arXiv:2601.01960v1 [quant-ph] 5 Jan 2026

经典与量子振子的离散对称性

Alexander D. Popov

汉诺威莱布尼茨大学理论物理研究所，*Appelstraße 2，30167* 汉诺威，德国电子邮件：alexander.popov@itp.uni-hannover.de

摘要

我们以谐振子为例，考察波函数的性质。我们证明，在复 Bargmann-Fock-Segal 表示中，量子哈密顿量的本征函数 $\psi_n{=}z^n$ （其中 $z\in\mathbb{C}$ ）是能量为 $E_n=\hbar\omega n$、 $n=0$，1，2，.....的经典振子的坐标。它们定义在圆锥空间 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n$上，圆锥角为 $2\pi/n$；这些空间作为子空间嵌入经典振子的相空间 $\mathbb{C}$ 中。这里， $\mathbb{Z}_n$ 是将空间 $\mathbb{C}$ 旋转角度 $2\pi/n$ 的有限循环群。只有在求解薛定谔方程的初始数据不完整时，本征函数 ψ_n 的叠加 $\psi=\sum_n c_n\psi_n$ 才会出现：此时未施加关于离散群 $\mathbb{Z}_n$ 的不变性条件，且一般解考虑了由数值$n\in\mathbb{N}$参数化的所有可能初始数据。

量子 $\longrightarrow$ 经典。假设我们考虑一个具有有限维相空间 M 的经典模型及其具有希尔伯特空间 $\mathcal{H}$的量子版本。若哈密顿算符 H 的谱是离散的，且空间 $\mathcal{H}$是可分的，则可将复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的一组可数基$\{\psi_n, n = 0, 1, ...\}$ 引入为一组正交的^本征态。人们普遍认为，来自 $\mathcal{H}$ 的态 ψ_n 无法与相空间为 M的经典模型中的态相联系。至多，在定义经典态与量子态之间的联系时，人们会考虑赋予坐标和动量平均值，或通过相干态将 M 嵌入 $\mathcal{H}$ 。本文考虑相空间为向量空间 $M = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 的经典谐振子，以及定义在 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数空间；该空间以基 $\{\psi_n = z^n\}$ 作为量子振子的状态空间 $\mathcal{H}$ 。我们定义映射 $\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}_n \subset \mathbb{C}$，表明 ψ_n 是圆锥空间 $\mathbb{C}_n = \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n$ 上的坐标，这些圆锥空间嵌入振子的原始相空间 $\mathbb{C}$、 $n \in \mathbb{N}$中。这里， $\mathbb{Z}_n$ 是空间 $\mathbb{C}$中旋转角度为 $2\pi/n$ 的循环群。上述ψ_n 是描述经典振子的 $\mathbb{Z}_n$-不变运动的坐标。本文旨在描述量子态与经典态之间的这种对应关系。

经典振子。我们将经典谐振子视为质量为 m 的粒子，以角频率 ω 在相空间 $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ 中沿圆 S^1 旋转。在这个由坐标 x 和动量 p 参数化的相空间上，我们引入无量纲复坐标

$$z = \rho\, e^{\mathrm{i}\varphi} = \frac{1}{r_0}\left(x - \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\, p\right) \quad \text{with} \quad r_0^2 = \frac{2\hbar}{m\omega}\ , \tag{1}$$

其中， r_0 是长度参数 [1]。在这些坐标下，振子的哈密顿函数形式为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \hbar\omega z\bar{z}\ , \tag{2}$$

wh其中，普朗克常数 $\hbar$ 的出现是因为它存在于.....的定义中 z.

在相 空间 $\mathbb{C}$ 上，利用坐标 (1)，我们引入标准辛二形式

$$\Omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}p = -\mathrm{i}\hbar\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\ , \tag{3}$$

其中，上横线表示复共轭。哈密顿量 (2) 和二形式 (3) 定义了一个向量场

$$V_H = \Omega^{\bar{z}z}\partial_{\bar{z}} H \partial_z + \Omega^{z\bar{z}}\partial_z H \partial_{\bar{z}} = \mathrm{i}\omega z\partial_z - \mathrm{i}\omega\bar{z}\partial_{\bar{z}}\ , \tag{4}$$

它是群 U(1) 的生成元， $\partial_z := \partial/\partial z$。运动方程及其解的形式为

$$\dot{z} = V_H z = \mathrm{i}\omega z \quad \Rightarrow \quad z(\tau) = e^{\tau V_H} z = e^{\mathrm{i}\omega\tau} z\ , \tag{5}$$

