$。但是，对于 $p > 3$， $H^2_p(A) = 0$。 □

注 5.6。 类似地，可以证明上述引理的其他版本。特别地，对于光滑复代数簇，Morgan 关于有理同伦型上的混合霍奇结构的理论给出了长度为 > 4 的 Massey 积的消失性，因为在这种情况下， H^k 中的权从 k 到 $2k$。

在我们的设定中，我们讨论的是 1-模型（而非由拟同构代数给出的完整模型）。然而，自然性对于低次 Massey 积仍然成立:

引理 5.7. 设 $f\colon A \to B$ 是一个 *1*-拟同构，且 x_1、$\cdots$、x_k 是$H^1(A)$中的上同调类。那么

$$f^*\langle x_1, \cdots, x_k\rangle = \langle f^* x_1, \cdots, f^* x_k\rangle.$$

证明。这在 [Kra66] 中得到了证明，适用于任意次数的 Massey 积。对于 1-拟同构的情形，只要将讨论限制在次数为 1 的上同调类上，同样的证明仍然成立。□

现在我们转向拓扑空间 X 的基本群的实 Malcev 完备化。为 $\pi_1(X)$ 构造下中心列：

$$\cdots \subset \Gamma_3 \subset \Gamma_2 \subset \pi_1(X)$$

其中 $\Gamma_2 = [\pi_1(X)\ \pi_1(X)]$，且 $\Gamma_{i+1} = [\pi_1(X)\ \Gamma_i]$。取商后，我们得到 $\pi_1(X)$ 的 Malcev 完备化。它由幂零群塔给出

$$\cdots \to \pi_1(X)/\Gamma_3 \to \pi_1(X)/\Gamma_2 \to \{1\}.$$

每个 $\pi_1(X)/\Gamma_i$ 都是幂指数为 i 的幂零群，并且是 $\pi_1(X)/\Gamma_{i-1}$ 的中心扩张，其核为阿贝尔群 Γ_{i+1}/Γ_i。对于域$\mathbf{k}$，$\mathbf{k}$-Malcev 完备化 $\pi_1(X)$ 由上述塔与 $\mathbf{k}$ 作张量积得到（参见 [Sul77]）。

现在假设 X 是一个光滑流形，并令 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{A}_{\mathrm{dR}}(X)$的一个1-极小模型。根据定义，极小1-模型可写为$\mathbb{R}$上的自由交换微分分次代数的余极限。

$$\mathbb{R} \to \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 \to \cdots,$$

每个 $\mathcal{M}_i$ 都由次数 1 的生成元生成，并且满足 $d\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}_{i-1}$。对生成元集合取对偶，我们得到一列 $\mathbb{R}$-李代数，即实*Malcev*李代数。

$$\cdots \to \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1 \to 0$$

且每个 $\mathcal{L}_{i+1}$ 都是 $\mathcal{L}_i$的中心扩张。Sullivan 的一项主要结果 [Sul77]指出，这个李代数塔正是与 $\mathbb{R}$-Malcev 完备化 $\pi_1(X)$相关联的李代数塔。假设 X 是光滑的，唯一的用途是便于使用其 de Rham 代数。或者，我们也可以使用 Sullivan 分片线性形式代数 $\mathcal{A}_{\mathrm{PL}}(X)$来进行论证，该代数对任意拓扑空间都有定义。在这种情况下，也可以在 $\mathbb{Q}$ 上工作，而不是在 $\mathbb{R}$上。

Pro命题 5.8。 假设 $\mathcal{A}_{\mathrm{dR}}(X)$ 具有一个 *1*-模型 $\mathcal{M}$，并且带有权分解 n.

(1) 若权分解是纯的，则 $\pi_1(X)$ 的实 *Malcev* 完备化由杯积 $H^1(X) \times H^1(X) \to H^2(X)$ 决定，其 *Malcev* 李代数是二次呈示的。*(2)* 若上同调中的诱导权满足 $H^1(X) \cong H^1_1 \oplus H^1_2$ 和 $H^2(X) \cong H^2_2 \oplus H^2_3$，则 $\pi_1(X)$ 的实 *Malcev* 完备化由 $(\pi_1(X)/\Gamma_4) \otimes \mathbb{R}$ 的双分次幂零李代数决定。

证明。首先注意，权分解会延续到极小模型，因此我们可以假设这样的 1-模型是极小的（例如参见 [BCMC20]中的引理 3.2）。在纯情形下，根据命题 5.2，极小 1-模型是形式的，因此可以由杯积计算$H^1(X) \times H^1(X) \to H^2(X)$。第二个结论源于关联分次李代数的生成元权为 -1 和 -2（对应于 H^1) 中权的负值），关系的权为 -2 和 -3（对应于 H^2) 中权的负值）。因此，分次李代数模去其四阶交换子后即可重构完整塔。更多细节参见 [Mor78]。□

