arXiv:2601.01975v1 [physics.soc-ph] 5 Jan 2026

动态流网络中的重尾其涌现的普适解释

Agnieszka Janicka[1], **Fiona Sloothaak**[1],**Maria Vlasiou**[2],**和 Bert Zwart**[1,3]荷兰埃因霍温理工大学，邮编 *5612 AZ*，荷兰埃因霍温[2]特温特大学，邮编 *7522 NB*，荷兰恩斯赫德[3]荷兰数学与计算机科学研究所，邮编 *1098 XG*，荷兰阿姆斯特丹

摘要

过载诱发的级联故障可能会在电网、交通网络或金融系统等各种网络化系统中造成极端中断。跨领域的实证研究表明，此类中断的规模通常服从帕累托分布或重尾分布。尽管许多模型能够再现这种标度行为，但它们要么针对特定领域量身定制，要么依赖经过简化的机制，忽略了过载级联行为的关键方面。因此，对于这些情境中无标度行为背后的驱动机制，我们仍缺乏完整的普遍认识。本文提出一种普适且便于解析处理的流网络过载级联故障模型，为理解帕累托重尾中断如何在不同网络中涌现提供了新视角。我们的框架表明，在温和的假设条件下，帕累托重尾外部输入可自然产生重尾扰动，并确立了一条关联输入与产出尾指数的变换定律。我们还确定了级联成本呈现重尾分布所需的广泛条件，并证明该机制在多个领域中都具有稳健性，包括电力传输、交通网络和处理系统。我们的结果为过载驱动系统中无标度故障的涌现提供了统一解释，并在统一框架下联系起此前彼此分散、针对特定应用的模型。

关键词 级联故障、重尾分布、流网络、帕累托尾、无标度行为

1 引言

网络模型常用于分析能源电网、金融市场或交通网络等复杂系统的行为。此类系统中普遍存在后续组件失效，这种现象称为级联故障，并已得到广泛研究 [1, 2, 3, 4, 5, 6]。此类故障通常分为两种截然不同的类型：结构性和过载故障。结构性故障会在局部传播：一个组件失效后会使其邻近区域失稳，导致后续脆弱组件发生故障。这类故障通常见于流行病或野火[7, 8, 9, 10, 11]。过载故障是本文的研究对象，不一定局限于局部；当组件的容量被超出时，即发生过载，进而导致流量重新分配和随之而来的过载 [12]。此类级联常见于人为构建的网络中，例如电力系统、交通网络、金融市场、通信网络等 [13, 14, 15]。本文将构建一个过载级联模型，研究局部组件失效如何导致全系统发生重大中断。

在许多复杂系统中，有实证证据表明，扰动的规模呈现帕累托尾（又称幂律尾）或重尾特征。如果随机变量 X 具有帕累托尾，其尾参数为 $\alpha > 0$，则

$$\mathbb{P}(X > x) \approx Kx^{-\alpha} \quad \text{as} \quad x \to \infty, \tag{1}$$

对于某些 $K > 0$。这种缩放行为已在多个定义域中观察到。在电力输电系统中，级联故障会导致帕累托尾停电 [16]。在交通网络中，故障表现为道路拥堵，并造成大范围的交通堵塞。正如文献所示，交通堵塞的各种性能指标，例如一维平均交通堵塞长度 [17] 或多维时空性能指标 [18], ，都具有帕累托尾分布。重尾扰动的其他例子包括再保险损失 [19], 、金融中的系统性风险 [20, 21], 、延迟

航班时间， [22], 或野火烧毁的面积 [23]。在这些标度律下，极端中断的发生并非微不足道；因此，理解这些现象的产生至关重要。

人们开发了许多模型来解释复杂系统中帕累托重尾中断的出现。有些模型旨在提供普适性解释，另一些则针对具体应用。后者试图刻画特定系统的动力学，例如电网中电力分配的物理定律，或交通网络中的人类驾驶行为 [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]。相比之下，普适性模型旨在揭示全局机制，而不针对系统的特定动力学进行微调。典型例子包括临界分枝模型 [32], 、沙堆模型 [33, 34],、渗流模型 [35, 30, 4], 以及负载—容量模型 [36]。

尽管相关文献十分丰富，但对于现有普适性模型能否充分解释观测到的无标度行为，或是否还涉及其他尚未探索的机制，目前尚无共识。现有模型提供了重要见解，但也存在局限，尤其是在刻画过载故障的动力学方面。具体而言，临界分枝模型在数学上优雅且已得到充分理解，但它假设动力学简单，且其标度指数仅限于$\alpha = \frac{1}{2}$式（1）。沙堆模型展示了系统如何自组织到临界状态，使级联规模遵循幂律。尽管这一方法启发了许多领域的模型 [29, 25, 26, 27, 28], ，但它无法刻画许多现实系统中典型的非局部过载动力学。渗流模型利用简单的渗流规则，解释了幂律级联规模如何从底层图拓扑中产生，从而便于进行深入的解析理解。同样，级联是在局部发生的，这使该模型成为研究结构性级联故障的优秀工具，例如疾病传播或野火 [30],，但不适用于需要引入容量概念的非局部过载过程。负载—容量模型通过允许过载组件发生故障并重新分配其负载，克服了这一局限。其无标度级联特性源于假设的无标度图拓扑。然而，由于这些模型依赖预先设定的网络结构和简单的负载重分配规则（例如最短路径），因此对于某些现实应用而言可能不够真实。因此，尽管帕累托重尾中断在结构性故障和无标度拓扑的背景下已得到充分研究，但对于过载驱动型中断的普适性理解仍不完整。

近期，有人提出了对帕累托重尾中断的另一种解释。 [37] 构建了一个针对输电网络的应用特定模型，其中停电的帕累托尾分布源自电力需求的帕累托尾分布，而电力需求由城市规模驱动。这一简单而新颖的解释与关于城市规模和停电的经验发现相符 [37]。受该模型启发，人们又构建了第二个应用特定模型，用以解释帕累托重尾交通堵塞；在该模型中，需求——即交通强度——同样遵循经验幂律 [17]。值得注意的是，尽管这两个模型的具体动力学存在显著差异，却都呈现出相同的涌现现象，这表明其背后可能存在一种更普遍的基本原理。然而，由于每个模型都针对特定定义域量身定制，单凭这些模型无法确立这一解释的普遍性。本文基于同一基本原理提出一种适用于普遍情形的过载级联故障模型，解释帕累托重尾中断如何从帕累托重尾外部输入中涌现。

我们的方法在抽象性与应用层面的真实感之间取得平衡，使模型兼具广泛适用性和解析可处理性。我们运用最小作用量原理 [38, 39], （该原理指出，系统倾向于以使总能量耗散最小的方式组织起来 [40, 41, 42]），捕捉网络中流动与资源分配的基本特性。这种方法能够模拟多种流动模式，例如电力网络中的基尔霍夫定律 [43, ch. 8] , 以及交通中的 Wardrop 均衡 [17] , 并适用于任何网络拓扑。这克服了其他通用模型（如沙堆模型、渗流模型或负载—容量模型）的局限。关键的是，我们利用了帕累托重尾输入行为的持续性；这意味着，模型的具体微观动力学并不会显著影响大规模扰动的帕累托重尾特性。借助这种方法，我们能够推导出适用于多种网络类型的严格分布结果。因此，我们进一步强化了 [37, 17], 的涌现假说，将其从一种针对特定应用的解释提升为适用于存在级联过载的系统的普遍原理。

我们的主要贡献是通过一个具有普适性且易于解析处理的模型，解释重尾扰动如何在各种网络化系统中涌现。具体而言，我们：

1. 为过载流网络构建一个适用于不同定义域的普适级联框架；2. 证明这些扰动继承了输入分布的帕累托尾，并确定支配新尾指数的变换定律；3. 建立广泛适用的普适无标度行为充分条件；4. 通过将该框架应用于电力、交通和处理网络，展示其多功能性，并指出极端中断背后可能存在一种统一机制。

这些研究成果对于缓解极端级联具有重要意义。由于重尾行为源自输入分布，若不直接改变该分布，就很难减轻尾部的厚重程度。

网络升级——例如提升容量或采用动态路由策略——可以降低乘法常数K （1）中的数值，但通常不会影响尾指数 α，因此极端事件仍有可能发生。不过，降低这一常数仍能为大型网络带来显著改善。此外，我们的研究结果还可用于按网络组件触发大规模级联的可能性对其进行排序，从而指导在系统中最关键的部分部署早期检测和定向干预机制。

在本章节的其余部分，我们将更详细地讨论我们的贡献。我们的模型假设一个固定图，其中商品通过边从源顶点流向汇顶点。汇点需求，即每个汇点对某种商品的需求，是服从顶点权重帕累托尾分布的函数。源生产由汇点需求通过某个函数导出，并满足三个约束：生产—需求平衡、生产能力和流量容量。流根据某种参数化机制进行分配，以确保每个顶点处的商品流平衡。故障级联是该流网络上的离散随机过程。我们假设一种概率故障机制，其中过载边可能发生故障，从而导致该边的容量下降。级联对系统造成的破坏性影响通过级联成本函数进行量化，该函数在级联终止后确定。第2章节将详细介绍这一框架。

为了使我们的框架在解析上易于处理，我们对级联成本和级联概率施加了较弱的连续性与可扩展性假设（见假设 1）。我们的第一个关键结果见命题 1，它确定了大型级联成本最可能的成因。具体而言，该结果表明，当某个顶点的权重显著高于其他顶点时，通常会出现大型级联成本。我们的第二个关键结果见定理 2，它以这一概念为基础，并表明在满足关于顶点权重向量的某个条件时，级联成本的尾部分布会继承顶点权重分布的无标度尾部。然而，式（1）中的相应尾指数会从 α变为 α/δ，其中 δ 是一个取决于级联成本函数选择的参数。这与电力网络方面的 [37, 44] 以及公路交通网络方面的 [17]中的结果一致；这两项研究都表明，对于具有 $\delta = 1$ 的特定成本函数，会呈现这种标度行为。不过，本文的结果更为一般：它们适用于一类参数化级联机制，并可应用于更广泛的网络类型和成本函数。

尽管我们的结果具有广泛的适用性，但要验证假设 1 并非易事，因为这需要了解级联成本如何依赖于初始条件。为此，在第 4 章节中，我们展示了这一假设对于源生产、流量分布和级联成本函数的若干大类参数化建模选择均成立。重要的是，所提出的建模选择既具有物理可解释性，也符合流网络模型中常用的机制。相应结果见命题 3 和4，详细证明见附录B和C。这些证明具有技术性，分析了级联各阶段所产生的一族参数凸优化问题的最优解的行为。通过对优化问题进行变换来确立可扩展性；而连续性则通过反证法证明，该论证基于紧性，并精心构造了一列可行解。完整论证采用归纳方式展开，并刻画了级联动力学如何响应输入分布的变化。这种证明策略也可用于验证本文所研究类别之外的其他建模选择是否满足假设 1。

最后，为了说明我们建模框架的普适性，第5 章介绍了三个示例：输电网络、公路交通网络和处理网络。针对每种情况，我们详细说明如何在框架内对系统建模，并着重介绍最能刻画网络行为的源生产、流量分布和级联成本函数的具体选择。随后，我们验证其满足第4 章提出的充分条件。这些示例不仅证实了框架的通用性，也表明重尾级联成本能够在不同领域中稳健地产生。

2 多商品流网络级联模型

本章介绍一种适用于流网络的通用过载级联故障模型。首先，我们说明全文使用的符号约定。接着，定义流网络架构，介绍网络的静态结构。最后，我们阐述系统的时序动态，详细说明网络在每个时间步的运行方式。动态过程分为三个阶段：规划阶段，根据预期需求设定流容量；运行阶段，代表网络的典型行为；以及应急阶段，此时会因过载而发生级联故障。

2.1 符号约定

本文始终采用以下记号和约定。令 $\mathbb{N}$ 表示不包含 0 的自然数集合， $\mathbb{R}$ 表示实数集合， $\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0 \}$ 表示非负实数集合。对于任意正整数

n，我们用 $[n]$ 表示集合 {1，2、.....、n}。其他集合通常使用花体大写字母表示，即 A。集合的大小表示为 |A|，A 的幂集表示为 $2^{\mathcal{A}}$。

$\mathbb{R}^n$ 中的向量用粗体小写字母表示，例如 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$，其中 x_i 表示 $\boldsymbol{x}$的第 i个分量。主对角线上以向量 $\boldsymbol{x}$ 为元素的对角矩阵记为 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{x})$。矩阵用粗体大写字母表示，例如 $\boldsymbol{A} = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times m}$，其中 $i \in [n]$和 $j \in [m]$。向量或矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置记为 $\boldsymbol{A}^T$。大小为 n 的单位矩阵记为 $\boldsymbol{I}_n$，而 $\mathbf{e}_n$ 表示大小为 n 的全1列向量，$\mathbf{e}_{i,\ n}$ 表示大小为 n的第 i个单位向量，即在第 i个位置为1、其余位置为0的列向量。

We s称函数 $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 是 δ-尺度不变 的（记作 w.r.t.），如果对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ，

$$h(\omega \boldsymbol{x}) = \omega^{\delta} h(\boldsymbol{x}) \quad \text{for all} \quad \omega > 0. \tag{2}$$

在本文中，*1*-尺度不变 和尺度不变 这两个术语可以互换使用。通俗地说，如果尺度变化只会按比例影响函数的产出，而不改变函数本身的基本性质，那么该函数就是尺度不变的。此外，如果对于每个 $\boldsymbol{x}^* \in \mathrm{D}$ 以及任意满足 $\boldsymbol{x}_i \geq \boldsymbol{x}^*$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 且 $\boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{x}^*$ 当 $i \to \infty$ 时的序列 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，函数 $h: \mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 满足 .....，我们就称其为序列右连续（*SRC*），

$$\lim_{i\to\infty} h(\boldsymbol{x}_i) = h(\boldsymbol{x}^*). \tag{3}$$

注意，顺序右连续性 是连续性的一种较弱形式，这意味着每个连续函数都是 SRC。此外，对于两个函数 $g(x)$ 和 $h(x)$，当且仅当存在 $\exists N, x^* > 0$ 使得对于所有 $x \geq x^*$，$|g(x)| \leq N|h(x)|$，我们称 $g(x) = \mathrm{O}(h(x))$ 当 $x \to \infty$ 时。

最后，为了区分随机变量的确定性取值与随机变量本身，我们采用以下记号：对于任何由随机变量 B_1 和 B_2完全确定的随机变量 A，给定 $B_1 = b_1$ 和 $B_2 = b_2$时，其确定性结果记为 $a(b_1,\ b_2)$。特别地，采用略显非正式的记号，

$$a(b_1, b_2) := A \mid (B_1 = b_1, B_2 = b_2). \tag{4}$$

2.2 流网络架构

本章节定义流网络架构，即介绍网络的静态结构，并正式描述其各个分量。用于运输某些商品的流网络由有向连通图 $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ 表示。这里，V 和 E 分别表示图 G 的顶点集合和边集合。该图由其关联矩阵 $\boldsymbol{B} \in \{0, 1, -1\}^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{E}|}$描述，定义如下

$$b_{v,e} := \begin{cases} 1, & \text{if edge } e \in \mathcal{E} \text{ enters vertex } v \in \mathcal{V}, \\ -1, & \text{if edge } e \in \mathcal{E} \text{ exits vertex } v \in \mathcal{V}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

所有商品的集合记为 K。每个顶点 $v \in \mathrm{V}$ 都具有一个随机权重 $\overrightarrow{X}_v$，所有权重构成的向量记为 $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|}$。我们假设所有 $\overrightarrow{X}_v$ 彼此独立，且服从尺度参数为 $\alpha > 0$、常数为 $K > 0$的帕累托尾分布，即

$$\mathbb{P}\left(\overrightarrow{X}_v > x\right) \sim Kx^{-\alpha}, \quad x \to \infty, \quad \text{for all } v \in \mathcal{V}, \tag{5}$$

其中我们暗示 $f(x) \sim g(x)$ 因为 $x \to \infty \iff \lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$。这一选择的动机在于，在许多物理网络中，顶点对应的量往往服从帕累托尾分布，例如城市规模、数据包或保险索赔 [45, 46, 47]。

每个顶点 $v \in \mathrm{V}$ 都需要并生产一定数量的商品 $k \in \mathrm{K}$，分别由$t_{v,k}$ 和 $s_{v,k}$给出。此外，生产量 $s_{v,k}$ 不能超过生产能力$s_{v,k}$。受优化理论术语的启发，我们将$\boldsymbol{T} = [t_{v,k}]_{v\in\mathcal{V},k\in\mathcal{K}}$ 和 $\boldsymbol{S} = [s_{v,k}]_{v\in\mathcal{V},k\in\mathcal{K}}$ 分别称为汇点需求矩阵和源生产矩阵，而$\boldsymbol{S} = [s_{v,k}]_{v\in\mathcal{V},k\in\mathcal{K}}$称为生产能力矩阵。重要的是，矩阵 $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{S}$和 $\boldsymbol{S}$ 并非外生给定，而是都取决于顶点权重向量 $\overrightarrow{X}$。关于 $\overrightarrow{X}$的函数形式的具体动态将在第2.3节中说明。

对于每个顶点 $v \in \mathrm{V}$ 和每种商品 $k \in \mathrm{K}$，净投入需求定义为 $u_{v,\ k} := t_{v,\ k} - s_{v,\ k}$，由此得到净投入矩阵 $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}$。如果 $u_{v,\ k} > 0$，顶点 v 会出现商品 k短缺；如果 $u_{v,\ k} < 0$，则会出现盈余。这些失衡会产生网络流：商品从盈余顶点运往那些

存在短缺的顶点。 流矩阵 $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|\times|\mathcal{K}|}$指定沿每条边流动的各种商品数量。 总流量向量 $\boldsymbol{f} := \boldsymbol{F}\mathbf{e}_{|\mathcal{K}|} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ 表示每条边上的汇总流量。每条边都有容量，由 边容量向量 $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{E}|}$ 表示。如果某条边上的流超过其容量，该边可能会失效，详见章节 2.3.2。

定义了流网络的主要分量后，我们现在可以描述时序动态，即各分量在每个时间步 $t \in \mathbb{N}$的行为。

2.3 时序动态

本节介绍模型在给定时间步 $t \in \mathbb{N}$的动态。模型由三个阶段组成：规划阶段、运营阶段和应急阶段。离散时间 t 表示过程的当前阶段。规划阶段发生在 $t = 0$，模拟网络设计过程。运营阶段发生在 $t = 1$，反映底层网络的典型运行方式。在这一阶段结束时，随机中断会触发级联，标志着应急阶段的开始；应急阶段发生在 $t \geq 2$，用于模拟网络在级联过程中的行为。请注意，在每个时间步，第 2.2 节中定义的模型分量（例如 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{S}$或 $\boldsymbol{F}$）都会取不同的值；因此，我们使用上标记号（t）标记当前时间步。这里我们强调，所有这些分量都可以视为由外生给定的概率顶点权重向量 $\overrightarrow{X}$和第 2.3.2 节中定义的概率级联序列 C所确定的确定性映射。具体而言，对于 $t = 0$ 和 $t = 1$，模型的行为仅取决于 $\overrightarrow{X}$；而对于 $t \geq 2$，其行为还取决于级联序列 C，该序列控制应急阶段的进展。

我们假设流矩阵 $\boldsymbol{F}^{(t)} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|\times|\mathcal{K}|}$由净投入矩阵$\boldsymbol{U}^{(t)} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{K}|}$和边容量向量 $\boldsymbol{f}^{(t)} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|\times|\mathcal{K}|}$的矩阵函数 $\boldsymbol{F}^*$给出。具体而言，

$$\boldsymbol{F}^* : \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{K}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|} \to \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|\times|\mathcal{K}|} \tag{F}$$

$$\text{s.t.:} \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{U}, \tag{F1}$$

其中 Co nstraint (F1) 表示每个顶点 v 恰好接收商品 k 所需的数量 s.