其中，点表示对演化参数 τ 求导，且 $z =$$z(\tau = 0)$。

比较 (1) 和 (5)，我们看到该点沿着一个由角度 $\varphi = \omega\tau$参数化的圆 $S^1 \subset \mathbb{C}$运动。回想一下，z 是一个包含长度参数 r_0的无量纲坐标，因此我们选择 $z(0) = 1$，从而得到守恒能量

$$E = \hbar\omega \tag{6}$$

作为与其他初始数据选择进行比较的基准。

$\mathbb{Z}_n$-不变性。考虑由元素$\zeta \in \mathbb{C}$ 生成的 n 阶循环群 $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，其中 $\zeta^n = 1$，即 ζ 是单位根的 n 次方，

$$\mathbb{Z}_n = \{\zeta^\ell = e^{\frac{\mathrm{i}2\pi\ell}{n}}, \ell = 0, ..., n-1 \mid \zeta = e^{\frac{\mathrm{i}2\pi}{n}}\} \ . \tag{7}$$

我们通过以下公式定义该群 $\mathbb{Z}_n \subset$U(1) 在坐标 $z \in \mathbb{C}$ 上的作用

$$z \ \mapsto \ \tilde{z} = \zeta z = \rho e^{\mathrm{i}(\varphi + \frac{2\pi}{n})} \ , \tag{8}$$

这表明该群使向量 $z \in \mathbb{C}$ 绕点 $z = 0$ 旋转，转角为 $2\pi/n$ 的整数倍。哈密顿量 (2)、辛二形式 (3) 和运动方程 (5) 在该群的作用下保持不变。因此，我们可以考虑描述 $n \in \mathbb{N}$ 时运动方程 (5) 的 $\mathbb{Z}_n$-不变解。

解 (5) 关于角变量 $\varphi = \omega\tau$ 是周期性的，周期为 2π。也就是说，从 $\tau = 0$ 出发运动的粒子会在经过时间 $\tau_1 = 2\pi/\omega$ 后返回原点。在群 $\mathbb{Z}_n$ 的作用 (8) 下保持不变意味着更强的周期性，即将以下各点视为相同

$$e^{\frac{\mathrm{i}2\pi}{n}} z \sim z \quad \Leftrightarrow \quad \varphi + \frac{2\pi}{n} \sim \varphi \ , \tag{9}$$

这意味着将射线与它们之间的角度 $2\pi/n$对应起来。这里的符号“$\sim$”表示等价。因此，在具有 $\mathbb{Z}_n$ 不变性的运动中，粒子将在一段时间后返回起点

$$\omega\tau_n = \frac{2\pi}{n} \quad \Rightarrow \quad \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \text{with} \quad \omega_n = \omega n \ . \tag{10}$$

这相当于其角频率和能量的增加，

$$\omega \ \mapsto \ \omega_n = \omega n \quad \text{and} \quad E = \hbar\omega \ \mapsto \ E_n = \hbar\omega n \ . \tag{11}$$

为了更好地理解谐振子模型中的 $\mathbb{Z}_n$ 不变性 (9)-(11)，我们应当转换到能够明确体现这种不变性的坐标系。

圆锥空间 $\mathbb{C}_n$。 我们将平面 $\mathbb{C}$ 中由射线 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi/n$ 截出的部分作为空间 $\mathbb{C}$ 的子空间 $\mathbb{C}_n$。 $\mathbb{C}$ 上的标准 K¨ahler 度量为 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}$，其在子空间 $\mathbb{C}_n \subset \mathbb{C}$ 上的限制为

$$\mathrm{d}s^2{}_{|\mathbb{C}_n} = \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}_{|\mathbb{C}_n} = \mathrm{d}\rho^2 + \frac{\rho^2}{n^2}\mathrm{d}\varphi_n^2 = \frac{1}{n^2}\,\rho_n^{\frac{2(1-n)}{2}}\left(\mathrm{d}\rho_n^2 + \rho_n^2\mathrm{d}\varphi_n^2\right) \ , \tag{12}$$

这里，我们将 $z = \rho e^{\mathrm{i}\varphi}$ 中的 $0 \leq \varphi < \frac{2\pi}{n}$ 替换为角变量 $0 \leq \varphi_n = n\varphi < 2\pi$ 和 $\rho_n := \rho^n$。由式 (12) 可见，该度量在坐标中是共形平直度量

$$\psi_n = \rho_n e^{\mathrm{i}\varphi_n} = z^n = \rho^n e^{\mathrm{i}\varphi n} \ , \tag{13}$$

它是轨形 $\mathbb{C}_n = \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n$ 上的 $\mathbb{Z}_n$ 不变坐标（参见例如 [2] ）.

