arXiv:2601.01965v1 [math.NA] 5 Jan 2026

具有收敛率的多目标自适应有限元方法

ROLAND BECKER，MAXIMILIAN BRUNNER，PAULA HILBERT，
MICHAELINNERBERGER，以及DIRKPRAETORIUS

摘要。我们针对一个对称线性椭圆偏微分方程（PDE），构造并分析了一种目标导向自适应有限元方法，该方法能够同时处理多个线性目标泛函。在算法的每一步中，只需求解两个线性有限元方程组。此外，所有有限元解均基于同一个离散空间计算，而底层三角剖分则进行调整，以同时解析所有内在奇异性。不同于文献中针对这类情形已有的结果，我们给出了详尽的收敛性分析，并验证了我们的算法能够以适当的意义保证最优收敛率。数值实验进一步验证了所得的理论结果。

1. 引言

1.1. 概述与研究现状。 后验 误差估计与自适应网格加密是高效数值求解偏微分方程（PDEs）的关键工具。特别是，自适应有限元方法（AFEMs）能够解析偏微分方程的解中的奇异性及其他局部特征，并在自由度数量和总计算成本（或运行时间）方面均达到最优收敛率；例如参见 [Ste07； CKNS08；CG12； CFPP14；GHPS21；BFM+25]。通常，一个自适应有限元法算法由以下模块组成，并以迭代方式执行：



在实际应用中，通常主要关注如何高效近似偏微分方程解的某些派生关注量，而对偏微分方程解本身进行最优近似则只是次要目标。这些关注量通常用目标泛函建模，并在计算中作为伴随偏微分方程问题的右端项处理。此类目标的一个例子是偏微分方程的解在某个子区域上的平均值。

目标导向自适应旨在通过算法在两类奇异性之间取得平衡：一类源自与偏微分方程的解近似相关的原问题，另一类则源自对偶（伴随）问题。对于只有一个关注量的情况，目标导向自适应领域的文献已相当成熟；例如，

2010 数学主题分类。 65N30, 65N50, 65N15, 65Y20, 41A25。关键词与短语。 自适应、目标导向算法、关注量、后验误差估计、收敛、最优收敛率、有限元方法。**致谢**。 本研究全部或部分由奥地利科学基金（FWF）项目资助： 10.55776/F65 （SFB F65“驯服偏微分方程系统中的复杂性”），10.55776/I6802 （国际项目 I6802“无界区域上偏微分方程的泛函误差估计”），10.55776/PAT3699424（独立项目 PAT3699424“可靠高效自适应有限元方法的最优稳健求解器”），以及 10.55776/PAT3446525 （独立项目 PAT3446525“非线性偏微分方程的自适应 Uzawa 型有限元方法”）。此外，Paula Hilbert 获维也纳数学学院资助，Michael Innerberger 获 HHMI Janelia 资助。

例如， [EEHJ95；BR01；GS02；MS09]是该领域的开创性成果，而 [BET11；FPZ16；DBR21；BIP21；BBI+22；BGIP23；BBPS25] 则是一些较新的研究成果。

更形式化地说（下文还会提供更多细节），令 $u^\star$ 表示所考虑偏微分方程的精确解，并令 G 表示定义关注量的线性目标泛函， $G(u^\star)$。目标导向自适应旨在控制目标误差$|G(u^\star) - G(u_H^\star)|$，其中 $u_H^\star$ 表示 $u^\star$ 在某个 $\mathcal{X}_H$离散空间中的有限元（FE）近似。目标导向算法的一个关键特点是，通过对偶化技术（例如参见 [GS02]），可以估计并界定该目标误差，使其不超过原误差与对偶误差的乘积。粗略地说，与偏微分方程解本身的最佳可能近似相比，这一乘积使收敛率大约翻倍；关于泊松模型问题中目标导向自适应有限元法最优收敛率的首个结果，见 [MS09]。

受多物理场应用的启发，例如多相流或电磁学中自然会出现多个关注量，近年来，如何通过算法处理多个目标泛函已日益受到关注。然而，由于技术上的挑战，只有少数研究涉及多个关注量的情形；例如参见 [HH03；Har08；ELW19；ELN+20]。在这种情形下，共有 $2 \leq N \in \mathbb{N}$ 个目标，记为 G_j，其中 $1 \leq j \leq N$。

这些工作的一个关键成就是设计出一种算法，在求解模块中每个网格层次只需进行两次问题求解——即原问题和一个适当组合的多目标对偶问题。这显著降低了计算成本。然而，构造这一组合的多目标量需要知道每个目标误差差值的符号，

$$\operatorname{sgn}(G_j(u^\star) - G_j(u_H^\star)) \quad \text{for all } j = 1, \dots, N,$$

而这一信息在实践中无法获得。文献 [ELW19] 指出，在较强的饱和假设下，可以利用可计算的量恢复这些符号

$$\operatorname{sgn}(G_j(u_h^\star) - G_j(u_H^\star)) \quad \text{for all } j = 1, \dots, N,$$

f或某个扩展的有限元空间 $\mathcal{X}_h \supseteq \mathcal{X}_H$ 及其对应的伽辽金解 $u_h^\star$。

本文提出了一种具有 N 个目标的新型多目标导向自适应有限元法（NGO-AFEM），克服了这一局限。我们的方法通过使用适当修改的标记模块，循环处理所有对偶问题，同时在每个网格层次的求解模块中仍然只求解两个问题。这种新方法还实现了严格的收敛性分析，并最终证明了最优收敛率。下面将介绍新标记模块的详细内容。

1.2. 模型问题。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为具有 $d \in \mathbb{N}$ 的有界利普希茨区域。令$\boldsymbol{A} \in [L^\infty(\Omega)]^{d\times d}_{\mathrm{sym}}$、 $f \in L^2(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{f} \in [L^2(\Omega)]^d$。我们考虑如下对称线性椭圆偏微分方程

$$-\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\nabla u^\star) = f - \operatorname{div}\boldsymbol{f} \quad \text{in } \Omega \quad \text{subject to} \quad u^\star = 0 \quad \text{on } \Gamma := \partial\Omega. \tag{1}$$

(1) 的弱形式要求求解 $u^\star \in H^1_0(\Omega)$，使其满足

$$a(u^\star, v) := \int_\Omega (\boldsymbol{A}\nabla u^\star)^\top \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \big(fv + \boldsymbol{f}^\top \nabla v\big)\,\mathrm{d}x =: F(v) \quad \text{for all } v \in H^1_0(\Omega). \tag{2}$$

Lax–Milgram 引理保证弱解的存在性和唯一性$u^\star \in H^1_0(\Omega)$ 对于（2），前提是扩散系数 $\boldsymbol{A}(x) \in \mathbb{R}^{d\times d}_{\mathrm{sym}}$ 处处为正

定的，即存在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得

$$\inf_{x\in\Omega} \inf_{\xi\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \frac{\xi^\top \boldsymbol{A}(x)\xi}{\xi^\top \xi} \geq \alpha > 0. \tag{3}$$

在此假设下，$a(\cdot,\ \cdot)$ 是一个标量积，并且 $|||v|||^2 := a(v,\ v)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上定义了一个等价的能量范数。然而，我们并不关注精确解 $u^\star$ 本身，而只关注表示为线性目标泛函求值的派生关注量

$$G_j(u^\star) := \int_\Omega \left(g_j u^\star + \boldsymbol{g}_j^\top \nabla u^\star\right) \mathrm{d}x \quad \text{for all } j = 1,\dots,N \in \mathbb{N} \text{ with } 2 \leq N, \tag{4}$$

其中 $g_j \in L^2(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{g}_j \in [L^2(\Omega)]^d$ 已给定。对于每个目标泛函，令 $z_j^\star \in H_0^1(\Omega)$ 表示相应的对偶解，其满足

$$a(v, z_j^\star) = G_j(v) \quad \text{for all } v \in H_0^1(\Omega). \tag{5}$$

为近似 $G_j(u^\star)$，考虑有限维子空间 $\mathcal{X}_H \subset H_0^1(\Omega)$。Lax–Milgram 引理保证有限元解 $u_H^\star,\ z_{j,\ H}^\star \in \mathcal{X}_H$ 的存在性与唯一性，其满足

$$a(u_H^\star, v_H) = F(v_H) \quad \text{and} \quad a(v_H, z_{j,H}^\star) = G_j(v_H) \quad \text{for all } \ v_H \in \mathcal{X}_H, \tag{6}$$

分别 。对于每个目标 G_j，有来自 [GS02；MS09的经典误差估计],

$$|G_j(u^\star) - G_j(u_H^\star)| = |a(u^\star - u_H^\star, z_j^\star - z_{j,H}^\star)| \leq |||u^\star - u_H^\star||| \, |||z_j^\star - z_{j,H}^\star|||. \tag{7}$$

考虑多个目标时，自适应策略应当降低多目标误差

$$\sum_{j=1}^N |G_j(u^\star) - G_j(u_H^\star)| \leq |||u^\star - u_H^\star||| \left(\sum_{j=1}^N |||z_j^\star - z_{j,H}^\star|||\right) \longrightarrow 0 \quad \text{as } \dim \mathcal{X}_H \to \infty, \tag{8}$$

具有最优代数速率 $s+t$，其中 $s>0$ 是逼近 $u^\star$的最佳速率，而$t = \min_j t_j > 0$ 是逼近所有 $z_j^\star$的最佳速率。式（8）中的误差项可以通过基于残差的误差估计量 $\eta_H(u_H^\star)$ 和 $\zeta_{j,\ H}(z_H^\star)$ 从上方可靠地估计 $1 \leq j \leq N$，分别对应式（6）中的原问题和对偶问题。因此，分析归结为所谓多目标误差估计量的收敛性

$$C_{\mathrm{rel}}^{-2} \sum_{j=1}^N |G_j(u^\star) - G_j(u_H^\star)| \leq \eta_H(u_H^\star) \sum_{j=1}^N \zeta_{j,H}(z_{j,H}^\star) =: \Delta_H \longrightarrow 0 \text{ as } \dim \mathcal{X}_H \to \infty, \tag{9}$$

其中 $0 < C_{\mathrm{rel}}$ 是基于残差的误差估计量的通用可靠性常数。确保式（9）收敛的一种方法，是针对所生成的网格 $\mathcal{T}_H$，求解离散原问题以及 所有离散对偶问题 $\mathcal{T}_H$，即每个网格需要求解 $N+1$ 个有限元方程组。相反，对于所有生成的网格$\mathcal{T}_H$，所提出的算法仅求解离散原问题以及 一个 离散对偶问题。

1.3. 主要结果。在每个网格层级上，所提出的多目标导向自适应有限元法针对N 个目标求解原解 $u_H^\star$和一个对偶解$z_{j,\ H}^\star$针对一个 $j \in \{1,\dots,N\}$，其中 j 会随着网格细化而轮流选取。当前考虑的目标称为活动目标。我们方法的关键创新在于标记模块中采用了一种新的标记策略。首先，我们确定一个拟最小单元集合，对这些单元进行细化，以充分降低原误差估计量或当前对偶误差估计量。这一策略最初由 [MS09] 提出，用于泊松模型问题的单目标导向自适应有限元法；随后由 [FPZ16] 针对 Lax–Milgram 框架下的一般二阶线性椭圆型偏微分方程进行了完善和分析。

我们评估当前对偶误差估计量相较于所有 $N-1$ 此前活动目标的对偶误差估计量是否仍然较大。如果是，我们称之为常规标记，并采用 [FPZ16]中的常规标记策略。否则，我们将标记单元的数量限制为不超过上一步的数量，称之为非规则标记。

作为一项重要的首要结果，我们证明，这种扩展的标记策略仍能保证多目标误差估计量 Δ_H （由式（9）给出）线性收敛，至多相差一个乘法常数；见下文定理 4 。

作为实现最优收敛率的关键，我们发现，非规则标记中的基数控制能够用于证明一个重要的基数估计；见下文引理 9。利用这一结果，最终可证明所提出的多目标导向自适应有限元法对于 N 个目标具有最优收敛率；见下文定理8。

1.4. 结构安排。 本文结构如下。第 2 节介绍新的多目标导向自适应算法。第 3 节给出线性收敛的证明，第 4 节则致力于证明最优收敛率。第 5 节展示数值实验，以验证我们的发现；最后，第6 节总结全文。

2. 多目标自适应有限元法

本节将构建一种多目标导向自适应有限元法，该方法能够同时处理 $N \in \mathbb{N}$ 个线性目标泛函 $G_1, \ldots\ldots, G_N\colon \mathcal{X}^\star \to \mathbb{R}$，且每个自适应步只需求解两个离散问题。