6. Main Theorem

定理 6.1。 设 S 是一个紧致复非 *Kähler* 曲面。那么：

(1) 从 $H^1(S)$ 到 $H^2(S)$ 不存在长度大于三的 *Massey* 积。*(2)* $\pi_1(S)$的实 *Malcev* 完备化由双分次幂零李代数决定

$$\big(\pi_1(S)/\Gamma_4\big) \otimes \mathbb{R}, \ \textit{where}\ \Gamma_2 = [\pi_1(S), \pi_1(S)]\ \textit{and}\ \Gamma_{i+1} = [\pi_1(S), \Gamma_i]$$

是下中心列。

（3）实*Malcev*李代数可由生成元 $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^k$ 和 Z 表示，并满足以下关系

$$[Z, X_i] = 0 \quad , \quad [Z, Y_i] = 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{k} [[X_j, Y_j], X_i] = 0 \quad and \quad \sum_{j=1}^{k} [[X_j, Y_j], Y_i] = 0,$$

$for\ all\ 1 \leq i \leq k,\ where\ k = \frac{1}{2}(b^1 - 1).$

证明。 鉴于第 5节，要证明 (1) 和(2) ，只需证明任意紧复曲面都有一个模型 $(\mathcal{M}, d)$ ，并且具有如下权分解： $H^1(\mathcal{M})$ 仅具有权 1 和 2，且 $H^2(\mathcal{M})$ 仅具有权 2 和 3。情形 $b^1 = 1$ 显然成立，因此我们不妨假设 $b^1 > 1$。此时，我们取定理 4.3中给出的模型

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}} = H_{\overline{BC}}^{\leq 1} \otimes_d \Lambda(\gamma, \gamma^c),\ d\gamma = 0,\ d\gamma^c = [\beta]_{BC}.$$

要赋予它权分解，只需规定 H_{BC}^k 的权为 k， γ、 γ^c的权为 2。由于 $[\beta]_{BC}$ 的权为 2， $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ 上的微分与权相容。此外，乘积 $\gamma \cdot \gamma^c$ 从不闭合，因此上同调中的权满足所需性质。对于 (3)，我们只需计算 $\pi_1(\langle \mathcal{M}_{\mathbb{R}} \rangle)$ 的实 Malcev 完备化。

代数 $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ 是一个二次微分分次代数，其生成向量空间为

$$V = \langle u_i, v_i \rangle_{i=1}^k \oplus \langle \gamma, \gamma^c \rangle$$

其关系 R 由下式给出

$$u_i \cdot u_j = 0,\ v_i \cdot v_j = 0,\ u_i \cdot v_i = 0 \text{ for all } i \neq j, \text{ and } u_i \cdot v_i = u_1 \cdot v_1 \text{ for all } 2 \leq i \leq k.$$

生成元上的微分为 $d\gamma^c = u_1 \cdot v_1$ ，其他地方的微分为零。为验证其为 Koszul 代数，我们使用重写方法（参见 [LV12] 的定理4.1.1）。这保证了 $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ 在 V具有一个有序基时为 Koszul 代数；对于该基，在元组集合上存在一个适当的次序，使得每个临界单项式都是合流的。在本例中，只需注意，相对于上述关系，唯一的（有意义的）临界单项式是形如 $u_i \cdot v_i \cdot u_j$ 或$u_i \cdot v_i \cdot v_j$ 的单项式，而它们显然都是合流的。现在我们可以类似于 [Bez94] 的主定理继续进行。我们采用 [Bez94 第 3] 节中的记号。记 $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^k \sqcup \{Z, W\}$ 为 V^*的对偶基。空间 $I \subset V \otimes V$由上述关系生成。空间 $I^\perp \subset V^* \otimes V^*$由所有形如 $Z \otimes W$、 $Z \otimes X_i$、 $Z \otimes Y_i$、 $W \otimes X_i$ 和 $W \otimes Y_i$ 的元素以及元素生成

$$X_1 \otimes Y_1 - \sum_{i=2}^{n} X_i \otimes Y_i$$

映射

$$\varphi : I^\perp \to V^*$$

与微分 $V \to V \otimes V/I$ 对偶，因此除以下元素外，在每个基元素上均为零

$$\varphi(X_1 \otimes Y_1 - \sum_{i=2}^{n} X_i \otimes Y_i) = W.$$

由此得到 $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ 的二次线性对偶的如下表示。它由生成元 $\{X_i, Y_i, Z, W\}$ 构成，其中 $1 \leq i \leq n$，并满足以下关系：

(a) $[Z, W] = 0$。(b) 对所有 $1 \leq i \leq n$，
$[Z, X_i] = [Z, Y_i] = 0$。(c) 对所有 $1 \leq i \leq n$，
$[W, X_i] = [W, Y_i] = 0$。(d)
$W = [X_1, Y_1] - \sum_{i=2}^{n} [X_i, Y_i]$。