此外，假设生产能力不随时间变化 t 且不存在病态情况，即对于每种商品，系统在时间 0 时始终具有满足需求的充足容量。具体而言，生产能力矩阵 $\boldsymbol{S}$是某个函数 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}^{(0)}) : \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{K}|} \to \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{K}|}$，并满足

$$\mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \overline{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{T}^{(0)}) \geq \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{T}^{(0)}. \tag{7}$$

2.3.1 规划与运行阶段

规划阶段和运营阶段的动态相似，因此我们同时对两者进行描述。我们假设汇矩阵（表示商品需求）在规划阶段和运营阶段相同，即 $\boldsymbol{T}^{(0)} = \boldsymbol{T}^{(1)}$。此外，我们假设商品需求与顶点大小成比例。具体而言，$t_v^{(0)},_k = q_{v,k}\overrightarrow{X}_v$ 对于某个 $q_{v,k} \geq 0$，它表示需要商品 k的顶点大小 v 的比例。为简洁起见，我们将系数 $q_{v,k}$汇集到矩阵 $\boldsymbol{Q} := [q_{v,k}]_{v\in\mathcal{V},k\in\mathcal{K}} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{K}|}$中，该矩阵编码了每个顶点对每种商品的相对需求。于是，用矩阵表示法可得 $\boldsymbol{T}^{(0)}(\overrightarrow{X}) = \operatorname{diag}(\overrightarrow{X}) \cdot \boldsymbol{Q}$，特别是，

$$\boldsymbol{T}^{(0)}(\overrightarrow{X}) = \begin{pmatrix} q_{1,1}\overrightarrow{X}_1 & \cdots & q_{1,|\mathcal{K}|}\overrightarrow{X}_1 \\ q_{2,1}\overrightarrow{X}_2 & \cdots & q_{2,|\mathcal{K}|}\overrightarrow{X}_2 \\ \vdots & & \vdots \\ q_{|\mathcal{V}|,1}\overrightarrow{X}_{|\mathcal{V}|} & \cdots & q_{|\mathcal{V}|,|\mathcal{K}|}\overrightarrow{X}_{|\mathcal{V}|} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

源矩阵 $\boldsymbol{S}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{S}^{(1)}$虽然不一定相等，但都由汇矩阵 $\boldsymbol{T}$、生产能力矩阵 $\boldsymbol{S}$、边容量向量 $\boldsymbol{f}$和流量容量松弛参数 $\lambda > 0$的某个函数 $\boldsymbol{S}^*$ 给出。具体而言，

$$\boldsymbol{S}^* : \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{K}|} \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{K}|} \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{E}|} \times \mathbb{R}_+/\{0\} \to \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{K}|} \tag{S}$$

$$\text{s.t.:} \quad \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{S}^* = \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{T}, \tag{S1}$$

$$\boldsymbol{S}^* \leq \overline{\boldsymbol{S}}, \tag{S2}$$

$$|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}^*, \overline{\boldsymbol{f}})\mathbf{e}_{|\mathcal{K}|}| \leq \lambda\overline{\boldsymbol{f}}. \tag{S3}$$

约束 (S1) 确保对于每种商品 $k \in \mathcal{K}$，源生产总量等于汇需求总量。约束 (S2) 表示每个顶点上每种商品的源生产量不超过其生产上限。最后，约束 (S3) 确保边上的总流量不超过相应边容量的比例 λ。需要注意的是，如果 λ 不够大，约束 (S2) 和 (S3) 可能彼此不相容。因此，我们假设 λ 的取值使得对于 $\vec{X}$的所有取值，均存在 $\boldsymbol{S}$。

源生产矩阵 $\boldsymbol{S}^{(0)}$ 被确定为 $\boldsymbol{S}^{(1)}$ 的代理量，以便在网络中选择运营边容量时，能够预先考虑运营阶段的边流量。在文献中，这种代理量通常取为源生产，且不受边容量约束 [37, 36]。因此，我们设定$\boldsymbol{f}^{(0)} = \infty$, $\lambda^{(0)} = 1$，并设定

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}^{(0)} &:= \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{T}^{(0)}, \bar{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{T}^{(0)}), \bar{\boldsymbol{f}}^{(0)}, \lambda^{(0)}) \\ &= \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{T}^{(0)}, \bar{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{T}^{(0)}), \infty, 1), \end{aligned} \tag{10}$$

因为这种选择意味着，对于所有矩阵S3，约束（ $\boldsymbol{S}$）均得到满足，因此该约束无关紧要。

接下来需要确定运营边流量容量向量 $\boldsymbol{f}$（1）和源生产矩阵 $\boldsymbol{S}^{(1)}$。按照 [17], 中的方法，容量（i）应满足某些最小容量要求，$f_{\min}$ 且（ii）应足够大，以承载预计网络在运营阶段所经历的流量。为满足这些条件，对于每个 $e \in \mathcal{E}$，我们设定

$$\bar{f}_e^{(1)} = \max\{\tau f_e^{(0)}, \bar{f}_{\min}\}, \tag{11}$$

其中，$\boldsymbol{f}(0)$ 是总规划流向量，即 $\boldsymbol{f}(0) = \boldsymbol{F}^{(0)}\mathbf{e}^{|\mathcal{K}|}$。此外，$\tau \geq 1$ 是规划松弛参数，且$f_{\min} := \varepsilon_{\min} \sum_{v \in \mathcal{V}} \vec{X}_v$，其中 $\varepsilon_{\min} > 0$。通过令最小容量 $f_{\min}$ 与顶点权重总和呈线性关系，即可满足第一个准则。此外，边容量与规划流成比例变化，这是文献中的一种标准做法 [36]，并且满足第二个准则。

最后，运营源生产矩阵 $\boldsymbol{S}^{(1)}$定义为 $\boldsymbol{S}^{(1)} := \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{T}(1), \boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}(1)), \boldsymbol{f}(1), \lambda^{(1)})$。请注意，参数 $\lambda^{(1)}$ 具有多种建模用途。若 $\lambda^{(1)} \in (0, 1)$，它可作为安全调节参数，确保边的利用率最多达到其容量的 $\lambda^{(1)}$。另一方面，若 $\lambda^{(1)}$ 取值足够大，则约束 (S3) 始终成立。此选择适用于在选择源生产位置时不考虑边容量约束的应用（例如，见第5.2节中详细介绍的高速公路交通应用）。

网络按照 $\boldsymbol{F}^{(1)} = \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}^{(1)}, \boldsymbol{f}(1))$ 中给出的流保持稳定运行，直到发生某种扰动，进而引发边失效级联，即进入应急阶段。

2.3.2 应急阶段

在应急阶段（$t > 1$），级联失效过程随之发生。每次故障都会导致边容量部分或完全下降。前者可解释为拥堵，会导致流量成本增加；后者则是组件完全失效，使其无法使用。这可能导致流量重新分配，并因边过载（即流量超过容量限制）而引发后续故障。由此，故障过程得以在图中以级联的形式传播。在每个时间步，执行以下操作：

1. 更新上一步发生故障的边的容量 $\boldsymbol{f}$。2. 如果图不连通，则在每个分量中恢复源生产与汇点需求之间的平衡（约束 S1）。如果两个顶点之间存在一条由正流量容量边组成的路径，我们就称这两个顶点位于同一分量中。经过这种再平衡后，每个分量中的过剩产量或未满足需求都会被舍弃。3. 根据当前情况，使用方程（F）计算流矩阵 $\boldsymbol{F}^*$，以重新分配流。4. 确定接下来哪些过载边会发生故障。如果一条边的相对流量超限（定义见（12））大于 1，我们就称该边过载。故障可能是部分的（拥堵），也可能是完全的（边移除）。根据超越量水平，依据逐边概率规则 $p_{e,\,c}$（部分故障）和 $p_{e,\,r}$（完全故障）选择发生故障的边，具体说明见步骤 4 的详细描述。如果没有边发生故障，则级联终止；否则，返回步骤 1。

接下来，我们正式介绍应急阶段的精确级联动力学。在时间步$t = 1$结束时，级联由一条或多条边发生故障而启动，其故障情况遵循某个概率质量函数 $p^{(1)}$:

$\{0, \mathrm{P}, \mathrm{R}\}^{|\mathrm{E}|} \to [0,1]$。每个向量 $\boldsymbol{x}^{(1)} \in \{0, \mathrm{P}, \mathrm{R}\}^{|\mathrm{E}|}$都指定一种故障配置：$x(1)_i = 0$表示边 i在时间 $t = 1$不会发生故障；$x_i^{(1)} = \mathrm{P}$ 表示边 i 发生部分失效；$x_i^{(1)} = \mathrm{R}$ 表示边 i 从图中移除（完全故障）。因此，$p^{(1)}(\boldsymbol{x}(1))$ 是配置 $\boldsymbol{x}^{(1)}$的概率：恰好是 $x(1)_i = \mathrm{P}$ 的边发生部分失效，$x(1)_i = \mathrm{R}$ 的边被移除，而 $x_i^{(1)} = 0$的边在时间 $t = 1$不会发生故障。为确保至少有一条边发生故障，我们要求 $p^{(1)}(0, \ldots, 0) = 0$。这构成了级联的第一阶段。

设 $C^{(t)} = P^{(t)} \cup R^{(t)}$ 表示时间步 t结束时的故障边集合，其中 $P^{(t)}$ 是发生部分失效的边集合，$R^{(t)}$ 是被移除的边集合。这意味着，在概率律 $p^{(1)}$下，$C^{(1)} = P^{(1)} \cup R^{(1)}$ 是初始边故障集合。对于 $t \geq 2$，执行以下级联步骤：

步骤 1： 对于所有 $e \in R^{(t-1)}$，我们从图中移除边 e，这等价于将边 e 的容量设为 0。对于所有 $e \in P^{(t-1)}$，更新边流量容量；也就是说，使用容量降低因子降低当前容量 $f_{(t)e}$。具体而言，我们引入一个非递增连续函数 $\psi_e^{(t)}\colon \mathbb{R}_+ \to [l_e, 1]$，满足$l_e \in (0,1)$，并定义相对超额量

$$\phi_e^{(t)} := \frac{|f_e^{(t)}|}{\overline{f}_e^{(t)}}. \tag{12}$$

使用这一记号，容量按以下方式更新：

$$\overline{f}_e^{(t)} := \begin{cases} 0, & \text{if } e \in R^{(t-1)}, \\ \psi_e^{(t-1)}\big(\phi_e^{(t-1)}\big) \cdot \overline{f}_e^{(t-1)}, & \text{if } e \in P^{(t-1)}, \\ \overline{f}_e^{(t-1)}, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{13}$$

函数 $\psi_e^{(t-1)}$确保超越量越大，容量削减幅度也越大，同时在部分失效时仍保持为正值（$\psi_e^{(t-1)} \geq l_e > 0$）；完全移除则通过是否属于 $R^{(t-1)}$ 来处理。

步骤 2： 如果所得图不连通，我们会针对每种商品，在每个连通分量中恢复需求与产出的平衡（见约束（S1）），方法是按比例削减两者中较大的量：也就是说，当产出超过总需求时，降低产出；当需求超过$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$可用产出时，则降低需求。具体而言，对于 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 中的连通分量 $\mathcal{G}$、每种商品 $k \in \mathcal{K}$以及每个 $v \in \widetilde{\ }\mathcal{V}$，汇点矩阵和源点矩阵 $\boldsymbol{T}^{(t)}$ 和 $\boldsymbol{S}^{(t)}$ 按以下公式求得：

$$\left(t_{v,k}^{(t)}, s_{v,k}^{(t)}\right) = \begin{cases} \left(t_{v,k}^{(t-1)}, \eta_k^{(t-1)}\left(\widetilde{\mathcal{V}}\right) \cdot s_{v,k}^{(t-1)}\right) & \text{if } \sum_{v \in \widetilde{\mathcal{V}}} t_{v,k}^{(t-1)} < \sum_{v \in \widetilde{\mathcal{V}}} s_{v,k}^{(t-1)}, \\ \left(\left(\eta_k^{(t-1)}\left(\widetilde{\mathcal{V}}\right)\right)^{-1} \cdot t_{v,k}^{(t-1)}, s_{v,k}^{(t-1)}\right), & \text{if } \sum_{v \in \widetilde{\mathcal{V}}} t_{v,k}^{(t-1)} > \sum_{v \in \widetilde{\mathcal{V}}} s_{v,k}^{(t-1)}, \\ \left(t_{v,k}^{(t-1)}, s_{v,k}^{(t-1)}\right), & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{14}$$

其中 $\eta_k^{(t-1)}\left(\widetilde{\ }\mathrm{V}\right) = \left(\sum_{v \in \widetilde{\ }\mathcal{V}} t_{v,k}^{(t-1)}\right) \Big/ \left(\sum_{v \in \widetilde{\ }\mathcal{V}} s_{v,k}^{(t-1)}\right)$.

步骤 3： 容量下降和平衡恢复会导致流量重新分配。新的流矩阵 $\boldsymbol{F}^{(t)}$ 由（F）中定义的函数 $\boldsymbol{F}^*$给出，其输入为 $\boldsymbol{U}^{(t)} = \boldsymbol{T}_{(t)} - \boldsymbol{S}^{(t)}$和 $\boldsymbol{f}_{(t)}$。具体而言，

$$\boldsymbol{F}^{(t)} = \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}^{(t)}, \overline{\boldsymbol{f}}^{(t)}).$$

步骤 4： 对于每条边 $e \in \mathrm{E}$，令 $x = \phi_e^{(t)}$。若 $x \leq 1$，则 e 在时间 t不会失效。若 $x > 1$，该边可能变得拥塞（部分失效），也可能被移除（完全失效）。我们用以下概率指定一条分类失效规则：

$$\mathbb{P}\{\text{congestion at } e\} = p_{e,c}(x), \quad \mathbb{P}\{\text{removal at } e\} = p_{e,r}(x), \quad \mathbb{P}\{\text{no failure at } e\} = 1 - p_{e,c}(x) - p_{e,r}(x),$$

其中 $p_{e,c}, p_{e,r}\colon \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ 为连续函数，满足 $p_{e,c}(x) = p_{e,r}(x) = 0$对于 $x \leq 1$成立，且 $p_{e,c}(x) + p_{e,r}(x) \leq 1$ 对于所有 x成立。请注意，边 e 发生拥堵或被移除，不受其他边影响。每条边的失效结果均独立于其他所有边的失效结果。

当某个级联阶段内不再发生边失效（无论是由拥堵还是移除导致）时，级联便会终止。为简化起见，我们假设每条边最多失效 $n_e \in \mathbb{N}$ 次。这意味着在步骤 4 中，我们只考虑失效次数少于 n_e 次的边。该假设确保级联总能在有限时间内终止，并意味着

所有可能的级联序列构成的集合是有限的，其定义为 $\mathrm{C} := \left\{c = \left(c_P^{(t)} \cup c_R^{(t)}\right)_{t\in\mathbb{N}}:\ c_P^{(t)},\ c_R^{(t)} \subseteq \mathrm{E},\ c_P^{(t)} \cap c_R^{(t)} = \emptyset\right\}$。

级联故障过程对系统行为的影响以级联成本 $Z \in \mathbb{R}$表示，它是级联前后流网络的函数。根据我们模型的结构，这意味着 Z 完全由两个随机变量决定：顶点权重向量 $\overrightarrow{X}$和级联序列 C。因此，根据（4），给定 Z 和 $\overrightarrow{X} = \boldsymbol{x}$ 时，$C = c$ 由 z（$\boldsymbol{x}$，c）表示。

3 帕累托尾级联成本的出现

本文旨在为具有帕累托尾部的级联成本 Z 在发生过载级联的流网络中的出现，寻找一种普遍解释。第 2 章节介绍了一个适用于广泛现实流网络的通用模型。本节将陈述并推导该模型下级联成本的渐近结果。这些结果刻画了级联成本 Z 超过 y的概率，其中 y 趋于无穷大，并指出最可能导致高额级联成本的条件。

为确保级联成本 Z具有解析可处理性，需要额外作出两个假设——一个关于 Z 的结构，另一个关于观察到特定级联 $c \in C$ 的概率。虽然这些技术性假设旨在保证适当的连续性和可扩展性，但并不构成限制。在章节 4中，我们将证明，许多关于流分配机制 $\boldsymbol{F}^*$、源生产 $\boldsymbol{S}^*$、源生产能力 $\boldsymbol{S}$和级联成本 Z 的常见选择都满足所需条件。

