arXiv:2601.01962v1 [math.CO] 5 Jan 2026

# 汉明图、约翰逊图和克奈泽图幂色数的高效谱界

Finn A. Steinke[1] 和 Luis M. B. Varona[2,3,4]

2026年1月6日

**摘要**

我们研究汉明图幂 $\chi(H(n,q)^p)$、约翰逊图幂 $J(n,k)^p$和 Kneser 图幂 $K(n,k)^p$ 的色数 $\chi$ 谱下界，并给出了首批计算上可行的非平凡结果。经典的霍夫曼界原则上可用于 $\chi$ 任意图，但朴素计算需要 $O(q^{3n})$ 的时间来处理 $H(n,q)^p$ ，而处理 $J(n,k)^p$ 和 $K(n,k)^p$ 则都需要 $O({}_nC_k)^3)$ 的时间。因此，我们用超几何正交多项式表示这些图的邻接特征值，并利用由此得到的递推关系高效计算整个谱。随后，我们运用动态规划，分别以 $O(np)$、 $O(kp)$ 和 $O(k^2)$ 的时间计算 $H(n,q)^p$、$J(n,k)^p$和 $K(n,k)^p$ 的霍夫曼界。

**关键词：** 色数，谱图论，动态规划，汉明图，约翰逊图，克奈泽图**MSC2010 分类：** 05C15; 05C50; 90C39

## 1 引言

图的 色数 $\chi(G)$ 是指为图 $G$ 的顶点着色，且任意两个相邻顶点颜色不同所需的最少颜色数。$G$ 确定色数在调度到资源分配等诸多领域都有广泛应用；尽管精确计算图的色数关于顶点数是 NP 难的，谱方法仍能提供有价值的下界。著名的霍夫曼界[Hof03] 指出 $\chi(G)\geq 1+\frac{\lambda_{\max}}{|\lambda_{\min}|}$，其中 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 分别是 $G$的邻接矩阵的最大和最小特征值。然而，求出一个有 $n$个顶点的图的邻接特征值，通常需要 $O(n^3$的时间，除非该图具有可供利用的额外代数结构。

汉明图、约翰逊图和克奈泽图——分别记作 $H(n,q)$、 $J(n,k)$ 和 $K(n,k)$——是具有高度结构化特征的顶点传递图的重要例子。许多这类结构性质也适用于形式为 $H(n,q)^p$、 $J(n,k)^p$ 和 $K(n,k)^p$ 的图幂，使得相应霍夫曼界的计算更加容易。研究这些图的着色在编码理论、纠错、分布式计算等领域具有实际应用。例如，在一种用 $n$ 个属性（每个属性有 $q$ 个取值）刻画进程的模型中， $\chi(H(n,q)^p)$ 表示无冲突分配所需的最少资源数；当两个进程的配置在至多 $p$ 个参数上存在差异时，它们之间会发生冲突。

据我们所知，除超立方体图幂外，尚无关于汉明图、Johnson 图或 Kneser 图幂的色数下界研究成果 $Q_n^p=H(n,2^p)$。 [FFR17] 迄今为止在该领域开展了最具代表性的研究，建立了团大小 $\omega$ 的 $Q_n^p$ 精确表达式，该表达式可在 $O(p)$ 时间内计算；由于 $\omega\leq\chi$对所有图均成立，因此这可以扩展为关于 $\chi(Q_n^p)$ 的下界。然而，Johnson 图幂和 Kneser 图幂仍未得到研究，一般情况下的汉明图幂也是如此。因此，我们旨在为这些图建立首个计算上可行的色数下界。

[1]数学与统计学系，圭尔夫大学，圭尔夫，安大略省，加拿大 N1G 2W1[2]政治与国际关系系，艾利森山大学，萨克维尔，新不伦瑞克省，加拿大 E4L 1E4[3]经济学系，艾利森山大学，萨克维尔，新不伦瑞克省，加拿大 E4L 1E4[4]数学与计算机科学系，艾利森山大学，萨克维尔，新不伦瑞克省，加拿大 E4L 1E4

虽然上述霍夫曼界可应用于任意图，但用于求特征值的通用方法——其中最具代表性的是奇异值分解（SVD）和 QR分解（QRD）——其复杂度为立方级。因此，直接计算需要¨ıve 计算需要 $O$（$q^{3n}$）时间来计算 $H$（$n$，$q$）$^p$（其具有 $q^n$ 个顶点），并且需要 $O\left(\binom{n}{k}^3\right)$ 时间来计算 $J$（$n$，$k$）$^p$和 $K$（$n$，$k$）$^p$（它们具有 $\binom{n}{k}$ 个顶点）。为克服这一瓶颈，我们希望利用相应代数结构的性质，这些代数结构称为关联方案；我们将在第2.3小节中对其进行定义。

因此，我们能够分别利用动态规划，以 $O(np)$、 $O(kp)$ 和 $O(k^2)$ 的时间复杂度，计算 $H(n,q)^p$、 $J(n,k)^p$ 和 $K(n,k)^p$ 的霍夫曼界。这大幅降低了复杂度：例如，若要朴素地通过霍夫曼界求 $\chi(H(n,q)^p)$ 的下界，就至少需要使用奇异值分解或 QR分解等方法计算一个 $q^n \times q^n$ 矩阵的最小和最大特征值；而算法 3.5 只需执行 $p(2n+2)$ 次常数时间的数组更新，便能达到相同结果。即使参数值不大，例如 $(n,q,p) = (10,3,5)$，也只需进行 $110O(1)$ 次运算，而不必计算一个 $59{,}049 \times 59{,}049$ 阶矩阵的谱。与朴素方法相比，算法 4.7 和 4.8 在分别计算 Johnson 图幂和克奈泽图幂的霍夫曼界时，也带来了显著的性能提升。

### 1.1 论文结构

我们首先在第 2 节介绍全文所用的符号，并回顾必要的数学定义。此外，我们陈述已知结果，给出 $\chi$ 在 $H(n,q)$ 和 $K(n,k)$ 中的精确取值（但不包括它们的幂），随后回顾约翰逊图$J(n,k)$ 及超立方体图幂 $Q_n^p$ 的一些已知色数下界。此外，我们简要讨论汉明图、约翰逊图、克奈泽图及其图幂的着色在编码理论、纠错和分布式计算中的一些应用，进一步说明了我们研究结果的重要性。

在第 3 节中，我们利用克拉夫丘克多项式求出汉明图幂邻接特征值的闭式表达，然后利用这些多项式之间的递推关系，建立一个 $O(np)$ 动态规划算法，以计算 $H(n,q)^p$ 的霍夫曼界。在第 4 节中，我们使用 Eberlein 多项式开发类似的 $O(kp)$ 和 $O(k^2)$ 算法，分别计算 $J(n,k)^p$ 和 $K(n,k)^p$ 的霍夫曼界。

最后，我们将在第5 节结束全文，提出一些开放性问题并探讨未来的研究方向。具体而言，我们将探讨特征值计算技术在其他谱界和图不变量中的应用，以及如何将其推广到其他高度对称的顶点传递图族。

## 2 预备知识与定义

我们用粗体小写字母（如**u**、**v**.....）表示 $\mathbb{F}^n$ 中由任意域 $\mathbb{F}$ 构成的向量；更一般地，也用它们表示由任意环 $R$ 构成的自由模 $R^n$ 的元素（例如 $\mathbb{Z}_q^n$）。我们用$\mathbf{e}_i$ 表示 $i^{\text{th}}$ 标准基向量（即在其第 $i^{\text{th}}$ 个分量为 1、其余分量均为 0 的向量），用**1** 表示全一向量（1、1、.....、1）。我们常用 Spec($A$)表示矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的特征值集合，用 $[n]$ 表示整数集合 $\{1,2,\ldots,n\}$，用 $\binom{[n]}{k}$ 表示所有 $[n]$的 $k$-子集构成的集合。我们采用标准的组合约定：当 $n<k$时，$\binom{n}{k}=0$ 。

通常，我们从1开始为矩阵和向量编索引，用 $[A]_{i,j}$ 表示矩阵的第 $(i,j)^{\text{th}}$ 个元素，用 $v_i$ 表示向量 $\mathbf{v}$ 的第 $i^{\text{th}}$ 个元素。不过，在描述数据结构和算法时，我们遵循从0开始的索引这一标准约定——例如，arr$[i]$ 表示数组 arr 的第 $(i+1)^{\text{th}}$ 个元素。

本文始终只考虑无权、无向、无自环的有限图。给定一个图 $G$，我们经常用 $V(G)$ 表示 $G$ 的顶点集，用 $E(G)$ 表示 $G$ 的边集，用 $A(G)$ 表示 $G$ 的邻接矩阵，用 diam($G$) 表示 $G$ 的直径，用 $\chi(G)$ 表示 $G$ 的色数，用 $\omega(G)$ 表示 $G$ 的团数。我们还研究图的幂，其定义如下。

**定义 1** (图的幂)。 图 $G$ 的 $p^{th}$ 幂 记作 $G^p$，它是一个具有相同顶点集的图，当且仅当两个顶点在 $G$ 中的距离至多为 $p$ 时，它们相邻；即，

$$V(G^p) \coloneqq V(G), \quad E(G^p) \coloneqq \big\{\{u,v\} \subseteq V(G) \;\big|\; 1 \le d_G(u,v) \le p\big\},$$

其中 $d_G$： $V(G) \times V(G) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 表示 $G$ 的顶点距离函数。