注意，由 (13) 可得 $z = \psi_n^{1/n}$，将其代入 (4) 得

$$V_{H|\mathbb{C}_n} = \mathrm{i}\omega\psi_n^{1/n}\frac{\partial}{\partial\psi_n^{1/n}} + c.c. = \mathrm{i}\omega n\psi_n\frac{\partial}{\partial\psi_n} - \mathrm{i}\omega n\bar{\psi}_n\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}_n} \ . \tag{14}$$

因此，运动方程 (5) 变为以下方程

$$\dot{\psi}_n = \mathrm{i}\omega_n\psi_n \quad \Rightarrow \quad \psi_n(\tau) = e^{\mathrm{i}\omega_n\tau}\psi_n \quad \text{with} \quad \omega_n = \omega n \ . \tag{15}$$

容易看出，这个方程不仅可由 (2)-(5) 与 (13) 推出，也可由如下定义的哈密顿量 H_n 推出

$$\frac{H_n}{\hbar\omega_n} := \left(\frac{H}{\hbar\omega}\right)^n = z^n\bar{z}^n = \psi_n\bar{\psi}_n \quad \Rightarrow \quad H_n = \hbar\omega_n\psi_n\bar{\psi}_n \ , \tag{16}$$

以及由 (16) 导出的向量场 (14)，其辛结构 Ω_n 定义在 $\mathbb{C}_n$ 上，形式如下

$$\Omega_n = -\mathrm{i}\hbar\,\mathrm{d}\psi_n \wedge \mathrm{d}\bar{\psi}_n \ . \tag{17}$$

这个二形式与 $\Omega_{\mathbb{C}_n}$ 的差别在于一个共形因子，而平坦度量 $\mathrm{d}\psi_n\mathrm{d}\psi_n$ 与度量 (12) 之间也相差同一个共形因子。

度量 (12) 的黎曼曲率为

$$\mathcal{R} = \frac{2\pi(n-1)}{n}\delta(\varrho_n)\,\mathrm{d}\psi_n \wedge \mathrm{d}\bar{\psi}_n \ , \tag{18}$$

也就是说，除了不动点 $\psi_n = 0 = z$ 外，处处平坦。请注意，在研究量子振子时，该点不包括在内（参见例如 [3]）。回顾一下， z 和 ψ_n 是无量纲复坐标，而采用 (6) 中的选择 $z\bar{z} = 1$ 时， $\mathbb{Z}_n$-不变振子的能量形式为

$$E_n = \hbar\omega n \ , \tag{19}$$

也就是说，它增加了 n 倍。

覆盖映射。 用微分几何的语言来说，从空间 $\mathbb{C}$到其 $\frac{1}{n}$-部分 $\mathbb{C}_n$ 的转换，是通过等价关系 (9) 实现的；该等价关系由群 $\mathbb{Z}_n$ 的作用 (8) 及其关联的覆盖映射给出。覆盖是拓扑空间 X 与 X 之间的一种映射，它在局部表现为将空间 X 的多个副本投影到其自身上的投影。特别是，映射

$$\psi_n : \quad \mathbb{C} \xrightarrow{\mathbb{Z}_n} \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n \quad \text{with} \quad \psi_n(z) = z^n \tag{20}$$

是一个度数为 n的分支覆盖，其中 $z=0$是 $n\geq 2$的分支点。(13)-(20) 中的函数$\psi_n(z)$是普通的全纯函数，其反函数是一个多值函数，对应于映射

$$\psi_n^{-1}:\quad \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{C}\ ,\quad z=\psi_n^{1/n}\ , \tag{21}$$

嵌入 到空间 $\mathbb{C}$ 中，作为平面的一部分 $\mathbb{C}$ ，如 (12)-(18).

总而言之，平面 $\mathbb{C}$上的 $\mathbb{Z}_n$-不变振子 (1)-(11) 的描述，对应于变换 (12)-(20)，即变为圆锥 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n = C(S^1/\mathbb{Z}_n)$，其圆锥角为$2\pi/n$ ，坐标为 ψ_n:

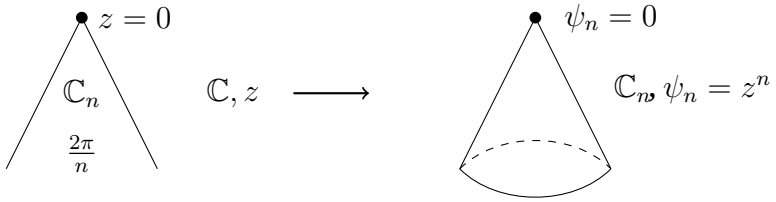

图1。 左侧角 $\frac{2\pi}{n}$ 的内部是 $\mathbb{C}$中圆锥 $\mathbb{C}_n=\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n$ 的原像。 $\mathbb{C}$ 中的角$0\leq\varphi<\frac{2\pi}{n}$ 对应于 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n$ 中的角 $0\leq\varphi_n<2\pi$ ，且 $\varphi_n=n\varphi$。

注意，在 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 上，有 n 个不同的点 $z_\ell=\zeta^\ell z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 映射到同一个点 $\psi_n(z_\ell)=z^n$，其中 $\ell=1,\ .....,\ n$（覆盖）。在进一步的讨论中，我们还将纳入函数 $\psi_0(z)=z^0=1$ ，它对应于空间 $\mathbb{C}_0=\mathbb{C}/\mathbb{Z}_0=\{$中的点 $1\in\mathbb{C}\}$.