假设1。 流分配机制 $\boldsymbol{F}^*$、源生产 $\boldsymbol{S}^*$、源生产能力 $\boldsymbol{S}$和级联成本 Z 的选择应满足：

1. 对于某些 $m_Z > 0$ 和 $\delta > 0$，随机变量 Z 满足 $Z \le m_Z \cdot \sum_{v\in\mathcal{V}} \left(\overrightarrow{X}_v\right)^{\delta}$。此外，对于任意实现 $\overrightarrow{X} = \boldsymbol{x}$ 和特定级联 $C = c \in C$，条件级联成本 $z(\boldsymbol{x}, c)$ 相对于顶点权重向量 $\boldsymbol{x}$具有 δ-尺度不变性且满足 SRC。

2. 给定顶点权重向量，某个特定级联 $C = c$ 发生的概率 $\overrightarrow{X}$ 且在所有尺度下都相等 ω，即 $\forall\, \omega > 0\ \mathbb{P}\left(C = c \mid \omega\overrightarrow{X}\right) = \mathbb{P}\left(C = c \mid \overrightarrow{X}\right)$。

回顾一下，δ-尺度不变性和SRC 的概念定义于第2.1节。尽管许多函数都满足假设1，但验证这一假设并非总是简单明了。为此，我们在第4节讨论了函数的几种常见选取，并推导了这些选取满足假设1 的结果。这使得我们的模型及其渐近结果能够直接应用于各种情形；我们在第5节通过现实世界的实例对此进行了展示。

接下来，我们陈述本文的主要结果，说明帕累托尾级联成本如何在第2节所述的一般流网络中出现。首先，在命题1中，我们确定了顶点权重分布的哪些实现最有可能导致高昂的级联成本。具体而言，我们证明，以高概率，大型级联成本发生在某个顶点的权重显著大于其他所有顶点时。由于这要求顶点权重之间存在很大的差异，我们将这一结果称为灾难原理，这一术语在极值理论中也很常用 [47]。随后，我们陈述关于级联成本渐近行为的主要结果 Z。

命题1（灾难原理）。 假设 $\delta > 0$ 对某个参数成立。固定 $\varepsilon > 0$，并令 $\overrightarrow{X}_{\max}$ 为所有顶点中的最大权重，即 $\overrightarrow{X}_{\max} = \max_{1\le i\le|\mathcal{V}|}\{\overrightarrow{X}_i\}$。则，

$$\mathbb{P}\left(Z > y, \sum_{i=1}^{|\mathcal{V}|}\left(\overrightarrow{X}_i\right)^{\delta} > (1+\varepsilon)\left(\overrightarrow{X}_{\max}\right)^{\delta}\right) = O\left(y^{-2\alpha/\delta}\right) \quad as\ y \to \infty,$$

其中 $\alpha > 0$ 是 $\overrightarrow{X}$的尾参数，如（5）所示。

在该结果的证明中，我们依赖于以下事实：级联成本 Z 始终有界于 $m_Z \sum_{v\in\mathcal{V}} \left(\overrightarrow{X}_v\right)^{\delta}$（其中 $m_Z > 0$），并使用帕累托尾分布的次序统计量的已知界。证明见附录 A.1。

变量	描述
网络结构	
$G = (V,E)$	表示底层网络的连通有向图。
$\mathcal{V}$	G 的顶点集合。
$\mathcal{E}$	G 的边集合。
$\boldsymbol{B}$	图 G 的关联矩阵。
$\overrightarrow{X_v}$	顶点 $v \in V$ 的大小。
$\overrightarrow{X} = (\overrightarrow{X_v})_{v\in\mathcal{V}}$	顶点大小向量。
商品的需求与生产	
$\mathcal{K}$	在网络中运输的商品集合。
$t_{v,k} \in \mathbb{R}_+$	汇顶点 $v \in V$ 所需的商品 $k \in K$ 数量。
$s_{v,k} \in \mathbb{R}_+$	源顶点 $v \in V$ 生产的商品 $k \in K$ 数量。
$q_{v,k}$	需要商品 $k \in K$ 的顶点 $v \in V$ 的比例，其中 $q_{v,\,k} \geq 0$。
$\boldsymbol{T} := [t_{v,k}]_{v\in\mathcal{V},\ k\in\mathcal{K}}$	大小为 $\lvert V\rvert \times \lvert K\rvert$ 的汇矩阵。
$\boldsymbol{S} := [s_{v,k}]_{v\in\mathcal{V},\ k\in\mathcal{K}}$	大小为 $\lvert V\rvert \times \lvert K\rvert$ 的源矩阵。
$\boldsymbol{Q} = [q_{v,k}]_{v\in\mathcal{V},k\in\mathcal{K}}$	表示每个顶点处每种商品相对需求的矩阵（另见（8））。
$\boldsymbol{S} := [s_{\tau,k}]_{v\in\mathcal{V},\ k\in\mathcal{K}}$	规模为 $\lvert V\rvert \times \lvert K\rvert$、条目为 $s_{v,\,k} \geq 0$ 的生产能力矩阵。
$\boldsymbol{U} = [u_{v,k}]_{v\in\mathcal{V},\ k\in\mathcal{K}}$	净投入矩阵 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}$，净投入需求项为 $u_{v,\,k} := t_{v,\,k} - s_{v,\,k}$。
流与流容量	
$f_{e,k}$	边 $e \in E$ 上商品 $k \in K$ 的流，其中 $f_{e,\,k} \in \mathbb{R}$。
$\boldsymbol{F} := [f_{e,k}]_{e\in\mathcal{E},\ k\in\mathcal{K}}$	大小为 $\lvert E\rvert \times \lvert K\rvert$ 的流矩阵。
$f_e := (\boldsymbol{F}\mathbf{e}_{\mathcal{K}})_e$	边 $e \in E$ 上的总流量，即各商品在边 e 上流量之和。
$\boldsymbol{f} := (f_e)_{e\in\mathcal{E}}$	边总流量向量。
$\overline{f}_e$	边 $e \in E$ 的流量容量。
$\overline{\boldsymbol{f}} := (\overline{f}_e)_{e\in\mathcal{E}}$	边流量容量向量。
τ	用于确定运行边流量容量的规划松弛参数（参见（11））；$\tau \geq 1$。
$\overline{f}_{\text{最小值}}$	最小运行边流量容量（参见（11））。
流量与生产机制	
$\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U},\ \overline{\boldsymbol{f}})$	描述流量分配机制的函数（参见问题（F）和（17））。
$c_f(\boldsymbol{F},\ \overline{\boldsymbol{f}})$	问题（17）的流成本函数，$c_f\colon\ \mathbb{R}^{\lvert\mathcal{E}\rvert\times\lvert\mathcal{K}\rvert} \times \mathbb{R}_+^{\lvert\mathcal{E}\rvert} \to \mathbb{R}_+$。
$\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{T},\overline{\boldsymbol{S}},\overline{\boldsymbol{f}},\lambda)$	描述生产分配机制的函数（参见问题（S）和（21））。
λ	(S3) 的流量容量松弛参数；$\lambda > 0$。
应急阶段变量和函数	
$p^{(1)}$	初始失效概率函数；$p^{(1)}\colon\ \{0,\ P,\ R\}^{\lvert\mathcal{E}\rvert} \to [0,1]$。
ψ_e	用于计算失效边 $e \in E$ 的容量下降的函数。
ϕ_e	边上的相对流量超限 $e \in \mathcal{E}$；见（12）。
η_k	商品的生产需求再平衡因子 k（见（14））。
$p_{e,c}$	描述边 $e \in E$ 拥堵概率的函数；$p_{e,\,c}\colon\ \mathbb{R}_+ \to [0,1]$。
$p_{e,r}$	描述边 $e \in E$ 移除概率的函数；$p_{e,\,r}\colon\ \mathbb{R}_+ \to [0,1]$。
n_e	边 $e \in E$ 的最大故障次数。
C	所有可能的级联序列集合。
C	描述级联序列的随机变量。
Z	级联成本，可由广义级联规模函数（24）或级联流成本函数（25）。
$z(\boldsymbol{x},\ c)$	给定 $\overrightarrow{X} = \boldsymbol{x}$ 和 $C = c$ 时的确定性级联成本。
其他符号	
$\mathbf{e}_i$	大小为 $i \in \mathbb{N}$ 的全一向量。
$\mathbf{e}_{i,n}$	大小为 n 的第 i 个单位向量。

表1：符号摘要。请注意，某些量可能因模型的当前阶段而异。若确实如此，我们使用上标符号(t)，$t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$来指定相关阶段。符号约定见第2.1节。

定理 2（级联成本的尾部）。 假设 *1* 对某个 $\delta > 0$成立。如果存在一个级联 $c \in C$，使得对于某个 $i \in \mathcal{V}$，顶点权重向量 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_{i,|\mathcal{V}|} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$，级联 c:

1. 以正概率发生，即 $\mathbb{P}\left(C = c \mid \overrightarrow{X} = \boldsymbol{x}\right) > 0$；*2.* 具有正成本，

即 $z(\boldsymbol{x}, c) > 0$,

那么级联成本 Z 具有无标度尾部，其参数为 α/δ。具体而言，

$$\mathbb{P}(Z > y) \sim l_Z \cdot y^{-\alpha/\delta}, \quad y \to \infty, \tag{15}$$

with

$$l_Z = \sum_{i=1}^{|\mathcal{V}|} \sum_{c \in C} K \cdot \mathbb{P}\left(C = c \mid \overrightarrow{X} = \boldsymbol{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right) \cdot z(\boldsymbol{e}_{i,|\mathcal{V}|}, c)^{\alpha/\delta}, \tag{16}$$

其中 K 和 α 由方程 （5）给出。否则，$\mathbb{P}(Z > y) = O\left(y^{-2\alpha/\delta}\right)$，当 $y \to \infty$时。

该定理通过单个顶点权重为 1、其他所有顶点权重均为 0 的情形下的级联成本，量化了级联成本的尾概率。这是灾难原理的推论，该原理陈述于命题 1中。 δ尺度不变性和 SRC 假设也发挥着重要作用，可确保极限表现良好且不依赖于 y。

定理的证明见附录 A.2 ，证明分为以下几步：

A) 考虑所有可能的级联轨迹 $c \in$ C 以及权重最大的所有可能顶点，对式 (15) 中的概率进行分解。B) 对于固定的 $\varepsilon > 0$，根据是否满足 $\sum_{i=1}^{|\mathcal{V}|} \overrightarrow{X}_i^{\delta} \leq (1+\varepsilon) \max_{1 \leq i \leq |\mathcal{V}|} \{\overrightarrow{X}_i^{\delta}\}$ 将概率分为两种情况，并应用命题1。C) 先对最大顶点权重的取值进行条件化，再对其余顶点权重进行条件化，最后对级联 $c \in$ C 的发生进行条件化，从而改写该概率。D) 根据假设1，利用级联成本的尺度不变性和 SRC 性质，以及条件级联概率的尺度不变性和 SRC 性质。E) 将大型级联成本的概率表示为 ε 和 y的函数，并构造其上界和下界。F) 证明在取 $\lim y \to \infty$ 和 $\varepsilon \downarrow 0$ 后，这些界相等，并得出最终结果。

4 级联流模型的框架

假设 1 概述了我们的结果成立所需的一般条件。尽管这些条件提供了严谨的数学描述，但对于哪些类别的流网络可能满足这一假设，它们所提供的直观认识有限。本章节将更详细地描述这类网络。具体而言，我们将在章节 4.1–4.3 中讨论流矩阵、源矩阵和成本矩阵的常见选取方式，并在章节 4.4 中证明它们满足假设1。随后，章节 5 将介绍具体应用，以展示这些思想在实践中的运用。

4.1 流矩阵和成本函数

流网络中的一条著名原理指出，流矩阵函数 $\boldsymbol{F}^*$ 通常会使网络中某种形式的能量成本或损耗最小化，例如使电力网络中的功率损耗最小化，或使交通网络中的出行时间最短。遵循这一原理，最小成本流矩阵 $\boldsymbol{F}^*$ 可定义为以下问题的最优解：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}^*\left(\boldsymbol{U}, \overline{\boldsymbol{f}}\right) \in & \arg\min_{\boldsymbol{F} \in \mathcal{D}} c_f(\boldsymbol{F}, \overline{\boldsymbol{f}}) : \\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}, \end{aligned} \tag{17}$$

其中，D 表示优化域，c_f表示流成本函数。当允许流逆着指定的边方向流动时，我们选择 D $= \mathbb{R}^{|\mathcal{E}| \times |\mathcal{K}|}$，否则选择 D $= \mathbb{R}^{|\mathcal{E}| \times |\mathcal{K}|}_{+}$。成本函数 c_f可以取决于流矩阵以及流量容量。成本函数的选择决定了所得网络流的性质；因此，下面我们将回顾几种常见的公式形式。

网络控制和优化理论中用于对物理系统中的流进行建模的一个成熟成本函数 [48]如下所示：

$$c_f(\boldsymbol{F},\bar{\boldsymbol{f}}) := \sum_{e\in\mathcal{E}} \left(\frac{1}{\beta} a_e b_e (|f_e|/a_e)^{\beta}\right), \tag{18}$$

其中，对于所有 $e \in \mathrm{E}$， $\beta \geq 1$ 和 $a_e, b_e > 0$ 。该成本函数由每条边的成本贡献组成。根据具体应用的不同，这些参数可能有不同的解释；然而，从物理角度来看，可以将 b_e 与边 e的长度或权重联系起来，将 a_e 与 e的横截面联系起来，从而使因子 $a_e b_e$ 表示该边的总体积。边 e 上的成本增加主要由流密度 $|f_e|/a_e$的 β 次方驱动，该项表示每单位边体积维持这一流密度的成本。这一表述隐含地认为，通过该边运输的是哪种商品并不重要，重要的只是它们的累积量。

参数 β 的常见选择是 $\beta = 1$ 和 $\beta = 2$。后一种选择会惩罚边的高利用率，这反映了这样一个事实：在许多系统中，由流动阻力导致的能量耗散呈超线性增长。此类系统包括电力网络 [49, 50]、供水系统 [51]，和通信网络 [52]。在 $\beta = 2$和 $\mathrm{D} = \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|\times|\mathcal{K}|}$的设定下，最小成本流问题已有充分研究；由于对所有 $e \in \mathrm{E}$ 都有 $b_e > 0$，它具有唯一的总流量解，即 $\boldsymbol{f}^*$ 是 $\boldsymbol{U}$ [53, ch. 6]的线性函数。选择 $\beta = 1$ 会得到线性的流成本函数。在这一设定下，对于定义域 D 的两种选择，该问题都与最短路径流有关，其中边长由 b_e给出；然而，后者通常针对单个源汇对定义。该问题可能存在多个最优解，这在某些模型中会带来问题。在这种情况下，可能需要附加条件来确保 $\boldsymbol{F}^*$的唯一性。

另一种典型的成本函数用于建模流量成本取决于流量容量，且边为单向的情形，即 $\mathrm{D} = \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|\times|\mathcal{K}|}_{+}$，其定义为 [54, 55]

$$c_f(\boldsymbol{F},\bar{\boldsymbol{f}}) := \sum_{e\in\mathcal{E}} \int_0^{f_e} \left(d_e + b_e (x/\bar{f}_e)^{\beta-1}\right) dx = \sum_{e\in\mathcal{E}} \left(d_e f_e + \frac{1}{\beta} b_e \bar{f}_e (f_e/\bar{f}_e)^{\beta}\right), \quad d_e, b_e > 0, \beta > 1. \tag{19}$$

这种设定在交通模型中尤为相关，其中具有成本函数（19）的问题（17）称为 Wardrop 用户均衡（UE）[56, 57]。与（18）相比，系数 a_e 被 f_e取代，因此当流量超过某些边的容量时，流量成本会很高。此外，该成本函数还包含一个线性项 $d_e f_e$，表示自由流行驶的成本；第二项则表示拥堵导致的额外出行成本。请注意，在 $\mathrm{D} = \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|\times|\mathcal{K}|}_{+}$ 条件下，流问题仍然可行，因为我们假设图是强连通的，这意味着任意一对顶点之间都存在一条路径。

交通网络中的另一种常见流问题称为系统最优（SO）。与 Wardrop 用户均衡不同，Wardrop 用户均衡中的网络流源于驾驶员的自私行为，而系统最优的流矩阵则使网络中的累积流量成本最小化。系统最优是具有以下成本函数的（17）的另一种实例

$$c_f(\boldsymbol{F},\bar{\boldsymbol{f}}) := \sum_{e\in\mathcal{E}} f_e \left(d_e + b_e (f_e/\bar{f}_e)^{\beta-1}\right) = \sum_{e\in\mathcal{E}} \left(d_e f_e + b_e \bar{f}_e (f_e/\bar{f}_e)^{\beta}\right), \quad d_e, b_e > 0, \beta > 1. \tag{20}$$

我们注意到，(19) 与 (20) 仅在第二项上相差一个因子 β，这意味着，可以通过将因子 19) 中的成本函数里的因子 $1/\beta$ 并入参数 b_e，来得到系统最优。

如前所述，(17) 解的唯一性是一个重要概念。若 $\beta > 1$，则成本函数 (18)–(20) 关于总流量 $\boldsymbol{f}$是严格凸函数，因此总流量向量 $\boldsymbol{f}^*$唯一。然而，当考虑多个商品时，最优流量矩阵 $\boldsymbol{F}^*$ 未必唯一。在我们的模型中，我们关注总流量 $\boldsymbol{f}^*$；因此， $\boldsymbol{F}^*$ 的不确定性并不会造成问题。尽管如此，为求完整起见，我们约定 $\boldsymbol{F}^*$ 为一种最优解，即将每种商品均匀分配到所有可能路径上的解。

4.2 源矩阵

本节讨论源矩阵的典型建模选择。在文献中，生产建模通常采用集中式方法或分散式方法。在集中式情形下，单一决策者确定所有生产量，以使满足需求的总成本最小。相反，在分散式情形下，每个生产节点独立行动并作出局部决策 [58]。下文将讨论这两种范式的建模。