2.1. 网格细化。我们介绍一些关于网格细化的记号。设 $\mathcal{T}_0$ 是 Ω 的给定相容初始三角剖分。网格细化采用最新顶点二分法（NVB）；参见 [Ste08; KPP13; DGS25]。对于每个网格 $\mathcal{T}_H$ 及给定的标记单元 $\mathcal{M}_H \subseteq \mathcal{T}_H$，我们用 $\mathcal{T}_h := \mathrm{refine}(\mathcal{T}_H, \mathcal{M}_H)$ 表示这样一个最粗网格：其中所有 $T \in \mathcal{M}_H$ 均已细化，即 $\mathcal{M}_H \subseteq \mathcal{T}_H \setminus \mathcal{T}_h$。此外，若 $\mathcal{T}_h$ 可由 $\mathcal{T}_H$ 经过有限次细化得到，我们记作 $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}(\mathcal{T}_H)$，并简记为 $\mathbb{T} := \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$。

每个三角剖分 $\mathcal{T}_H \in \mathbb{T}$ 都对应一个相容的有限维有限元空间$\mathcal{X}_H \subset H^1_0(\Omega)$，其试探函数为次数至多为 $p \in \mathbb{N}$ 的分片多项式，即$\mathcal{X}_H := \mathcal{S}^p_0(\mathcal{T}_H) := \{v_H \in H^1_0(\Omega) | \forall T \in \mathcal{T}_H\colon$ $v_H|_T$ 是次数为 $\le p\}$. 的分片多项式。显然， $\mathcal{X}_H \subset H^1_0(\Omega)$ 是一个闭子空间。由于我们采用最新顶点二分法， $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}(\mathcal{T}_H)$ 意味着相应有限元空间具有嵌套性 $\mathcal{X}_H \subseteq \mathcal{X}_h$ 。

2.2. 后验误差估计与自适应公理。我们假设满足额外的正则性 $\boldsymbol{A}|_T \in [W^{1,\infty}(T)]^{d\times d}_{\mathrm{sym}}$and $\boldsymbol{f}|_T$, $\boldsymbol{g}|_T \in [H^1(T)]^d$对所有 $T \in \mathcal{T}_H$均成立，并定义每个三角形 $T \in \mathcal{T}_H$ 上的误差估计量的局部贡献如下:

$$\begin{aligned}\eta_H(T;v_H)^2 &:= h_T^2\|f+\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\nabla v_H-\boldsymbol{f})\|^2_{L^2(T)} + h_T\|[\![(\boldsymbol{A}\nabla v_H-\boldsymbol{f})^\top \boldsymbol{n}]\!]\|^2_{L^2(\partial T\cap\Omega)},\\ \zeta_{j,H}(T;v_H)^2 &:= h_T^2\|g_j+\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\nabla v_H-\boldsymbol{g}_j)\|^2_{L^2(T)} + h_T\|[\![(\boldsymbol{A}\nabla v_H-\boldsymbol{g}_j)^\top \boldsymbol{n}]\!]\|^2_{L^2(\partial T\cap\Omega)},\end{aligned} \tag{10a}$$

其中， $h_T := |T|^{1/d}$ 表示局部网格尺寸。这些是与（6）相关的标准基于残差的指标；更多详情参见例如 [AO00; Ver13] 。对于任意子集$\mathcal{U}_H \subseteq \mathcal{T}_H$ 以及所有 $v_H \in \mathcal{X}_H$，我们定义误差估计量如下:

$$\eta_H(\mathcal{U}_H;v_H)^2 := \sum_{T\in\mathcal{U}_H} \eta_H(T;v_H)^2 \quad \text{and} \quad \zeta_{j,H}(\mathcal{U}_H;v_H)^2 := \sum_{T\in\mathcal{U}_H} \zeta_{j,H}(T;v_H)^2. \tag{10b}$$

此外，我们将全局误差估计量缩写为 $\eta_H(v_H) := \eta_H(\mathcal{T}_H; v_H)$ 和$\zeta_{j,H}(v_H) := \zeta_{j,H}(\mathcal{T}_H; v_H)$。此外，如果使用相应的

离散解，则省略参数 η_H，例如 $\eta_H(\mathcal{U}_H) := \eta_H(\mathcal{U}_H,\ u_H^\star)$。据此，后验误差估计量满足以下估计量性质。

引理1（自适应公理 [CFPP14]）。任意一个误差估计量 $\mu_H \in \{\eta_H, \zeta_{1,H}, \dots, \zeta_{N,H}\}$来自 (10)均满足以下条件：存在 $C_{\mathrm{stab}}, C_{\mathrm{rel}}, C_{\mathrm{drel}}, C_{\mathrm{mon}} > 0$以及 $0 < q_{\mathrm{red}} < 1$ 使得，对于任意三角剖分 $\mathcal{T}_H \in \mathbb{T}$、任意细化 $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}(\mathcal{T}_H)$、任意子集 $\mathcal{U}_H \subseteq \mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H$以及任意 $v_H \in \mathcal{X}_H$, $v_h \in \mathcal{X}_h$，以下结论成立：

$$
\begin{aligned}
&\textbf{(A1) Stability:} && |\mu_h(\mathcal{U}_H; v_h) - \mu_H(\mathcal{U}_H; v_H)| \le C_{\mathrm{stab}} \,|||v_h - v_H|||;\\
&\textbf{(A2) Reduction:} && \mu_h(\mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_H; v_H) \le q_{\mathrm{red}}\, \mu_H(\mathcal{T}_H \setminus \mathcal{T}_h; v_H);\\
&\textbf{(A3) Reliability:} && |||u^\star - u_H^\star||| \le C_{\mathrm{rel}}\, \mu_H;\\
&\textbf{(A4) Discrete reliability:} && |||u_h^\star - u_H^\star||| \le C_{\mathrm{drel}}\, \mu_H(\mathcal{T}_H \backslash \mathcal{T}_h);\\
&\textbf{(QM) Quasi-monotonicity:} && \mu_h \le C_{\mathrm{mon}} \mu_H.
\end{aligned}
$$

常数 C_{rel} 仅取决于扩散矩阵 $\boldsymbol{A}$、所有 $\mathcal{T}_H \in \mathbb{T}$ 的一致 γ-形状正则性以及空间维数 d，而 C_{stab} 和 C_{drel} 还取决于多项式次数 p。对于最新顶点二分法，约化 *(A2)* 满足 $q_{\mathrm{red}} := 2^{-1/(2d)}$。此外，离散可靠性 *(A4)* 推出可靠性 *(A3)*，其中 $C_{\mathrm{rel}} \le C_{\mathrm{drel}}$，且准单调性 *(QM)* 中的常数满足 $C_{\mathrm{mon}} \le 1 + C_{\mathrm{stab}}\, C_{\mathrm{drel}}$。□

我们回顾一个众所周知的结果，该结果可通过初等微积分由残差误差估计量（A1）的稳定性和（A2）的约化直接推出，见（10）。这一结论隐含见于 [CKNS08；CFPP14]，并在 [BBPS25的引理7]中明确表述。

引理 2。假设稳定性(A1) 和约化(A2)成立。设 $\mathcal{T}_H \in \mathbb{T}$ 和 $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}(\mathcal{T}_H)$。令$v_H \in \mathcal{X}_H$ 和 $v_h \in \mathcal{X}_h$。则稳定性成立

$$\mu_h(v_h) \le \mu_H(v_H) + C_{\mathrm{stab}} \,|||v_H - v_h||| \quad \textit{for any } \mu_H \in \{\eta_H, \zeta_{1,H}, \dots, \zeta_{N,H}\}. \tag{11}$$

此外，设 $0 < \theta \le 1$，并假设相对于细化后的单元 $\mathcal{T}_H \backslash \mathcal{T}_h$满足 *Dörfler* 标记准则 $\theta\, \mu_H(v_H)^2 \le \mu_H(\mathcal{T}_H \backslash \mathcal{T}_h;\ v_H)^2$。那么，令 $0 < q_\theta := [1 - (1 - q_{\mathrm{red}}^2)\theta]^{1/2} < 1$，有

$$\mu_h(v_h) \le q_\theta\, \mu_H(v_H) + C_{\mathrm{stab}} \,|||v_H - v_h||| \quad \textit{for any } \mu_H \in \{\eta_H, \zeta_{1,H}, \dots, \zeta_{N,H}\}. \quad \square \tag{12}$$

2.3. 多目标自适应算法。为介绍该算法，我们需要以下记号：对于标记参数 $0 < \theta \le 1$、网格 $\mathcal{T}_H$ 以及相应细化指标序列 $\mu_H \in \{\eta_H, \zeta_{1,H}, \dots, \zeta_{N,H}\}$，定义

$$\mathbb{M}[\theta, \infty; \mathcal{T}_H, \mu_H] := \{\mathcal{U}_H \subseteq \mathcal{T}_H \mid \theta\, \mu_H^2 \le \mu_H(\mathcal{U}_H; T)^2\} \tag{13}$$

表示所有满足 $\mathcal{U}_H$ 的子集集合 $\mathcal{T}_H$ Dörfler 标记准则 [Dör96]，且对于 $1 \le C_{\mathrm{mark}}$ 和 $\#\mathcal{U}_{\min H} := \min_{\mathcal{U}_H \in \mathbb{M}[\theta,\infty;\ \mathcal{T}_H,\ \mu_H]} \#\mathcal{U}_H$，我们定义

$$\mathbb{M}[\theta, C_{\mathrm{mark}}; \mathcal{T}_H, \mu_H] := \{\mathcal{M}_H \in \mathbb{M}[\theta, \infty; \mathcal{T}_H, \mu_H] \mid \#\mathcal{M}_H \le C_{\mathrm{mark}}\, \#\mathcal{U}_H^{\min}\} \tag{14}$$

表示所有满足以下条件的子集 $\mathcal{U}_H$：它们是拟最小的，即在固定因子 C_{mark}以内达到最小。以下算法采用了 [FPZ16]第（iii.a）步中的标记策略，但也可以改用 [MS09] 中的策略，同时仍能得到相同的结果。算法如下。

算法 A（多目标导向的自适应有限元法（NGO-AFEM））。输入：Ω 的初始网格 $\mathcal{T}_0$、针对 $1 \le k \le N$ 且满足 $2 \le N$的目标 G_k，以及自适应参数 $0 < \theta \le 1$,$0 < \varrho_{\mathrm{irr}} < 1/(N-1)$和 $1 \le C_{\mathrm{mark}}$。定义 $\zeta_{-k}^{\mathrm{active}} := 0$，其中 $1 \le k \le N$。**循环：**对于所有 $\ell = 0$、1、2、.....，重复以下步骤(i)–(iv)：

(i) 求解（原问题）并估计。计算式 *(6)* 的原离散解$u_\ell^\star \in \mathcal{X}_\ell$，并根据式 *(10)* 对所有$T \in \mathcal{T}_\ell$计算相应的细化指标 $\eta_\ell(T)$，然后选取 $\mathcal{M}_\ell^u \in \mathbb{M}[\theta, C_{\mathrm{mark}}; \mathcal{T}_\ell, \eta_\ell]$。*(ii)* 求解（一个对偶问题）并估计。*(a)* 定义 $j := \mathrm{mod}(\ell, N) + 1$，即随着 ℓ 增加，我们依次循环处理 $j = 1$、……、N。*(b)* 计算式 *(6)* 的一个对偶离散解 $z_{j,\ell}^\star \in \mathcal{X}_\ell$，并根据式 *(10)* 对所有 $T \in \mathcal{T}_\ell$计算相应的细化指标 $\zeta_\ell^{\mathrm{active}}(T) := \zeta_{j,\ell}(T)$，然后选取 $\mathcal{M}_\ell^z \in \mathbb{M}[\theta, C_{\mathrm{mark}}; \mathcal{T}_\ell, \zeta_{j,\ell}]$。*(iii)* 标记。按如下方式确定已标记单元集合 $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$：*(a)* 选取 $\mathcal{M}_\ell^{\min} \in \{\mathcal{M}_\ell^u, \mathcal{M}_\ell^z\}$，使 $\#\mathcal{M}_\ell^{\min} = \min\{\#\mathcal{M}_\ell^u, \#\mathcal{M}_\ell^z\}$，并选择 $\mathcal{M}_\ell^{uz} \subseteq \mathcal{M}_\ell^u \cup \mathcal{M}_\ell^z$，使得 $\mathcal{M}_\ell^{\min} \subseteq \mathcal{M}_\ell^{uz}$且 $\#\mathcal{M}_\ell^{uz} \le C_{\mathrm{mark}} \#\mathcal{M}_\ell^{\min}$。*(b)* 如果 $\varrho_{\mathrm{irr}} \max_{i=1,\dots,N-1} \zeta_{\ell-i}^{\mathrm{active}} \le \zeta_\ell^{\mathrm{active}}$，则选择 $\mathcal{M}_\ell := \mathcal{M}_\ell^{uz}$；（常规标记）否则选择 $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{M}_\ell^{uz}$，使 $\#\mathcal{M}_\ell \le \#\mathcal{M}_{\ell-1}$；（非规则标记）也就是说，*else* 子句涵盖了 $1 \le \ell$ 且存在 $i \in \{1, \dots, N-1\}$ 使得 $\zeta_\ell^{\mathrm{active}} < \varrho_{\mathrm{irr}} \zeta_{\ell-i}^{\mathrm{active}}$的情形。*(iv)* 细化。采用最新顶点二分法生成 $\mathcal{T}_{\ell+1} = \mathtt{refine}(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{M}_\ell)$。