量子振子。现在我们转而讨论复 Bargmann-Fock-Segal 表示中的量子谐振子，该表示使用相空间 $\mathbb{C}[1,4,5,6]$上的坐标 z 。在这种表示中，量子振子的状态空间是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ ，其中包含定义在 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数，这些函数关于高斯权重 exp$(-z\bar{z})$平方可积。在 $\mathcal{H}$ 上的内积由积分给出

$$\langle\psi,\phi\rangle=\int_{\mathbb{C}}\bar{\psi}(z)\phi(z)\,e^{-z\bar{z}}\mathrm{d}v\ , \tag{22}$$

其中，对于 $z=\rho\,e^{\mathrm{i}\varphi}$，$\mathrm{d}v=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$ 。复向量空间 $\mathcal{H}$ 中范数有限的全纯函数 ψ 的一组正交基为 $\|\psi\|=\langle\psi,\ \psi\rangle^{1/2}$ ，其元素是函数

$$\psi_n(z)=z^n\ , \tag{23}$$

其平方范数等于 $\|\psi_n\|^2=n!$。

哈密顿函数 (2) 导出一个算子

$$\hat{H}=\hbar\omega z\partial_z+\tfrac{1}{2}\hbar\omega\ , \tag{24}$$

其中，零点能 $\frac{1}{2}\hbar\omega$ 源于相空间上的复线丛 $\mathbb{C}$ 的非零曲率（例如参见 [7]）。函数 (23) 是算子 (24) 的特征向量，其能量本征值为

$$\tilde{E}_n = E_n + \tfrac{1}{2}\hbar\omega \quad \text{with} \quad E_n = \hbar\omega n \ . \tag{25}$$

任何向量 ψ 都可以从 $\mathcal{H}$ 按基 (23) 展开，

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}\, c_n \psi_n \quad \in \quad \mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C} \ , \tag{26}$$

其中 c_n 是复数。按照标准诠释，如果将 (26) 中来自 ψ 的向量归一化为单位长度，那么它定义了一个状态，在该状态下，测量振子能量时得到数值 (25) 的概率等于 $|c_n|^2$。如果我们对 ψ 作用算子 $\exp(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tau\hat{}H)$，那么由于零点能，(26) 中所有的 ψ_n 都会获得对 τ 的依赖，其形式为 (15) 乘以 $\exp(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega\tau)$。请注意，我们替换了薛定谔方程和正频率定义中的 $t \mapsto -\tau$，以便更好地匹配微分几何和群表示论的定义。

经典与量子。 比较经典振子和量子振子的描述，我们看到，量子哈密顿量 H 的本征函数 ψ_n 是经典振子方程的 $\mathbb{Z}_n$-不变解。在这种情况下，它们是相空间上的坐标 ψ_n ，彼此嵌套，适用于 $\mathbb{Z}_n$-周期振子

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_1 \supset \mathbb{C}_2 \supset \ldots \supset \mathbb{C}_n \supset \ldots \ , \tag{27}$$

其中振荡粒子沿圆运动

$$S^1/\mathbb{Z}_n \subset \mathbb{C}_n = \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n \ , \ n = 1, 2, \ldots \ . \tag{28}$$

因此，量子振子的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的基向量可以对应于 $\psi_n \in \mathbb{C}_n$ 所描述的 $\mathbb{Z}_n$-不变经典振子，因此

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}_n = \mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{Z}_1 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n \oplus \cdots \subset \mathcal{H} \ , \tag{29}$$

其中 $\mathbb{C}_0 = \{\text{点}\} = 1$ （真空态，在 $\mathbb{C}$中无旋转），且 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_1 = \mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_1 = \mathrm{Id}$。

前面给出的所有公式都表明，粒子沿圆运动 $S^1_n = \{0 \leq \varphi_n < 2\pi\}$ ，位于希尔伯特空间（29）的子空间之一中 $\mathbb{C}_n$ ，其能量由它在 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n$ 中的旋转能量 E_n 以及真空态向量的旋转能量 $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ 组成。在薛定谔方程层面固定子空间 $\mathbb{C}_n \subset \mathbb{C}$ ，取决于函数 $\psi(z)$相对于某个循环群的不变性要求（ $\mathbb{Z}_n$-周期性条件）。例如，可以要求函数 $\psi(z)$在群 $\mathbb{Z}_n$ 的作用下保持不变，而在群 $\mathbb{Z}_m$ （其中 $m > n$）的作用下不保持不变。