在集中式优化中，一种常见方法是在满足发电和流量约束的条件下，使生产总成本最小化，这与第 4.1 章节中的流量优化结构相似。基于这一思路，我们定义

最小成本源矩阵 $\boldsymbol{S}^*$ 为

$$\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{T},\bar{\boldsymbol{S}},\bar{\boldsymbol{f}},\lambda) := \underset{\boldsymbol{S}\in\mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|}}{\arg\min} \sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{K}} \frac{1}{\gamma} c_{v,k} s_{v,k}^{\gamma} \tag{21a}$$

$$\text{s.t.:} \quad \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{S} = \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{T}, \tag{21b}$$

$$\boldsymbol{S} \le \bar{\boldsymbol{S}}, \tag{21c}$$

$$|\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{S},\bar{\boldsymbol{f}})\mathbf{e}_{|\mathcal{K}|}| \le \lambda\bar{\boldsymbol{f}}, \tag{21d}$$

其中 $c_{v,\,k} > 0$ 且 $\gamma > 1$。这里，$c_{v,\,k}$ 表示在节点 v生产商品 k 所对应的成本系数，反映生产资源的成本和效率。指数 γ 控制边际生产成本；取值$\gamma > 1$ 表示边际成本递增，并确保严格凸性。

问题（21）是资源分配问题 [59], 的一个凸实例，并出现在各种应用中 [60],，包括输电系统中的最优潮流，其中 $\gamma = 2$通常采用 [61] 。凸性确保解的唯一性，并有助于进行可处理的分析。

最优资源分配问题在其中一个约束中包含最优流量矩阵 $\boldsymbol{F}^*$ 。这意味着问题（21）是一个双层优化问题，其中（21）是上层问题，（17）是下层问题。此类优化问题通常很复杂 [62], ，只有在对下层问题作出严格假设时，才能保证上层问题的最优解存在且唯一。为了使我们的级联模型定义良好，必须确保（21）存在唯一解，从而能够研究 $\boldsymbol{S}^*$ 作为模型输入的函数。解唯一的一个充分条件是可行域凸且成本函数 [53]严格凸。后一条件由我们对成本函数的选择保证；因此，只需确保前一条件成立。由于约束（21b）和（21c）关于 $\boldsymbol{S}$是线性的，可行域中唯一可能的非凸来源是约束（21d）。如果 $|\boldsymbol{f}^*|$ 是拟凸函数，则可行域是凸的，因为拟凸函数的次水平集是凸集 [53]。函数 $|\boldsymbol{f}^*|$ 是拟凸的，当且仅当对于每个 $\boldsymbol{U_1}$、$\boldsymbol{f}_1$、$\boldsymbol{U_2}$、$\boldsymbol{f}_2$和 $\xi \in [0,1]$,

$$|\boldsymbol{f}^*(\xi\boldsymbol{U_1} + (1-\xi)\boldsymbol{U_2}, \xi\bar{\boldsymbol{f}}_1 + (1-\xi)\bar{\boldsymbol{f}}_2)| \le \max\{|\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{U_1},\bar{\boldsymbol{f}}_1)|, |\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{U_2},\bar{\boldsymbol{f}}_2)|\}. \tag{22}$$

假设（22）成立，则如果 $\boldsymbol{S}_1$、$\boldsymbol{S}_2$ 均满足（21d），那么对于任意 $\eta \in [0,1]$,

$$|\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{T} - \eta\boldsymbol{S}_1 - (1-\eta)\boldsymbol{S}_2, \bar{\boldsymbol{f}})| \le \max\{|\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{S}_1,\bar{\boldsymbol{f}})|, |\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{S}_2,\bar{\boldsymbol{f}})|\} \le \lambda\bar{\boldsymbol{f}},$$

这表明可行集确实是凸的。

遗憾的是，$|\boldsymbol{f}^*|$ 的拟凸性并非总是成立，正如附录 D中的例 1 所示，该例考察了一个具有四个顶点的完全图。此例表明，最优源生产量 $\boldsymbol{S}^*$的唯一性并不能在一般情况下得到保证。因此，在我们的一些可满足性结果中（见第 3 章节 4.4中提出的命题），有必要将结果限制在参数 β的特定取值范围内。

接下来，我们讨论分散式问题。这类问题出现在许多应用中，其生产由多个主体的非协调行动决定，而非由中央规划者决定。这种分散行为在交通和通信网络等系统中十分常见；在这些系统中，源生产量代表不同地点的用户独立生成的交通或数据包总量，而这些用户通常会采取利己行动。因此，没有理由假设相应的源生产满足流容量约束（S3）。同样，各个用户对源生产总量的贡献也不受中央限制，因此会根据用户活动和需求自然变化。因此，在这些情形下，自然的假设是生产约束和流容量约束不存在或不予执行，即 $\boldsymbol{S} = \infty$ 且 $\lambda = \infty$。

在相关文献中，去中心化生产有多种建模方式。在一些研究中，每个源的生产被视为外生输入，例如反映固定需求或历史使用模式 [63]。其他模型将生产视为个体主体优化问题的结果，其中每个主体在满足自身约束的条件下最大化效用或利润 [64]。更一般地，生产水平可能源于动态机制或博弈论机制，在这些机制中，主体会根据价格、拥堵信号或竞争调整其产出 [64, 65]。

在此，我们考虑第一种方法。在 $\boldsymbol{S} = \infty$ 和 $\lambda = \infty$的假设下，源矩阵 $\boldsymbol{S}^*$ 可以直接建模为 $\boldsymbol{T}$ 的给定函数，并满足约束（21b），无需求解（21）。对 $\boldsymbol{S}^*$ 而言，一个简单且自然的选择是采用如下形式的线性映射：

$$\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{R} \cdot \operatorname{diag}\left(\mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{T}\right), \quad \boldsymbol{R} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{K}|}, \quad \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{R} = \mathbf{e}_{|\mathcal{K}|}^T. \tag{23}$$

此处，项$r_{v,\,k}$ 的 $\boldsymbol{R}$ 可解释为商品 k 的总汇点需求中，在源 v生产的比例。关于 $\boldsymbol{R}$ 的假设意味着约束（21b）成立，因为

$$\mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{S}^* = \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{R} \cdot \operatorname{diag}(\mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{T}) = \mathbf{e}_{|\mathcal{K}|}^T \cdot \operatorname{diag}(\mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{T}) = \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{T}.$$

最后请注意，（23）中的线性形式可视为优化问题（21）的一个特例。若假设 $\boldsymbol{S} = \infty$， $\lambda = \infty$，且成本函数为二次成本函数（$\gamma = 2$），则最优源生产量满足

$$s^*_{v,k} = \frac{c_{v,k}}{\sum_{w\in\mathcal{V}} c_{w,k}} \sum_{w\in\mathcal{V}} t_{w,k} \quad v \in \mathcal{V}, k \in \mathcal{K}.$$

这等价于（23）中对以下各项的选择：$r_{v,\,k} = c_{v,\,k}/\sum_{w\in\mathcal{V}} c_{w,\,k}$。也可以采用相应的二次成本函数优化方法，为 $\boldsymbol{S}^*$ 在 $\boldsymbol{S} < \infty$时推导出线性形式。因此，我们得出结论：将其表述为资源分配问题仍具有灵活性，既适用于集中式设置，也适用于分散式设置，无论是否存在生产能力约束。然而，在源生产自然源自个体不协调行为的情形下，直接指定 $\boldsymbol{S}^*$ 可能更直观，也更符合系统动力学。在第4.4节中，我们将展示，此处给出的 $\boldsymbol{S}^*$ 选择与流机制 $\boldsymbol{F}^*$、生产上限 $\boldsymbol{S}$以及级联成本 Z的适当选择配合时，可能满足假设1。

4.3 级联成本函数

网络中的级联现象可能导致两种截然不同的系统性影响。其中一种影响是网络碎片化，即级联会将系统分裂为多个不连通分量，导致部分汇点需求无法得到满足。在实践中，这可能表现为输电网络的大规模停电 [24], 、通信网络失去连通性 [13], ，或相互依存的交通运输系统中服务不可用 [66]。为量化此类故障的严重程度，我们基于汇点需求的损失，引入一种广义的级联规模函数。具体而言，我们定义

$$Z := \sum_{v\in\mathcal{V}} \sum_{k\in\mathcal{K}} w_{v,k} \left(t^{(1)}_{v,k} - t^{(end)}_{v,k}\right)^{\rho}, \tag{24}$$

其中，$w_{v、\,k} > 0$ 是特定于顶点和商品的成本系数，而 $\rho > 0$ 是控制对局部需求损失敏感性的固定指数。在此， $\boldsymbol{T}^{(end)}$ 表示终止级联时的汇点需求矩阵，其分量为 $t^{(end)}_{v、\,k}$。

式（24）中的级联成本函数将标准的线性级联规模 [37, 67, 68], 进行了推广，该规模对应于对所有 v， k选择 $\rho = 1$ 和$w_{v、\,k} = 1$。此类函数计算因网络断连而损失的需求总量。当 $\rho > 1$时，成本函数为凸函数，会对较大的局部资源短缺施加不成比例的更高惩罚。这反映了这样一种情况：网络碎片化后，资源必须通过本地采购获得。本地发电，尤其是大规模本地发电，往往效率较低或成本较高，原因包括本地容量有限、边际生产成本较高或物流挑战。例如，在电网中，相较于集中式发电，本地化发电会产生更高成本；而在供应链中，扰动期间的本地采购通常会导致显著的效率损失。因此，对于必须在没有网络支持的情况下满足的大量本地需求，应施加更高惩罚，以反映其对系统造成的关键负担。

当 $0 < \rho < 1$时，成本函数变为凹函数，对较小的局部损失施加相对较大的惩罚。这种结构可以模拟这样一种系统：启动本地资源生成的启动成本很高，而在初始设置完成后，增加生产所产生的边际成本相对较低。例如，启用备用发电设施、重新规划供应链路径或建立本地资源池，通常都需要大量固定投入；而一旦建立完成，扩大生产的效率就相对较高。因此，凹成本函数能够自然地刻画这样一类系统：由于网络碎片化导致资源交付故障时，系统主要受到初始启动成本的影响。因此，广义级联成本能够对两种情形进行建模：一种是较大的局部变化主导系统性风险的系统，另一种是对小规模初始扰动高度敏感的系统。

相较之下，在存在拥堵的级联模型中，网络可能仍保持连通，但由于有效边容量下降，性能会随之恶化。在这些情况下，系统中的源生产和汇点需求保持不变，因此根据（$Z = 024$），但流量成本会大幅增加。因此，为了体现拥堵的影响，自然可以定义级联流成本 如下:

$$Z := c_f(\boldsymbol{F}^{(end)}, \overline{\boldsymbol{f}}^{(end)}) - c_f(\boldsymbol{F}^{(1)}, \overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}), \tag{25}$$

其中 $\boldsymbol{F}^{(end)}$ 和 $\overline{\boldsymbol{f}}^{(end)}$ 分别表示级联终止时的流矩阵和边容量向量，而 c_f 是式（18）中定义的流成本函数。级联流成本函数反映了网络因容量退化而产生的额外成本，即使没有发生断连也是如此。这种拥堵效应在道路交通网络中尤为显著 [69]。

（24）和（25）中引入的级联成本函数提供了一个灵活的框架，可用于对网络化系统中的各种级联效应建模。其适用性将在章节5中进一步说明。此外，正如下一章节所证明的，这两个函数均满足假设 1。

4.4 可满足性结果

本章节中，我们将展示，对于前面章节中给出的、对应不同源生产类型和流行为的各种建模设置，假设 1 均成立。在陈述结果之前，我们先直观概述所考虑的情形。

命题 3给出的第一种设定适用于这样一类网络：生产由集中协调，且流容量约束会直接影响流和源分配，如第 4.2章节所述。此处，级联成本用广义级联规模（24）建模，并允许采用不同的指数 ρ 来体现系统对局部需求损失的敏感程度，而 $\boldsymbol{F}^*$、 $\boldsymbol{S}^*$和 $\boldsymbol{S}$ 的可能取值则在命题中给出。由此可知，假设 1 在 $\delta = \rho$条件下成立。命题 4给出的第二种设定适用于去中心化系统中的拥塞分析。在这种情况下，级联成本可以依据流量成本的增加来确定，如式（25）所示；也可以依据广义级联规模（24）来确定，分别得到 $\delta = 1$ 和 $\delta = \rho$。

备注 1. 在下文的命题 3 和 4 中，我们假设不存在生产能力约束（$\boldsymbol{S} = \infty$），因为这反映了本文所考虑应用示例的性质。尽管如此，我们仍选择将生产能力约束纳入一般建模框架，以保持其对更广泛情形的完整适用性。采用我们的证明技术，可以在生产上限有限的情况下建立类似的可满足性结果。然而，必须将容量约束设定得足够大，以保证对于所有可接受的汇点需求矩阵$\boldsymbol{S}^*$，都存在可行的源生产矩阵 $\boldsymbol{T}$。

在第一种情形下，我们有如下命题。

命题 3. 如果：

1. 流矩阵 F^*是最小成本流矩阵，如(17)所示，其定义域为$\mathcal{D} = \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|\times|\mathcal{K}|}$且 c *ost* 函数 c_f 定义于 (18)，其中 $\beta = 2$，且常数 a_e 对所有 $e \in \mathcal{E}$；*2.* 不存在生产能力约束，即，$\boldsymbol{S} = \infty$；*3.* 源生产矩阵 $\boldsymbol{S}^*$ 是式(21)所示的最小成本源矩阵；*4.* 级联成本 Z 由广义级联规模（方程(24)）给出；

则假设 *1* 对任意参数 $\delta = \rho$均成立，其中 $\rho > 0$ 取自方程 (24)。

符合此类模型的系统示例是输电系统，我们将在章节 5.1中详细展示。注意，在命题 3中，我们假设 $\beta = 2$，以确保源生产矩阵 $\boldsymbol{S}^*$ 有定义。如示例 1所示，对于一般取值的 β，并不保证 $\boldsymbol{S}^*$ 存在。然而，若能证明某个 $\beta \neq 2$下 $\boldsymbol{S}^*$ 存在，那么命题 3的结果便可直接推广到该情形。

在下述命题中，我们证明第二类问题满足假设 1 。这与去中心化系统相关，在这类系统中，生产是在缺乏协调的情况下产生的，边失效主要导致拥堵效应，而非断连。

命题 4。如果：

1. 流矩阵 F^*是式 (17)中给出的最小成本流矩阵，其定义域为 $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{|\mathcal{E}\ |\times|\ |\mathcal{K}}$，成本函数 c_f 由式 (19)定义；*2.* 不存在生产或流量容量约束，即 $\boldsymbol{S} = \infty$ 且 $\lambda = \infty$；*3.* 源生产矩阵 $\boldsymbol{S}^*$ 是式 (21)中给出的最小成本源矩阵；*4.* 级联成本 Z 由级联流成本（方程 (25)）或广义级联规模（方程 (24)）给出；

则假设*1* 成立，其中 $\delta = 1$当级联成本 Z 由级联流成本给出，如(25)所示，且$\delta = \rho$ 对于任意选定的 $\rho > 0$ 当 Z 由广义级联规模给出，如(24)所示。

属于此类系统的网络实例包括某些交通网络或处理网络，我们将在第5.2 节和第5.3节中详细讨论。

这些可满足性结果至关重要，因为它们表明，通过对流和生产成本结构作出适当选择，我们的框架能够涵盖广泛的网络场景。此外，它们还确立了充分的

条件，使我们关于级联成本尾部行为的主要结果 Z（见章节3）得以应用。具体而言，这些结果为以下假设提供了理论支持：帕累托尾输入会诱发帕累托尾级联成本，这意味着不同类别的流网络可能存在普遍的重尾行为。在章节5中，我们在框架内对三个现实应用进行建模并考察其级联成本；通过应用上述命题和渐近结果，进一步证实了这种普遍行为。

命题的形式化证明见附录C。这些证明基于一系列辅助结果，确立了级联过程各阶段中流、生产和流容量函数的尺度不变性及 SRC 性质，相关结果汇集于附录B。整体策略采用归纳法，刻画级联动力学如何响应输入分布的扰动。

5 应用示例

本节将通过三个示例说明如何运用我们的框架，对各种应用中的级联进行建模和分析。首先，我们展示一个输电系统示例，其中故障与线路过载有关，而级联成本表示停电期间损失的电力总量。其次，我们讨论一个公路网络示例，其中级联代表拥堵的传播，级联成本则由额外出行成本总量，或因网络崩溃而无法完成预定行程的出行者数量来衡量。最后，我们运用该框架对处理网络中的级联进行建模，其中作业会被发送至由具有特定容量的处理器组成的系统中。在此，无标度输入表示作业大小；与前两个示例不同，故障发生在顶点而非边上。我们表明，只需对底层图进行少量修改，仍可用我们的模型研究这一情形。

5.1 电力输电系统

电力输电系统中的停电是级联失效模型的经典应用，多年来，人们提出了许多此类模型的变体 [70, 71, 72, 37, 1]。本文将说明，这一应用也可以纳入我们在章节 2 中介绍的一般建模框架进行建模。为此，必须对框架中的参数和函数进行设定，以捕捉输电网络的运行机制。本章节将确定适用于停电建模的选项，从而得到一个与文献 [37] 中的模型十分相似的模型。

在电力输电系统的级联模型中，图 G 表示底层物理网络，其中顶点 $v \in \mathrm{V}$ 与母线相关联，边 $e \in \mathrm{E}$ 与电力线路相关联。网络中仅传输一种商品——电力，因此 $\mathrm{K} = \{1\}$。

在实际输电系统中，母线可以是纯负荷母线、纯发电机母线，也可以兼具两者的功能。在用于研究停电的宏观级联模型中，这一情况被简化为将每个顶点视为一条既能发电又能用电的母线。主要母线通常位于大型需求中心附近，因此在建模时，我们将每个顶点与一座代表性城市相关联。