**注 2.1**。 值得注意的是，对于任意一个具有 $n$ 个顶点的图 $G$，当 $p \geq \text{diam}(G)$ 时，其图幂 $G^p$ 就是具有 $n$ 个顶点的完全图 $K_n$。因此，本文只关注 $G^p$ 在 $1 \leq p \leq \text{diam}(G)$ 范围内的图幂。

## 2.1 汉明图

现在我们来探讨汉明图及其特殊情形——超立方体。（感兴趣的读者可参阅 [BCN89, 第 261–267] 和 [HIK11, 第 167–168]，了解有关汉明图的进一步讨论。关于超立方体的精彩概述也见 [HIK11, 第 17–18]。）在定义这些图之前，为方便起见，我们先介绍其顶点距离函数——汉明度量。

**定义 2 (汉明度量与距离)**。 设 $n \geq 1$ 和 $q \geq 2$，并考虑由 $q$ 元字母表中的长度为 $n$ 的字符串构成的集合 $\mathbb{Z}_q^n$。赋予其汉明度量 $d_H \colon \mathbb{Z}_q^n \times \mathbb{Z}_q^n \to \{0, 1, \ldots, n\}$ 后，便得到度量空间 $(\mathbb{Z}_q^n, d_H)$。其中，两条字符串 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_q^n$之间的汉明距离 $d_H(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 定义为它们不同位置的数量：

$$d_H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \coloneqq |\{i \in [n] \mid u_i \neq v_i\}|.$$

现在，我们已经充分掌握了所需术语，可以用顶点集和边集完整地描述汉明图和超立方体。

**定义 3**（汉明图）。 设 $n \geq 1$ 和 $q \geq 2$。汉明图 $H(n, q)$ 是这样一种图：其顶点对应所有可能的长度为 $n$ 的 $q$ 元字符串，且当两个顶点对应的字符串恰好有一个位置不同时，它们之间便有边相连。更形式化地，$H(n, q)$ 的顶点集和边集定义如下：

$$V(H(n,q)) \coloneqq \mathbb{Z}_q^n, \quad E(H(n,q)) \coloneqq \left\{\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subseteq \mathbb{Z}_q^n \;\middle|\; d_H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1\right\}.$$

**定义 4**（超立方体）。 超立方体 是汉明图的一个特例，定义为 $Q_n \coloneqq H(n, 2)$。不依赖汉明图术语来描述 $Q_n$ 的另一种方式是：

$$V(Q_n) \coloneqq \mathbb{Z}_2^n, \quad E(Q_n) \coloneqq \left\{\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subseteq \mathbb{Z}_2^n \;\middle|\; d_H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1\right\}.$$

注意，汉明图的直径为 $\text{diam}(H(n, q)) = n$，无论 $q$ 的取值如何，因为任意两个顶点之间的最大汉明距离为 $n$（当它们对应的 $q$ 元字符串在所有位置上都不同时）。根据备注 2.1，因此我们只考虑 $H(n, q)^p$，其中 $p \leq n$。

## 2.2 约翰逊图和克奈泽图

我们还希望为约翰逊图、克奈泽图及其幂图建立色数下界。（再次说明，关于约翰逊图的有益补充讨论可见 [BCN89，第 255–261] 页，其中也简要提到了密切相关的克奈泽图。若要更详细地了解克奈泽图，请参阅 [HIK11，第 22]页。）下面给出这些图的定义。

**定义 5**（约翰逊图）。令 $k \geq 1$ 和 $n \geq k$。约翰逊图 $J(n, k)$ 是这样一个图，其顶点对应于 $[n]$ 的所有可能的 $k$-子集；当两个顶点的交集的基数为 $k - 1$时，它们相邻。更形式化地说，$J(n, k)$ 的顶点集和边集定义如下

$$V(J(n,k)) \coloneqq \binom{[n]}{k}, \quad E(J(n,k)) \coloneqq \left\{\{A, B\} \subseteq \binom{[n]}{k} \;\middle|\; |A \cap B| = k - 1\right\}.$$

**定义 6**（克奈泽图）。设 $k \geq 1$ 和 $n \geq 2k$。克奈泽图 $K(n, k)$ 是一个图，其顶点对应于 $[n]$ 的所有可能的 $k$ 元子集，且当两个顶点对应的不相交集合时，它们相邻。更正式地，$K(n, k)$ 的顶点集和边集定义如下：

$$V(K(n,k)) \coloneqq \binom{[n]}{k}, \quad E(K(n,k)) \coloneqq \left\{\{A, B\} \subseteq \binom{[n]}{k} \;\middle|\; A \cap B = \emptyset\right\}.$$

**备注 2.2**。克奈泽图的标准定义施加了约束 $n \geq 2k$，因为如果 $n < 2k$，则 $[n]$ 的任意两个 $k$ 元子集都不相交，而且 $K(n, k)$ 只是一个没有边的空图。此外，在 $n = 2k$ 的情况下，对于每个 $p \geq 1$，$K(n, k)^p$ 都是一个完美匹配。众所周知，完美匹配的色数为2，因此我们只关注研究 $n > 2k$ 时 $\chi(K(n, k)^p)$ 的霍夫曼界，尽管根据定义，$n = 2k$ 也是一种有效情况。

值得注意的是，约翰逊图和克奈泽图密切相关：$K(n, k)$ 恰好是 $J(n, k)$ 的距离-$k$ 图。也就是说，$K(n, k)$ 和 $J(n, k)$ 具有相同的顶点集；在 $K(n, k)$ 中，两个顶点相邻，当且仅当它们在 $J(n, k)$ 中的最短路径距离恰好为 $k$（这发生在对应的 $k$-子集彼此不相交时）。这一关系使我们能够在第 4 节中利用同一族 HOP——即 Eberlein 多项式——高效计算 $J(n, k)^p$ 和 $K(n, k)^p$ 的霍夫曼界。

与汉明图上的汉明度量一样，容易得到 $J(n, k)$ 上顶点距离函数的闭式表达式。

**命题 2.3**。设 $k \geq 1$ 和 $n \geq k$，且假设 $A$、$B \in \binom{[n]}{k}$ 满足 $|A \cap B| = x$。那么，约翰逊图 $J(n, k)$ 中 $A$ 与 $B$ 之间的最短路径距离为

$$d_{J(n,k)}(A, B) = k - x.$$

证明。由于 $J(n, k)$ 中的两个顶点相邻，当且仅当它们恰好相差一个元素，因此从 $A$ 到 $B$ 的最短路径对应于依次将 $A \setminus B$ 中的元素替换为 $B \setminus A$ 中的元素。因此，要到达 $B$，我们恰好需要进行 $k - |A \cap B|$ 次替换，这正是所需结论。□

因此，约翰逊图的直径为 $\operatorname{diam}(J(n, k)) = \min\{k, n-k\}$，因为任意两个顶点 $A$ 和 $B$ 之间的最大距离出现在 $|A \cap B|$ 取最小值时——要么是 0（当 $n \geq 2k$ 时，此时距离为$k$），要么是 $2k - n$（当 $n < 2k$ 时，此时距离为 $n - k$）。因此，我们只考虑满足 $p \leq \min\{k, n - k\}$ 的约翰逊图幂 $J(n, k)^p$，这与注 2.1 一致。

另一方面，刻画克奈泽图中的相邻关系并不那么简单。尽管在 $K(n, k)$ 上，顶点距离函数仍存在一个显式的 $O(1)$ 公式，但它复杂得多，也无法像克奈泽图的基本定义那样直接得到。下面给出这一公式——引自已有文献。

**命题 2.4**。设 $k \geq 1$ 和 $n > 2k$，并假设 $A$,$B \in \binom{[n]}{k}$ 满足 $|A \cap B| = x$。那么，克奈泽图 $K(n, k)$ 中 $A$ 与 $B$ 之间的最短路径距离为

$$d_{K(n,k)}(A, B) = \min\left\{2\left\lceil \frac{k-x}{n-2k} \right\rceil, 2\left\lceil \frac{x}{n-2k} \right\rceil + 1\right\}.$$

证明。见 [VPV05]。□

来自 [VPV05] 的另一项相关结果（事实上，这是他们的主要贡献）指出，克奈泽图的直径恰好是 $\operatorname{diam}(K(n, k)) = \left\lceil \frac{k-1}{n-2k} \right\rceil + 1$。因此，注 2.1 再次告诉我们，只需考虑满足 $K(n, k)^p$ 的 Kneser 图幂 $p \leq \left\lceil \frac{k-1}{n-2k} \right\rceil + 1$。——

## 2.3 关联方案

与汉明图和约翰逊图等距离正则图密切相关的一个概念是关联方案，其性质构成了我们高效计算霍夫曼界的方法基础。（关于关联方案的进一步讨论，见 [BI84], ；事实上，我们在文中多次引用了该文。）下面定义这些对象。

**定义 7 (关联方案)**。$n$ 类关联方案是一个有序对 $(X, \{R_i\}_{i=0}^n)$，其中$X$ 是一个集合，$\{R_i\}_{i=0}^n$ 是 $X \times X$ 的一个划分，并满足以下性质：

*(i)* $R_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}$

*(ii)* 对于所有 $1 \le i \le n$，逆关系 $\{(x,y) \mid (y,x) \in R_i\}$ 也属于集合 $\{R_i\}_{i=0}^n$

*(iii)* 对于所有 $0 \le i$、$j$、$k \le n$，存在常数 $p_{i,j}^k$ 使得对于任意 $(x, y) \in R_k$，满足 $(x, z) \in R_i$ 且 $(z, y) \in R_j$ 的元素数量恰好为 $p_{i,j}^k$