因此，量子振子的状态 $\psi_n \in \mathcal{H}$ 对应于经典粒子的状态：粒子沿圆 $S^1/\mathbb{Z}_n$ 在圆锥 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n = C$（$S^1/\mathbb{Z}_n$）上运动，$n \in \mathbb{N}$。这证实了 't Hooft 的观点 [8]：如果初始状态及其对称性无法绝对精确地确定，波函数（26）反映的就是粒子 $|c_n|^2$ 在某个子空间 $\mathbb{C}_n \subset \mathbb{C} \subset \mathcal{H}$ 中运动的概率。无需像 't Hooft [8], 所建议的那样转向离散时空，因为离散性与表示有关

$$\phi_n : \ e^{\mathrm{i}\varphi} \to e^{\mathrm{i}n\varphi} \quad \text{and} \quad \psi_n : \ z \to z^n \tag{30}$$

U(1) 和 GL(1, $\mathbb{C}$) 群及其覆盖

$$\phi_n : \ S^1 \xrightarrow{\mathbb{Z}_n} S^1/\mathbb{Z}_n \quad \text{and} \quad \psi_n : \ \mathbb{C} \xrightarrow{\mathbb{Z}_n} \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n \ , \tag{31}$$

其中 n 是绕数。我们得出结论，波函数 (26) 描述了经典粒子可能的运动，而概率 $|c_n|^2$ 反映了我们对粒子的运动所施加的初始条件和对称性的无知程度。换句话说，当我们想要测量能量时，波函数 ψ 携带了有关经典粒子可能能量的信息，这与认识论观点相对应。这并不意味着我们知道粒子运动的所有其他参数。

一般经典解。我们已经证明，由 (26)-(31) 得到的波函数希尔伯特空间 $\mathcal{H}$描述了经典振子的一个可数状态集。显然，经典振子的状态远多于集合 $\{\psi_n\}, n \in \mathbb{N}$。首先，对于标准振子 (1)-(5)，能量可以取任意正值

$$E_\gamma = \hbar\omega z\bar{z} = \hbar\omega\gamma \ , \tag{32}$$

其中 $z = z(\tau = 0)$ 由粒子的坐标 $x(0)$ 和动量$p(0)$ 的初始值给出。这对应于粒子沿着 $\mathbb{C}$ 中半径为 $\sqrt{\gamma} r_0$ 的圆运动，而不是沿着 (6) 中选定的半径为 r_0 的圆运动。

请注意，量子振子的能量会因角频率 $\omega \mapsto \omega_n = \omega n$ 的变化而增加，而不是因坐标和动量的初始数据发生变化而增加。正如我们详细讨论过的，经典粒子的这一能量变化与 $\mathbb{Z}_n$-不变性有关。在这种情况下，粒子在圆锥空间 $\mathbb{C}_n \subset \mathbb{C}$中运动，圆锥角为 $2\pi/n$。然而，圆锥空间 $\mathbb{C}_\gamma$ 可为任意角度$2\pi/\gamma$定义，这也会产生能量为 (32) 的经典状态，其中能量变化与角频率 $\omega \mapsto \omega\gamma$的变化有关，而不是与初始数据 $z(0)$ 的变化有关。

为澄清上述内容，我们首先考虑 $\gamma \geq 1$，并在 $\mathbb{C}$中引入一个子空间 $\mathbb{C}_\gamma$，以替代图1中的空间 $\mathbb{C}_n$。我们将 $\mathbb{C}$ 上的度量限制在该子空间上，

$$\mathrm{d}s^2_{|\mathbb{C}_\gamma} = \mathrm{d}\rho^2 + \frac{\rho^2}{\gamma^2}\,\mathrm{d}\varphi_\gamma^2 = \frac{1}{\gamma^2}\rho_\gamma^{2(1-\gamma)/\gamma}\big(\mathrm{d}\rho_\gamma^2 + \rho_\gamma^2\mathrm{d}\varphi_\gamma^2\big) \ , \tag{33}$$

其中 $0 \leq \varphi_\gamma = \gamma\varphi < 2\pi$ 和 $\rho_\gamma := \rho^\gamma$，类似于公式（12）。我们得到一个具有坐标 $\mathbb{C}_\gamma$ 的共形平坦空间

$$\psi_\gamma = \rho_\gamma e^{\mathrm{i}\varphi_\gamma} = z^\gamma \ . \tag{34}$$