根据我们在第2章节中的通用框架，由于只有一种商品，源需求矩阵 $\boldsymbol{T}$ 定义为

$$\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}(\overrightarrow{X}) \cdot \boldsymbol{Q} = (q_{1,1}\overrightarrow{X}_1, \dots q_{|\mathcal{V}|,1}\overrightarrow{X}_{|\mathcal{V}|})^T.$$

此处，$\overrightarrow{X}_v$ 表示与顶点 v关联的城市人口，而 $q_{v,\,1}$ 可解释为该城市每位居民的平均电力需求。

在输电系统的级联失效模型中，通常采用所谓的直流潮流问题来模拟电力流，该问题是交流潮流问题的线性化形式 [73]。具体而言，对于净投入矩阵 $\boldsymbol{U}$，相应的流矩阵为 $\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{VU}$，其中 $\boldsymbol{V}$ 是由底层网络唯一确定的功率转移分布因子矩阵。特别地，$\boldsymbol{V} := \boldsymbol{SB}^T\boldsymbol{L}^+$，其中 $\boldsymbol{S}$ 是 $|\mathcal{E}| \times |\mathcal{E}|$ 线路电纳的对角矩阵，$\boldsymbol{L} := \boldsymbol{BSB}^T \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{V}|}$ 是边权重由电纳给定的加权图拉普拉斯矩阵，并且 $+$表示矩阵伪逆。

已知，直流潮流 $\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{VU}$ 可以表示为一个最小成本流实例，我们在以下引理中对此进行严格表述。

引理5。 $\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{VU}$ 是问题 (17) 的最优解，其成本函数为 $c_f = \sum_{e\in\mathcal{E}} \frac{1}{2S_{e,e}}|f_e|^2$。 ___

我们注意到，上述流量成本是（18）的一种实例，其中 $b_e = 1$ 对所有 $e \in \mathcal{E}$，$\beta = 2$，以及$a_e = S_{e,\,e}$。证明利用 Karush-Khun-Tucker（KKT）条件证明所提出解的最优性。证明见附录E。

在电力输电系统模型中，通常将需要发电多少以及在哪里发电的问题表述为一个优化问题，称为最优潮流（OPF）问题。尽管最优潮流问题有许多变体，但常见的表述旨在最小化发电成本，同时遵守安全运行限值并满足总电力需求 [74]。如果最优潮流问题假设采用直流潮流分布，则该优化问题称为直流最优潮流问题 [75]。该问题可视为资源分配问题（21）的一个实例；我们在框架中对该问题进行了研究，其中

(i) 发电对应于源生产，(ii) 总需求与发电之间的平衡由约束 (21b) 确保，(iii) 发电容量由约束 (21c) 给出，并且 (iv) 线路容量约束由约束 (21d) 确保。

成本函数的一种常见形式是二次形式 [76],，在我们的模型中，这对应于选择 $\gamma = 2$和 $c_{v,\ k} = 1$对于所有 $v \in \mathcal{V}$，在 (21) 中。

在第 (2) 章节的一般框架中，运行线路容量 $\boldsymbol{f}^{(1)}$ 在规划阶段通过求解资源分配问题 (21) 并采用 $\boldsymbol{f}^{(0)} = \infty$ 和 $\lambda^{(0)} = 1$ 来确定；其他级联失效模型（包括电力网络模型）也采用了类似的方法 [37, 36]。规划松弛参数 τ 可用于指定线路容量相对于规划流这一基准值大多少 $\boldsymbol{f}^{(0)}$（见 (11)）。$\varepsilon_{\min}$ 的取值可根据网络中电力线路的特性来选择。运行源生产 $\boldsymbol{S}^{(1)}$ 通过求解最小成本源产出问题 (21) 获得，输入为 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{f}^{(1)}$，以及 $\lambda^{(1)} \in (0, 1)$。这里，$\lambda^{(1)}$ 起到安全参数的作用，确保系统典型运行期间所使用的真实线路容量比例至多为 λ。

在应急阶段，我们的一般框架假设，线路故障级联是按照某种概率律随机启动的 $p^{(1)}(\cdot)$，该概率律允许初始线路故障之间存在相关性。此概率律可根据统计数据或系统的实际特征来选择（例如，位于林木茂密地区的线路因靠近树木而更容易发生故障 [77]）。在电力输电系统中，如果线路过载，就会完全损坏，无法继续使用。为对此建模，我们通过在 $x_i = \mathrm{P}$ 对某个 $i \in \mathrm{E}$ 成立时令 $p^{(1)}(\boldsymbol{x}) = 0$，并对所有 $e \in \mathrm{E}$ 取 $p_{e,c}(\cdot) \equiv 0$，排除部分失效。因此，唯一允许的故障类型是移除（完全故障）。鉴于此，假设所有线路最多只会发生一次故障是合理的，即对所有 $e \in \mathrm{E}$，$n_e = 1$。换言之，每条线路要么完全正常运行，要么完全损坏。在级联阶段 $t \geq 2$，如果某条线路上的流超过其容量，即$\phi_e^{(t)} > 1$，则该线路按照伯努利分布以概率$p_{e,r}(\phi_e^{(t)})$发生故障。同样，函数$p_{e,r}(\cdot)$可根据统计数据或线路的物理属性 e来选择。

电力输电系统中的级联成本或停电规模，通常以因网络断连而无法输送的电量来衡量。在我们的模型中，这一指标等同于平衡恢复过程中损失的需求量。因此，适当的级联成本函数 Z 是式（24）中定义的级联规模，其中 $w_{v,\ k} = 1$ 对所有 $v \in \mathrm{V}$ 和 $\rho = 1$ 均成立。通过选择适当的 $w_{v,\ k}$ 和 ρ 的取值，也可以考虑其他成本函数。

总之，我们展示了如何选择函数 $\boldsymbol{F}^*$，$\boldsymbol{S}^*$和 Z，以便使用本文提出的建模框架对电力输电系统中的级联故障进行建模。根据命题3，所选函数满足假设1，其中 $\delta = \rho$，因此定理2 成立。这一发现与[37] 和 [44], 中的结果一致；这些结果表明，总级联规模具有无标度尾部，其幂律指数为 α。我们的结果在两个方面具有新意。首先，我们在应急阶段采用概率故障机制，而[37, 44] 中的模型则采用确定性规则，移除所有超过容量的线路。其次，我们通过引入参数 ρ，对成本函数进行了推广；该参数源自广义级联成本（24）。早期研究仅考虑了 $\rho = 1$这一情形，对应于成本与总失效需求成正比。我们的表述允许采用更一般的级联影响度量，并明确展示了尾指数如何根据所选级联成本函数从 α 变为 α/ρ。

5.2 高速公路交通网络

我们框架的一项截然不同的应用，是对高速公路交通网络中的拥堵进行建模；这一现象也可以解释为一种级联过程。本章节中的示例与 [17]中的高速公路交通级联模型有许多相似之处。两者的细微差异在于源生产和汇点需求的构造方式，以及级联启动机制。接下来的段落将介绍这些建模分量，并说明其中的差异。

高速公路网络使用连通有向图 G 建模，其中顶点 $v \in \mathrm{V}$ 表示高速公路交叉口，通常与城市相关联，边则表示高速公路。请注意，与电力系统不同，边只能沿单一方向传输流，因此，双向高速公路由两条独立的有向边表示。此外，由于顶点与城市相关联，顶点权重向量 $\overrightarrow{X}$ 表示城市规模的顶点。

在高速公路交通网络中，通勤者从起点位置（顶点）前往目的地。每条边上的流量表示在给定时间内通过该边的通勤者流量强度。与交通领域文献中的常见做法一致，我们假设前往某一地点的车辆构成一个独立的商品。因此，在此模型中，$\mathrm{K} = \mathrm{V}$，因为每个顶点都可以是目的地。

顶点 $v \in \mathrm{V}$ 处商品 $k \in \mathrm{K}$ 的汇点需求$t_{v,\,k}$ 表示前往顶点 v 的商品 k 通勤者人数，而源生产 $s_{v,\,k}$ 表示起点位于顶点 v 的商品 k 车辆数量。由于我们对商品的定义方式，至关重要的是$t_{v,\,k} > 0$ 当且仅当 $v = k$。因此，

$$\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}(\overrightarrow{X}) \cdot \boldsymbol{Q},$$

当 $w = v$ 时为 $q_{v,\,w} > 0$，否则为 $q_{v,\,w} = 0$。这意味着前往顶点 v 的通勤者人数随其规模线性增长，这是合理的假设，因为规模较大的城市能提供更多商业和休闲机会。基于这一考虑，参数 $q_{v,\,v}$ 可以解释为顶点 v 的“吸引力”因子。同样，我们假设 $s^*_{v,\,k} = r_{v,\,k}\overrightarrow{X}_k$，$r_{v,\,k} > 0$，使得对于每个 $k \in \mathrm{K}$，$\sum_{v\in\mathcal{V}} r_{v,\,k} = q_{k,\,k}$。采用矩阵表示法，源生产可写为

$$\boldsymbol{S}^*(\overrightarrow{X}) = \boldsymbol{R} \cdot \mathrm{diag}(\overrightarrow{X}),$$

其中 $\boldsymbol{R} = (r_{v,\,k})_{v\in\mathcal{V},\,k\in\mathcal{K}}$。注意，字母 $\boldsymbol{R}$ 的使用是有意为之，因为这种选择的 $\boldsymbol{S}^*$ 是（23）的一个特例。参数$r_{v,\,k}$ 可解释为从顶点 v 前往顶点 k的通勤者比例。在这个例子中，源生产背后的含义并不寻常；它并非是在适当选定的位置上能够生成的资源，而是由通勤者的出行偏好外生诱发的。因此，在此情形下，生产能力这一概念并无实际意义，这就是我们令 $\boldsymbol{S} = \infty$，从而消除其对模型行为影响的原因。

或者，也可以将商品定义为出行者从给定顶点出发。作者在 [17],中采用了这种做法，并且还考虑了对汇点矩阵和源点矩阵的另一种解释。在那里，从给定地点出发的交通量与该地点的规模成正比，直观上这意味着矩阵 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{S}^*$的作用与本文所定义的 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{S}^*$ 互换。值得注意的是，本文提出的模型能够支持这两种表述方式，而这一选择不会影响级联成本所呈现的幂律行为。

流矩阵的一种常见选择 $\boldsymbol{F}^*$ 表示交通网络中所谓的 Wardrop 用户均衡流量分布，我们在本示例中也采用该分布。这种均衡分布确保在其他通勤者均不改变行为的情况下，任何单个通勤者都无法通过选择替代路线来缩短其出行时间。如章节4.1所述，该流矩阵可以作为问题（17）在非负域$\mathbb{R}^{|\mathcal{E}|\times|\mathcal{V}|}_+$上、以成本函数（19）为约束的解获得。在此，参数 d_e 表示边 e上的“自由流”出行成本，b_e 表示边 e的拥堵效应，而 γ 表示拥堵对出行成本的总体影响。此外，出行成本是边容量的减函数，这反映了道路更宽（或车道更多）通常能够带来更快的出行时间（更低的成本）。

接下来需要选择参数 τ 和 λ。与许多交通模型类似，我们选择 $\tau > 1$，这意味着系统的容量至少是运营阶段所需交通容量的 τ 倍。需要注意的是，高速公路交通中的流是各个通勤者的汇总流量，而通勤者会独立选择路线。因此，没有任何监督方能够确保流量大小处于由参数 λ确定的安全水平以内。此外，在交通网络中，边容量的超越量，即拥堵，经常发生，并不会立即导致该边无法使用，但会增加经过该边的出行成本。这意味着流容量约束并非交通网络的固有组成部分；为反映这一点，我们设定 $\lambda = \infty$，从而意味着约束（21d）始终成立。

在讨论级联拥堵效应之前，我们首先证明，$\boldsymbol{S}^*$、$\boldsymbol{S}^*$和 $\boldsymbol{F}^*$ 的取值满足模型的假设。由于 $\boldsymbol{S}^*$ 不依赖于 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{S}$，因此可以直接得出，规划阶段和运营阶段的源需求相等，即 $\boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}) = \boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X})$。这是符合预期的，因为源生产是外生的，因此不受规划阶段确定的网络设计细节影响。此外，$\boldsymbol{S}^*$ 满足约束 (21b)，因为

$$\mathbf{e}^T_{|\mathcal{V}|}\boldsymbol{S}^* = \mathbf{e}^T_{|\mathcal{V}|}\boldsymbol{R} \cdot \mathrm{diag}(\overrightarrow{X}) = (q_{1,1}, \ldots, q_{|\mathcal{K}|,|\mathcal{K}|}) \cdot \mathrm{diag}(\overrightarrow{X}) = \mathbf{e}^T_{|\mathcal{V}|}\mathrm{diag}(\overrightarrow{X}) \cdot \boldsymbol{Q} = \mathbf{e}^T_{|\mathcal{V}|}\boldsymbol{T}(\overrightarrow{X}),$$

由于约束（21c）和（21d）在选择$\boldsymbol{S}$和 λ后立即得到满足。因此，$\boldsymbol{S}^{(0)}$（$\overrightarrow{X}$）和 $\boldsymbol{S}^{(1)}$（$\overrightarrow{X}$）均满足模型的假设。此外，给定目标函数，$\boldsymbol{F}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{F}^{(1)}$ 都有明确定义

在（19）中的函数是严格凸的，且图$\mathcal{G}$是连通的，这意味着对于每个满足生产平衡约束（约束（21b））的输入$\boldsymbol{U}$，（17）都有唯一解。因此，我们得出结论：所提出的设定符合模型的标准。

接下来，我们描述应急阶段，对网络中的拥堵级联进行建模。首次故障（可能是拥堵，也可能是完全故障）可能由外部事件（如洪水）或内部事件（如道路事故）引起。每次边失效都会使边容量降低一个$\psi_e(\phi_e)$倍。如果$\psi_e(\phi_e) > 0$，那么拥堵只是部分的，例如某条车道被封闭，因此道路仍可通行，但相应的出行成本会增加。否则，道路将完全封闭，必须将经过该边的交通完全改道。请注意，在[17], 中，级联第一阶段的系数ψ_e被建模为随机变量，而在此处它是一个确定性函数，因此两个模型之间的差异可以忽略不计。如果允许边完全失效，使用级联规模函数来衡量级联成本更为方便，该函数能告诉我们有多少通勤者因道路拥堵而无法完成行程。否则，使用级联流成本更合适，它表示级联导致的出行成本增加。

总之，根据命题4 可知，假设1 在以下条件下成立：$\delta = 1$或$\delta = \rho$，具体取决于所选的级联成本函数Z。这意味着定理2成立，且级联成本分布的尾部具有无标度特性，其参数为α或α/ρ，分别对应于Z的不同取值。

5.3 处理网络

我们的框架也可用于描述处理网络中的级联行为——在这类系统中，作业沿网络流转，并在经过处理节点时接受处理。示例包括：

- **制造系统**，其中原材料被组装成产品，
- **通信网络**，其中数据包由路由器或服务器处理，
- **供应链**，其中货物经由仓库和配送中心运往最终用户。

处理网络多种多样，其建模方式取决于诸多因素，包括生产是去中心化还是集中式、网络是否允许作业循环改道，以及流如何重新分配。下文将对一类适用于内容分发网络（CDN）等系统的简单子类进行建模：我们假设网络是有向无环网络，其中代表客户请求的源顶点具有无界的生产能力，处理在有限容量资源上进行，路由则由最小化依赖容量的流成本函数决定。随后，我们将说明如何修改这些假设，以涵盖处理网络的其他子类。

与交通流场景一样，我们将作业流近似为连续流体；在处理大量作业时，这是一种常见方法。我们将网络建模为由 源顶点、目的地顶点和处理顶点组成的网络。作业从源顶点进入系统，在处理顶点处经历一系列转换，然后在分配给它们的目的地离开系统。图 1展示了一个有向无环处理网络的小型示例。尽管循环在内容分发网络中并不常见，但本章节介绍的建模方法同样适用于具有循环拓扑的网络。

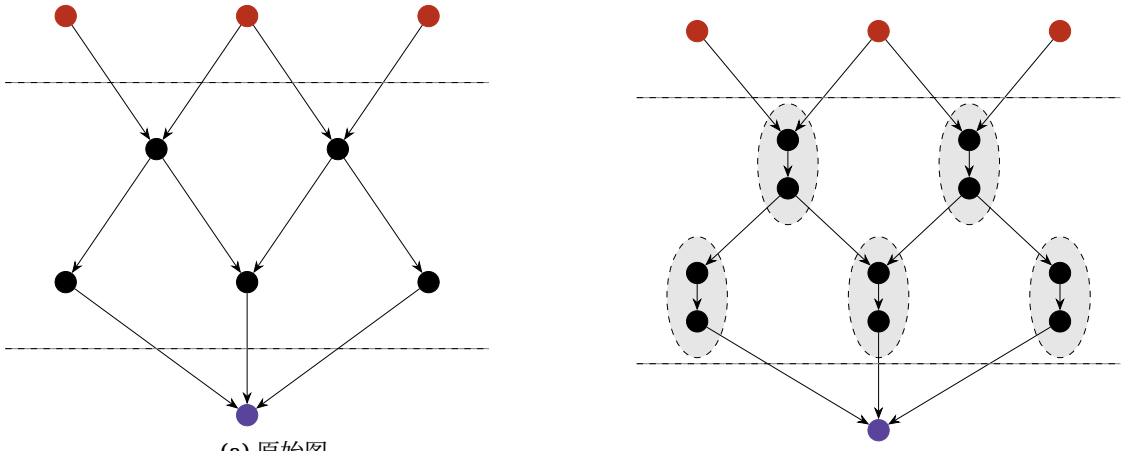
在处理网络的经典示例中，包括内容分发网络，处理能力与顶点[13, 78, 79]相关。相比之下，我们在章节 2 中的建模框架假设处理发生在边上。不过，我们可以通过将每个处理顶点建模为两个由一条处理边连接的辅助顶点来规避这一差异，如图 1b所示。因此，处理顶点的容量由相应边的容量表示。