给定一个关联方案 $(X, \{R_i\}_{i=0}^n)$，每个 $(X, R_i)$ 都可以视为一个图，其顶点集为 $X$，边集为 $R_i$。（如果 $R_i$ 不具有对称性，则这是一个有向图；因此，本文将注意力限制在其关系均具有对称性的关联方案上。）因此，每个距离正则图 $G$ 都有一个相应的关联方案 $(V(G), \{D_i\}_{i=0}^{\mathrm{diam}(G)})$，其中每个 $(V(G), D_i)$ 的邻接矩阵$A_i$ 恰好是 $G$ 的距离-$i$ 矩阵。由此可知，图幂 $G^p$ 的特征值等于对 $i = 1$、2、.....、$p$ 上各 $A_i$ 的特征值求和。

这些邻接矩阵称为关联方案的基矩阵，它们的张成空间称为关联方案的*Bose–Mesner*代数。一个重要性质是，任意关联方案的基矩阵 $\{A_i\}_{i=0}^n$ 都可以同时对角化，并具有公共特征空间分解 $V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$，其中 $V_0$ 是由全一向量张成的子空间 [BI84，第 58–60]页。此外，表示距离正则图的关联方案基矩阵，其特征值总是由一类称为超几何正交多项式（即 HOP）给出。这些多项式构成满足递推关系的正交序列，因此能够高效地计算连续项——更多细节请参见 [KS98]。因此，我们可以利用汉明方案和约翰逊方案中的 HOP 来计算汉明图幂和约翰逊图幂的特征值（同样也可以计算克奈泽图幂的特征值，因为它们与约翰逊图存在联系），具体将在第3 节和第4节中分别进行。

## 2.4 已知界与应用

汉明图和克奈泽图的精确色数都广为人知。由于 $H(n,q)$ 是 $n$ 个顶点上的完全图的笛卡尔积，而笛卡尔积的色数等于其各因子色数的最大值，因此不难看出，对于所有 $n \ge 1$ 和 $q \ge 2$，都有 $\chi(H(n,q)) = q$。此外，[Lov78] 的奠基性工作证明了一个由来已久的猜想：对于所有 $k \ge 1$ 和 $n \ge 2k$，都有 $\chi(K(n,k)) = n - 2k + 2$。另一方面，$\chi(J(n,k))$ 的精确值仍是一个开放问题，但团数 $\omega(J(n,k)) = \max\{k+1, n-k+1\}$ 为 $\chi(J(n,k))$ 提供了一个初等下界。事实上，写出 $A(J(n,k))$ [Vor20]，众所周知的最小和最大特征值后，不难看出，$\omega(J(n,k))$ 总是等于 $J(n,k)$ 的霍夫曼界。因此，我们计算 $H(n,q)$、$J(n,k)$ 和 $K(n,k)$ 的霍夫曼界的方法并未优于现有结果，但为保持一般性，我们仍在所有结果中纳入 $p = 1$ 情形，以及 $p = \mathrm{diam}(G)$ 情形，其中 $\chi(G^p) = \chi(K_{|V(G)|}) = |V(G)|$。

相比之下，我们关于以下形式图幂的结果 $H(n,q)^p$，$J(n,k)^p$和 $K(n,k)^p$ 仍属创新成果。目前，关于海明图、约翰逊图或克奈泽图的图幂（而不仅仅是这些图本身），唯一已有的色数下界专门针对超立方体图幂。[FFR17] 的研究与此最为相关——除了给出另一种称为 $b$-色数的不变量的下界外，他们还确定了超立方体图幂的团数精确值：

$$\omega(Q_n^p) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}} \binom{n}{i} & \text{if } p \text{ is even} \\ \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{n-1}{i} & \text{if } p \text{ is odd.} \end{cases}$$

由于 $\omega$ 为 $\chi$提供下界，因此可将其推广为以下界

$$\chi(Q_n^p) \ge \begin{cases} \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}} \binom{n}{i} & \text{if } p \text{ is even} \\ \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{n-1}{i} & \text{if } p \text{ is odd,} \end{cases}$$

数值结果表明，对于超立方体图幂，这通常比我们定理 3.3 中的界略紧。利用众所周知的递推关系 $\binom{n}{i} = \frac{n-i+1}{i}\binom{n}{i-1}$，可以直接根据 $\binom{n}{i}$ 的值计算 $O$中的 (1)，因此计算这个界总共需要 $\binom{n}{i-1}$，所以计算这个界需要 $O(p)$ 时间——也略微

比我们采用的 $O(np)$ 方法更高效。不过，本研究仍首次为一般汉明图幂以及任意 Johnson 图幂或 Kneser 图幂，给出了非平凡且在计算上可行的色数下界。

这些下界在编码理论、纠错和分布式计算中有多种具体应用。例如，$H(n,\ q)^p$ 是以下模型的冲突图：模型中的进程由$n$ 个参数来表征，每个参数均取自 $q$ 个值，并且相差至多 $p$ 个参数的配置之间会发生冲突。由于冲突图的色数等于实现无冲突分配所需资源的最少数量 [BNBH+98]，我们关于 $\chi(H(n,\ q)^p$的下界有助于确定具有这种冲突结构的分布式系统的资源需求。

约翰逊图的着色与编码理论之间的联系早已为人熟知——例如，$\chi(J(n,k))$恰好是将所有长度为 $n$ 、重量为 $k$ 的二进制字划分为最小汉明距离为 4 [EB96]的恒重码所需的最少划分数。找到 $\chi(J(n,k))$更紧的界——其精确值尚不为人所知——将直接推动此类码的改进构造，正如 [BE11]所展示的那样。将这一结果推广到约翰逊图幂也很直接——$\chi(J(n,k)^p)$等于划分为最小汉明距离为$2p+2$的恒重码所需的最少划分数——这也确立了色数下界对于 $J(n,k)^p$ 的重要性。

克奈泽图及其幂的应用，较少有人研究，不及汉明图和约翰逊图的应用常见；不过，它们仍是编码理论等若干应用领域中值得研究的对象（例如，参见 [CHMv24]）。尽管 $\chi(K(n,k))$ 的精确值已广为人知，但目前尚无计算上可行的 $\chi(K(n,k)^p$界。色数是一个具有广泛应用的基本图不变量，本文试图填补文献中的这一空白。

## 3 汉明图幂的霍夫曼界

我们高效计算 $H(n,q)^p$ 的霍夫曼界的方法，首先且最重要的是依赖于获得 $A(H(n,q)^p)$ 的特征值闭式表达。为此，我们首先介绍汉明关联方案，稍后将会看到它与汉明图及其谱密切相关。

**定义 8**（汉明关联方案）。 $q$元 $n$类 汉明关联方案是有序对 $\left(\mathbb{Z}_q^n, \{H_i^{(q)}\}_{i=0}^n\right)$，其中

$$H_i^{(q)} \coloneqq \left\{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbb{Z}_q^n \times \mathbb{Z}_q^n \;\middle|\; d_H(\mathbf{u},\mathbf{v}) = i\right\}.$$

注意，我们可以将该方案的 Bose–Mesner代数 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{q^n \times q^n}$ 写作 $\mathcal{A} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{A_i^{(q)}\}_{i=0}^n$，其中基矩阵 $A_i^{(q)} \in \mathbb{R}^{q^n \times q^n}$ 定义如下

$$\left[A_i^{(q)}\right]_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{if } (\mathbf{u},\mathbf{v}) \in H_i^{(q)} \\ 0 & \text{if } (\mathbf{u},\mathbf{v}) \notin H_i^{(q)}. \end{cases}$$

我们还需要引入最后一个数学构造，即克拉夫丘克多项式——这是一族与汉明方案密切相关的 HOP。

**定义 9** (克拉夫丘克多项式 [Kra29])。 设 $n$，$q \geq 1$。对于所有 $0 \leq i \leq n$，我们定义 $i^{th}$ 克拉夫丘克多项式：$x$ 关于 $n$ 和 $q$ 为

$$\mathcal{K}_i(x;n,q) \coloneqq \sum_{j=0}^{i} (-1)^j (q-1)^{i-j} \binom{x}{j} \binom{n-x}{i-j}.$$

我们现在已经具备证明以下关于$A(H(n、\ q)^p)$的谱的结果所需的全部工具。

**引理 3.1**。 对于所有 $n \geq 1$、 $q \geq 2$ 和 $1 \leq p \leq$ 直径$(H(n,q)) = n$，邻接矩阵 $A(H(n,q)^p)$ 的最大特征值为

$$\sum_{i=1}^{p} (q-1)^i \binom{n}{i}$$

以及其他 $n$ 特征值为

$$\left\{ \sum_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i(k;n,q) \,\middle|\, 1 \leq k \leq n \right\}.$$

此外， $A$（$H$（$n,q$）$^p$）的最小特征值为负。

证明。假设 $n \geq 1$, $q \geq 2$和 $1 \leq p \leq n$，并考虑汉明方案 $\left(\mathbb{Z}_q^n, \{H_i^{(q)}\}_{i=0}^n\right)$的基矩阵 $\{A_i^{(q)}\}_{i=0}^n$ 。根据定义， $A_i^{(q)}$ 是汉明图$H(n,q)$的距离-$i$ 矩阵，因此， $H(n,q)^p$ 的邻接矩阵可表示为这些基矩阵之和：

$$A(H(n,q)^p) = \sum_{i=1}^{p} A_i^{(q)}.$$

现在令 $V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ 为 $A_i^{(q)}$ 的公共特征空间分解，其中 $V_0$ 由全一向量张成。根据 [BI84，第 209–210], 页，我们还知道， $\lambda_k$ 在特征空间 $V_k$ 上的特征值可通过计算克拉夫丘克多项式 $\mathcal{K}_i$（$k$； $n$， $q$）得到；由此立即可得， $n+1$ (（$H$（$n$， $q$）$^p$) 的不同特征值为

$$\mathrm{Spec}(A(H(n,q)^p)) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i(k;n,q) \,\middle|\, 0 \leq k \leq n \right\}.$$