输出：自适应生成的三角剖分序列 $\mathcal{T}_\ell$ 及其对应的近似目标值 $G_1(u_\ell^\star) \dots, G_N(u_\ell^\star) \in \mathbb{R}$对所有 $\ell \in \mathbb{N}_0$均成立。

下文中，如果在步骤 ℓ 中满足 $\mathcal{M}_\ell^u \subseteq \mathcal{M}_\ell$ 或 $\mathcal{M}_\ell^z \subseteq \mathcal{M}_\ell$（因此，对原问题估计量或活动对偶估计量应用 Dörfler 标记），我们就称该步骤采用常规标记。否则，我们称步骤 ℓ采用非规则标记。

注 3。(i) 请注意，对于 $N = 1$，算法 *A* 与文献 *[MS09; FPZ16]*中的常规目标导向自适应有限元方法算法相同，且算法中不存在非规则标记步骤。

(ii) 显然，也可以在步骤 *(ii)* 中求解所有离散对偶解 $z_{j,\ell}^\star$，其中 $j = 1, \dots, N$，然后根据整体对偶估计量 $\zeta_\ell(T)^2 := \sum_{j=1}^N \zeta_{j,\ell}(T)^2$确定 $\mathcal{M}_\ell^z$。这样便可省去额外的标记步骤 *(iii.b)*，并直接应用文献 *[FPZ16]* 中的结果，从而得出定理 *4* 的 *R*-线性收敛结论 *(16)* 以及定理 *8* 的最优收敛率 *(30)*。但是，这要求每个自适应步 $\ell \in \mathbb{N}_0$都求解 $N + 1$ 个有限元解。相比之下，所提出的算法每个 $\ell \in \mathbb{N}_0$只需计算两个有限元解，与目标泛函的数量 N 无关。所提出算法的重要意义在于，定理 *4* 和定理 *8* 的结论能够从朴素算法推广到当前这个（效率高得多的）变体。

(iii) 步骤 (iii.b) 中的非规则标记策略不要求选择任何单元进行细化，即 $\mathcal{M}_\ell = \emptyset$ 是可接受的。在这种情况下，网格保持不变，即 $\mathcal{T}_{\ell+1} = \mathcal{T}_\ell$。我们的理论也涵盖了这种情况；在实践中，它对应于一种更激进的自适应细化形式（在最坏情况下，会在一次细化步骤中求解所有对偶问题）；另请参见小节 *5.2*中的实验。

(iv) 如果省略标记步骤 (iii.b)，并对所有 $\mathcal{M}_\ell = \mathcal{M}_\ell^{uz}$使用 $\ell \in \mathbb{N}_0$，则定理 (16) 中的 *R*-线性收敛*4* 仍然成立，且证明得以简化。然而，定理 (30) 中的结论 *8* 则弱化为

$$\sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} (\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 + 1)^{s+t} \min_{j=1,\dots,N} \eta_\ell \, \zeta_{j,\ell} \le C_{\mathrm{opt}} \max_{j=1,\dots,N} \|u^\star\|_{\mathbb{A}_s} \, \|z_j^\star\|_{\mathbb{A}_t},$$

也就是说，只有采用最小估计量乘积时，才能保证目标误差达到最优收敛，而其他乘积的衰减率可能不是最优的。显然，这是不可接受的。

后续章节将对算法A进行收敛性分析：我们将在第3 节证明其线性收敛，并在下文第4 节证明其达到最优收敛率。

3. R-线性收敛

本节证明，具有 N 个目标的多目标导向自适应有限元法（算法 A）保证了下文定义于（15）中的多目标估计量乘积的线性收敛。本节的主要结果是该算法的 R-线性收敛性。

定理 4（NGO-AFEM 的 R-线性收敛）。假设稳定性 (A1)、约化 (A2)、可靠性 (A3)和拟单调性 (QM)。令 $0 < \theta \leq 1$，回顾$0 < q_\theta = [1-(1-q_{\mathrm{red}}^2)\,\theta]^{1/2} < 1$ 引理 *2*中的结果，并定义多目标估计量乘积

$$\Delta_\ell = \eta_\ell \sum_{i=1}^{N} \zeta_{i,\ell} \quad \textit{for all } \ell \in \mathbb{N}_0. \tag{15}$$

选择 $0 < \varrho_{\mathrm{irr}} = \varrho_{\mathrm{irr}}[\theta] < 1$ 使得 $q_{\mathrm{ctr}} := q_\theta + (N-1)\,\varrho_{\mathrm{irr}} < 1$。那么，算法 *A*保证存在常数 $0 < C_{\mathrm{lin}}$ 和 $0 < q_{\mathrm{lin}} < 1$ 使得 Δ_ℓ 满足

$$\Delta_{\ell+n} \leq C_{\mathrm{lin}}\, q_{\mathrm{lin}}^n\, \Delta_\ell \quad \textit{for all } \ell, n \in \mathbb{N}_0. \tag{16}$$

常数 C_{lin} 和 q_{lin} 仅依赖于 θ、ϱ_{irr}以及 N，还依赖于 (A1)–(A3)和 (QM)中的常数。

注 5。(i) 注意，(15) 中的多目标估计量乘积 Δ_ℓ 等价于^以下多目标估计量乘积 $\Delta_\ell := \eta_\ell$ 最大值$_{i=1,\,\ldots,\,N}\,\zeta_{i,\,\ell}$。

(ii) 自适应参数 ϱ_{irr} 的界可以显式计算，因为 $q_{\mathrm{red}} = 2^{-1/2d}$ 是已知的，而 θ 和 N 由用户定义。即使选择 ϱ_{irr} 略高于该阈值，也不会影响算法的数值性能；参见第 *5.2*节中的实验。

证明定理 4 的主要观察是，（15）中的多目标估计量乘积 Δ_ℓ 满足以下扰动收缩。

引理 6。在定理 *4*的假设下，对于所有 $\ell \in \mathbb{N}$，存在 $0 \leq \mathsf{R}_\ell$，使得 Δ_ℓ 中的多目标估计量乘积 (15) 满足

$$\Delta_{\ell+2N-1} \leq q_{\mathrm{ctr}}\, \Delta_\ell + \mathsf{R}_\ell \quad \textit{with} \quad \sum_{k=\ell}^{\infty} \mathsf{R}_k^2 \leq C_{\mathrm{sum}}\, \Delta_\ell^2. \tag{17}$$

常数 $0 < C_{\mathrm{sum}}$ 仅取决于 C_{stab}、C_{rel}、C_{mon} 和 N。

证明。证明分为六个步骤。

步骤 1（逐层记号预备）。假设我们处于层级 $\ell \in \mathbb{N}_0$。我们定义映射 $J\colon\ \mathbb{N}_0 \to \{1,\ldots,N\}$通过 $J[\ell] := 模(\ell,\ N) + 1$，即 $J[\ell]$ 表示算法 A 的步骤 ℓ 中的活跃对偶问题，即 $\zeta_\ell^{\mathrm{active}} = \zeta_{J[\ell],\,\ell}$。此外，通过定义映射$L\colon\ \mathbb{N} \to \{\ell-1,\ldots,\ell-N+1\}$，其中 $\zeta_{L[\ell]}^{\mathrm{active}} = \max_{i=1,\,\ldots,\,N-1} \zeta_{\ell-i}^{\mathrm{active}}$，我们还可以得到最近 $N-1$ 个层级中的最大活动目标，这对于非规则标记非常重要。

For 对于剩余的证明，定义如下扰动项会很方便

$$\mathsf{r}_\ell := \eta_\ell \sum_{i=1}^{N} |||z_{i,\ell+1}^\star - z_{i,\ell}^\star||| + |||u_{\ell+1}^\star - u_\ell^\star||| \sum_{i=1}^{N} \zeta_{i,\ell} \tag{18}$$

相应的乘法常数为 $C_{\mathrm{per}} := C_{\mathrm{stab}} + (1 + C_{\mathrm{mon}})\, C_{\mathrm{stab}}^2\, C_{\mathrm{rel}}$。

步骤2（步骤 ℓ 中常规标记的正向收缩）。如果 $\mathcal{M}_\ell^u \subseteq \mathcal{M}_\ell$，则对 使用约化（12），并对 $\zeta_{J[\ell]}$ 使用稳定性（11）$_\ell = \zeta_\ell^{\mathrm{active}}$。这验证了

$$\begin{aligned}\eta_{\ell+1}\,\zeta_{J[\ell],\ell+1} &\le \left[q_\theta\,\eta_\ell + C_{\mathrm{stab}}\,|||u_{\ell+1}^\star - u_\ell^\star|||\right]\left[\zeta_{J[\ell],\ell} + C_{\mathrm{stab}}\,|||z_{J[\ell],\ell+1}^\star - z_{J[\ell],\ell}^\star|||\right]\\ &\le q_\theta\,\eta_\ell\,\zeta_{J[\ell],\ell} + C_{\mathrm{stab}}\,\mathsf{r}_\ell + C_{\mathrm{stab}}^2\,|||u_{\ell+1}^\star - u_\ell^\star|||\;|||z_{J[\ell],\ell+1}^\star - z_{J[\ell],\ell}^\star|||\\ &\le q_\theta\,\eta_\ell\,\zeta_{J[\ell],\ell} + C_{\mathrm{per}}\,\mathsf{r}_\ell.\end{aligned} \tag{19}$$

如果 $\mathcal{M}_\ell^z \subseteq \mathcal{M}_\ell$，则对 η_ℓ 使用稳定性（11），并对 $\zeta_{J[\ell]}$ 使用约化（12）$_\ell$。交换角色时，这也保证了（19）。

步骤3（步骤 ℓ 中非规则标记的反向收缩）。如果步骤 $\mathcal{M}_\ell^u \subseteq \mathcal{M}_\ell$ 和 $\mathcal{M}_\ell^z \subseteq \mathcal{M}_\ell$ 中的两个包含关系都不成立 ℓ，则算法 A(iii.b) 保证

$$\zeta_{J[\ell],\ell} = \zeta_\ell^{\mathrm{active}} < \varrho_{\mathrm{irr}}\,\zeta_{L[\ell]}^{\mathrm{active}} = \varrho_{\mathrm{irr}}\,\zeta_{J[L[\ell]],L[\ell]}. \tag{20}$$

利用这一不等式以及估计量 η_ℓ 的稳定性（11），我们由此得到

$$\begin{aligned}\eta_\ell\,\zeta_{J[\ell],\ell} &\overset{(20),\,(11)}{<} \left[\eta_{L[\ell]} + C_{\mathrm{stab}}\sum_{k=1}^{\ell-L[\ell]}|||u_{\ell+1-k}^\star - u_{\ell-k}^\star|||\right]\varrho_{\mathrm{irr}}\,\zeta_{J[L[\ell]],L(\ell)}\\ &\overset{(11)}{\le} \varrho_{\mathrm{irr}}\,\eta_{L[\ell]}\,\zeta_{J[L[\ell]],L[\ell]} + C_{\mathrm{per}}\sum_{k=1}^{N-1}\mathsf{r}_{\ell-k}.\end{aligned} \tag{21}$$

步骤4（按目标的记号预备）。注意，多目标估计量乘积 Δ_ℓ 对所有对偶问题的贡献求和。在接下来的步骤中，转换为按目标的视角很重要。对于每个满足 $j \in \{1,\dots,N\}$ 的目标 G_j，存在唯一的 $m = M[\ell,j] \in \{\ell+N-1,\dots,\ell+2(N-1)\}$ 使得 $j = J[m]$，也就是说，m 是唯一的层级，使得索引为 j 的对偶问题处于活动状态，因此 $\zeta_{j,\,m} = \zeta_m^{\mathrm{active}}$。因此，在非规则标记的情况下，定义 $\pi[j] := J\big[L\big[M[\ell,j]\big]\big]$。函数 π 将目标索引 j 映射到与层级 $\ell \le M[\ell,j] - (N-1)$ 至 $M[\ell,j] \le \ell + 2(N-1)$ 中最大估计量相关联的活动目标（这对非规则标记会有所帮助）。此外，我们定义两两不交集，将目标 $1 \le j \le N$ 的索引按照标记模块中的算法决策划分，即

$\mathcal{I}_{\mathrm{reg}}[\ell] := \{j \in \{1,\dots,N\} |$ 算法 A 在步骤 $M[\ell,j]\}$及其补集中采用常规标记

$\mathcal{I}_{\mathrm{irr}}[\ell] := \{1,\dots,N\} \setminus \mathcal{I}_{\mathrm{reg}}$

$\mathcal{I}_{\mathrm{irr}}[\ell] = \{j \in \{1,\dots,N\} |$ 算法 A 在步骤 $M[\ell,j]$中采用非规则标记 $\}$.