为区分不同的网络组件，我们定义$\mathrm{V} = \mathrm{V}_o \cup \mathrm{V}_d \cup \mathrm{V}_P$和$\mathrm{E} = \mathrm{E}_p \cup \mathrm{E}_r$，其中：

- V_o、V_d和V_P分别表示起点、目的地和处理顶点的集合，
- E_P表示处理边的集合，每条边的形式为(v_P, v_P)，其中$v_P \in \mathrm{V}_P$，
- E_r表示所有其他（路由）边的集合。

通常，在处理网络中，一个顶点可以同时充当起点、处理节点和/或目的地；但通过引入辅助起点和目的地顶点，可以消除这些双重角色而不失一般性，从而使模型中的每个顶点都只扮演一种角色。

作业到达源顶点表示模型中的源生产，而作业从目的地顶点离开 则表示汇点需求。每种商品代表一种不同的作业类型。



(a) 原始图。

(b) 修改后的图，它是通过将每个处理顶点替换为一对由有向边连接的顶点而得到的。

图 1：一个小型处理网络示例。这里，红色、黑色和蓝色顶点分别对应起点、处理顶点和目的地顶点。

处理作业到达

在许多真实的处理网络中，作业大小呈重尾分布 [46, 80, 81]——例如通信网络或内容分发网络（CDN）中的文件大小。在我们的示例中，我们通过起始节点的源生产率对其影响进行建模：较大的作业需要按比例增加单位时间内的处理量，因此，重尾作业大小会使聚合流中的源生产率也呈重尾分布。直观而言，可以将源生产 $\boldsymbol{S}^{(0)}$ 建模为与重尾顶点大小 $\overrightarrow{X}$ 成正比，并将汇点需求 $\boldsymbol{T}^{(0)}$ 定义为 $\boldsymbol{S}^{(0)}$ 的函数。然而，这与我们模型所假设的结构相反；在我们的模型中，$\boldsymbol{S}^{(0)}$ 由 $\boldsymbol{T}^{(0)}$ 推导得出。为解决这一不一致，我们使用符号约定重新诠释源与汇角色：负生产对应需求，而负需求对应生产。因此，我们定义：

$$\boldsymbol{T}^{(0)} = -\mathrm{diag}(\overrightarrow{X})\boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{S}^{(0)} = -\boldsymbol{R}\cdot\mathrm{diag}(\mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^{T}\boldsymbol{T}^{(0)}),$$

如方程（23）所示。此外，我们设定：$q_{v,\,k} = 0$ 对所有满足 $\sum_{k\in\mathcal{K}} q_{v,\,k} = 1$ 的 $v \in \mathrm{V}_d \cup \mathcal{V}_P$，均成立。这样，我们可以将 $\overrightarrow{X}_v$ 解释为起始顶点 v 处作业的总到达率，并将 $q_{v,\,k}$ 解释为到达 v 的作业中类型为 k 的作业所占的比例。我们进一步假设矩阵 $\boldsymbol{R}$ 满足 $r_{v,\,k}$ 当且仅当 $v \in \mathrm{V}_d$，其中 $r_{v,\,k}$ 表示目的地为 v 的类型为 k 的作业所占的比例。

在没有生成约束和流量约束的假设下，方程（23）是方程（21）的一个特例，即 $\boldsymbol{S} = \infty$ 和 $\lambda = \bar{\infty}$。这种选择对应于去中心化生成，适用于内容分发网络等场景：用户可以生成任意数量的请求，且生成请求时不会考虑网络的拥堵状态。在其他处理网络中，例如制造业，生产能力通常是有限的；虽然我们在第4章的可满足性结果中没有明确处理这种情况，但注释 1 说明，我们的结果可以扩展到支持某些生产能力函数 $\boldsymbol{S}$。对于采用集中式生产的系统，则可以改用方程（21）对生成进行建模。

流与成本结构

与交通模型一样，我们假设存在非负流量，这意味着作业只能沿每条边指定的方向移动。这在许多处理网络中很常见，因为即使是双向链路，其容量和控制也往往是非对称的，因此将每个方向建模为一条具有非负流量的独立弧是很自然的。选择流量以使总处理成本最小，其定义使用方程（19）中的成本函数，体现了 CDN 类系统中典型的集中式路由逻辑：流量分配会考虑整个网络的处理能力。我们假设非处理边上的流量（即集合 $\mathcal{E}_r$ 中的边）不会产生任何成本，因此我们设定：

$$b_e = d_e = 0 \quad \text{for all } e \in \mathcal{E}_r, \qquad d_e > 0,\ b_e \geq 0 \quad \text{for all } e \in \mathcal{E}_p.$$

这种选择并不具有限制性——可以在边 $e \in \mathrm{E}_r$ 上引入正成本，以刻画其他类型处理网络中的运输延迟或通信时延等因素。这里，d_e 表示

处理单位流的基本成本，而 b_e 控制成本对负载的敏感度； b_e 值越高，处理成本对处理负载的依赖程度就越高。

级联过程

为对级联故障建模，我们假设只有处理边会发生故障，即 $p_{e,c}(x) = p_{e,r}(x) = 0$ 对所有 $e \in \mathcal{E}_r$ 均成立。该假设可以放宽——例如，在运输或通信网络中，路由边可能因扰动或中断而发生故障，这可以通过为 $\mathcal{E}_r$ 中的边赋予非零故障概率来建模。初始故障随机触发，后续故障则在处理边上的流超过其容量 f_e 时发生。故障可以是部分或完全的，相关的级联成本可通过以下任一方式衡量：公式（24），若 $\rho = 1$，则统计因网络断连而无法处理的作业数量；或者公式（25），衡量拥堵导致的流量成本增幅。

这一设置满足命题 4，这意味着定理 2 在所提出的处理网络背景下同样成立。具体而言，该结果表明，级联成本具有参数为 α/ρ ($\rho = 1$ 若 Z 是级联流成本）的帕累托尾，其中 α 决定了系统作业到达分布的尾部。

我们指出，这个应用示例展示了如何通过对底层图进行简单修改，将我们的框架应用于节点级联故障建模。请注意，为便于阐述，我们在此采用了一个简单的处理网络设定，其中每个处理单元都能够处理所有作业类型。通过调整流成本函数，可以将这一设定推广至专用服务器的情形。具体而言，对于每个无法处理作业类型 k 的处理单元，流函数应为商品 k 的任何非零流量赋予无限成本。尽管这种推广不再直接满足命题 4，但我们相信，采用与命题4证明中类似的方法，可以证明假设 1 仍然成立。

6 讨论

本文研究了流网络多商品级联模型中具有帕累托尾部的级联成本产生的一种普适机制。通过对模型的核心分量进行参数化，我们的框架能够捕捉广泛的网络行为，并呈现电网、高速公路交通和处理网络等系统之间的运营差异——据我们所知，此前的模型尚未实现这种整合。在温和的假设下，我们在定理 2 中证明，该框架中的级联成本具有无标度尾部。为了使这一结果适用于多种不同情境，我们确定了满足这些假设的资源分配、流量分布和级联成本度量的广泛参数化函数类别（命题 3 和4）。尽管这些类别并非囊括所有情况，但它们涵盖了许多实际系统；用于证明这些结论的策略也具有很强的通用性，可用于验证其他函数选择，从而进一步拓展我们结果的适用范围。

我们的定理推广了 [37, 17], 的渐近结果，将其扩展到多样化的应用和成本函数。我们证明，级联成本 Z 超过较大阈值 y 时，其概率按 $l_Z \cdot y^{-\alpha/\delta}$ 和 $y \to \infty$ 衰减，其中 α 和 δ 分别控制顶点权重分布的尾部以及成本函数的缩放。不同于以往假设线性成本函数（ [37, 17], 的研究（$\delta = 1$），我们的推广展示了不同成本结构如何改变尾部行为，并使我们能够在多种网络中更丰富地建模级联成本。

定理 2 也支持 [37] 提出的假设，即级联成本的无标度性质可能继承自无标度输入分布，例如反映城市规模的分布。我们的研究将这一理论进一步推进，证明这种涌现机制并非特定于某一应用，而是普遍存在于广泛的流网络中。流网络之间的运营差异会影响常数 l_Z，但不会影响标度指数 α/δ，凸显了这一现象的鲁棒性。

现有的通用模型为理解网络中的重尾级联行为提供了重要洞见，但没有任何模型能够在所有情境下给出全面解释 [82]。自组织临界性要求缓慢需求驱动、时间尺度分离和固定阈值——这些条件更常见于自然系统，而非电网等工程系统；因此，在现实世界系统中，关于自组织临界性的实证证据仍然有限 [83]。渗流模型依赖局部再分配，适用于流行病或野火等空间传染过程，但不适用于流量发生全局再分配的流网络 [84]。在其他方法中，例如负载–容量模型或优先连接模型，无标度现象继承自网络的无标度度分布（例如航空网络或互联网） [85, 35, 86]；然而，许多流系统，包括交通、电力和某些处理网络，通常并不具备这一性质。我们的模型填补了这一空白，为流网络中的帕累托尾级联提供了通用解释，表明无论底层拓扑如何，这种行为也可能源于外生帕累托尾需求驱动因素。

在大多数现实世界网络中，容量源于渐进式规划和升级的历史过程，而不是一次性的集中式优化。因此，我们模型中的规划阶段是一种理想化处理，但它符合级联建模中的常见做法，并且是使容量能够响应概率需求所必需的。将容量设定为独立于需求的固定值，会忽略这种关键依赖关系。通过利用随机输入求解规划问题，我们近似刻画了历史过程在类似条件下可能产生的容量模式，同时保留了解析可处理性。

我们在章节 S^* 4 F^* 中选择的源生成矩阵 和流矩阵会形成一个双层优化问题。一般而言，人们对这类问题的行为尚不甚了解，除非问题具有某种特殊结构 [62]。因此，在命题 3中，我们仅考虑情形 $\beta = 2$，这会产生一个二次内层优化问题（最小费用流），并确保外层问题（资源分配）的最优解唯一。在例 1中，我们证明，对于 β的其他取值，流函数的拟凸性（资源分配问题中保证唯一性的一个充分条件）不再成立。因此，将我们的命题推广到一般的 $\beta > 1$ 需要更深入地理解双层结构，尤其是确保唯一性的条件。这样的推广将扩大可接受的流机制类别，增强我们框架的适用性。

在推导充分条件的过程中，一个发挥关键作用的结构性质是相对于顶点权重向量 $\vec{X}$的尺度不变性。然而，在所有情形下，这一性质未必都符合实际，尤其是在运行规则会随负载强度 $\vec{X}$变化的系统中。我们认为，尺度不变性并非绝对必要；只要了解级联成本在 $\max\{\vec{X}\} \to \infty$时的渐近行为，或许就足够了。放宽这一假设需要更细致的分析，才能证明命题 1 和定理 2，但这可能会显著拓展模型的适用范围和允许的函数选择。

此外，尽管我们假设输入权重 $\vec{X}$ 具有帕累托尾部，但我们预计，结果可以自然地推广到更广泛的正则变差分布，不过证明中会因此增加一些技术复杂性。以这种方式推广输入的尾部行为，将进一步提高我们的框架对超出现有假设范围的系统的适用性。

最后，我们的模型假设采用静态汇点需求：除非网络连通性的丧失使需求无法实现，否则需求保持不变。然而，在现实中，一些系统会对故障作出动态响应——尤其是在较长的时间尺度上——或表现出内在的动态需求行为。例如，在交通网络中，出行者可能会在严重拥堵期间推迟或取消行程，从而改变汇点需求；而在保险网络中，每个时间步都会有新的理赔申请到达，导致需求随时间演变 [31]。扩展我们的模型以纳入此类动态，有望对级联持续时间和恢复时间等现象提供更为现实的洞见，同时也将涵盖包括保险网络在内的其他级联系统。研究无标度假设是否适用于这些动态环境，是未来研究的一个有前景方向。

参考文献

[1] Hengdao Guo、Ciyan Zheng、Herbert Ho-Ching Iu 和 Tyrone Fernando。电力系统级联故障分析与建模综述。《可再生能源与可持续能源评论》，80:9–22，2017年。[2] Xuqing Huang、Irena Vodenska、Shlomo Havlin 和 H. Eugene Stanley。二分图中的级联故障：系统性风险传播模型。《科学报告》，3(1)，2013年2月。[3] Li Daqing、Jiang Yinan、Kang Rui 和 Shlomo Havlin。级联故障的空间相关性分析：拥堵与停电。《科学报告》，4(1)，2014年6月。[4] Duncan J. Watts。随机网络上全球级联的简单模型。《美国国家科学院院刊》，99(9):5766–5771，2002年4月。[5] Paolo Crucitti、Vito Latora 和 Massimo Marchiori。复杂网络中的级联故障模型。《物理评论*E*》，69(4)，2004年4月。[6] Mahdi Jalili 和 Matjaž Perc。复杂网络中的信息级联。《复杂网络期刊》，5(5):665–693，2017年7月。[7] Marc Manzano、Eusebi Calle、Jordi Ripoll、Anna Manolova Fagertun、Victor Torres-Padrosa、Sakshi Pahwa 和 Caterina Scoglio。复杂网络的流行病与级联生存能力。载于*2014*年第六届可靠网络设计与建模国际研讨会（*RNDM*）。电气与电子工程师学会（IEEE），2014年。[8] Romualdo Pastor-Satorras 和 Alessandro Vespignani。复杂网络中的流行病动力学与地方性流行状态。《物理评论*E*》，63(6)，2001年5月。

[9] Marc Manzano、Eusebi Calle、Jordi Ripoll、Anna Fagertun 和 Víctor Torres-Padrosa。流行病生存能力：刻画类流行病故障传播情景下的网络。载于2013年第9届可靠通信网络设计国际会议（DRCN 2013），第95–102页，2013年1月。[10] Mina Youssef、Robert Kooij 和 Caterina Scoglio。病毒传导率：量化网络抵御流行病传播的鲁棒性。《计算科学杂志》，2(3):286–298，2011年。[11] Donald L. Turcotte、Bruce D. Malamud、Fausto Guzzetti 和 Paola Reichenbach。自组织、级联模型与自然灾害。《美国国家科学院院刊》，99:2530–2537，2002年2月。[12] Lucas D. Valdez、Louis Shekhtman、Cristian E. La Rocca、Xin Zhang、Sergey V. Buldyrev、Paul A. Trunfio、Lidia A. Braunstein 和 Shlomo Havlin。复杂网络中的级联故障。《复杂网络期刊》，8(2)，2020年5月。[13] Wendi Ren、Jiajing Wu、Xi Zhang、Rong Lai 和 Liang Chen。通信网络级联故障动力学的随机模型。《IEEE电路与系统汇刊第二辑：简报》，65(5):632–636，2018年。[14] Matthew Elliott、Benjamin Golub 和 Matthew O. Jackson。金融网络与传染。SSRN电子期刊，2012年。[15] Liudong Xing。物联网中的级联故障：可靠性与韧性综述及展望。《IEEE物联网杂志》，8(1):44–64，2021年。[16] Jie Chen、James S. Thorp 和 Manu Parashar。电力系统扰动数据分析。载于第34届夏威夷系统科学国际年会论文集，第738–744页，2001年。[17] Agnieszka Janicka、Fiona Sloothaak、Maria Vlasiou 和 Bert Zwart。高速公路网络中无标度交通拥堵的涌现：一种概率方法。arXiv /physics.soc-ph/, 2025。[18] Limiao Zhang、Guanwen Zeng、Daqing Li、Hai-Jun Huang、H. Eugene Stanley 和 Shlomo Havlin。真实交通拥堵的无标度韧性。《美国国家科学院院刊》，116(18):8673–8678，2019年4月。[19] Marat Ibragimov、Rustam Ibragimov 和 Johan Walden。《经济学与金融中的重尾分布与鲁棒性》，第214卷。施普林格，2015年。[20] Jiajun Liu 和 Yang Yang。相关重尾损失下系统性风险的渐近分析。《ASTIN公报》，51(2):571–605，2021年。[21] Stefan Thurner、J. Doyne Farmer 和 John Geanakoplos。杠杆导致肥尾和聚集波动率。SSRN电子期刊，2010年。[22] Pablo Fleurquin、José J. Ramasco 和 Victor M. Eguiluz。美国机场网络中的系统性延误传播。《科学报告》，3(1)，2013年1月。[23] Max A. Moritz、Marco E. Morais、Lora A. Summerell、J. M. Carlson 和 John Doyle。野火、复杂性与高度优化容错。《美国国家科学院院刊》，102(50):17912–17917，2005年12月。[24] Ian Dobson、Benjamin A. Carreras、Vickie E. Lynch 和 David E. Newman。停电序列的复杂系统分析：级联故障、临界点与自组织。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，17(2)，2007年6月。[25] Joshua E. Gang、Wanqi Jia 和 Ira A. Herniter。沙与火：将自组织临界性沙堆模型应用于野火缓解。《国际荒地火灾杂志》，31(9):847–856，2022年8月。[26] John M. Beggs 和 Dietmar Plenz。新皮层神经回路中的神经元雪崩。《神经科学杂志》，23(35):11167–11177，2003年12月。[27] Zeev Olami、Hans Jacob S. Feder 和 Kim Christensen。用于地震建模的连续非守恒元胞自动机中的自组织临界性。Physical Review Letters，68:1244–1247，1992年2月。[28] Per Bak、Maya Paczuski 和 Martin Shubik。多主体股票市场中的价格变动。《Physica A：统计力学及其应用》，246(3–4):430–453，1997年12月。[29] Barbara Drossel 和 Franz Schwabl。自组织临界森林火灾模型。Physical Review Letters，69:1629–1632，1992年9月。[30] Ming Li、Run-Ran Liu、Linyuan Lü、Mao-Bin Hu、Shuqi Xu 和 Yi-Cheng Zhang。复杂网络中的渗流：理论与应用。《物理学报告》，907:1–68，2021年。[31] Jose Blanchet 和 Yixi Shi。随机风险网络：建模、分析与高效蒙特卡洛。SSRN电子期刊，2012年。