由于如上所述，将佩龙–弗罗贝尼乌斯定理应用于 $A$(H(n， q)$^p$)告诉我们，相应的特征值

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i(0;n,q) = \sum_{i=1}^{p} (q-1)^i \binom{n}{i}$$

必定是最大的。

现在注意到，由于这些 $A_i^{(q)}$ 是实对称矩阵且对角线全为零，必须满足以下约束：

$$\mathrm{tr}\left(A(H(n,q)^p)\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{tr}\left(A_i^{(q)}\right) = 0.$$

由于我们的 $\lambda_0$ 表达式必然取正值，而迹等于所有特征值之和（计入重数），因此 $A$(H(n， q)$^p$)的最小特征值必须为负值，才能满足迹的要求；证毕。

□

**备注 3.2**。 另一种证明引理 *3.1* 的方法是对群 $\mathbb{Z}_q^n$进行傅里叶分析。汉明方案的基矩阵 $A_i^{(q)}$ 在所有 $\mathbb{Z}_q^n \to \mathbb{C}$ 函数的集合上通过卷积作用，因此它们可由 $\mathbb{Z}_q^n$的特征标基同时对角化。为简洁起见，我们省略此处的细节；随后不难看出，相应的特征值可通过计算克拉夫丘克多项式得到，正如引理 *3.1*的原始证明中所做的那样。尽管这种方法无疑提供了额外的直观理解，但在全文中我们选择使用关联方案的框架，因为这更自然地延伸到第 *4*节对约翰逊图和克奈泽图的研究。（我们将在第 *5*节稍后简要讨论表示论和调和分析研究的更多方向。）

由此，我们可以迅速得到 $H(n,q)^p$ 的霍夫曼界的闭式表达，如下所示。

**定理 3.3**。 对于所有 $n \geq 1$、 $q \geq 2$ 和 $1 \leq p \leq$ 直径$(H(n,q)) = n$,

$$\chi(H(n,q)^p) \geq 1 + \frac{\sum_{i=1}^{p} (q-1)^i \binom{n}{i}}{-\min\limits_{1 \leq k \leq n} \{\sum_{i=1}^{p} \mathcal{K}_i(k;n,q)\}}.$$

证明。 直接由引理 3.1 和霍夫曼界可得

$$\chi(G) \geq 1 + \frac{\max \operatorname{Spec}(A(G))}{|\min \operatorname{Spec}(A(G))|}$$

来自 [霍夫03]。 □

即使不进行进一步优化，这个闭式形式也已经能够显著提升相较于执行奇异值分解或QR分解来求 $A(H(n,q)^p) \in \mathbb{R}^{q^n \times q^n}$ 的效率——这两种方法的复杂度都是 $O(q^{3n})$。具体而言，以这种方式朴素计算霍夫曼界需要 $O(np^2)$ 的时间：每个特征值都表示为一个二重求和，外层迭代次数为 $p$，内层迭代次数最多为 $p+1$。虽然从头计算内层项的和并非 $O(1)$，但我们可以调用同样的递推关系 $\binom{n}{i} = \frac{n-i+1}{i}\binom{n}{i-1}$（来自第 2.4 小节），以常数时间依次求出二项式系数。类似地，每个幂 $(q-1)^{i-j}$ 都可以通过一次除法由 $(q-1)^{i-j+1}$ 计算得到。这样，我们就能在 $O(1)$ 时间内计算每个内层项，因此每个特征值总共需要 $O(p \cdot (p+1) \cdot 1) = O(p^2)$ 的时间。为了找到分母中的最小特征值，我们总共计算 $n$ 个特征值，从而整体复杂度为 $O(np^2)$。该方法也不需要分配额外内存，只需 $O(1)$ 空间。

不过，随着汉明图的幂次增加， $O(np^2)$ 的时间复杂度会变得越来越难以接受。因此，为了得到一种只需 $O(np)$ 时间的替代算法——这也是本节的核心结果——我们确定并证明了以下克拉夫丘克多项式之间的递推关系。

**引理 3.4.** 对于所有 $1 \leq i \leq p$，以下克拉夫丘克多项式之间的递推关系成立：

*(i)* $\mathcal{K}_i(0;n,q) = \dfrac{(n-i+1)(q-1)}{i} \cdot \mathcal{K}_{i-1}(0;n,q)$

*(ii)* $\mathcal{K}_i(k;n,q) = \dfrac{(n-k-i+1)(q-1)}{i} \cdot \mathcal{K}_{i-1}(k;n,q) - \dfrac{k}{i} \cdot \mathcal{K}_{i-1}(k-1;n,q)$ *for all* $k \geq 1$

证明。 固定 $n \geq 1$ 和 $1 \leq p \leq n$，并假设 $1 \leq i \leq p$ 和 $0 \leq k \leq n$。将克拉夫丘克多项式 $\mathcal{K}_i(k;n,q)$ 乘以 $i$，得到

$$\begin{aligned} i \cdot \mathcal{K}_i(k;n,q) &= ((i-j)+j) \sum_{j=0}^{i} (-1)^j (q-1)^{i-j} \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j} \\ &= \sum_{j=0}^{i} (-1)^j (q-1)^{i-j} \binom{k}{j} (i-j) \binom{n-k}{i-j} + \sum_{j=0}^{i} (-1)^j (q-1)^{i-j} j \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j}. \end{aligned}$$

当 $j = i$ 时，第一项求和中的表达式等于零；当 $j = 0$ 时，第二项求和中的表达式等于零。因此，我们可以进一步将其简化为

$$i \cdot \mathcal{K}_i(k;n,q) = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (q-1)^{i-j} \binom{k}{j} (i-j) \binom{n-k}{i-j} + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j (q-1)^{i-j} j \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j}.$$

我们可以重新排列著名的递推关系 $\binom{a}{b} = \frac{(a-b+1)}{b}\binom{a}{b-1}$，从而得到有用的恒等式

$b\binom{a}{b} = (a-b+1)\binom{a}{b-1}$。令 $a = n-k$ 和 $b = i-j$，我们注意到 $i \cdot \mathcal{K}_i(k;n,q)$ 随即变为

$$\begin{aligned} i \cdot \mathcal{K}_i(k;n,q) &= \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (q-1)^{i-j} \binom{k}{j} (n-k-i+j+1) \binom{n-k}{i-j-1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j (q-1)^{i-j} j \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j} \\ &= (n-k-i+1)(q-1) \cdot \mathcal{K}_{i-1}(k;n,q) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (q-1)^{i-j} j \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j-1} + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j (q-1)^{i-j} j \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j}. \end{aligned}$$

如果 $k = 0$，那么 $\binom{k}{j} = 0$，且两个求和均为 0，因此将等式两边除以 $i$ 即可得到引理 3.4(i) 的陈述。处理完这一点后，我们现在考虑 $k \geq 1$，以证明引理 3.4(ii)。

当然，当 $j = 0$ 时，我们有 $(-1)^j (q-1)^{i-j} j \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j-1} = 0$，因此可以进一步化简为

$$\begin{aligned} i \cdot \mathcal{K}_i(k;n,q) &= (n-k-i+1)(q-1) \cdot \mathcal{K}_{i-1}(k;n,q) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j (q-1)^{i-j} j \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j-1} + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j (q-1)^{i-j} j \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j}. \end{aligned}$$

根据吸收恒等式，$j\binom{k}{j} = k\binom{k-1}{j-1}$；由于我们要求 $k \geq 1$，该量是定义良好的。代入此式并以 $l = j-1$ 重新编号后，得到

$$\begin{aligned} i \cdot \mathcal{K}_i(k;n,q) &= (n-k-i+1)(q-1) \cdot \mathcal{K}_{i-1}(k;n,q) \\ &\quad - k \left( \sum_{l=0}^{i-2} (-1)^l (q-1)^{(i-1)-l} \binom{k-1}{l} \binom{n-k}{(i-1)-l-1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=0}^{i-1} (-1)^l (q-1)^{(i-1)-l} \binom{k-1}{l} \binom{n-k}{(i-1)-l} \right). \end{aligned}$$

将第二个求和中的 $l = i-1$ 情形单独分离出来，并合并得到的两个求和式，我们有

$$\begin{aligned} i \cdot \mathcal{K}_i(k;n,q) &= (n-k-i+1)(q-1) \cdot \mathcal{K}_{i-1}(k;n,q) \\ &\quad - k \left( \sum_{l=0}^{i-2} (-1)^l (q-1)^{(i-1)-l} \binom{k-1}{l} \left( \binom{n-k}{(i-1)-l-1} + \binom{n-k}{(i-1)-l} \right) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} \right). \end{aligned}$$

然后，我们可以应用帕斯卡恒等式 $\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$，令 $a = n-k$ 和 $b = (i-1) - l$，得到

$$\begin{aligned} i \cdot \mathcal{K}_i(k;n,q) &= (n-k-i+1)(q-1) \cdot \mathcal{K}_{i-1}(k;n,q) \\ &\quad - k \left( \sum_{l=0}^{i-2} (-1)^l (q-1)^{(i-1)-l} \binom{k-1}{l} \binom{n-k+1}{(i-1)-l} + (-1)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} \right). \end{aligned}$$