由于 $M[\ell,j] \in \{\ell+N-1,\dots,\ell+2(N-1)\}$，这考虑了算法的 N 个步骤。

步骤 5（扰动收缩 $\ell + 2N - 1 \to \ell$）。在这一步中，我们证明（17）中所述的扰动收缩。每个索引为 $i = 1,\dots,N$ 的对偶问题，在步骤 $\ell+N-1,\dots,\ell+2(N-1)$ 中恰好处于活动状态一次。在每一步中，都会采用常规标记（见步骤 1）或非规则标记（见步骤2）。因此，对于任意 $m \in \{\ell+N-1,\dots,\ell+2(N-1)\}$，我们有：

$$\eta_{m+1}\,\zeta_{J[m],m+1} \overset{(19)}{\le} q_\theta\,\eta_m\,\zeta_{J[m],m} + C_{\mathrm{per}}\,\mathsf{r}_m \tag{22a}$$

or

$$\eta_m\zeta_{J[m],m} \overset{(21)}{\le} \varrho_{\mathrm{irr}}\,\eta_{L[m]}\,\zeta_{J[L[m]],L[m]} + C_{\mathrm{per}}\sum_{k=1}^{N-1}\mathsf{r}_{m-k}, \tag{22b}$$

其中， $L[m] \in \{m-1, \dots, m-N+1\}$ 是在非规则标记情况下来自步骤 1 的层级。请注意，

$$\sum_{k=1}^{N-1} \mathsf{r}_{m-k} \le \sum_{k=\ell}^{\ell+2(N-1)} \mathsf{r}_k \quad \text{for all } m \in \{\ell+N-1, \dots, \ell+2(N-1)\}. \tag{23}$$

我们将多目标估计量乘积 $\Delta_{\ell+2N-1}$ 拆分为相对于各目标的常规标记和非规则标记所产生的贡献，即

$$\Delta_{\ell+2N-1} = \sum_{j=1}^{N} \eta_{\ell+2N-1}\, \zeta_{j,\ell+2N-1} = \sum_{j \in \mathcal{I}_{\mathrm{reg}}[\ell]} \eta_{\ell+2N-1}\, \zeta_{j,\ell+2N-1} + \sum_{j \in \mathcal{I}_{\mathrm{irr}}[\ell]} \eta_{\ell+2N-1}\, \zeta_{j,\ell+2N-1}. \tag{24}$$

式(24)中的常规项可对活动目标使用(22a)进行收缩，对非活跃目标使用稳定性进行收缩，从 (11) 而得到

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{I}_{\mathrm{reg}}[\ell]} \eta_{\ell+2N-1}\, \zeta_{j,\ell+2N-1} &\overset{(22a),(11)}{\le} q_\theta \sum_{j \in \mathcal{I}_{\mathrm{reg}}[\ell]} \eta_{\ell+N-1}\, \zeta_{j,\ell+N-1} + |\mathcal{I}_{\mathrm{reg}}[\ell]|\, C_{\mathrm{per}} \sum_{k=\ell+N-1}^{\ell+2(N-1)} \mathsf{r}_k \\ &\overset{(11)}{\le} q_\theta \sum_{j \in \mathcal{I}_{\mathrm{reg}}[\ell]} \eta_{\ell}\, \zeta_{j,\ell} + |\mathcal{I}_{\mathrm{reg}}[\ell]|\, C_{\mathrm{per}} \sum_{k=\ell}^{\ell+2(N-1)} \mathsf{r}_k. \end{aligned} \tag{25}$$

式(24)中非规则标记对应的求和更为复杂，需要一次性收缩到第 ℓ 层。这是因为在第 $\ell+N-1$ <style id='11'}至第 $\ell+2(N-1)$ 层的任何非规则标记，都会将当前层与前面的 $N-1$ 层进行比较。因此，在最坏情况分析中，一个非规则项可能会被收缩回第 ℓ 层。通过反复利用(22b)和(11)来涵盖最坏情况，我们可推得

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_{\mathrm{irr}}[\ell]} \eta_{\ell+2N-1}\, \zeta_{j,\ell+2N-1} \le \varrho_{\mathrm{irr}} \sum_{j \in \mathcal{I}_{\mathrm{irr}}[\ell]} \eta_{\ell}\, \zeta_{\pi[j],\ell} + 2|\mathcal{I}_{\mathrm{irr}}[\ell]|\, C_{\mathrm{per}} \sum_{k=\ell}^{\ell+2(N-1)} \mathsf{r}_k. \tag{26}$$

前面的因子2 之所以出现，是因为我们对非活跃目标使用稳定性(11)，而对活动目标使用的估计(22b)本身已经包含一个求和（我们还使用了(23)）。

总之，将 (24) 与 (25)–(26) 结合起来，我们得出

$$\Delta_{\ell+2N-1} \le q_\theta \sum_{j \in \mathcal{I}_{\mathrm{reg}}[\ell]} \eta_{\ell}\, \zeta_{j,\ell} + |\mathcal{I}_{\mathrm{reg}}[\ell]|\, C_{\mathrm{per}} \sum_{k=\ell}^{\ell+2(N-1)} \mathsf{r}_k + \varrho_{\mathrm{irr}} \sum_{j \in \mathcal{I}_{\mathrm{irr}}[\ell]} \eta_{\ell}\, \zeta_{\pi[j],\ell} + 2|\mathcal{I}_{\mathrm{irr}}[\ell]|\, C_{\mathrm{per}} \sum_{k=\ell}^{\ell+2(N-1)} \mathsf{r}_k.$$

注意，每个索引为 $j \in \{1, \dots, N\}$ 的目标 G_j 在对 $\mathcal{I}_{\mathrm{reg}}[\ell]$ 求和时至多出现一次，在对 $\mathcal{I}_{\mathrm{irr}}[\ell]$ 求和时至多出现 $N-1$ 次，因为 $\pi[j] \neq j$。因此，我们得到

$$\Delta_{\ell+2N-1} \le \big[q_\theta + (N-1)\varrho_{\mathrm{irr}}\big] \Delta_\ell + 2N\, C_{\mathrm{per}} \sum_{k=\ell}^{\ell+2(N-1)} \mathsf{r}_k.$$

步骤 6（余项的可求和性）。令 $\mathsf{R}_k := 2N\, C_{\mathrm{per}} \sum_{k'=k}^{k+2(N-1)} \mathsf{r}_{k'}$。设 $n \in \mathbb{N}_0$ 任意。我们注意到，在求和 $\sum_{k=\ell}^{\ell+n} \mathsf{R}_k^2$ 中，每个项 r_k 至多出现 $2N-1$ 次。由离散柯西-施瓦茨不等式，我们因此得到

$$\sum_{k=\ell}^{\ell+n} \mathsf{R}_k^2 \le (2N)^3\, C_{\mathrm{per}}^2 \sum_{k=\ell}^{\ell+n} \sum_{k'=k}^{k+2(N-1)} \mathsf{r}_{k'}^2 \le (2N)^4\, C_{\mathrm{per}}^2 \sum_{k=\ell}^{(\ell+n)+2(N-1)} \mathsf{r}_k^2.$$

离散柯西-施瓦茨不等式还可得出

$$\mathsf{r}_k^2 \le 2N\Big(\eta_k^2 \sum_{i=1}^{N} |||z_{i,k+1}^\star - z_{i,k}^\star|||^2 + |||u_{k+1}^\star - u_k^\star|||^2 \sum_{i=1}^{N} \zeta_{i,k}^2\Big).$$

利用拟单调性（QM）和 $K := \ell + n + 2\,(N-1)$，我们推导得

$$\sum_{k=\ell}^{\ell+n} \mathsf{R}_k^2 \le (2N)^5\, C_{\mathrm{per}}^2\, C_{\mathrm{mon}}^2 \Big[\eta_\ell^2 \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=\ell}^{K} |||z_{i,k+1}^\star - z_{i,k}^\star|||^2 + \Big(\sum_{i=1}^{N} \zeta_{i,\ell}^2\Big) \sum_{k=\ell}^{K} |||u_{k+1}^\star - u_k^\star|||^2\Big].$$

回顾 $|||v|||^2 = a\,(v,\ v)$ 以及变分公式（2）和（6）连同 $\mathcal{X}_\ell \subseteq \mathcal{X}_{\ell+1}$ 蕴含伽辽金正交性

$$a(u^\star - u_{\ell+1}^\star, u_{\ell+1}^\star - u_\ell^\star) = 0 \quad \text{for all } \ell \in \mathbb{N}_0.$$

由此得到的勾股恒等式

$$|||u_{k+1}^\star - u_k^\star|||^2 = |||u^\star - u_k^\star|||^2 - |||u^\star - u_{k+1}^\star|||^2$$

因此给出望远镜求和

$$\sum_{k=\ell}^{K} |||u_{k+1}^\star - u_k^\star|||^2 = |||u^\star - u_\ell^\star|||^2 - |||u^\star - u_{K+1}^\star|||^2 \le |||u^\star - u_\ell^\star||| \le C_{\mathrm{rel}}^2\, \eta_\ell^2.$$

同样的论证也适用于对偶问题。总之，我们由此推导得

$$\sum_{k=\ell}^{\ell+n} \mathsf{R}_k^2 \le 2^6\, N^5\, C_{\mathrm{per}}^2\, C_{\mathrm{mon}}^2\, C_{\mathrm{rel}}^2\, \eta_\ell^2 \sum_{i=1}^{N} \zeta_{i,\ell}^2 =: C_{\mathrm{sum}}\, \eta_\ell^2 \sum_{i=1}^{N} \zeta_{i,\ell}^2 \le C_{\mathrm{sum}}\, \Delta_\ell^2.$$

由于 C_{sum} 与 n无关，因此（17）的证明至此完成。 □

注7。 为降低估计中的 N 依赖性，可以考虑目标误差的 ℓ_2-和 $\sum_{j=1}^{N} |G_j(u^\star) - G_j(u_\ell^\star)|^2$，其中 $\widetilde{\Delta}_\ell := \eta_\ell^2 \sum_{i=1}^{N} \zeta_{i,\ell}^2$。在这种情况下，利用杨氏不等式进行稳定性 (11)和约化 (12)，从而得到

$$\mu_h(v_h)^2 \le (1+\delta)\, \mu_H(v_h)^2 + (1+\delta^{-1})\, C_{\mathrm{stab}}^2\, |||v_h - v_H|||^2$$

以及

$$\mu_h(v_h)^2 \le (1+\delta)\, q_\theta^2\, \mu_H(v_H)^2 + (1+\delta^{-1})\, C_{\mathrm{stab}}^2\, |||v_h - v_H|||^2.$$

定义 $\widetilde{C}_{\mathrm{stab}} := (1+\delta^{-1})\, C_{\mathrm{stab}}^2$ 以及 $\widetilde{C}_{\mathrm{per}} := 2\widetilde{C}_{\mathrm{stab}} + (1 + C_{\mathrm{mon}})^2\, C_{\mathrm{stab}}^2\, C_{\mathrm{rel}}^2$。选择 $0 < \delta$足够小，使得 $(1+\delta)\, q_\theta^2 < 1$ 和 $(1+\delta)^N < 2$成立，则扰动收缩表示为

$$\widetilde{\Delta}_{\ell+2N-1} \le \widetilde{q}_{\mathrm{ctr}}\, \widetilde{\Delta}_\ell + \widetilde{\mathsf{R}}_\ell \quad \textit{with} \quad \sum_{k=\ell}^{\infty} \widetilde{\mathsf{R}}_k \le \widetilde{C}_{\mathrm{sum}}\, \widetilde{\Delta}_\ell,$$

其中 $\widetilde{q}_{\mathrm{ctr}} := (1+\delta)\, q_\theta^2 + (N-1)(1+\delta)^{N-1}\, \varrho_{\mathrm{irr}}^2$ 以及 $\widetilde{C}_{\mathrm{sum}} := 2^3\, N^2\, C_{\mathrm{per}}^2\, C_{\mathrm{mon}}^2\, C_{\mathrm{rel}}^2$，并对余项$\mathsf{R}_\ell$作适当调整。

定理的证明4。结合（17），由杨氏不等式可得

$$\Delta_{\ell+2N-1}^2 \le (1+\delta)\, q_{\mathrm{ctr}}\, \Delta_\ell^2 + (1+\delta^{-1})\, \mathsf{R}_\ell^2 \quad \text{for all } \ell \in \mathbb{N}_0 \text{ and all } 0 < \delta. \tag{27}$$