度量形式为 (33) 的圆锥空间已应用于物理学中的许多问题（例如参见 [9, 10, 11]）。

对于 $\gamma \geq 1$，图 1 中的圆锥保持不变，只需将 n 替换为 γ，但圆锥 $\mathbb{C}_\gamma$ 不再是陪集空间。与 $\gamma = n$ 情形的区别在于，该映射

$$\psi_\gamma : \ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}_\gamma \quad \text{with} \quad \psi_\gamma(z) = z^\gamma \tag{35}$$

由多值函数定义。选取一个特定分支后，空间 $\mathbb{C}_\gamma$ 可视为以圆 S^1_γ 为底的圆锥，粒子沿该圆运动，且

$$\psi_\gamma(\tau) = \exp(\mathrm{i}\omega\gamma\tau)\psi_\gamma(0) \ . \tag{36}$$

请注意，在所有公式中也可以取值 $0 < \gamma < 1$，唯一的区别是角度 $2\pi/\gamma$ 将大于 2π（折纸式圆锥）。

请注意，$\psi_\gamma = z^\gamma$ 是薛定谔方程的一个解

$$\hat{H}\psi_\gamma = \tilde{E}_\gamma\psi_\gamma \quad \text{with} \quad \tilde{E}_\gamma = \hbar\omega(\gamma + \tfrac{1}{2}). \tag{37}$$

因此，具有 $\gamma > 0$ 的谐振子的所有经典态都是量子哈密顿量的本征函数。函数 ψ_γ 与 ψ_n 的区别在于，对于 $\gamma \neq n$，ψ_γ 是多值的，并且不是复平面 $\mathbb{C}$上的全纯函数。因此，函数 ψ_γ 不属于式 (22)–(29) 中所描述量子振子的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$。函数 (35) 在 $z = 0$ 处有一个分支点，而其值

$$\psi_\gamma = z^\gamma = \exp(\gamma \log z) \tag{38}$$

取决于所使用的对数分支。必须通过定义一条支割线（通常为正实轴）来选择一个特定的分支，函数沿该支割线不连续。因此，从量子力学的角度来看，这些哈密顿量的本征函数是不可接受的，但作为经典振子的坐标却是正常的。注意，在位置表象中情况类似（参见例如 [12]），其中 ψ_γ with$\gamma \neq n$ 作为指数函数 exp(x^2/r_0^2) 增长，而 x^2 趋于无穷。在量子力学中，这类解因不满足属于希尔伯特空间的要求而被排除。

结语。我们已经证明，量子谐振子的波函数 (26) 是具有 $\mathbb{Z}_n$-不变性的经典振子相空间 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n$ 上坐标 ψ_n 的形式和。该振子由沿圆 $S^1/\mathbb{Z}_n \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n$ 运动的点描述，该圆由公式 (15) 给出；公式 (15) 是通过将平面 $\mathbb{C}$ 上的坐标$z \mapsto \psi_n(z) = z^n$ 进行变换而得到的。循环群 $\mathbb{Z}_n$ 与群 U(1) 和 GL(1, $\mathbb{C}$) 的一维复表示 (30)、绕数 $n \in \pi_1(S^1)$ 以及周期性的概念有关。

让我们回顾一下周期性这一概念是如何引入的。实直线 $\mathbb{R}$ 被划分为无穷多个区间，

$$\mathbb{R} = \coprod_{k=-\infty}^{\infty} \big[2\pi k, 2\pi(k+1)\big) \xrightarrow{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1 \ , \tag{39}$$

其中 $\mathbb{Z}$ 是一个整数群。 2π 上的平移群 $\mathbb{Z}$ 定义了(39)中不同区间上各点的等价性，因此圆 S^1 与线段$[0, 2\pi]$等同，其中点 $x = 0$ 与 $x = 2\pi$ 被等同，随后 S^1 由角变量 $0 \leq \varphi < 2\pi$参数化。

群 $\mathbb{Z}_n$ 是模 n 的整数群，利用它可将 $\mathbb{R}$ 上函数的周期性 $f(x + 2\pi) = f(x)$加强为圆 S^1上的周期性。为此，我们将圆 $S^1 = [0, 2\pi)$分成 n 个区间，

$$S^1 = \coprod_{\ell=0}^{n-1} \left[\frac{2\pi\ell}{n}, \frac{2\pi(\ell+1)}{n}\right) \xrightarrow{\mathbb{Z}_n} S^1/\mathbb{Z}_n =: S^1_n \ , \tag{40}$$