由于当 $l = i-1$ 时，$(q-1)^{(i-1)-l}$ 和 $\binom{n-k+1}{i-1\ \ ()-l}$ 的值均为 1，因此我们可以将孤立的 $(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}$

项重新并入求和式，得到

$$\begin{aligned} i \cdot \mathcal{K}_i(k;n,q) &= (n-k-i+1)(q-1)\cdot \mathcal{K}_{i-1}(k;n,q) \\ &\quad - k\left(\sum_{l=0}^{i-1}(-1)^l(q-1)^{(i-1)-l}\binom{k-1}{l}\binom{n-k+1}{(i-1)-l}\right) \\ &= (n-k-i+1)(q-1)\cdot \mathcal{K}_{i-1}(k;n,q) - k\cdot \mathcal{K}_{i-1}(k-1;n,q). \end{aligned}$$

最后，将两边相除以 $i$即可得到引理3.4(ii) 的结论，从而完成证明 f. □

这种关系使我们能够遍历 $i=1$、2、…、$p$的连续取值，并动态计算克拉夫丘克多项式 $\mathcal{K}_i(k;n,q)$，然后将这些值求和以得到各个 $\lambda_k$。具体而言，我们维护两个长度为 $n+1$的数组，分别称为 krav 和 lambda。krav 存储当前迭代中所有 $k=0$ = 1、…、$n$对应的 $\mathcal{K}_i(k;\,n,q)$ 值，而 lambda 累加每次迭代后的部分和 $\sum_{j=1}^{i}\mathcal{K}_j(k;\,n,q)$，以构造特征值 $\lambda_k=\sum_{i=1}^{p}\mathcal{K}_i(k;n,q)$（根据引理 3.1）。注意，对所有 $k$，初始情形为

$$\mathcal{K}_0(k;n,q)=\sum_{j=0}^{0}(-1)^j(q-1)^{0-j}\binom{k}{j}\binom{n-k}{0-j}=1,$$

因此，在第一次迭代之前，我们将 krav 的所有元素初始化为 1。

将 krav 从迭代 $i-1$ 更新到迭代 $i$ 时，我们按降序处理从 $k=n$ 到 $k=1$ 的位置，因为根据引理 3.4(ii) 计算 $\mathcal{K}_i(k;\,n,q)$ 时，不仅需要知道 $\mathcal{K}_{i-1}(k;n,q)$，还需要知道上一轮迭代中的 $\mathcal{K}_{i-1}(k-1;n,q)$。这确保了在计算新的 krav$[k]$ 时，krav$[k-1]$ 仍然保留着迭代 $i-1$ 中的旧值。（当然，根据引理 3.4(i) 计算每个 $\mathcal{K}_i(0;\,n,q)$ 要简单得多，因为它只取决于上一轮迭代中同一 krav$[0]$ 位置的值。）

下面我们将正式介绍这一动态规划方法，以结束第 3 节，并对算法的复杂度进行详尽分析。

**算法 3.5**。设 $n\geq 1$、$q\geq 2$和 $1\leq p\leq \operatorname{diam}(H(n,q))=n$。我们可以如下计算汉明图幂 $H(n,q)^p$ 的霍夫曼界：

1. 初始化一个名为 krav、大小为 $n+1$ 的数组，所有元素均设为 1。
2. 初始化一个名为 lambda、大小为 $n+1$ 的数组，所有元素均设为 0。
3. 对每个 $i=1$，2，…，$p$：
   (a) For each $k=n,n-1,\ldots,1$:
   Set $\texttt{krav}[k]\leftarrow \frac{(n-k-i+1)(q-1)}{i}\cdot\texttt{krav}[k]-\frac{k}{i}\cdot\texttt{krav}[k-1]$.
   (b) Set $\texttt{krav}[0]\leftarrow\frac{(n-i+1)(q-1)}{i}\cdot\texttt{krav}[0]$.
   (c) For each $k=0,1,\ldots,n$:
   Set $\texttt{lambda}[k]\leftarrow\texttt{lambda}[k]+\texttt{krav}[k]$.
4. 令 $\lambda_{\max}\leftarrow$lambda$[0]$。
5. 令 $\lambda_{\min}\leftarrow\min_{1\leq k\leq n}$lambda$[k]$。
6. 返回 $1+\frac{\lambda_{\max}}{-\lambda_{\min}}$，作为 $\chi(H(n,\ q)^p)$ 的下界。

该算法需要 $O(np)$ 时间和 $O(n)$空间。

证明。 正确性可直接由引理 3.1 和3.4得出，正如算法前面紧接着的段落中所解释的那样。现在我们来论证所声称的时间和空间复杂度。（请注意，我们假设算术运算和数组访问均为常数时间；如果采用字长增长的精确算术，则复杂度应改用位运算次数来衡量。）

不难看出，该算法的空间复杂度为 $O(n)$，因为我们在步骤 1 和步骤 2 中分别分配了两个大小为 $n+1$ 的数组。就时间而言，主要开销在步骤 3，该步骤包含一个执行 $p$ 次的外层循环。在每次循环迭代中，步骤 3(a) 对 krav 数组进行 $n$ 次常数时间更新，步骤 3(b) 再对 krav 进行一次更新，而步骤 3(c) 则对 lambda 进行 $n+1$ 次更新。正如第 1 节末尾给出的具体示例所示，步骤 3 的全部 $p$ 次迭代总计执行 $p(2n+2) = O(np)$ 次常数时间操作。这显然超过了初始化 krav 和 lambda 数组（步骤 1 和步骤 2）以及计算 $\lambda_{\min}$ （步骤 5）的 $O(n)$ 开销，因此可知，整体时间复杂度为 $O(np)$，符合预期。 □

值得注意的是，算法 3.5 的时间复杂度和空间复杂度都与 $q$ 无关，因此，无论 $q$ 取何值，计算任意 $H(n,q)^p$ 的霍夫曼界，其开销都不会高于计算 $Q_n^p$ 的情形。尽管我们采用的 $O(np)$ 时间方法仍略逊于 [FFR17] 对 $\chi(Q_n^p)$ 给出的下界——正如第 2.4 小节所述，该下界可以在 $O(p)$ 时间内计算——但它将适用范围从超立方体图幂推广到了汉明图幂，代表了通常情况下针对 $\chi(H(n,q)^p)$ 的首个实用下界。

# 4 约翰逊图和克奈泽图幂的霍夫曼界

与我们在第 3 节对汉明图幂所做的工作类似，现在我们着手高效计算约翰逊图幂和克奈泽图幂的霍夫曼界。正如第 2.2 小节所述，克奈泽图 $K(n,k)$ 恰好是约翰逊图 $J(n,k$ 的距离-$k$ 图，因此，尽管二者的邻接条件不同，它们仍具有根本性的结构相似性。正如我们利用汉明方案分析汉明图幂一样，也可以通过约翰逊方案及其相关的 HOP 族来研究这两类图；下面我们将介绍这一关联方案。

**定义 10** （约翰逊关联方案）。该 $n$元 $k$类 约翰逊关联方案是有序对 $\left(\binom{[n]}{k}, \{J_i^{(n)}\}_{i=0}^{k}\right)$，其中

$$J_i^{(n)} := \left\{(A,B) \in \binom{[n]}{k} \times \binom{[n]}{k} \,\middle|\, |A \cap B| = k-i\right\}.$$

如同第 3 节中处理汉明方案时一样，我们将约翰逊方案的 Bose–Mesner代数 $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^{\binom{n}{k}\times\binom{n}{k}}$ 表示为由 $\mathcal{B} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{B_i^{(n)}\}_{i=0}^{k}$ 张成的空间，其中基矩阵 $B_i^{(n)} \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}\times\binom{n}{k}}$ 定义如下：

$$\left[B_i^{(n)}\right]_{A,B} := \begin{cases} 1 & \text{if } (A,B) \in J_i^{(n)} \\ 0 & \text{if } (A,B) \notin J_i^{(n)}. \end{cases}$$

注意，$B_i^{(n)}$ 恰好是约翰逊图 $J(n,k)$ 的距离-$i$ 矩阵；因此，$A(J(n,k)^p)$ 就是前 $p$ $B_i^{(n)}$ 个矩阵之和。另一方面，由于 $K(n,k)$ 是 $J(n,k)$ 的距离-$k$ 图，$A(K(n,k)^p)$ 恰好是所有满足以下条件的 $B_i^{(n)}$ 之和：$J(n,k)$ 中的距离 $i$ 映射到 $K(n,k)$ 中介于 1 和 $p$ 之间的距离（我们将在本节稍后对这一概念作形式化定义）。

为了利用这些基矩阵高效计算 $A(K(n,\ k)^p)$ 和 $A(J(n,\ k)^p)$ 的特征值，我们利用了这样一个事实：这些 $B_i^{(n)}$ 具有公共特征空间分解。为此，我们首先定义埃伯莱因多项式。

**定义 11** (埃伯莱因多项式 [Del73])。设 $k \geq 1$ 且 $n \geq k$。对于所有 $0 \leq i \leq k$，我们定义 $i^{th}$埃伯莱因多项式关于 $x$ 相对于 $n$ 和 $k$ 如下

$$\mathcal{E}_i(x;n,k) := \sum_{t=0}^{i}(-1)^t \binom{x}{t}\binom{k-x}{i-t}\binom{n-k-x}{i-t}.$$