我们选择 $0<\delta$ 足够小，使得 $q:=(1+\delta)\,q_{\mathrm{ctr}}<1$。我们旨在验证 [BFM+25 中的可求和性准则，引理 2] 对于 $a_\ell:=\Delta_\ell$。为此，令 $\ell,\ n\in\mathbb{N}_0$。结合拟单调性（QM），最后一个公式（27）可得

$$\sum_{k=\ell}^{\ell+n}\Delta_k^2 \overset{(\mathrm{QM})}{\leq} [1+2(N-1)\,C_{\mathrm{mon}}^4]\,\Delta_\ell^2+\sum_{k=\ell+2N-1}^{\ell+n}\Delta_k^2=[1+2(N-1)\,C_{\mathrm{mon}}^4]\,\Delta_\ell^2+\sum_{k=\ell}^{\ell+n-(2N-1)}\Delta_{k+2N-1}^2$$
$$\overset{(27)}{\leq}[1+2(N-1)\,C_{\mathrm{mon}}^4]\,\Delta_\ell^2+\sum_{k=\ell}^{\ell+n-(2N-1)}\Big(q\,\Delta_k^2+(1+\delta^{-1})\,\mathsf{R}_k^2\Big).$$

对该估计进行整理，可得

$$\sum_{j=\ell}^{\ell+n}\Delta_j^2 \leq \frac{1}{1-q}\Big([1+2(N-1)\,C_{\mathrm{mon}}^4]\,\Delta_\ell^2+(1+\delta^{-1})\sum_{k=\ell}^{\ell+n-(2N-1)}\mathsf{R}_k^2\Big)$$
$$\overset{(17)}{\leq}\frac{(1+2(N-1)\,C_{\mathrm{mon}}^4)+(1+\delta^{-1})\,C_{\mathrm{sum}}}{1-q}\,\Delta_\ell^2=:C_{\mathrm{tail}}\,\Delta_\ell^2.$$

因此，[BFM+25引理 2] 得出 R-线性收敛的证明（16），其中$C_{\mathrm{lin}}^2:=1+C_{\mathrm{tail}}$ 且 $q_{\mathrm{lin}}^2:=(1+C_{\mathrm{tail}})/(2+C_{\mathrm{tail}})$（[BFM+25] 中的证明揭示了这一点）。□

4. 最优收敛率

正如 [BDD04] 在自适应有限元的背景下所引入的，最优收敛率可通过非线性逼近类来刻画。本文的主要结果（下文的定理8 ）将多目标估计量乘积的衰减 Δ_ℓ（定义于（15）中）与理论上的最优网格序列所能达到的最佳收敛率联系起来。为此，对于 $n\in\mathbb{N}_0$，若 $\mathcal{T}_H\in\mathbb{T}_n$，则记作 $\mathcal{T}_H$ 是 $\mathcal{T}_0$ 的细化，且增加的单元数至多为n，即 $\mathcal{T}_H\in\mathbb{T}$ 且$\#\mathcal{T}_H-\#\mathcal{T}_0\leq n$。我们称 $w^\star\in\{u^\star,z_1^\star,\dots,z_N^\star\}$属于收敛率为 $0<r$的非线性逼近类，当且仅当

$$\|w^\star\|_{\mathbb{A}_r}:=\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\big((n+1)^r\min_{\mathcal{T}_{\mathrm{opt}}\in\mathbb{T}_n}\mu_{\mathrm{opt}}(w^\star)\big)<\infty, \tag{28}$$

其中 $\mu_{\mathrm{opt}}(w^\star)$ 是由式（10）中的最优三角剖分 $\mathcal{T}_{\mathrm{opt}}\in\mathbb{T}_n$ 并依据 $w^\star$得到的相应误差估计量。尽管我们的 $\|w^\star\|_{\mathbb{A}_r}$定义遵循 [CFPP14] 且仅依赖于估计量，但我们注意到，$\|w^\star\|_{\mathbb{A}_r}$ 实际上可以按照 [CKNS08]中的方式，根据误差加数据振荡来刻画。详情请参阅例如 [CFPP14] 。

下面的主定理针对原问题和对偶问题能够以某些速率进行逼近的情形给出了有意义的结果 $0<s,t$ 即

$$\|u^\star\|_{\mathbb{A}_s}+\sum_{i=1}^N\|z_i^\star\|_{\mathbb{A}_t}<\infty,$$

也就是说，存在（可能不同的）网格序列，使得原问题估计量 η至少以速率 s 衰减，并且所有对偶估计量 ζ_j 至少以速率 t衰减。根据下面的定理，所提出的算法 A 随后保证式（Δ_ℓ 15）中的多目标估计量乘积 以速率 $s+t$衰减。

定理 8（NGO-AFEM 的最优收敛率）。假设稳定性 (A1)、约化 (A2)、离散可靠性 (A4)和拟单调性 (QM)。定义 $\theta_\star:=$

$1/(1+C_{\mathrm{stab}}^2 C_{\mathrm{drel}}^2)$ 且

$$C_0 := \max_{k=0,\dots,N-2} \#\mathcal{M}_k\, \Delta_k^{1/(s+t)}. \tag{29}$$

令 $0<\theta<\theta_\star$ 和 $0<\varrho_{\mathrm{irr}}<(1-q_\theta)/(N-1)$，其中 $0<q_\theta=[1-(1-q_{\mathrm{red}}^2)\theta]^{1/2}<1$ 如引理 *2*所示。则算法 *A* 保证对于所有速率 $0<s$、t，均有

$$\sup_{\ell\in\mathbb{N}_0}(\#\mathcal{T}_\ell-\#\mathcal{T}_0+1)^{s+t}\Delta_\ell \le C_{\mathrm{opt}}\,\max\Big\{C_0,\ \max_{j=1,\dots,N}\big[\|u^\star\|_{\mathbb{A}_s}\|z_j^\star\|_{\mathbb{A}_t}\big]^{1/(s+t)}\Big\}, \tag{30}$$

其中 $C_{\mathrm{opt}}>0$ 仅取决于 (A1)、(A2)、(A4)、(QM)中的常数，以及 C_{mark}、θ、ϱ_{irr}、s、t、N、初始网格 $\mathcal{T}_0$和网格闭合常数。

该表述可解释如下。若速率 $0<s$ 对于原问题在理论上是可能的，即 $\|u^\star\|_{\mathbb{A}_s}<\infty$，并且速率 $0<t$ 对于所有对偶问题都是可能的，即 $\sum_{i=1}^N\|z_i^\star\|_{\mathbb{A}_t}<\infty$，则算法 A 以速率 $0<s+t$降低式（15）中的多目估计量乘积 Δ_ℓ。更严格地说，有 $\Delta_\ell\lesssim(\dim\mathcal{X}_\ell)^{-(s+t)}$，其中 $\dim\mathcal{X}_\ell$ 是有限元离散的自由度数量。

定理8的数学核心是下面的引理，它控制自适应算法每一步中已标记单元的数量。

引理 9（控制已标记单元的数量）。假设满足稳定性(A1)和离散可靠性(A4)，并令 $0<\theta<\theta_\star=1/(1+C_{\mathrm{stab}}^2C_{\mathrm{drel}}^2)$ 如定理*8*所述。那么，存在常数 $C_1>0$，使得对所有 $0<s$，t 以及所有 $\ell\in\mathbb{N}_0$，算法 $\mathcal{M}_\ell$ 的已标记单元集合*A* 满足以下条件，其中 C_0 来自(29)：

$$\#\mathcal{M}_\ell \le C_1\,\max\Big\{C_0,\big[\|u^\star\|_{\mathbb{A}_s}\,\|z_j^\star\|_{\mathbb{A}_t}\big]^{1/(s+t)}\Big\}\,\Delta_\ell^{-1/(s+t)},\qquad \textit{where } j=\mathrm{mod}(\ell,N)+1. \tag{31}$$

常数 C_1 仅依赖于 C_{mark}、C_{mon}、$q_\star$、ϱ_{irr}、s、t 和 N。

引理9 关于控制算法A中已标记单元数量的证明需要借助文献中的以下两个辅助结果。

引理 10（Dörfler 标记的最优性 [CFPP14，命题 4。12]）。假设满足稳定性(A1) 和离散可靠性(A4)，并回顾 $0<\theta_\star<1$ 定理*8*中的结论。那么，对所有 $0<\theta<\theta_\star$，存在 $0<q_\star<1$，使得对所有 $\mathcal{T}_H\in\mathbb{T}$ 以及所有 $\mathcal{T}_h\in\mathbb{T}(\mathcal{T}_H)$，以下蕴含关系对任意估计量 $\mu_H\in\{\eta_H,\zeta_{1,H},\dots,\zeta_{N,H}\}$成立：

$$\mu_h\le q_\star\mu_H \quad\Longrightarrow\quad \theta\,\mu_H^2\le\mu_H(\mathcal{T}_H\backslash\mathcal{T}_h)^2. \qquad\square \tag{32}$$

逼近类的定义（28）以及 [Ste07；CKNS08]中关于最新顶点二分的叠加估计的有效性，使得以下引理成立。

引理 11（比较引理 [FGH+16，引理 14]）。给定任意 $0<q<1$，每个网格 $\mathcal{T}_H\in\mathbb{T}$ 均存在一个细化 $\mathcal{T}_h\in\mathbb{T}(\mathcal{T}_H)$，使得对于所有 $0<s$，t 以及所有$j=1$，……，N，均有

$$\begin{aligned}&\eta_h\,\zeta_{j,h}\le q\,\eta_H\,\zeta_{j,H}\qquad \textit{and}\\ &\#\mathcal{T}_h-\#\mathcal{T}_H\le 2\,\big[C_{\mathrm{mon}}\,q^{-1/4}\,\|u^\star\|_{\mathbb{A}_s}\,\|z_j^\star\|_{\mathbb{A}_t}\big]^{1/(s+t)}\,\big[\eta_H\,\zeta_{j,H}\big]^{-1/(s+t)}.\qquad\square\end{aligned} \tag{33}$$

引理 *9* 的证明。 证明分为四个步骤。步骤 1 对集合 $\mathcal{M}_\ell^{uz}$ 进行控制。步骤 2–3 讨论算法 常规标记 中的 A(iii.b)，其中 $\mathcal{M}_\ell=\mathcal{M}_\ell^{uz}$满足 η_ℓ 或 $\zeta_\ell^{\mathrm{active}}$ 的 Dörfler 标记准则。步骤 4 讨论算法 非规则标记 中的 A(iii.b)，此时 Dörfler 标记可能失效，因为 $\mathcal{M}_\ell\subsetneq\mathcal{M}_\ell^{uz}$。

步骤 1（对 $\#\mathcal{M}_\ell^{uz}$ 对所有 $\ell \in \mathbb{N}_0$ 的控制）。回忆 $\zeta_\ell^{\mathrm{active}} = \zeta_{j,\,\ell}$ 其中 $j = \mathrm{mod}(\ell, N) + 1$。对于 $q = q_\star^2$ 和 $\mathcal{T}_H = \mathcal{T}_\ell$，引理 $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}(\mathcal{T}_\ell)$ 中的网格 11 保证

$$\eta_h \zeta_{j,h} \le q_\star^2\, \eta_\ell \zeta_{j,\ell} \quad \text{and} \tag{34a}$$

$$\#\mathcal{T}_h - \#\mathcal{T}_\ell \le 2\,\big[C_{\mathrm{mon}}\, q_\star^{-1/2}\, \|u^\star\|_{\mathbb{A}_s}\, \|z_j^\star\|_{\mathbb{A}_t}\big]^{1/(s+t)}\, \big[\eta_\ell \zeta_{j,\ell}\big]^{-1/(s+t)}. \tag{34b}$$

第一不等式 (34a) 得出

$$\eta_h \le q_\star\, \eta_\ell \quad \text{or} \quad \zeta_{j,h} \le q_\star\, \zeta_{j,\ell}.$$

引理 10 以及 $\mathcal{M}_\ell^u$ 和 $\mathcal{M}_\ell^z$ 的准最小选择，因而保证

$$\#\mathcal{M}_\ell^u \le C_{\mathrm{mark}}\, \#(\mathcal{T}_\ell \backslash \mathcal{T}_h) \quad \text{or} \quad \#\mathcal{M}_\ell^z \le C_{\mathrm{mark}}\, \#(\mathcal{T}_\ell \backslash \mathcal{T}_h).$$