其中平移 $\varphi \mapsto \varphi + \frac{2\pi}{n}$ 的群 $\mathbb{Z}_n$ 定义了(40)中不同区间上各点的等价性。因此，以角变量 $0 \leq \varphi_n < 2\pi$ 表示的圆 S^1_n 可与线段 $[0, 2\pi/n] \subset S^1$等同，其中点 $\varphi = 0$ 与 $\varphi = 2\pi/n$ 重合。投影(40)诱导出投影 $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n$ ，因此空间$\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n$ 可与 $\mathbb{C}$ 中由射线 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi/n$所界定的子空间 $\mathbb{C}_n$ 等同。相应地， $z \in \mathbb{C}$ 的函数 $\psi(z)$的 $\mathbb{Z}_n$-不变性条件即周期性条件 $\psi(\zeta z) = \psi(z) \ \Rightarrow \ \psi(\rho, \varphi + 2\pi/n) = \psi(\rho, \varphi)$，适用于 $\zeta = \exp(\mathrm{i}2\pi/n) \in \mathbb{Z}_n$。

我们强调，我们不采用任何量子力学诠释，也不提出新的诠释。我们只是透过微分几何的棱镜来看待振子，并不认为经典情形与量子情形之间存在明确的界限。在"量子"情形中，能量算符 H 作用于来自希尔伯特空间 $\mathcal{H}$的向量 ψ ，该空间由定义在 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数构成，其基 $\psi_n = z^n$ 为（本征函数），

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}\, c_n \psi_n \ . \tag{41}$$

动力学由演化算符作用于 $\psi \in \mathcal{H}$ 引入，

$$\psi(z, \tau) = \exp\big(\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\tau\hat{H}\big)\psi = \exp\big(\tfrac{\mathrm{i}\omega\tau}{2}\big) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}\, c_n \psi_n(\tau) \ , \tag{42}$$

其中

$$\psi_n(\tau) = e^{\mathrm{i}\omega n\tau}\psi_n = e^{\mathrm{i}\omega n\tau} z^n \ . \tag{43}$$

事实上，我们在一维不可约表示空间（30）、（31）的直和（29）上得到了群 U(1) 的一个无限维表示。我们已经

证明，量子振子的态（43）是经典 $\mathbb{Z}_n$-不变振子的锥形相空间 $\mathbb{C}_n = \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n$ 上的坐标。

在经典和量子层面选择解之前施加 $\mathbb{Z}_n$-不变性条件，会使能量在任何演化发生之前就成为本体论变量，而坍缩 $\psi(z) \to \psi_n(z)$ 也失去了意义。在这种情况下，叠加（41）反映了我们并不完全知晓粒子正在相空间的哪些子空间 $\mathbb{C}_n$ 中运动 $\mathbb{C}$ 。因此，我们可以仿照 't Hooft [8] 的说法：该理论通过初态的概率分布再现末态的概率分布。需要明确的是，我们这里只讨论能量——我不想对其他可观测量（坐标、相位等）作出任何论断。

回想一下， $\mathbb{Z}_n$ 中的数 $n \in \pi_1(S^1)$ 是（30）中引入的绕数。通过考虑 $\psi_{-n} = z^{-n}$ ，或者更好地，考虑 $\psi_{-n} = \bar{z}^n$ 并同时改变辛结构 [7]的符号，可以得到这个数的负值 $k = -n$ 。事实上，这类拓扑数具有共同的数学本质。也就是说，让我们回想一下，复射影空间 $\mathbb{C}P^N$ 上的全纯线丛 $\mathcal{O}_N(k)$ 是由一个等价关系定义的

$$\Big([\lambda z_0 : ... : \lambda z_N], \lambda^k \psi_k\Big) \sim \Big([z_0 : ... : z_N], \psi_k\Big) \in \mathcal{O}_N(k) \ , \tag{44}$$

其中 $[z_0 : ... : z_N]$ 是 $\mathbb{C}P^N$ 上的齐次坐标， $\lambda \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$， $k \in \mathbb{Z}$ 而 $\psi_k \in \mathbb{C}$ 是纤维中复向量的一个分量，也就是说，这种情况下的线性与叠加可能性在经典层面上已经定义（例如参见 [13]）。这里的数 $k = \pm n \in \mathbb{Z}$ 是丛 $\mathcal{O}_N(k)$ 的陈类。丛 $\mathcal{O}_N(-n)$ 零截面附近的纤维，就是本文所讨论的轨形 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n$ 。在论文 [14] 中，我们详细讨论了情形 $N = 1$，它描述了粒子的自旋。本文的讨论形式上对应于情形 $N = 0$，其中陈类被绕数取代。动力学由将参数 $\lambda \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ 限制到子群 $\mathrm{U}(1) \subset \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ 来确定，这给出了粒子在丛（44）的一维纤维中的旋转 $\psi_k(\tau) = \exp(\mathrm{i}\omega k\tau)\psi_k(0)$；该丛位于空间 $\mathbb{C}P^N$ 之上，而此空间参数化了这一运动的初始数据。