[32] Christoph Adami 和 Johan Chu。临界与近临界分枝过程。《物理评论E》，66:011907，2002年7月。[33] Per Bak、Chao Tang 和 Kurt Wiesenfeld。自组织临界性：对 1/f 噪声的一种解释。Physical Review Letters，59:381–384，1987年7月。[34] Deepak Dhar。阿贝尔沙堆及相关模型。《Physica A：统计力学及其应用》，263(1–4):4–25，1999年2月。[35] Réka Albert、Hawoong Jeong 和 Albert-László Barabási。复杂网络的错误与攻击容忍性。Nature，406(6794):378–382，2000年7月。[36] Adilson E. Motter 和 Ying-Cheng Lai。对复杂网络的基于级联的攻击。《物理评论E》，66，2002年12月。[37] Tommaso Nesti、Fiona Sloothaak 和 Bert Zwart。电网中无标度停电规模的出现。Physical Review Letters，125(5)，2020年7月。[38] Lev Davidovich Landau 和 Evgeniĭ Mikhaĭlovich Lifshits。《力学》，第1卷。Butterworth-Heinemann，牛津，第3版，1960年。[39] Vijay P. Singh。最小能量耗散率理论，第450–469页。剑桥大学出版社，2022年。[40] Stefan Hergarten、Gerfried Winkler 和 Steffen Birk。将最小能量耗散的概念从河流网络推广到地下流动模式。Hydrology and Earth System Sciences，18(10):4277–4288，2014年。[41] Peter G. Doyle 和 J. Laurie Snell。《随机游走与电网络》。Carus数学专著。美国数学协会，1984年。[42] Cecil D. Murray。最小功生理学原理。《美国国家科学院院刊》，12(3):207–214，1926年3月。[43] Allen J. Wood、Bruce F. Wollenberg 和 Gerald B. Sheblé。《电力生产、运行与控制》。John Wiley & Sons，2013年。[44] Agnieszka Janicka、Fiona Sloothaak 和 Maria Vlasiou。无标度级联失效：适用于所有简单连通图的广义方法。arXiv *[*math.PR*]*, 2024。[45] Brian J. L. Berry。城市规模分布与经济发展。Economic Development and Cultural Change，9(4，第1部分):573–588，1961年7月。[46] Mark E. Crovella、Murad S. Taqqu 和 Azer Bestavros。万维网中的重尾概率分布，第3–25页。Birkhauser Boston Inc.，美国，1998年。[47] Jayakrishnan Nair、Adam Wierman 和 Bert Zwart。《重尾基础：性质、出现与估计》。剑桥统计与概率数学丛书。剑桥大学出版社，2022年。[48] Peter Whittle。《网络：优化与演化》。剑桥统计与概率数学丛书。剑桥大学出版社，2007年。[49] Oscar Danilo Montoya、Walter Gil-González 和 Alejandro Garces。直流微电网中的最优潮流：一种二次凸近似。《IEEE电路与系统汇刊第二辑：简报》，66(6):1018–1022，2019年。[50] James A. Momoh、Ram Adapa 和 Mohamed E. El-Hawary。1993年以前部分最优潮流文献综述。I. 非线性与二次规划方法。《IEEE 电力系统汇刊》，14(1):96–104，1999年。[51] John W. Labadie。多水库系统的最优运行：最新进展综述。《水资源规划与管理杂志》，130(2):93–111，2004年。[52] Ravindra K. Ahuja、Thomas L. Magnanti 和 James B. Orlin。《网络流：理论、算法与应用》，第1卷。Prentice-Hall，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1993年。[53] Stephen P. Boyd 和 Lieven Vandenberghe。《凸优化》。剑桥大学出版社，2004年。[54] 美国公共道路局。《大型高速计算机应用交通分配手册》。美国商务部，1964年。规划办公室。城市规划司。[55] Jianjun Wu、Huijun Sun 和 Ziyou Gao。加权城市交通均衡网络中的级联故障。Physica A：统计力学及其应用，386:407–413，2007年12月。[56] John G. Wardrop。道路论文：道路交通研究的若干理论方面。《土木工程师学会论文集》，1(3):325–362，1952年。

[57] José R. Correa 和 Nicolás E. Stier-Moses。Wiley 运筹学与管理科学百科全书，第 Wardrop 均衡章，第1–12页。John Wiley & Sons, Ltd，2011年。[58] Georgios Saharidis。供应链优化：集中式与分散式规划和调度，第3–26页。IntechOpen，伦敦，英国，2011年4月。[59] Naoki Katoh、Akiyoshi Shioura 和 Toshihide Ibaraki。资源分配问题。《组合优化手册》，第1–93页，2024年。[60] Michael Patriksson。连续非线性资源分配问题综述。《欧洲运筹学杂志》，185(1):1–46，2008年。[61] Oscar Danilo Montoya、Walter Gil-González 和 Alejandro Garces。用于求解直流电网最优潮流问题的序列二次规划模型。《电力系统研究》，169:18–23，2019年。[62] Stephan Dempe、Vyacheslav Kalashnikov、Gerardo A. Pérez-Valdés 和 Nataliya Kalashnykova。《双层规划问题》。Springer Berlin Heidelberg，2015年。[63] Yannis A. Korilis、Aurel A. Lazar 和 Ariel Orda。利用斯塔克尔伯格路由策略实现网络最优解。《IEEE/ACM 网络汇刊》，5(1):161–173，1997年。[64] Frank P. Kelly、Aman K. Maulloo 和 David Kim Hong Tan。通信网络的速率控制：影子价格、比例公平与稳定性。《运筹学会杂志》，49(3):237–252，1998年。[65] Ramesh Johari 和 John N. Tsitsiklis。网络资源分配博弈中的效率损失。《运筹学数学》，29(3):407–435，2004年。[66] Simone Daniotti、Vito D. P. Servedio、Johannes Kager、Aad Robben-Baldauf 和 Stefan Thurner。通过系统性风险方法缓解铁路网络中的延误级联。《NPJ 可持续交通与运输》，1(1)，2024年12月。[67] Marzieh Parandehgheibi、Eytan Modiano 和 David Hay。缓解相互依存的电网和通信网络中的级联故障。载于《2014年 IEEE 智能电网通信国际会议》，第242–247页，2014年。[68] Seyyedali Hosseinalipour、Jiayu Mao、Do Young Eun 和 Huaiyu Dai。供需相互依存网络中灾难性故障的预防与缓解。《 IEEE 网络科学与工程汇刊》，7(3):1710–1723，2020年。[69] Jinxiao Duan、Daqing Li 和 Hai Jun Huang。个体独立或集体行动时交通网络抵御级联故障的可靠性。《交通研究 C 辑：新兴技术》，147，2023年2月。[70] Benjamin Carreras、Vickie Lynch、Ian Dobson 和 David E. Newman。级联故障停电电力传输模型中的临界点与转变。《混沌》，12:985–994，2003年1月。[71] Ian Dobson、Benjamin A. Carreras 和 David E. Newman。负载相关系统故障级联的分枝过程近似。载于《第37届夏威夷系统科学国际年会论文集》，2004年。[72] Ian Dobson、Benjamin A. Carreras 和 David E. Newman。级联故障及其对停电可能影响的概率性负载相关模型。载于《第36届夏威夷系统科学国际年会论文集》，2003年。[73] Brian Stott、Jorge Jardim 和 Ongun Alsac。重新审视直流潮流。《IEEE 电力系统汇刊》，24(3):1290–1300，2009年。[74] Stephen Frank 和 Steffen Rebennack。最优潮流导论：理论、建模与示例。《IIE 汇刊》，48(12):1172–1197，2016年。[75] Kyri Baker。直流最优潮流的解从来都不是交流可行的。载于《第十二届 ACM 未来能源系统国际会议论文集》，e-Energy '21，第264–268页，纽约，美国，2021年。计算机协会。[76] Daniel K. Molzahn、Florian Dörfler、Henrik Sandberg、Steven H. Low、Sambuddha Chakrabarti、Ross Baldick 和 Javad Lavaei。电力系统分布式优化与控制算法综述。《IEEE 智能电网汇刊》，8(6):2941–2962，2017年。[77] Jason R. Parent、Thomas H. Meyer、John C. Volin、Robert T. Fahey 和 Chandi Witharana。分析加强树木修剪在减少停电方面的效果。《环境管理杂志》，241:397–406，2019年。

[78] Liang Tang、Ke Jing、Jie He 和 H. Eugene Stanley。复杂互依供应链网络：级联失效与鲁棒性。《*Physica A*：统计力学及其应用》，443:58–69，2016年。[79] Xiuwen Fu、Pasquale Pace、Gianluca Aloi、Antonio Guerrieri、Wenfeng Li 和 Giancarlo Fortino。网络制造系统对级联故障的容差分析。《*ACM互*联网技术汇刊》，23(4)，2023年11月。[80] Will E. Leland、Murad S. Taqqu、Walter Willinger 和 Daniel V. Wilson。以太网流量的自相似性。《*ACM SIGCOMM*计算机通信评论》，23(4):183–193，1993年10月。[81] Sidney I. Resnick。重尾建模与电信流量数据：特邀专题论文。《统计学年鉴》，25(5):1805–1869，1997年。[82] Didier Sornette。幂律的形成机制，第345–394页。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，2006年。[83] Nicholas W. Watkins、Gunnar Pruessner、Sandra C. Chapman、Norma B. Crosby 和 Henrik J. Jensen。自组织临界性25年：概念与争议。《空间科学评论》，198(1–4):3—44，2015年5月。[84] Yingrui Zhang、Alex Arenas 和 Os man Yağan。流量再分配模型下互依系统中的级联故障。《物理评论*E*》，97:022307，2018年2月。[85] Ying-Cheng Lai、Adilson E. Motter 和 Takashi Nishikawa。复杂网络中的攻击与级联，第299–310页。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，2004年。[86] Hong-Guang Yao 和 Hang Zhang。机场网络中延迟传播的临界与稳态特征。《*PlOS One*》，18(7)，2023年。[87] Petter Tøndel、Tor Arne Johansen 和 Alberto Bemporad。多参数二次规划及显式模型预测控制解的算法。《*Automatica*》，39(3):489–497，2003年。

A 章节中结果的证明 3

A.1 命题的证明1

证明。根据假设1，我们知道，对于某个常数 $Z \le m_Z \cdot \sum_{v\in\mathcal{V}} \overrightarrow{X}_v^{\delta}$，有 $m_Z > 0$。因此，

$$Z \le m_Z \cdot \sum_{v\in\mathcal{V}} \overrightarrow{X}_v^{\delta} \le |\mathcal{V}| \cdot m_Z \cdot \overrightarrow{X}_{\max}^{\delta}.$$

令 $\overrightarrow{X}_{\max-1}$ 表示第二大的顶点权重。利用上述关于 Z的界，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Z > y, \sum_{i=1}^{|\mathcal{V}|} \overrightarrow{X}_i^{\delta} > (1+\varepsilon)\overrightarrow{X}_{\max}^{\delta}\right) &\le \mathbb{P}\left(|\mathcal{V}| \cdot m_Z \cdot \overrightarrow{X}_{\max}^{\delta} > y, \sum_{i=1}^{|\mathcal{V}|} \overrightarrow{X}_i^{\delta} - \overrightarrow{X}_{\max}^{\delta} > \varepsilon \overrightarrow{X}_{\max}^{\delta}\right) \\
&\le \mathbb{P}\left(\overrightarrow{X}_{\max}^{\delta} > y/(|\mathcal{V}| \cdot m_Z), \sum_{i=1}^{|\mathcal{V}|} \overrightarrow{X}_i^{\delta} - \overrightarrow{X}_{\max}^{\delta} > \varepsilon y/(|\mathcal{V}| \cdot m_Z)\right) \\
&\overset{(*)}{\le} \mathbb{P}\left(\overrightarrow{X}_{\max}^{\delta} > y/(|\mathcal{V}| \cdot m_Z), (|\mathcal{V}|-1)\overrightarrow{X}_{\max-1}^{\delta} > \varepsilon y/(|\mathcal{V}| \cdot m_Z)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\overrightarrow{X}_{\max} > (y/(|\mathcal{V}| \cdot m_Z))^{1/\delta}, \overrightarrow{X}_{\max-1} > (\varepsilon y/(|\mathcal{V}| \cdot m_Z \cdot (|\mathcal{V}|-1)))^{1/\delta}\right),
\end{aligned}$$

其中，在 $(*)$ 中，我们用 $\overrightarrow{X}_{\max-1}$界定除最大顶点权重之外的所有顶点权重。此外，对于任意常数 $\kappa_{\max}$，$\kappa_{\max-1} > 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\overrightarrow{X}_{\max} > \kappa_{\max} \cdot y^{1/\delta}, \overrightarrow{X}_{\max-1} > \kappa_{\max-1} \cdot y^{1/\delta}\right) \\
&\quad\overset{(**)}{\le} |\mathcal{V}|(|\mathcal{V}|-1)\mathbb{P}\left(\overrightarrow{X}_1 > \kappa_{\max} \cdot y^{1/\delta}, \overrightarrow{X}_2 > \kappa_{\max-1} \cdot y^{1/\delta}, \overrightarrow{X}_1 \ge \overrightarrow{X}_2 \ge \overrightarrow{X}_i,\ i = 3, \ldots, |\mathcal{V}|\right) \\
&\quad\le |\mathcal{V}|(|\mathcal{V}|-1)\mathbb{P}\left(\overrightarrow{X}_1 > \kappa_{\max} \cdot y^{1/\delta}, \overrightarrow{X}_2 > \kappa_{\max-1} \cdot y^{1/\delta}\right) \\
&\quad\overset{X_1, X_2 \text{ indep.}}{=} |\mathcal{V}|(|\mathcal{V}|-1)\mathbb{P}\left(\overrightarrow{X}_1 > \kappa_{\max} \cdot y^{1/\delta}\right)\mathbb{P}\left(\overrightarrow{X}_2 > \kappa_{\max-1} \cdot y^{1/\delta}\right) = O\left(y^{-2\alpha/\delta}\right) \quad \text{as } y \to \infty,
\end{aligned}$$

其中，在 $(**)$ 中，我们利用以下事实：两个随机变量成为最大的变量共有 $|\mathcal{V}|(|\mathcal{V}|-1)$ 种可能，且每种可能发生的概率相同。因此，我们得出

$$\mathbb{P}\left(Z > y, \sum_{i=1}^{|\mathcal{V}|} \overrightarrow{X}_i^{\delta} > (1+\varepsilon)\overrightarrow{X}_{\max}^{\delta}\right) = O\left(y^{-2\alpha/\delta}\right) \quad \text{as } y \to \infty. \qquad \square$$

A.2 定理2的证明

证明。步骤 A：首先，我们将事件 $\mathbb{P}(Z > y)$ 划分为互不相交的情形，每种情形由级联序列 $C = c$ 对某个 $c \in C$ 的特定实现，以及唯一的指标 $i \in \mathcal{V}$ 所定义，其中 $\overrightarrow{X}_i$ 是 $\overrightarrow{X}$的最大分量。因此，我们得到

$$\mathbb{P}(Z > y) = \sum_{i\in\mathcal{V}} \sum_{c\in C} \mathbb{P}\left(Z > y, C = c, \overrightarrow{X}_j < \overrightarrow{X}_i;\ \forall j \in \mathcal{V} \setminus \{i\}\right),$$

这里需要指出，这是一个等式，因为两个相互独立的帕累托分布随机变量相等的概率为零。

步骤 B：固定 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$，并注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z > y, C = c) &= \sum_{i=1}^{|\mathcal{V}|} \mathbb{P}\left(Z > y, C = c, \sum_{j\neq i} \overrightarrow{X}_j^{\delta} \leq \varepsilon \overrightarrow{X}_i^{\delta}, \overrightarrow{X}_j \leq \overrightarrow{X}_i; \forall\, j \in \mathcal{V}/\{i\}\right) \\ &\quad + \underbrace{\sum_{i=1}^{|\mathcal{V}|} \mathbb{P}\left(Z > y, C = c, \sum_{j\neq i} \overrightarrow{X}_j^{\delta} > \varepsilon \overrightarrow{X}_i^{\delta}, \overrightarrow{X}_j \leq \overrightarrow{X}_i; \forall\, j \in \mathcal{V}/\{i\}\right)}_{O(y^{-2\alpha/\delta}) \text{ by Prop. 1}} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{|\mathcal{V}|} \mathbb{P}\left(Z > y, C = c, \sum_{j\neq i} \overrightarrow{X}_j^{\delta} \leq \varepsilon \overrightarrow{X}_i^{\delta}\right)}_{(\star)} + O\left(y^{-2\alpha/\delta}\right),\end{aligned}$$

其中，后一个等式成立是因为 $\varepsilon < \frac{1}{2} < 1$。

步骤 C：接下来，我们考虑某个 $i \in \mathrm{V}$ 对应的项（$\star$）。我们以 $\overrightarrow{X}_i$ 的取值、事件 $\left\{\sum_{j\neq i} \overrightarrow{X}_j^{\delta} \leq \varepsilon \overrightarrow{X}_i^{\delta}\right\}$ 以及级联 $c \in \mathrm{C}$ 的发生为条件。第一个条件要求对 $\overrightarrow{X}_i^{\delta}$ 的取值给出一个下界，接下来我们将推导该下界。根据假设 1，Z 有上界 $m_Z \cdot \sum_{i\in\mathcal{V}} \overrightarrow{X}_i^{\delta}$。因此，若 $\overrightarrow{X}_i^{\delta} \leq \frac{\varepsilon}{m_Z} y$ 且 $\sum_{j\neq i} \overrightarrow{X}_j^{\delta} \leq \varepsilon \overrightarrow{X}_i^{\delta}$，则

$$\sum_{i\in\mathcal{V}} \overrightarrow{X}_i^{\delta} \leq (1+\varepsilon)\overrightarrow{X}_i^{\delta} \leq (1+\varepsilon)\frac{\varepsilon}{m_Z} y,$$

因此

$$Z \leq m_Z \cdot \left(\frac{\varepsilon}{m_Z} + \frac{\varepsilon^2}{m_Z}\right) y \overset{\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})}{\leq} m_Z \left(\frac{1}{2m_Z} + \frac{1}{4m_Z}\right) y < y.$$