这些多项式在约翰逊关联方案中发挥的作用，与克拉夫丘克多项式在汉明方案中发挥的作用相同。具体而言，约翰逊方案的每个基矩阵 $B_i^{(n)}$ 的$\left(\binom{[n]}{k}, \{J_i^{(n)}\}_{i=0}^{k}\right)$ 特征值可通过计算埃伯莱因多项式 $\mathcal{E}_i(x;\ n,\ k)$ 在 $0 \le i \le k$ [BI84，第 220]页

建立 $J(n,k)^p$ 的邻接谱的方法已经很明确——我们只需采用与引理 3.1 类似的策略。然而，要建立 $K(n,k)^p$ 的邻接谱，我们首先需要刻画不超过 $k$ 的哪些约翰逊距离对应哪些克尼斯尔距离，以便将 $A(K(n,k)^p)$ 表示为若干个 $B_i^{(n)}$ 的和。（我们只考虑不超过 $k$ 的约翰逊距离，因为克奈泽图 $K(n,k)$ 要求 $n > 2k$；在这种情况下，根据第 2.2 小节，我们知道 $\mathrm{diam}(J(n,k)) = \min\{k, n-k\} = k$。）因此，我们利用命题 2.4 中的克尼斯尔图距离公式，将这种关系形式化。

**引理 4.1**。设 $k \ge 1$ 和 $n > 2k$，并定义函数 $\delta_{n,k}\colon \{0,1,\dots,k\} \to \mathbb{Z}_{\ge 0}$，使其满足

$$\delta_{n,k}(i) := \min\left\{2\left\lceil\frac{i}{n-2k}\right\rceil, 2\left\lceil\frac{k-i}{n-2k}\right\rceil + 1\right\}.$$

那么，对于所有 *Johnson*/克奈泽图顶点 $A, B \in \binom{[n]}{k}$，$J(n,k)$ 与 $K(n,k)$ 中的距离关系可由 $d_{K(n,k)}(A,B) = \delta_{n,k}(d_{J(n,k)}(A,B))$ 给出。

证明。固定 $k \ge 1$ 和 $n > 2k$，并假设 $A, B \in \binom{[n]}{k}$ 是满足以下条件的 Johnson/克奈泽图顶点 $|A \cap B| = x$。根据命题 2.3，我们知道 $d_{J(n,k)}(A,B) = k - x$；将 $i = k - x$ 代入命题 2.4 中 $d_{K(n,k)}$ 的公式，即得

$$d_{K(n,k)}(A,B) = \min\left\{2\left\lceil\frac{i}{n-2k}\right\rceil, 2\left\lceil\frac{k-i}{n-2k}\right\rceil + 1\right\} = \delta_{n,k}(i) = \delta_{n,k}(d_{J(n,k)}(A,B)),$$

如所需。 □

确定了距离映射 $\delta_{n,k}$ 后，我们现在可以据此刻画 $J(n,k)^p$ 和 $K(n,k)^p$ 的邻接谱。

**引理 4.2.** 对于所有 $k \ge 1$，以下关于 *Johnson* 图幂和克奈泽图幂的邻接谱的结果成立：

***(i)*** 对所有 $n \ge k$ 和 $1 \le p \le$ 直径$(J(n,k)) =$ 最小值$\{k, n-k\}$，邻接矩阵 $A(J(n,k)^p)$ 的最大特征值为

$$\sum_{i=1}^{p}\binom{k}{i}\binom{n-k}{i}$$

其余 $k$ 特征值为

$$\left\{\sum_{i=1}^{p}\mathcal{E}_i(j;n,k)\,\middle|\,1 \le j \le k\right\}.$$

***(ii)*** 对所有 $n > 2k$ 和 $1 \le p \le$ 直径$(K(n,k)) = \left\lceil\frac{k-1}{n-2k}\right\rceil + 1$，邻接矩阵 $A(K(n,k)^p)$ 的最大特征值为

$$\sum_{i \in \delta_{n,k}^{-1}([p])}\binom{k}{i}\binom{n-k}{i}$$

其余 $k$ 特征值为

$$\left\{\sum_{i \in \delta_{n,k}^{-1}([p])}\mathcal{E}_i(j;n,k)\,\middle|\,1 \le j \le k\right\},$$

其中 $\delta_{n,\ k}$ 的定义见引理 *4.1*（因此，原像 $\delta_{n\ k,}^{-1}$（$[p]$）是 $J$（$n,k$）中映射到 $K$（$n,k$）中介于 1 和 $p$ 之间某个距离的所有距离的集合）。

此外，两类图幂的最小特征值始终为负。

证明。我们首先证明 (i) 部分。为此，假设 $k \geq 1$, $n \geq k$ 和 $1 \leq p \leq \min\{k, n-k\}$。由于 $B_i^{(n)}$ 是 $J(n, k)$ 的距离-$i$ 矩阵，我们知道

$$A(J(n,k)^p) = \sum_{i=1}^{p} B_i^{(n)}.$$

接下来，考虑 $B_i^{(n)}$ 的任意公共特征空间分解 $V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$，其中 $V_0$ 由全一向量张成。$B_i^{(n)}$ 在特征空间 $V_j$ 上的特征值 $\lambda_j$ 由埃伯莱因多项式 $\mathcal{E}_i(j; n, k)$ 给出（BI84，第 220] 页）；由于 $A(J(n, k)^p)$ 是这些矩阵之和，其特征值因此是相应埃伯莱因多项式之和。因此我们看到，$A(J(n, k)^p)$ 的 $k+1$ 个不同特征值为

$$\operatorname{Spec}(A(J(n,k)^p)) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \mathcal{E}_i(j; n, k) \,\middle|\, 0 \leq j \leq k \right\}.$$

通过几乎与引理 3.1 的证明中所述论证完全相同的论证，很容易看出，特征值

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^{p} \mathcal{E}_i(0; n, k) = \sum_{i=1}^{p} \binom{k}{i}\binom{n-k}{i}$$

是最大的，并且为了满足关于 $A(J(n, k)^p)$ 的迹约束，最小特征值必须为负，如所需。

现在可以看出，(ii) 部分的证明很快就能完成。取一些新的 $n > 2k$ 和 $1 \leq p \leq \left\lceil \frac{k-1}{n-2k} \right\rceil + 1$，并注意到，由于 $K(n, k)$ 是 $J(n, k)$ 的距离$k$图，引理 4.1 立即告诉我们

$$A(K(n,k)^p) = \sum_{i \in \delta_{n,k}^{-1}([p])} B_i^{(n)}.$$

证明的其余部分与 (i) 部分完全相同——只是对 $i \in \delta_{n\,k}^{-1}$, $([p])$ 求和，而不是对 $i \in [p]$ 求和——于是证明完成。 □

注 *4.3.* 由于 $J(n, k)$ 是距离传递的，因此只需考察其自同构群，便可相当直接地导出其邻接谱。具体而言，*[BCN89*，第 *255–256]* 页给出了一个简明证明，说明 $A(J(n, k))$ 的 $k+1$ 个不同特征值为 $\lambda_j = (k-j)(n-k-j) - j$，重数为 $\mu_j = \binom{n}{j} - \binom{n}{j-1}$，其中 $j = 0$ 取遍 *1, . . . , k*。（事实上，每个 $\mathcal{E}_1(j; n, k)$ 的值恰好为上文定义的 $\lambda_j$，这与我们在 $p = 1$ 情形下从引理 *4.2(i)* 得出的结果一致。）然而，要将这种构造推广到约翰逊图的幂并不容易（约翰逊图的幂一般并非距离传递），因此我们需要改用约翰逊关联方案的性质。

注 *4.4.* 我们进一步指出，原像 $\delta_{n\,k}^{-1}$、$([p])$ 不一定构成连续区间；例如，直接计算表明，对于 $n$、$k$、$p$，$\delta_{n\,k}^{-1}$、$([p]) = \{1, 4\} = (9, 4, 2)$。不过，这不会带来算法上的困难——只需针对每个相关的约翰逊距离，检查 $(\,)$ 是否成立，就能在 $(\,)$ 时间内计算 $\delta_{n\,k}^{-1}\ [p] \quad O\ k \quad 1 \leq, (\,)$。（事实上，$\delta_{n\,k}\ i\ \leq p \quad i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ 很容易看出，我们总有 $\delta_{n,k}(0) = 0$ 且 $\delta_{n,k}(k) = 1$，因此可以自动排除 *0* 并纳入 $k$，作为一项微优化。）

尽管与第3节相比，需要稍作更冗长的阐述，但我们已确实具备了获得 $J(n, k)^p$ 和 $K(n, k)^p$ 的霍夫曼界闭式表达式所需的全部前提，现将其呈现如下。

**定理4.5**。对于所有 $k \geq 1$，*Johnson* 图幂和克奈泽图幂的以下色数下界成立：

*(i)* 对于所有 $n \geq k$ 和 $1 \leq p \leq$ 直径$(J(n,k)) = $最小值$\{k, n-k\}$,

$$\chi(J(n,k)^p) \geq 1 + \frac{\sum_{i=1}^{p} \binom{k}{i}\binom{n-k}{i}}{-\min\limits_{1\leq j\leq k}\{\sum_{i=1}^{p} \mathcal{E}_i(j;n,k)\}}.$$

*(ii)* 对所有 $n > 2k$ 和 $1 \leq p \leq \operatorname{diam}(K(n,k)) = \left\lceil \frac{k-1}{n-2k} \right\rceil + 1$,

$$\chi(K(n,k)^p) \geq 1 + \frac{\sum_{i\in\delta_{n,k}^{-1}([p])} \binom{k}{i}\binom{n-k}{i}}{-\min\limits_{1\leq j\leq k}\left\{\sum_{i\in\delta_{n,k}^{-1}([p])} \mathcal{E}_i(j;n,k)\right\}}.$$