将 (d) 代入前面的方程，我们发现，结合雅可比恒等式，(b) 蕴含 (a)；而 (c) 在经过基变换 $X_1 \mapsto -X_1$ 后给出所需的三次关系。□

参考文献

[ABC+96] J. Amorós、M. Burger、K. Corlette、D. Kotschick 和 D. Toledo。《紧 Kähler 流形的基本群》，《数学调查与专著》第 44 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，1996 年。[BCMC20] U. Buijs、F. Cantero Morán 和 J. Cirici。〈有理同伦中向量丛托姆空间的权分解〉。《同伦相关结构杂志》，15(1):1–26，2020 年。[Bel00] F. A. Belgun。〈非 Kähler 复曲面的度量结构〉。《数学年刊》，317 40，2000 1 1( ): – 。[Bez94] R. Bezrukavnikov。〈构形空间产生的 Koszul 微分分次代数〉。《几何与泛函分析》，4(2):119–135，1994 年。[BHPVdV04] W. P. Barth、K. Hulek、C. A. M. Peters 和 A. Van de Ven。《紧复曲面》，《数学及相关领域成果》第 4 卷，第 3 辑，《现代数学调查丛书》。 *[数学成果及相关领域，第 3 辑，《现代数学调查丛书》]*。施普林格出版社，柏林，第 2 版，2004 年。[CMDNMY21] B. Cappelletti-Montano、A. De Nicola、J. C. Marrero 和 I. Yudin。〈准 Sasakian 流形和 Vaisman 流形的近形式性及其在幂零流形中的应用〉。《以色列数学杂志》，241 87，2021 1 37( ): – 。[DGMS75] P. Deligne、P. Griffiths、J. W Morgan 和 D. Sullivan。〈Kähler 流形的实同伦理论〉。《数学发明》，29(3):245–274，1975 年。[FM94] R. Friedman 和 J. W. Morgan。《光滑四维流形与复曲面》，《数学及相关领域成果》第 27 卷，第 3 辑。柏林：施普林格出版社，1994 年。[Gom95] R. E. Gompf。〈辛流形的一种新构造〉。《数学年刊》(第 2 辑)，142(3):527–595，1995 年。[IK19] H. Ishida 和 H. Kasuya。〈复流形中心叶状结构上的横向 Kähler 结构〉。《纯粹与应用数学年刊》(第 4 辑)，198(1):61–81，2019 年。[KK14] M. Kapovich 和 J. Kollár。〈孤立奇点链接的基本群〉。《美国数学会杂志》，27(4):929–952，2014 年。[Kot92] D. Kotschick。〈所有基本群几乎都是复的〉。《伦敦数学会会报》，24 378，1992 4 377( ): – 。[Kra66] D. Kraines。〈Massey 高阶乘积〉。《美国数学会汇刊》，124:431–449，1966 年。[Lam99] A. Lamari。〈凯勒流与紧致曲面〉。（《凯勒流与紧致曲面》）。《傅里叶研究所年刊》，49(1):263–285，1999 年。[LV12] J.-L. Loday 和 B. Vallette。《代数歌剧》，《数学科学基础原理》第 346 卷。 *[数学科学基础原理]*。施普林格出版社，海德堡，2012 年。[Mor78] J.W. Morgan。〈光滑代数簇的代数拓扑〉。《高等科学研究所数学出版物》，(48):137–204，1978 年。[OV24] L. Ornea 和 M. Verbitsky。《局部共形 Kähler 几何原理》，《数学进展》第 354 卷。Birkhäuser/Springer，沙姆， [2024] ©2024。[Ste21] J. Stelzig。〈双复形的结构〉。《伦敦数学会杂志》(第 2 辑)，104(2):956–988，2021 年。[Sul77] D. Sullivan。〈拓扑中的无穷小计算〉。《高等科学研究所数学出版物》，(47):269–331（1978），1977 年。[SW24] J. Stelzig 和 S. O. Wilson。超越 Kähler 范畴的 dd^c-型条件。《茹西厄数学研究所杂志》，23(4):1651–1704，2024 年。[Tie08] A. M. Tievsky。《Sasakian 流形上的 Kähler 几何类比》。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2008 年。博士论文——麻省理工学院。[VVO21] M. S. Verbitsky、V. Vuletescu 和 L. Ornea。〈非 Kähler 曲面的分类与局部共形 Kähler 几何〉。《数学科学进展》，76(2(458)):71–102，2021 年。

(J. Cirici) 数学与计算机科学系，巴塞罗那大学 | 数学研究中心。巴塞罗那，西班牙电子邮件地址：jcirici@ub.edu