无论如何，这证明了

$$\begin{aligned} \#\mathcal{M}_\ell^{uz} &\le C_{\mathrm{mark}}\, \min\{\#\mathcal{M}_\ell^u, \#\mathcal{M}_\ell^z\} \le C_{\mathrm{mark}}^2\, \#(\mathcal{T}_\ell \backslash \mathcal{T}_h) \le C_{\mathrm{mark}}^2\, (\#\mathcal{T}_h - \#\mathcal{T}_\ell) \\ &\overset{(34b)}{\le} 2\, C_{\mathrm{mark}}^2\, \big[C_{\mathrm{mon}}\, q_\star^{-1/2}\, \|u^\star\|_{\mathbb{A}_s}\, \|z_j^\star\|_{\mathbb{A}_t}\big]^{1/(s+t)}\, \big[\eta_\ell\, \zeta_{j,\ell}\big]^{-1/(s+t)}. \end{aligned} \tag{35}$$

步骤2（控制 $\#\mathcal{M}_\ell$，针对 $\ell \le N-2$）。根据 29 中 C_0 的定义，可立即得出 (31) 在 $C_1 = 1$ 对 $\ell \le N-2$ 时成立。

步骤3（控制 $\#\mathcal{M}_\ell$，针对常规标记和 $N-1 \le \ell$）。我们有ϱ_{irr} 最大值$_{i=1,\dots,N-1}\, \zeta_{\ell-i}^{\mathrm{active}} \le \zeta_\ell^{\mathrm{active}}$。拟单调性 (QM) 表明

$$\zeta_{J[\ell-i],\ell} \le C_{\mathrm{mon}}\, \zeta_{J[\ell-i],\ell-i} = C_{\mathrm{mon}}\, \zeta_{\ell-i}^{\mathrm{active}}.$$

由此可得

$$\sum_{i=0}^{N-1} \zeta_{i,\ell} = \sum_{i=0}^{N-1} \zeta_{J[\ell-i],\ell} \le \zeta_\ell^{\mathrm{active}} + C_{\mathrm{mon}} \sum_{i=1}^{N-1} \zeta_{\ell-i}^{\mathrm{active}} \le \big(1 + (N-1) C_{\mathrm{mon}}\, \varrho_{\mathrm{irr}}^{-1}\big)\, \zeta_\ell^{\mathrm{active}}.$$

连同

$$C_1' := 2\, C_{\mathrm{mark}}^2\, \big[C_{\mathrm{mon}}\, q_\star^{-1/2}\, \big(1 + (N-1)\, C_{\mathrm{mon}}\, \varrho_{\mathrm{irr}}^{-1}\big)\big]^{1/(s+t)} \tag{36}$$

以及（35），可得

$$\begin{aligned} \#\mathcal{M}_\ell^{uz} &\overset{(35)}{\le} 2\, C_{\mathrm{mark}}^2\, \big[C_{\mathrm{mon}}\, q_\star^{-1/2}\, \|u^\star\|_{\mathbb{A}_s}\, \|z_j^\star\|_{\mathbb{A}_t}\big]^{1/(s+t)}\, \big[\eta_\ell\, \zeta_\ell^{\mathrm{active}}\big]^{-1/(s+t)} \\ &\le C_1'\, \big[\|u^\star\|_{\mathbb{A}_s}\, \|z_j^\star\|_{\mathbb{A}_t}\big]^{1/(s+t)}\, \Delta_\ell^{-1/(s+t)}. \end{aligned}$$

这证明了（31），其中 $C_1 =$ 最大值$\{1, C_1'\}$ 对任意 $\ell \in \mathbb{N}$ 在常规标记下成立。因此，对所有 $\ell \in \mathbb{N}_0$ 在常规标记下，结论均得以证明。 (31)

步骤4（非规则标记下对 $\#\mathcal{M}_\ell$ 的控制）。设 $N-1 \le \ell$，则存在一个指标 $i \in \{1, \dots, N-1\}$ 使得 $\zeta_\ell^{\mathrm{active}} < \varrho_{\mathrm{irr}}\, \zeta_{\ell-i}^{\mathrm{active}}$。设 $0 \le \ell' < \ell$ 为满足以下条件的最大指标：$\mathcal{M}_{\ell'}$ 通过常规标记获得。注意，根据 ℓ' 的选取，所有网格层级 $k \in \{\ell'+1, \dots, \ell\}$ 均采用非规则标记。因此，算法 A（iii.b）保证

$$\#\mathcal{M}_\ell \le \cdots \le \#\mathcal{M}_{\ell'} \overset{(31)}{\le} \max\Big\{C_0, C_1'\, \big[\|u^\star\|_{\mathbb{A}_s} \|z_j^\star\|_{\mathbb{A}_t}\big]^{1/(s+t)}\Big\}\, \Delta_{\ell'}^{-1/(s+t)},$$

其中 $0 < C_1'$ 是（36）中定义的常数。利用拟单调性（QM）（或 R-线性收敛（16）），可验证

$$\Delta_\ell \le C_{\mathrm{mon}}^2\, \Delta_{\ell'}.$$

结合最后两个公式，我们证明了（31），其中 $C_1 = C_{\mathrm{mon}}^{2/(s+t)}$最大值$\{1, C_1'\}$ 对于任意$\ell \in \mathbb{N}$ 采用非规则标记。证明至此完成。□

定理 *8* 的证明。 设 $\ell \in \mathbb{N}$。回顾 [BDD04], 中的网格闭包估计

$$\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 \leq C_{\mathrm{mesh}} \sum_{k=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_k \tag{37}$$

其中常数 C_{mesh} 仅取决于 d 和 $\mathcal{T}_0$。结合对标记单元数量的控制（31）以及 R-线性收敛（16），可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,(\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 + 1) \leq \#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 &\overset{(37)}{\leq} C_{\mathrm{mesh}} \sum_{k=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_k \\
&\overset{(31)}{\lesssim} \max\Big\{C_0, \max_{j=1,\dots,N} \big[\|u^\star\|_{\mathbb{A}_s} \|z_j^\star\|_{\mathbb{A}_t}\big]^{1/(s+t)}\Big\} \left[\sum_{k=0}^{\ell-1} \Delta_k^{-1/(s+t)}\right] \\
&\overset{(16)}{\lesssim} \max\Big\{C_0, \max_{j=1,\dots,N} \big[\|u^\star\|_{\mathbb{A}_s} \|z_j^\star\|_{\mathbb{A}_t}\big]^{1/(s+t)}\Big\} \Delta_\ell^{-1/(s+t)}.
\end{aligned}$$

重新整理该估计可知，对所有 $\ell \in \mathbb{N}$,

$$(\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 + 1)^{s+t} \Delta_\ell \lesssim \max\Big\{C_0, \max_{j=1,\dots,N} \big[\|u^\star\|_{\mathbb{A}_s} \|z_j^\star\|_{\mathbb{A}_t}\big]^{1/(s+t)}\Big\}.$$

注意到，根据 $\|u^\star\|_{\mathbb{A}_s}$ 和 $\|z_j^\star\|_{\mathbb{A}_t}$的定义，该估计对 $\ell = 0$ 显然成立，因此证明得证。□

我们指出，在廉价的初始层级 $\ell = 0$ 上对所有对偶问题进行初始求解（并作比较），可以将定理 C_0 8 中的（29）里的常数改进如下。

推论 12。 调整算法 A，使得在层级 $\ell = 0$ 上求解所有对偶问题，并在必要时重新编号，使得 $\zeta_{N,\,0} \leq \zeta_{N-1,\,0} \leq \dots \leq \zeta_{1,\,0}$。此外，设$\zeta_{\ell-i}^{\mathrm{active}} := \zeta_{i+1,\,0}$ 对于 $\ell < i$，在算法 A的初始化中。假设定理 *8* 的条件成立，且对所有 $0 < s$, t，最优性结果 (30) 以改进的形式成立

$$\sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} (\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 + 1)^{s+t} \Delta_\ell \leq C_{\mathrm{opt}} \max_{j=1,\dots,N} \big[\|u^\star\|_{\mathbb{A}_s} \|z_j^\star\|_{\mathbb{A}_t}\big]^{1/(s+t)}, \tag{38}$$

也就是说，常数 C_0 来自 (29) 可以省略，因为有

$$C_0 \leq \widetilde{C}_1 \big[\|u^\star\|_{\mathbb{A}_s} \|z_j^\star\|_{\mathbb{A}_t}\big]^{1/(s+t)}.$$

~常数 C_1 仅取决于 C_{mark}、C_{mon}、$q_\star$、ϱ_{irr} 和 N。

证明。我们调整引理 9 的证明，并着重讨论 $\ell = 0$。由于常规标记是在层级 $\ell = 0$上执行的，引理 9 证明中的估计（31）适用，因此得到

$$\#\mathcal{M}_0 = \#\mathcal{M}_0^{uz} \leq 2\, C_{\mathrm{mark}}^2 \big[C_{\mathrm{mon}}\, q_\star^{-1/2} \|u^\star\|_{\mathbb{A}_s} \|z_1^\star\|_{\mathbb{A}_t}\big]^{1/(s+t)} \big[\eta_0\, \zeta_{1,0}\big]^{-1/(s+t)}.$$

此外，通过对偶问题可能的重新编号，我们有

$$\Delta_0 \leq N\, \eta_0\, \zeta_{1,0}.$$

对 $\#\mathcal{M}_\ell$ 任意 $0 \leq \ell$ 的控制可由引理 9的证明推出；根据最后一个估计，我们可以省略常数 C_0。证明至此完成。□

5. 数值实验

本节将介绍若干数值实验，以印证本文的理论结论。特别是，我们针对若干实验设置验证了所提出的多目标自适应算法（算法 A）的最优收敛率。这些设置具有未知的精确解，且对偶问题中的目标泛函彼此解耦。所有实验均使用开源 MATLAB 库 MooAFEM [IP23]。

5.1. 多目标实验。我们考虑 [MS09 的一个变体，例 7。3]定义在区域 $\Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ 上，并满足齐次狄利克雷边界条件。扩散系数为 $\boldsymbol{A} = 1$，右端项为 $f = 0$ 和 $\boldsymbol{f} = (-1,0)^\top \chi_{\Omega_1}$。目标定义为 $g_1 = g_2 = g_3 = 0$，以及 $\boldsymbol{g_1} = (1,0)^\top \chi_{\Omega_2}$、$\boldsymbol{g_2} = (1,0)^\top \chi_{\Omega_3}$和$\boldsymbol{g_3} = (0,1.5)^\top \chi_{\Omega_4}$，其中 χ_{Ω_i} 表示子区域 Ω_i上的示性函数，该子区域的定义如图1所示。自适应参数设为 $\theta = 0.5$、$C_{\mathrm{mark}} = 2$和$\varrho_{\mathrm{irr}} = 0.25$。除非另有说明，我们使用算法 A，并在非规则标记步骤 (iii.b) 中从集合 $\mathcal{M}_\ell^{uz}$中恰好选取 $\#\mathcal{M}_{\ell-1}$ 个单元。图1还展示了算法运行到某一时刻时的网格快照，分别对应 $p = 1$ （左）和 $p = 3$ （右）。

图2展示了多目标误差乘积 Δ_ℓ （式 (15)）对于$p \in \{1,2,3\}$ （左图）的收敛率，以及单个误差估计器 η_ℓ和 ζ_i、$_\ell$在 $i = 1$、2、3 情况下对于$p = 2$ （右图）的收敛率。多目标误差估计量的最优收敛率 $\mathcal{O}$（nDof^{-p}）以及单个估计器的最优收敛率$\mathcal{O}$（nDof$^{-p/2}$）均得以实现。注意，当误差估计量ζ_i、$_\ell$ 处于非活动状态时，其数值不会发生变化，尽管网格仍在继续细化，因为非活动估计量不会被重新计算。因此，图2（右图）的局部放大图呈现出阶梯状行为。

图 3比较了 NGO-AFEM 的多目标误差估计量与其他自适应方案。左图考察标准 AFEM，即在算法 A 中跳过步骤（ii）和步骤（iii），使得 $\mathcal{M}_\ell = \mathcal{M}_\ell^u$ 对所有 $\ell \in \mathbb{N}_0$均成立。右图描述了 NGO-AFEM 在 $N = 2$情况下运行的情形，即目标 G_3 始终处于非活动状态，并且算法 A中的步骤（ii）仅求解 $j \in \{1,2\}$。在这两种情况下，只有 NGO-AFEM 恢复了最优收敛率，而另外两种变体的表现均未达到最优。对于标准 AFEM，所有对偶估计量ζ_i、$_\ell$ 在 $i = 1$、2、3 情况下的收敛率均有所降低，因为网格仅针对原问题进行细化。对于采用 $N = 2$的 NGO-AFEM，对偶估计量ζ_3、$_\ell$ 未得到适当解析，因此其收敛性未达到最优。这强调了对所有对偶问题的奇异性进行解析对于实现多目标误差估计量 Δ_ℓ的最优收敛率的重要性。