证明。 与定理3.3类似，该结论可由引理 4.2 和 [Hof03]的经典色数下界直接推出。 □

与定理 3.3 和汉明图幂的情形一样，这些闭式结果相较于朴素地使用 SVD 或 QR分解计算特征值有显著改进。不过，朴素地计算这些界仍然代价高昂。对于 $J(n,k)^p$，计算每个特征值都必须对 $p$ 个埃伯莱因多项式求和，而每个 $\mathcal{E}_i(j;n,k)$ 即使采用标准的二项式递推关系，计算也需要 $O(i)$ 时间，因此总共需要 $O(kp^2)$ 时间。对于 $K(n,k)^p$，情况同样棘手：由于 $\left|\delta^{-1}([p])\right|$ 最大可达 $O(k)$，因此当 $i$ 最大可达 $k$时，每次计算埃伯莱因多项式都需要 $O(i)$ 时间；计算所有 $k+1$ 个特征值总共需要 $O(k^3)$ 时间。因此，为了分别得到更高效的 Johnson 图幂和克奈泽图幂的 $O(kp)$ 与 $O(k^2)$ 算法，我们引用了埃伯莱因多项式之间一个广为人知的递推关系（特别是，该关系比引理 3.4 中克拉夫丘克多项式之间的递推关系稍复杂，涉及三项而非两项）。

**引理 4.6**。 设 $k \geq 1$和 $n \geq k$，并对所有 $1 \leq i \leq k$ 和 $0 \leq j \leq k$，定义以下量 $\alpha_i := (n-k-i+1)(k-i+1)$ 以及 $\beta_j := j(n-j+1)$。那么，埃伯莱因多项式满足以下递推关系：

*(i)* $\mathcal{E}_i(0;n,k) = \frac{\alpha_i}{i^2} \cdot \mathcal{E}_{i-1}(0;n,k)$ *for all* $1 \leq i \leq k$

*(ii)* $\mathcal{E}_i(j;n,k) = \frac{\alpha_i - \beta_j + (i-1)^2}{i^2} \cdot \mathcal{E}_{i-1}(j;n,k) - \frac{\alpha_{i-1}}{i^2} \cdot \mathcal{E}_{i-2}(j;n,k)$ *for all* $0 \leq j \leq k$ *and* $2 \leq i \leq k$

证明。 这些关系的一个等价表述见 [KS98，第 35] 页（其中埃伯莱因多项式被称为“对偶 Hahn”多项式）。 □

引理 3.4 给出的克拉夫丘克多项式递推关系 $\mathcal{K}_i$仅用 $\mathcal{K}_{i-1}$表示，而引理 4.6 则用 $\mathcal{E}_i$ 同时以 $\mathcal{E}_{i-1}$ 和 $\mathcal{E}_{i-2}$表示。因此，利用这些递推关系构建动态规划算法时，我们需要同时保留前两次迭代的值，而不像算法 3.5那样只需保留一次迭代的值。为此，我们维护三个长度为 $k+1$ 的数组：eberPrev 存储第 $i-2$ 次迭代的埃伯莱因多项式，`eberCurr` 存储第 $i-1$ 次迭代的值，而 `lambda` 则累积部分和，以构造特征值。每次迭代后，旧的 `eberCurr` 变为新的 `eberPrev`，新计算出的值则成为新的 `eberCurr`。当然，基例仍需特殊处理：对所有 $j$，我们有

$$\mathcal{E}_0(j;n,k) = \sum_{t=0}^{0} (-1)^t \binom{j}{t}\binom{k-j}{0-t}\binom{n-k-j}{0-t} = 1,$$

对于 $i = 1$，我们可以通过引理 $\mathcal{E}_1(j;\ n,\ k) = \alpha_1 - \beta_j$直接计算 4.6(i)。

现在具备了所有必要的前提条件，下面给出约翰逊图幂的算法，之后将对其进行调整，以用于克奈泽图幂。

**算法 4.7**。 令 $k \geq 1$， $n \geq k$，以及 $1 \leq p \leq$ 直径$(J(n,\ k)) =$ 最小值$\{k, n-k\}$。使用引理 $\alpha_i$ 中 $\beta_j$ 和 *4.6* 中相同的定义，我们可以如下计算约翰逊图幂的霍夫曼界$J(n,\ k)^p$ ：

1. 初始化一个大小为 $k+1$ 的数组 eberPrev，并将所有元素设为 1。

2. 初始化一个大小为 $k+1$ 的数组 eberCurr。

3. 初始化一个大小为 $k+1$ 的数组 temp（用于便于更新 eberPrev 和 eberCurr） .

4. 初始化一个大小为 $k+1$ 的数组 lambda，并将所有元素设为 0。

5. 对每个 $i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ p$:

(a) 如果 $i = 1$: i. 对每个 $j = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ k$: 设置 eberCurr $[j] \leftarrow \alpha_1 - \beta_j$。 (b) 否则（即 $i \geq 2$）： i. 对每个 $j = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ k$: 设置 temp$[j] \leftarrow {}^{\alpha_i - \beta_j +}{}_{i^2}{}^{(\ i-1\ ^2\ )}$eberCurr$[j] - {}^{\alpha_{i-1}}{}_{i^2}$ ·eberPrev$[j]$。 ii. 将 eberCurr 中的值复制到 eberPrev。 iii. 将 temp 中的值复制到 eberCurr。 (c) 对每个 $j = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ k$: 设置 lambda$[j] \leftarrow$ lambda$[j] +$ eberCurr$[j]$。 6. 令 $\lambda_{\max} \leftarrow$lambda$[0]$。 7. 令 ~~$\lambda_{\min} \leftarrow$ min$_{1 \leq j \leq k}$lambda$[j]$~~。 8. 返回 $1 + {}^{\lambda_{\max}}{}_{-\lambda_{\min}}$，作为 $\chi(J(n,\ k)^p)$ 的下界。

---

该算法需要 $O(kp)$ 时间和 $O(k)$ 空间。

证明。 类似于对算法3.5的验证，根据引理4.2(i) 和 4.6，正确性显而易见。现在我们来说明复杂度结论，同样假设算术运算和数组访问均为常数时间。

空间复杂度显然为 $O(k)$，因为我们在步骤 1 到 4 中分配了四个大小为 $k+1$ 的数组。就时间复杂度而言，步骤 5 占主导地位，其外层循环恰好执行 $p$ 次。在每次迭代中，步骤 5(a) 用 $k+1$ 次简单的数组更新和算术运算处理 $i = 1$ 基本情况；步骤 5(b)(i)–(iii) 通过 $k+1$ 次更新以及两次数组复制（每次数组复制 $k+1$ 个元素）处理 $i \geq 2$ ；步骤 5(c) 则再次执行 $k+1$ 次常数时间操作。在全部 $p$ 次迭代中，总计执行 $O(kp)$次操作，这比 $O(k)$ 的初始化（步骤 1–4）以及计算 $\lambda_{\min}$ （步骤 7）的 $O(k)$ 开销都大。因此，总体时间复杂度为 $O(kp)$，如所需。 □

Kneser 图幂的算法与算法 4.7几乎完全相同，关键区别在于：为了正确利用引理 $k$ （而不是仅从 1 到$p$ ），无论哪些距离实际对 Kneser 图幂有贡献，我们都必须遍历从 1 到 的所有 Johnson 距离。正如备注 4.4中所述，我们首先在 $O$（$k$）时间内预先计算原像 $\delta^{-1}$（$[p]$），然后仅当当前距离 $i$ 属于该原像时，才将 Eberlein 多项式的值有条件地累加到特征值数组中。

**算法 4.8**。 设 $k \geq 1$， $n > 2k$，以及 $1 \leq p \leq$ 直径$(K$（$n$，$k$）$= \left\lceil {}^{k-1}{}_{n-2k} \right\rceil + 1$。使用引理 *4.6*和 *4.1*中对 $\alpha_i$、$\beta_j$ 以及 $\delta_n$ 的相同定义，我们可以如下计算 *Kneser* 图幂 $K$（$n$，$k$）$^p$ 的霍夫曼界:

1. 计算 $S \leftarrow \{i \in \{1, 2, \ldots, k\} \mid 1 \leq \delta_{n,k}(i) \leq p\}$ (原像 $\delta^{-1}_{n\ k,}$ ([$p$]).

2. 初始化一个大小为 $k+1$ 的数组 eberPrev，并将所有元素设为 1。

3. 初始化一个大小为 $k+1$ 的数组 eberCurr。

4. 初始化一个大小为 $k+1$ 的数组 temp（以便更新 eberPrev 和 eberCurr ).