测量问题。 量子力学中的测量问题是一个根本性问题：处于态叠加中的量子系统在测量时，如何选择一个特定的结果。自量子力学创立以来，这一问题及与之相关的量子力学诠释问题一直未获解决（例如参见 [15, 16, 17] 中的讨论和参考文献）。事实上，问题之所以产生，是因为我们在一个声称具有基础性的数学形式化理论（希尔伯特空间、算子等）中，引入了“装置”“环境”“观察者”等外在于该理论的元素。量子信息理论通过用形式化定义的对象以及对这些对象进行操作的规则来替代这些词语，从而改善了这一状况。然而，所有这些仍然外在于量子力学，因此并未解决测量问题——只是将其清晰地表述出来。

在本文中，我们利用应用于谐振子的微分几何方法，考察了作为态叠加的波函数的本质问题。我们展示了，希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的全纯函数（41）的基向量 ψ_n 是 $\mathbb{Z}_n$-不变经典谐振子的锥形相空间 $\mathbb{C}_n = \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n \subset \mathbb{C}$上的坐标。我们建立了如下对应关系：

经典	量子
$\psi_n \in \mathbb{C}_n \subset \mathbb{C},\ E_n = \hbar\omega n, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} c_n \psi_n \in \mathcal{H},\ \tilde{E}_n = E_n + \frac{1}{2}\hbar\omega$
$\psi_\gamma \in \mathbb{C}_\gamma \subset \mathbb{C},\ E_\gamma = \hbar\omega\gamma, \gamma \in \mathbb{R}^+, \gamma \neq n$	本征态 ψ_γ 的 $\hat{H}$ 外部 $\mathcal{H}$

我们的描述表明，经典态 ψ_n 构成希尔伯特空间的一个基 $\mathcal{H}$，因此“量子”振子的波函数 ψ 并不是一个物理场。态的叠加 $\psi \quad \psi_n$ 定义了经典振子的 $\mathbb{Z}_n$不变运动选择的概率分布（通过 c_n），也就是说，波函数定义了一种统计描述。需要指出的是，这不是一个假设或解释，而是一个数学事实。

参考文献

[1] P.A.M. Dirac，《量子力学原理》，Clarendon Press，牛津，1958 年。

[2]J. Ross 和 R.P. Thomas，“加权射影嵌入、orbifold 的稳定性与常标量曲率 K¨ ahler 度量”，《微分几何杂志》88 （2011）109[arXiv:0907.5214v2 [math.AG]]。

[3]J. Sniatycki，《几何量子化与量子力学》，Springer-Verlag，柏林，1980年。[4] V. Bargmann，“解析函数希尔伯特空间及其相关积分变换”，《纯粹与应用数学通讯》14(1961) 187。[5] I. Segal，《相对论物理学的数学问题》，第六章，载于《1960年博尔德暑期研讨会论文集，第二卷》（M.Kac 编）。《应用数学讲义》，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1963年。[6] B.C. Hall，“分析学与数学物理中的全纯方法”，《当代数学》260 (2000) 1。[7] A.D. Popov，“非相对论量子力学中的反粒子”，《现代数学物理》1(2025) 4 [arXiv:2404.01756 [math-ph]]。

[8] G. ’t Hooft，“量子谐振子中的隐变量本体论”，Front. Quant. Sci. Tech. **3** (2024年) 1505593 [arXiv:2407.18153 [quant-ph]]。[9] D.D. Sokolov 和 A.A. Starobinsky，“锥形奇点上的曲率张量结构”，Dokl. Akad. Nauk. USSR **234**(1977) 1043。[10] M. Barriola 和 A. Vilenkin，“全局磁单极子的引力场”，Phys. Rev. Lett. **63**(1989) 341。[11]M. Bordag、K. Kirsten 和 J.S. Dowker，“广义锥上的热核与函数行列式”，Commun. Math. Phys. **182**(1996) 371 [arXiv:hep- th/9602089 [hep-th]]。[12] E. Fermi，《量子力学笔记》，芝加哥大学出版社，芝加哥，1965年。[13] R.O. Wells，《复流形上的微分分析》，Springer-Verlag，纽约，1980年。[14] A.D. Popov，“狄拉克粒子、自旋与光子”，[arXiv:2508.21590 [hep-th]]。[15] J.R. Hance 和 S. Hossenfelder，“解决测量问题需要什么？”，J. Phys. Comm.**6**(2022年) 102001 [arXiv:2206.10445 [quant-ph]]。[16] E. Adlam、J.R. Hance、S. Hossenfelder 和 T.N. Palmer，“超越量子力学的物理学分类体系”，Proc. Roy. Soc. Lond. A **480** (2024年) 20230779[arXiv:2309.12293 [quant-ph]]。[17] A.A. Tomaz、R.S. Mattos 和 M. Barbatti，“量子测量问题：近期趋势综述”，[arXiv:2502.19278 [quant-ph]]。