5.2. 多目标实验。我们考虑 Z 形区域 $\Omega = (-1,1)^2 \setminus \mathrm{conv}\{(0,0),(-1,0),(-1,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$ 上的二次有限元空间，并在凹角 $\mathrm{conv}\{(-1,0),(0,0)\} \cup \mathrm{conv}\{(0,0),(-1,-1)\}$ 处施加狄利克雷边界条件，在边界 $\partial\Omega$ 的其余部分施加诺伊曼边界条件；几何设置见图4，狄利克雷边界以红色标示。扩散系数为 $\boldsymbol{A} = 1$，右端项为 $f = 0$和 $g_i = 0$（$i = 1,\dots,8$），以及 $\boldsymbol{f} = (-10,0)^\top \chi_{\Omega_1}$, $\boldsymbol{g}_i = (-10,0)^\top \chi_{\Omega_i}$（当 $\mathrm{mod}(i,3) = 0$）、$\boldsymbol{g}_i = (1,0)^\top \chi_{\Omega_i}$（当 $\mathrm{mod}(i,3) = 1$）和 $\boldsymbol{g}_i = (0,100)^\top \chi_{\Omega_i}$（当 $\mathrm{mod}(i,3) = 2$），其中 $i \in \{1,\dots,8\}$。这样可以确保所有方向都与两种边界条件相接触。自适应参数为 $\theta = 0.3$, $C_{\mathrm{mark}} = 2$和 $\varrho_{\mathrm{irr}} = 0.1$。

图 4 （右）还展示了 NGO-AFEM 经过若干自适应步骤后的网格快照。为了解析原问题奇异性，网格向凹角处细化；同时，为了解析对偶问题奇异性，网格也向所有子区域 $\Omega_{\boldsymbol{g}_i}$（其中 $i = 1$，……，8）处细化。

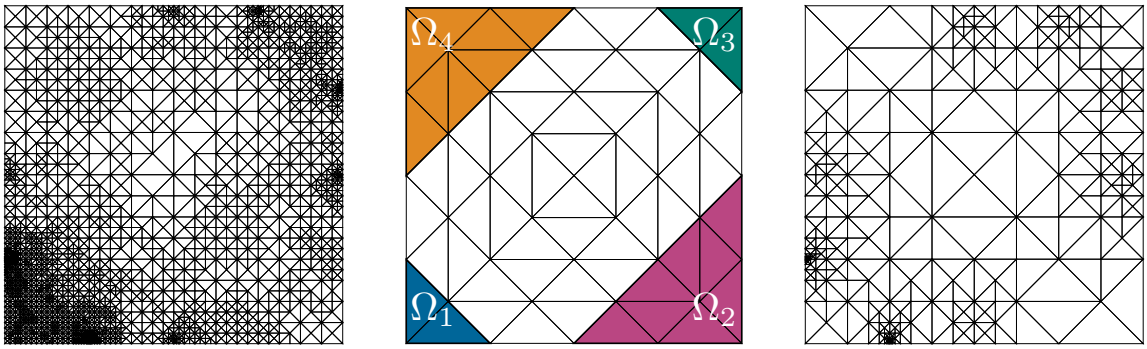


图1. 第 5.1 节实验所得的网格：初始网格（中间）以及 $p = 1$ （左侧）的结果，其中 自由度 $= 1892$，以及 $p = 3$ （右侧）的结果，其中自由度 $= 2053$。两种情况下，网格主要针对 Ω_1 左下角的原始奇异性进行细化。

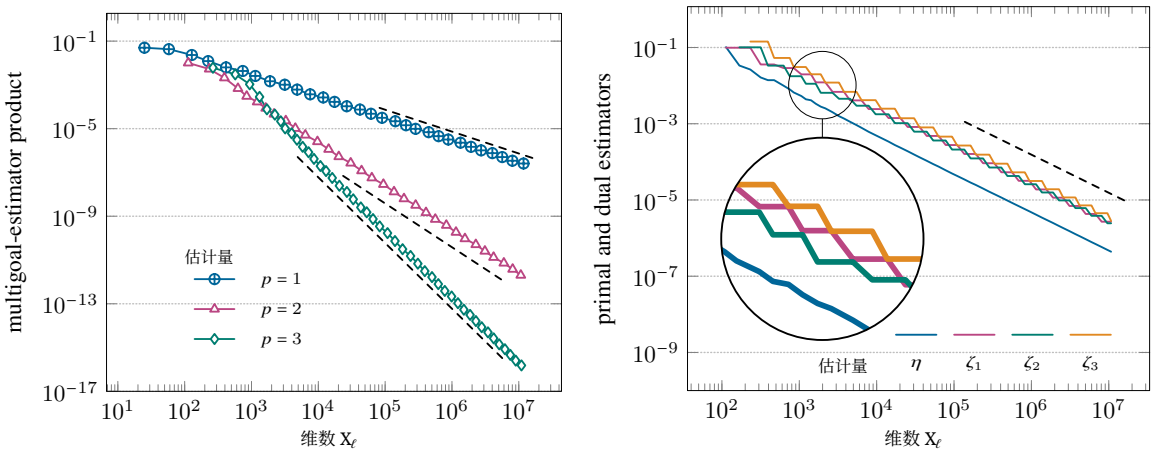


图2. 第 5.1 节实验的收敛图：左：多目标估计量乘积 $\Delta_\ell = \eta_\ell \sum_{i=1}^{3} \zeta_{i,\ell}$ 由（15）给出，其多项式次数为 $p \in \{1, 2, 3\}$。右：单个估计器 η 以及 ζ_1，ζ_2 和 ζ_3 在 $p = 2$下的收敛情况。右侧的估计量按照初始网格着色（图1中间面板）。

该实验比较了算法的四种实例A ，它们在两个方面有所不同：

(1) 对算法 A （iii.b）中的非规则标记，我们要么从集合 $\#\mathcal{M}_{\ell-1}$中恰好选取 $\mathcal{M}_\ell^{uz}$ 个元素，组成集合 $\mathcal{M}_\ell$ ，并采用 [FPZ16], 的标记；要么一个也不选，即 $\mathcal{M}_\ell = \emptyset$;

(2) 我们按照推论 $\zeta_{i,0}$ 对 $i = 1$，……， N 中提出的方法对误差估计量 12进行排序，或者完全不排序。

图 5 展示了全部四种情形。 x轴调整为显示累积自由度 累积自由度 $:= \sum_{0\le\ell}$自由度$_\ell$ 并且在所有情形下，针对累积自由度均观察到了最优收敛率 $\mathcal{O}(\text{累积自由度}^{-1})$ 。

我们看到，在所有情况下，预渐近区间都相当长，但变体 $|\#\mathcal{M}_{\ell-1}$已标记、未排序|（左上）最早达到渐近区间（例如参见 ζ_7 ）。我们还看到，标准 NGO 自适应有限元方法 $|\#\mathcal{M}_{\ell-1}$ 已标记、未排序|（左上）

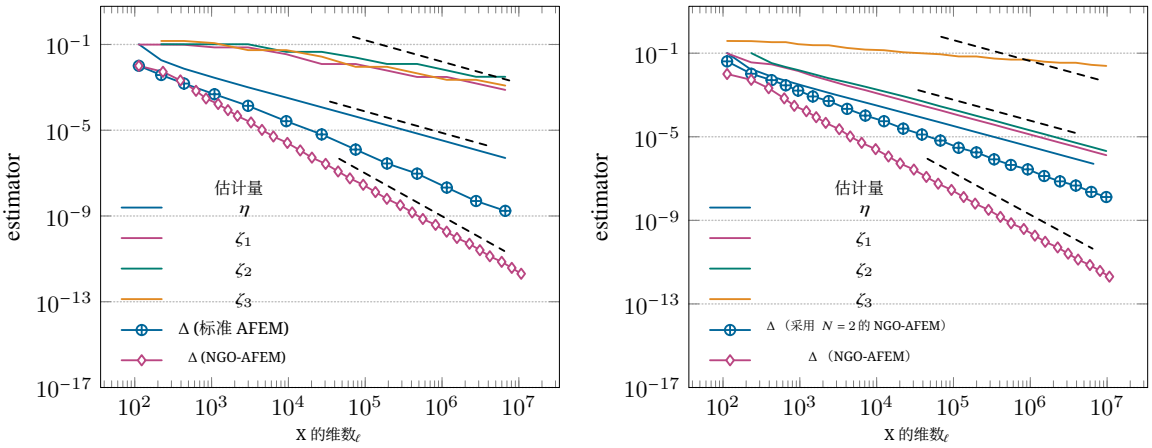


图3。 第 5.1 节实验中采用 $p = 2$替代方案的收敛图。有关更多细节，请参见 5.1 小节。左：经典自适应有限元方法。右：采用 $N = 2$ 的标准 NGO 自适应有限元方法，其中目标G_3 从未处于活动状态（但其估计量 ζ_3 仍会计算），即算法 A 中的步骤（ii）仅求解 $j \in \{1, 2\}$。为供参考，还加入了图 2 中采用 $N = 3$ 的 NGO-AFEM 的多目标估计量乘积。

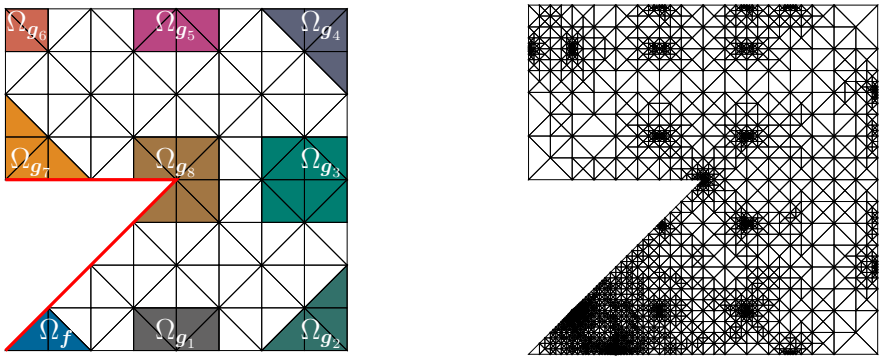
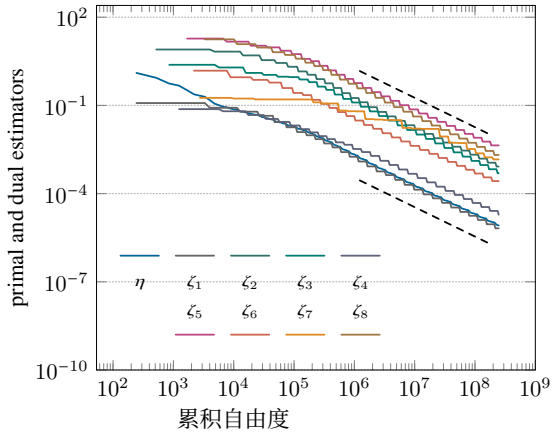


图4。 第 5.2 节中非光滑解实验的几何设置：Z 形区域 Ω上的初始自适应网格，原点处有凹角。所有子区域 Ωf 和 Ωg_i（其中 $i = 1$、.....、8）均已标出。凹角处的边界以红色突出显示

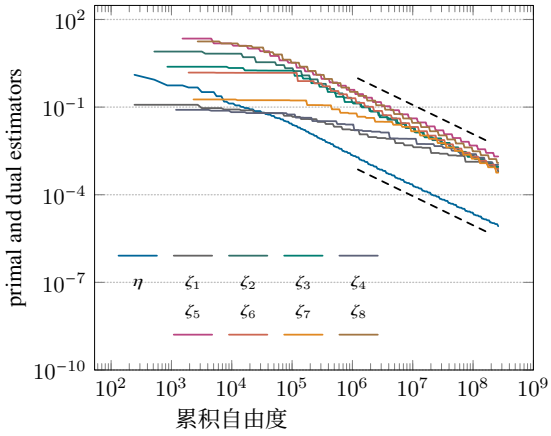
表示齐次狄利克雷边界条件，而其补集具有齐次诺伊曼边界条件。

是唯一一种原问题估计量并不比所有对偶估计量小很多的变体。我们注意到，在没有非规则标记的情况下，即变体 [0已标记、未排序]（右上）和变体 [0 已标记、已排序] （右下）中，估计量 η_ℓ 显示了未执行细化的层级；而在变体 [#$\mathcal{M}_{\ell-1}$ 已标记、未排序] （左上）和变体 [#$\mathcal{M}_{\ell-1}$ 已标记、已排序] （左下）中，估计量 η_ℓ 虽有波动，但始终在减小。

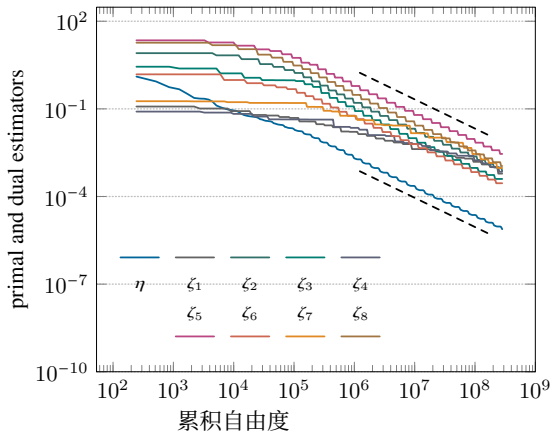
观察多目标误差估计量 Δ_ℓ （见15）图6，我们可以看到，四种变体的表现同样出色，均达到最优收敛率 $\mathcal{O}$（cumndof^{-2}），其中不采用非规则标记的变体略占优势；详见图6的放大图。