5. 初始化一个大小为 $k+1$ 的数组 lambda，并将所有条目设为 0。

6. 对每个 $i=1$，2，……，$k$：

(a) 如果 $i=1$：i. 对每个 $j=0$，1，……，$k$：设置 eberCurr $[j] \leftarrow \alpha_1-\beta_j$。(b) 否则（即 $i \geq 2$）：i. 对每个 $j=0$，1，……，$k$：设置 temp$[j] \leftarrow {}^{\alpha_i-\beta_j+}\left(\begin{smallmatrix} & i-1 & 2 \\ i^2 & & \end{smallmatrix}\right)$eberCurr$[j]-{}^{\alpha_{i-1}}_{i^2}$ eberPrev$[j]$。ii. 将 eberCurr 中的值复制到 eberPrev。iii. 将 temp 中的值复制到 eberCurr。(c) 如果 $i \in S$：i. 对每个 $j=0$，1，……，$k$：设置 lambda$[j] \leftarrow$ lambda $[j]+$ eberCurr$[j]$。7. 令 $\lambda_{\max} \leftarrow$ lambda$[0]$。8. 令 $\lambda_{\min} \leftarrow \min_{1 \leq j \leq k}$ lambda$[j]$。9. 返回 $1+{}^{\lambda_{\max}}_{-\lambda_{\min}}$，作为 $\chi(K(n,\ k)^p)$ 的下界。

该算法需要 $O(k^2)$ 时间和 $O(k)$空间。

证明。 同样，正确性可由引理 4.2(ii) 和4.6推出。关于复杂度，该算法与算法 4.7几乎完全相同，主要区别仅在于：步骤 1 预先计算 $\delta^{-1}_{n\ k}$,([$p$])，耗时 $O(k)$；而步骤 6(c) 仅当 $i \in \delta^{-1}_{n\ k}$,([$p$]) 时才将值累加到 lambda 中。由于步骤 6 遍历从 1 到 $k$ 的所有 $i$，外层循环共执行 $k$ 次，每次进行 $O(k)$ 的工作，因此时间复杂度为 $O(k^2)$，与 $p$ 的取值无关。空间复杂度仍为 $O(k)$，这是因为步骤 1–5 中的四个数组大小均为 $k+1$。

□

与针对汉明图幂的算法 3.5 一样，算法 4.7 和 4.8 的时间复杂度都不依赖于 $n$；这次这一点尤为显著，因为随着 $n$ 增大，约翰逊图和克奈泽图的顶点数都会呈指数增长。算法 4.7 在约翰逊图幂上的时间复杂度为 $O(kp)$，当 $p$ 接近 $\min\{k, n-k\}$ 时，最坏情况下会达到 $O(k^2)$。相比之下，算法 4.8 的耗时为 $O(k^2)$，与 $p$ 的取值无关，因为即使 $\delta^{-1}_{n\ k}$, ([$p$]) 中的元素少于 $k$ 个，我们也必须计算直至索引 $k$ 的 Eberlein 多项式。最终，这两种算法相较于朴素方法都带来了显著的计算优势，类似于第 3 节中针对汉明图幂所实现的改进。

# 5 结论与未来工作

受哈明图、约翰逊图和克奈泽图（尤其是前两者）的幂在编码理论和分布式计算中的应用，以及这些对象的一般数学意义所启发，我们研究了如何利用相关 HOP 之间的递推关系，高效计算 [Hof03] 对 $H(n,q)^p$、$J(n,k)^p$ 和 $K(n,k)^p$ 的基于特征值的色数下界。具体而言，我们利用克拉夫丘克多项式和 Eberlein 多项式，分别在 $O(np)$、$O(kp)$ 和 $O(k^2)$ 时间内计算了 $H(n,q)^p$、$J(n,k)^p$ 和 $K(n,k)^p$ 的邻接特征值；与朴素的 $O(q^{3n})$ 方法相比，这是一次显著改进。

以及 $O\left(\binom{n}{k}^3\right)$ SVD 或 QR 分解等方法。因此，本研究首次为哈明图、约翰逊图和克奈泽图的幂给出了非平凡且计算上可行的色数下界。

在未来的工作中，我们将考虑利用高效的特征值计算，在 $\chi$上计算更新的谱界，例如 [WE13]的谱界（该谱界使用所有邻接特征值，而不仅仅是最小值和最大值），并比较这些界与 Hamming、Johnson 和克奈泽图幂的霍夫曼界的紧致程度。此外，其他图不变量也存在一些谱界，而我们的高效特征值计算或许能派上用场。其中包括 Delsarte 关于独立数的线性规划界 [Del73，第 31] 页，以及关于分数色数的较新界 [GS24]。研究其他高度对称的顶点传递图或许也很有价值；对于这些图，目前尚无计算上可行的色数下界。具体而言，这类图对应的关联方案的基矩阵，其特征值可以用 HOP 表示。Grassmann 图是自然的候选对象，它们是另一类重要的图，在编码理论中有已知应用 [Mog22] ，其邻接特征值则由 $q$Hahn 多项式给出。

最后，我们指出，我们的结果可以在更广泛的表示论框架下加以理解。尽管本文仅研究关联方案，但我们方法背后更深层的结构在于无重置换表示的存在——对于汉明图图幂，是花环积 $S_q \wr S_n$ 作用于 $\mathbb{Z}_q^n$（如备注 3.2中简要提及）；对于 Johnson 图幂和克奈泽图图幂，则是对称群 $S_n$ 作用于 $\binom{[n]}{k}$。（有关这些结构的理论基础，请参见 [CSST08] 。）这类表示确保相应的 Bose–Mesner代数是交换的，进而保证其基矩阵可以同时对角化（这是我们反复利用的一项便利性质）。迄今为止我们采用的关联方案框架保证了这些性质，但它们也可能更普遍地源自传递群作用。这引出了一个问题：具有无重自同构群的图，即使不具备距离正则性或完备关联方案，其邻接特征值是否也可能同样便于用 HOP 表示?

## 致谢

F.A.S. 感谢 Rajesh Pereira 就代数组合学进行的多次有益交流，并感谢 Jack Bedard 就一般图论进行的讨论。L.M.B.V. 感谢 Nathaniel Johnston 和 Laurie Ricker 提供的一般性建议，感谢 Liam Keliher 就组合学进行的有益交流，并感谢 Tanner Altenkirk 对论文结构提出的意见。

## 参考文献

[BCN89] Andries E. Brouwer、Arjeh M. Cohen 和 Arnold Neumaier，《距离正则图》，《现代数学调查丛书》第18卷，施普林格出版社，柏林，1989年。3, 13[BE11] Andries E. Brouwer 和 Tuvi Etzion，《一些新的距离为4的恒定重量码》，《通信数学进展》5 (2011年)，第3期，417–424。6[BI84] Eiichi Bannai 和 Tatsur¯o It¯o，《代数组合学I：关联方案》，Benjamin/Cummings，门洛帕克，佛罗里达州，1984年。4, 5, 7, 12, 13[BNBH+98] Amotz Bar-Noy、Mihir Bellare、Magn´us M. Halld´orson、Hadas Shachnai 和 Tami Tamir，《关于色和与分布式资源分配》，《信息与计算》140 (1998年)，第2期，183–202。6[CHMv24] Dean Crnkovi´c、Daniel R. Hawtin、Nina Mostarac 和 Andrea ˇSvob，《克奈泽图中的邻域传递码》，Journal of Combinatorial Theory, Series A 204 (2024年)，文章编号105850。6

[CSST08] Tullio Ceccherini-Silberstein、Fabio Scarabotti 和 Filippo Tolli，《有限群上的调和分析：表示论、Gelfand 对与马尔可夫链》，Cambridge Studies in Advanced Mathematics，第108卷，剑桥大学出版社，剑桥，英国，2008年。17[Del73] Philippe Delsarte，《编码理论关联方案的代数方法》，Philips Research Reports Supplements (1973年)，第10期。11, 17[EB96] Tuvi Etzion 和 Sara Bitan，《关于约翰逊图的色数、着色与码》，Discrete Applied Mathematics 70 (1996年)，第2期，163–175。6[FFR17] P. Francis 和 S. Francis Raj，《超立方体幂图的 $b$-着色》，Discrete Applied Mathematics 225 (2017年)，74–86。1, 5, 11[GS24] Krystal Guo 和 Sam Spiro，《分数色数的新特征值界》，Journal of Graph Theory 106 (2024年)，第1期，167–181。17[HIK11] Richard Hammack、Wilfried Imrich 和 Sandi Klavˇzar，《乘积图手册》，第二版，CRC Press，博卡拉顿，佛罗里达州，2011年。3[Hof03] Alan J. Hoffman，《图的特征值与着色》，《Alan J. Hoffman 论文选集》，World Scientific，新加坡，2003年，第407–419页。1, 8, 14, 16[Kra29] M. Kravchuk，《关于Hermite多项式的一种推广》，Comptes Rendus Mathématique 189 (1929年)，620–622，JFM 55.0799.01。6[KS98] Roelof Koekoek 和 Ren´e F. Swarttouw，《超几何正交多项式的Askey 方案及其 $q$-类比》，技术报告98-17，代尔夫特理工大学 Faculty of Technical Mathematics and Informatics，1998年。5, 14[Lov78] L. Lov´asz，《克奈泽猜想、色数与同伦》，Journal of Combinatorial Theory, Series A 25 (1978年)，第3期，319–324。5[Mog22] Ivan Mogilnykh，《覆盖半径较小的约翰逊图和Grassmann 图中的完全正则码》，The Electronic Journal of Combinatorics 29 (2022年)，第2期，文章编号P2.57。17[Vor20] Konstantin Vorob'ev，《约翰逊图特征函数的重构》，Discrete Applied Mathematics 276 (2020年)，166–171。5[VPV05] Mario Valencia-Pabon 和 Juan-Carlos Vera，《关于克奈泽图的直径》，Discrete Mathematics 305 (2005年)，第1–3期，383–385。4[WE13] Pawel Wocjan 和 Clive Elphick，《涵盖邻接矩阵所有特征值的色数新谱界》，The Electronic Journal of Combinatorics 20 (2013年)，第3期，文章编号P39。17