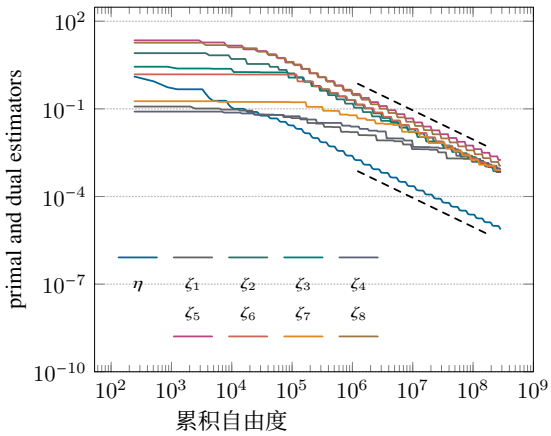
(a) $\#\mathcal{M}_{\ell-1}$ 已标记，未排序



(b) 0 已标记，未排序



(c) $\#\mathcal{M}_{\ell-1}$ 已标记，已排序



(d) 0 已标记，已排序

图 5。 第 5.2 节实验中单个估计器 η 以及 ζ_1、……、ζ_8 对于 $p = 2$的收敛图。左侧的估计器根据图 4中的初始网格进行着色。

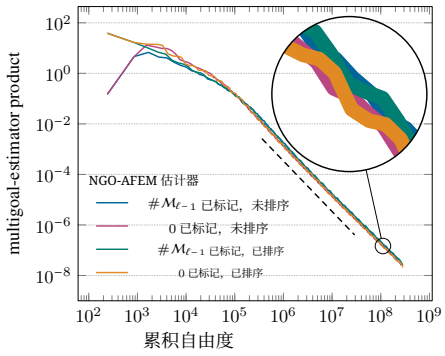


图6。 第 5.2节实验中多目标估计量乘积 $\Delta_\ell = \eta_\ell \sum_{i=1}^{8} \zeta_i$、$\ell$ （8）的收敛图，展示了小节5.2中所解释的全部四种变体。

6. 结论

我们提出并分析了一种用于对称线性椭圆型偏微分方程的新型多目标导向自适应有限元法（NGO-AFEM），该方法包含 N 个目标，能够同时处理多个线性目标泛函，同时每个自适应步只需求解两个离散问题。全面的收敛性分析验证了所提出的算法能够保证 R-线性收敛，并达到最优收敛率。该新算法的核心是一种标记策略：它结合了针对原问题和一个活跃对偶问题的 Dörfler 标记；但如果当前活跃的对偶问题就相应误差估计量的大小而言并非最紧迫的问题，该策略还会实施一定的基数控制。

为使本文的论述合理且聚焦于新的标记策略，我们考虑了一个对称线性椭圆型偏微分方程模型问题和线性目标泛函。可能的扩展方向包括以下几个方面：

首先，可以考虑非对称甚至非线性偏微分方程作为模型问题。这需要相应地调整对偶问题；不过，用于线性收敛的关键勾股恒等式可以替换为以下论证：适用于一般二阶线性椭圆型偏微分方程的论证，见 [Fei22]；或者采用紧性论证，以保证得到拟勾股恒等式，该恒等式也适用于某些非线性偏微分方程 [FFP14；BHP17；BBI+22]。关于此类问题中针对单个目标的目标导向自适应有限元法研究，例如见 [BIP21；BBPS25] ；此外，（局部 Lipschitz 连续的）半线性问题也可以考虑 [BBI+22]。

其次，可以考虑通过内循环使用代数求解器求解离散问题。自适应网格加密与非精确代数求解器之间的算法交互，已在 [GHPS21；HPSV21；BIM+24] 中针对标准 AFEM 进行了研究，也在具有单个目标的目标导向情形下进行了研究，见 [BIP21；DC23；BGIP23；BBPS25]。我们预计，我们算法的主要思想及其分析可以推广到这一更一般的情形。

第三，类似 [BIP21] 中的二次目标，也属于未来研究中潜在扩展的范畴。我们注意到，扩展到非线性问题和二次目标似乎更为复杂，因为原问题与对偶问题不像在线性情形下那样完全解耦。即使对于单个目标，目标估计的形式也将是 $\eta_\ell^2 + \eta_\ell \zeta_\ell$（而非仅为 $\eta_\ell \, \zeta_\ell$），因此，标记策略及其分析也需要作相应调整。

最后，[BET11] 首先将估计量 [MS09；FPZ16] 中的标记策略先将估计量组合起来，再进行标记。该方法先将各估计量组合成一个单一估计量，然后标记网格以进行细化（而 MARK模块如本文所述经过调整后，能否对这种标记策略进行分析。

参考文献

[AO00] M. Ainsworth 和 J. T. Oden。有限元分析中的后验误差估计。Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], 纽约，2000。[BBI+22] R. Becker、M. Brunner、M. Innerberger、J. M. Melenk 和 D. Praetorius。半线性椭圆型偏微分方程的速率最优目标导向自适应有限元。*Comput. Math. Appl.*, 118：18–35，2022。[BBPS25] P. Bringmann、M. Brunner、D. Praetorius 和 J. Streitberger。非对称线性椭圆偏微分方程目标导向自适应有限元的最优复杂度。*J. Numer. Math.*，33(2)：133–160，2025。

[BDD04] P. Binev、W. Dahmen 和 R. DeVore。具有收敛率的自适应有限元方法。Numer. Math.，97(2)：219–268，2004。[BET11] R. Becker、E. Estecahandy 和 D. Trujillo。目标导向自适应有限元方法的加权标记。SIAM J. Numer. Anal.，49(6)：2451–2469，2011。[BFM+25] P. Bringmann、M. Feischl、A. Miraçi、D. Praetorius 和 J. Streitberger。采用非精确求解器的自适应有限元方法的完全线性收敛与最优复杂度。Comput. Math. Appl.，180：102–129，2025。[BGIP23] R. Becker、G. Gantner、M. Innerberger 和 D. Praetorius。具有最优计算复杂度的目标导向自适应有限元方法。Numer. Math.，153(1)：111–140，2023。[BHP17] A. Bespalov、A. Haberl 和 D. Praetorius。采用粗初始网格的自适应有限元方法可确保紧扰动椭圆问题具有最优收敛率。Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.，317：318–340，2017。[BIM+24] M. Brunner、M. Innerberger、A. Miraçi、D. Praetorius、J. Streitberger 和 P. Heid。针对非对称线性椭圆偏微分方程、总体成本准最优的自适应有限元方法。IMA J. Numer. Anal.，44(3)：1560–1596，2024。[BIP21] R. Becker、M. Innerberger 和 D. Praetorius。具有二次目标泛函的目标导向有限元方法的最优收敛率。Comput. Meth. Appl. Math.，21(2)：267–288，2021。[BR01] R. Becker 和 R. Rannacher。有限元方法后验误差估计的最优控制方法。Acta Numer.，10：1–102，2001。[CFPP14] C. Carstensen、M. Feischl、M. Page 和 D. Praetorius。自适应公理。Comput. Math. Appl.，67(6)：1195–1253，2014。[CG12] C. Carstensen 和 J. Gedicke。具有渐近准最优计算复杂度的自适应有限元特征值求解器。SIAM J. Numer. Anal.，50(3)：1029–1057，2012。[CKNS08] J. M. Cascon、C. Kreuzer、R. H. Nochetto 和 K. G. Siebert。自适应有限元方法的准最优收敛率。SIAM J. Numer. Anal.，46(5)：2524–2550，2008。[DBR21] V. Dolejší、O. Bartoš 和 F. Roskovec。包含代数误差的非线性问题目标导向网格自适应方法。Comput. Math. Appl.，93：178–198，2021。[DC23] V. Dolejší 和 S. Congreve。包含线性化误差和代数误差的非线性问题迭代伽辽金离散的目标导向误差分析。J. Comput. Appl. Math：115–134，2023。[DGS25] L. Diening、L. Gehring 和 J. Storn。任意初始三角剖分的自适应网格细化。Found. Comput. Math.，在线优先发表，2025。[Dör96] W. Dörfler。泊松方程的收敛自适应算法。SIAM J. Numer. Anal.，33(3)：1106–1124，1996。[EEHJ95] K. Eriksson、D. Estep、P. Hansbo 和 C. Johnson。微分方程自适应方法导论。载于 Acta numerica，1995。第4卷，Acta Numer.，第105–158页。剑桥大学出版社，剑桥，1995。isbn：0-521-48255-0。[ELN+20] B. Endtmayer、U. Langer、I. Neitzel、T. Wick 和 W. Wollner。带有非线性偏微分方程约束的多目标导向最优控制问题。Comput. Math. Appl.，79(10)：3001–3026，2020。[ELW19] B. Endtmayer、U. Langer 和 T. Wick。非线性问题的多目标导向误差估计。J. Numer. Math.，27(4)：215–236，2019。[Fei22] M. Feischl。inf-sup 稳定性蕴含准正交性。Math. Comp.，91(337)：2059–2094，2022。[FFP14] M. Feischl、T. Führer 和 D. Praetorius。适用于某类非对称且可能为非线性问题、具有最优收敛率的自适应有限元方法。SIAM J. Numer. Anal.，52(2)：601–625，2014。[FGH+16] M. Feischl、G. Gantner、A. Haberl、D. Praetorius 和 T. Führer。实现点误差最优收敛的自适应边界元方法。Numer. Math.，132(3)：541–567，2016。[FPZ16] M. Feischl、D. Praetorius 和 K. G. van der Zee。最优目标导向自适应的抽象分析。SIAM J. Numer. Anal.，54(3)：1423–1448，2016。[GHPS21] G. Gantner、A. Haberl、D. Praetorius 和 S. Schimanko。相对于总体计算成本的自适应有限元方法速率最优性。Math. Comp.，90(331)：2011–2040，2021。

[GS02] M. B. Giles 和 E. Süli。偏微分方程的伴随方法：后验误差分析与基于对偶性的后处理。*Acta Numer.*，11:145–236，2002。[Har08] R. Hartmann。空气动力学流动模拟中的多目标误差估计与自适应。*SIAM J. Sci. Comput.*，31(1):708–731，2008。[HH03] R. Hartmann 和 P. Houston。多个目标泛函的面向目标后验误差估计。载于双曲型问题：理论、数值方法与应用，第579–588页。Springer，柏林，2003。isbn：3-540-44333-9。[HPSV21] A. Haberl、D. Praetorius、S. Schimanko 和 M. Vohralík。包含迭代线性化和代数求解器的非线性算子自适应算法的收敛性与准最优成本。*Numer. Math.*，147(3):679–725，2021。[IP23] M. Innerberger 和 D. Praetorius。MooAFEM：用于（非线性）椭圆偏微分方程高阶自适应有限元的面向对象 Matlab 代码。*Appl. Math. Comput.*，442，2023。[KPP13] M. Karkulik、D. Pavlicek 和 D. Praetorius。关于二维最新顶点二分：网格闭包的最优性与 H^1-稳定的 L_2-投影。*Constr. Approx.*，38(2):213–234，2013。[MS09] M. S. Mommer 和 R. Stevenson。具有收敛率的目标导向自适应有限元方法。*SIAM J. Numer. Anal.*，47(2):861–886，2009。[Ste07] R. Stevenson。标准自适应有限元方法的最优性。*Found. Comput.Math.*，7(2):245–269，2007。[Ste08] R. Stevenson。通过二分法生成的局部细化单纯形剖分的完成。*Math. Comp.*，77(261):227–241，2008。[Ver13] R. Verfürth。有限元方法的后验误差估计技术。牛津大学出版社，牛津，2013。

法国 Pau，Université de Pau et des Pays de l’Adour，IPRA-LMAP，Avenue de l’Université BP 1155，64013 PAU Cedex电子邮箱地址：roland.becker@univ-pau.fr TU Wien，分析与科学计算研究所，Wiedner Hauptstr. 8– 10/E101/4，1040 维也纳，奥地利电子邮箱地址：maximilian.brunner@asc.tuwien.ac.at电子邮箱地址：paula.hilbert@asc.tuwien.ac.at（通讯作者）电子邮箱地址：dirk.praetorius@asc.tuwien.ac.at Janelia Research Campus，霍华德·休斯医学研究所，阿什本，弗吉尼亚州，美国电子邮箱地址：innerbergerm@hhmi.org