因此，

$$\mathbb{P}\left(Z > y,\, C = c,\, \sum_{j\neq i} \overrightarrow{X}_j^{\delta} \leq \varepsilon \overrightarrow{X}_i^{\delta},\, \overrightarrow{X}_i^{\delta} < \frac{\varepsilon}{m_Z} y\right) = 0. \tag{26}$$

换言之，只有当 $\overrightarrow{X}_i \geq \left(\frac{\varepsilon}{m_Z} y\right)^{1/\delta}$ 时，所考虑的概率才非零。对 $\overrightarrow{X}_i^{\delta}$ 的取值进行条件化，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(Z > y, C = c, \sum_{j\neq i} \overrightarrow{X}_j^{\delta} \leq \varepsilon \overrightarrow{X}_i^{\delta}\right) \\ &\quad = \int_0^{\infty} \mathbb{P}\left(Z > y, C = c, \sum_{j\neq i} \overrightarrow{X}_j^{\delta} \leq \varepsilon z^{\delta} y \mid \overrightarrow{X}_i^{\delta} = z^{\delta} y\right) \cdot \mathbb{P}\left(\frac{\overrightarrow{X}_i}{y^{1/\delta}} \in \mathrm{d}z\right) \\ &\quad \overset{(26)}{=} \int_{\left(\frac{\varepsilon}{m_Z}\right)^{1/\delta}}^{\infty} \mathbb{P}\left(Z > y, C = c, \sum_{j\neq i} \overrightarrow{X}_j^{\delta} \leq \varepsilon z^{\delta} y \mid \overrightarrow{X}_i^{\delta} = z^{\delta} y\right) \cdot \mathbb{P}\left(\frac{\overrightarrow{X}_i}{y^{1/\delta}} \in \mathrm{d}z\right).\end{aligned}$$

接下来，我们对 $\overrightarrow{X}$ 的其余条目进行条件化。令 $\mathrm{X}_i(z) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|} \colon \sum_{j\neq i} x_j^{\delta} \leq \varepsilon x_i^{\delta}, x_i^{\delta} = z^{\delta} y\}$。对 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{X}_i(z)$ 的所有可能取值进行条件化后，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(Z > y, C = c, \sum_{j\neq i} \overrightarrow{X}_j^{\delta} \leq \varepsilon \overrightarrow{X}_i^{\delta}\right) \\ &\quad = \int_{\left(\frac{\varepsilon}{m_Z}\right)^{1/\delta}}^{\infty} \int_{\boldsymbol{x}\in X_i(z)} \mathbb{P}\left(Z > y, C = c \mid \overrightarrow{X}_i^{\delta} = z^{\delta} y, \overrightarrow{X} = \boldsymbol{x}\right) \\ &\qquad\qquad \cdot \mathbb{P}\left(\overrightarrow{X} \in \mathrm{d}\boldsymbol{x} \mid \overrightarrow{X}_i^{\delta} = z^{\delta} y\right) \mathbb{P}\left(\frac{\overrightarrow{X}_i}{y^{1/\delta}} \in \mathrm{d}z\right).\end{aligned}$$

然后，对 $C=c$进行条件化，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Z>y, C=c, \sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\delta}\leq \varepsilon \overrightarrow{X}_i^{\delta}\right)&\\ =\int_{\left(\frac{\varepsilon}{m_Z}\right)^{1/\delta}}^{\infty}\int_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}_i(z)}&\mathbb{P}\left(Z>y \mid \overrightarrow{X}_i^{\delta}=z^{\delta}y, \overrightarrow{X}=\boldsymbol{x}, C=c\right)\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}_i^{\delta}=z^{\delta}y, \overrightarrow{X}=\boldsymbol{x}\right)\\ &\cdot\mathbb{P}\left(\overrightarrow{X}\in \mathrm{d}\boldsymbol{x} \mid \overrightarrow{X}_i^{\delta}=z^{\delta}y\right)\mathbb{P}\left(\frac{\overrightarrow{X}_i}{y^{1/\delta}}\in \mathrm{d}z\right).\end{aligned}$$

步骤 D：根据假设 1，对于给定的级联 $C=c$ 和给定的顶点权重向量 $\overrightarrow{X}=\boldsymbol{x}$，级联成本$z(\boldsymbol{x},c)$ 是 δ-尺度不变的，其中 $\boldsymbol{x}$。此外，观察到级联 $C=c$ 给定 $\overrightarrow{X}=\omega\boldsymbol{x}$ 的概率对所有$\omega>0$都相同。我们将这两个性质应用于上面的表达式，得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Z>y, C=c, \sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\delta}\leq \varepsilon \overrightarrow{X}_i^{\delta}\right)&\\ =\int_{\left(\frac{\varepsilon}{m_Z}\right)^{1/\delta}}^{\infty}\int_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}_i(z)}&\mathbb{P}\left(Z>z^{-\delta} \mid \overrightarrow{X}_i=1, \overrightarrow{X}=\boldsymbol{x}/(z^{\delta}y), C=c\right)\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}_i=1, \overrightarrow{X}=\boldsymbol{x}/(z^{\delta}y)\right)\\ &\cdot\mathbb{P}\left(\overrightarrow{X}\in \mathrm{d}\boldsymbol{x} \mid \overrightarrow{X}_i^{\delta}=z^{\delta}y\right)\mathbb{P}\left(\frac{\overrightarrow{X}_i}{y^{1/\delta}}\in \mathrm{d}z\right). \quad (27)\end{aligned}$$

接下来，我们计算项 $\mathbb{P}\left(Z>z^{-\delta} \mid \overrightarrow{X}_i=1, \overrightarrow{X}=\boldsymbol{x}/(z^{\delta}y),\ C=c\right)$。令 $\tilde{\mathcal{X}}_i(\varepsilon)$ 表示经过 $z^{\delta}y$ 重新缩放的集合 $\mathcal{X}_i(z)$，即：

$$\tilde{\mathcal{X}}_i(\varepsilon):=\{\tilde{\boldsymbol{x}}: z^{\delta}y\tilde{\boldsymbol{x}}\in\mathcal{X}_i(z)\}=\{\tilde{\boldsymbol{x}}\in\mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|}: \sum_{j\neq i}\tilde{x}_j^{\delta}\leq\varepsilon, \tilde{x}_i=1\}.$$

重新缩放后，族 $\{\tilde{\mathcal{X}}_i(\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ 不再显式依赖于 z。不过，我们注意到其对 ε 的显式依赖，因为在下文中我们考虑极限 $\varepsilon\downarrow 0$。

回顾一下，$z(\tilde{\boldsymbol{x}}, c)$ 表示给定 c 和 $\overrightarrow{X}=\tilde{\boldsymbol{x}}$时的确定性级联成本。根据假设1，$z(\tilde{\boldsymbol{x}}, c)$ 相对于 $\tilde{\boldsymbol{x}}$是 SRC，这意味着对于 $\tilde{\boldsymbol{x}}(\varepsilon)\in\mathcal{X}_i(\varepsilon)$，

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} z(\tilde{\boldsymbol{x}}(\varepsilon), c)=z(\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}, c).$$

这意味着，对于每个 $\tilde{\boldsymbol{x}}(\varepsilon)\in\tilde{\mathcal{X}}_i(\varepsilon)$ 以及函数 $b(\tilde{\boldsymbol{x}}(\varepsilon, c):=|z(\tilde{\boldsymbol{x}}(\varepsilon, c)-z(\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}, c)|$，我们有关于 $z(\tilde{\boldsymbol{x}}(\varepsilon), c)$ 的以下界：

$$z(\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}, c)-b(\tilde{\boldsymbol{x}}(\varepsilon), c)\leq z(\tilde{\boldsymbol{x}}(\varepsilon), c)\leq z(\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}, c)+b(\tilde{\boldsymbol{x}}(\varepsilon), c).$$

接下来，我们证明 $b(\cdot,\cdot)$ 是有界的。首先注意，根据定义，$z(\cdot,\cdot)\geq 0$。此外，我们假设 $Z\leq m_Z\sum_{j\in\mathcal{V}}\overrightarrow{X}_j^{\delta}$，这意味着该不等式必须对 $\overrightarrow{X}$和 C的任何实现成立，特别是对$\overrightarrow{X}=\tilde{\boldsymbol{x}}(\varepsilon)$ 和 $C=c$成立。由于 $\tilde{\boldsymbol{x}}(\varepsilon)\in\tilde{\mathcal{X}}_i(\varepsilon)$，

$$\sum_{j\in\mathcal{V}}(\tilde{x}(\varepsilon))_j^{\delta}\leq 1+\varepsilon,$$

因此 $z(\tilde{\boldsymbol{x}}(\varepsilon), c)\leq m_Z(1+\varepsilon)$。由此可得

$$b(\tilde{\boldsymbol{x}}(\varepsilon), c)=|z(\tilde{\boldsymbol{x}}(\varepsilon), c)-z(\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}, c)|\leq(1+\varepsilon)m_Z$$

对所有 $\varepsilon>0$ 均成立。

接下来，令 $b^*(i, \varepsilon, c):=\sup_{\tilde{\boldsymbol{x}}\in\tilde{\mathcal{X}}_i(\varepsilon)}\{b(\tilde{\boldsymbol{x}}, c)\}$。由于对于 $\tilde{\boldsymbol{x}}\in\mathcal{X}_i(\varepsilon)$，$b(\cdot,\cdot)$ 有界，且 $\mathcal{X}_i(\varepsilon)$ 非空，因此该值存在。于是，

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(z(\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}, c)-b^*(i,\varepsilon,c)>z^{-\delta} \mid C=c, \overrightarrow{X}_i=1, \overrightarrow{X}=\boldsymbol{x}/(z^{\delta}y)\right)\\ &\quad\leq\mathbb{P}\left(Z>z^{-\delta} \mid C=c, \overrightarrow{X}_i=1, \overrightarrow{X}=\boldsymbol{x}/(z^{\delta}y)\right) \quad (28)\\ &\quad\leq\mathbb{P}\left(z(\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}, c)+b^*(i,\varepsilon,c)>z^{-\delta} \mid C=c, \overrightarrow{X}_i=1, \overrightarrow{X}=\boldsymbol{x}/(z^{\delta}y)\right).\end{aligned}$$

作为步骤 D的最后一部分，我们使用与上文类似的方法来计算项 $\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}_i=1, \overrightarrow{X}=\boldsymbol{x}/(z^\delta y)\right)$。根据级联 $C=c$ 发生概率为 SRC 的假设，我们再次得到

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}_i=1, \overrightarrow{X}=\boldsymbol{x}/(z^\delta y)\right)=\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right).$$

因此，存在某个函数 $\xi(i,\ \varepsilon,\ c)\to 0$，使得 $\varepsilon\downarrow 0$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right)-\xi(i,\varepsilon,c)\\ &\quad\le \mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}_i=1, \overrightarrow{X}=\boldsymbol{x}/(z^\delta y)\right)\\ &\quad\le \mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right)+\xi(i,\varepsilon,c).\end{aligned}\tag{29}$$

步骤 E：接下来，我们将基于 SRC 的界（28）和（29）应用于（27）。由此得到大型级联成本的以下上界

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(Z>y, C=c, \sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\,\delta}\le \varepsilon \overrightarrow{X}_i^{\,\delta}\right)\\ &\qquad\le \int_{\left(\frac{\varepsilon}{m_Z}\right)^{1/\delta}}^{\infty}\mathbb{P}\left(z(\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|},c)+b^*(i,\varepsilon,c)>z^{-\delta}\mid C=c, \overrightarrow{X}_i=1, \overrightarrow{X}=\boldsymbol{x}/(z^\delta y)\right)\\ &\qquad\quad\cdot\left(\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right)+\xi(i,\varepsilon,c)\right)\cdot\int_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}_i(z)}\mathbb{P}\left(\overrightarrow{X}\in \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mid \overrightarrow{X}_i^{\,\delta}=z^\delta y\right)\cdot\mathbb{P}\left(\frac{\overrightarrow{X}_i}{y^{1/\delta}}\in \mathrm{d}z\right),\end{aligned}$$

以及相应的下界

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(Z>y, C=c, \sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\,\delta}\le \varepsilon \overrightarrow{X}_i^{\,\delta}\right)\\ &\qquad\ge \int_{\left(\frac{\varepsilon}{m_Z}\right)^{1/\delta}}^{\infty}\mathbb{P}\left(z(\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|},c)-b^*(i,\varepsilon,c)>z^{-\delta}\mid C=c, \overrightarrow{X}_i=1, \overrightarrow{X}=\boldsymbol{x}/(z^\delta y)\right)\\ &\qquad\quad\cdot\left(\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right)-\xi(i,\varepsilon,c)\right)\cdot\int_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}_i(z)}\mathbb{P}\left(\overrightarrow{X}\in \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mid \overrightarrow{X}_i^{\,\delta}=z^\delta y\right)\cdot\mathbb{P}\left(\frac{\overrightarrow{X}_i}{y^{1/\delta}}\in \mathrm{d}z\right).\end{aligned}$$

我们注意到，$z(\mathbf{e}_{i,\ |\mathcal{V}|},\ c)\pm b^*(i,\ \varepsilon,\ c)$ 是 z 中的常数，这意味着

$$\mathbb{P}\left(z(\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|},c)\pm b^*(i,\varepsilon,c)>z^{-\delta}\mid C=c, \overrightarrow{X}_i=1, \overrightarrow{X}=\boldsymbol{x}/(z^\delta y)\right)=\mathbb{1}\left\{z(\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|},c)\pm b^*(i,\varepsilon,c)>z^{-\delta}\right\}.$$

因此，我们可以将原积分限 $(\varepsilon/m_Z)^{\ 1/\delta}$ 替换为

$$u^*(i,\varepsilon,c)=\max\left\{\left(z(\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|},c)+b^*\right)^{-1/\delta},(\varepsilon/m_Z)^{1/\delta}\right\}$$

and

$$l^*(i,\varepsilon,c)=\max\left\{\left(z(\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|},c)-b^*\right)^{-1/\delta},(\varepsilon/m_Z)^{1/\delta}\right\},$$

分别作为上界和下界，并去掉指示函数。

对于上界，我们还观察到

$$\int_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}_i(z)}\mathbb{P}\left(\overrightarrow{X}\in \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mid \overrightarrow{X}_i^{\,\delta}=z^\delta y\right)=\mathbb{P}\left(\sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\,\delta}<\varepsilon z^\delta y\mid \overrightarrow{X}_i^{\,\delta}=z^\delta y\right)\le 1.$$

因此，综上可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(Z>y, C=c, \sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\,\delta} \le \varepsilon \overrightarrow{X}_i^{\,\delta}\right)\\
&\quad\le \mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right)+\xi(i,\varepsilon,c)\Big)\cdot \int_{u^*(i,\varepsilon,c)}^{\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\overrightarrow{X}_i}{y^{1/\delta}}\in \mathrm{d}z\right)\\
&\quad= \left(\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right)+\xi(i,\varepsilon,c)\right)\cdot \mathbb{P}\left(\overrightarrow{X}_i^{\,\delta}>u^*(i,\varepsilon,c)^{\delta}y\right)\\
&\quad= \left(\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right)+\xi(i,\varepsilon,c)\right)\cdot y^{-\alpha/\delta}\cdot K\cdot u^*(i,\varepsilon,c)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

对于下界，我们利用 $\overrightarrow{X}_i > l^*(i,\ \varepsilon,\ c)$ 这一事实，并得到以下表达式：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(Z>y, C=c, \sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\,\delta} \le \varepsilon \overrightarrow{X}_i^{\,\delta}\right)\\
&\quad\ge \left(\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right)-\xi(i,\varepsilon,c)\right)\int_{l^*(i,\varepsilon,c)}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\,\delta}<\varepsilon z^{\delta}y \mid \overrightarrow{X}_i^{\,\delta}=z^{\delta}y\right)\mathbb{P}\left(\frac{\overrightarrow{X}_i}{y^{1/\delta}}\in \mathrm{d}z\right)\\
&\quad= \left(\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right)-\xi(i,\varepsilon,c)\right)\mathbb{P}\left(\sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\,\delta}<\varepsilon \overrightarrow{X}_i^{\,\delta}, \overrightarrow{X}_i^{\,\delta}>l^*(i,\varepsilon,c)^{\delta}y\right)\\
&\quad\overset{\overrightarrow{X}_i,\overrightarrow{X}_j\text{indep.}}{\ge} \left(\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right)-\xi(i,\varepsilon,c)\right)\mathbb{P}\left(\sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\,\delta}<\varepsilon l^*(i,\varepsilon,c)^{\delta}y\right)\mathbb{P}\left(\overrightarrow{X}_i^{\,\delta}>l^*(i,\varepsilon,c)^{\delta}y\right)\\
&\quad= \left(\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right)-\xi(i,\varepsilon,c)\right)\mathbb{P}\left(\sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\,\delta}<\varepsilon l^*(i,\varepsilon,c)^{\delta}y\right)\cdot y^{-\alpha/\delta}\cdot K\cdot l^*(c,i,\varepsilon)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

步骤 F：到目前为止，我们已将概率 $\mathbb{P}(Z>y)$ 分解为一系列互斥事件 $\{Z>y,\ C=c,\ \sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\,\delta}\le\varepsilon\overrightarrow{X}_i^{\,\delta}\}$ 对应概率之和，并推导出了这些事件对应概率的上界和下界。在最后这一步中，我们取极限 $y\to\infty$和 $\varepsilon\downarrow 0$，证明这些界渐近相等，从而证明该定理。首先，注意当 $y\to\infty$，$\mathbb{P}\left(\sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\,\delta}<\varepsilon l^*(i,\ \varepsilon,\ c)^{\,\delta}y\right)\to 1$。因此，我们得到

$$\lim_{y\to\infty} y^{\alpha/\delta}\mathbb{P}\left(Z>y, C=c, \sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\,\delta}\le\varepsilon\overrightarrow{X}_i^{\,\delta}\right)\ge K\left(\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right)-\xi(i,\varepsilon,c)\right)l^*(i,\varepsilon,c)^{-\alpha}$$

and

$$\lim_{y\to\infty} y^{\alpha/\delta}\mathbb{P}\left(Z>y, C=c, \sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\,\delta}\le\varepsilon\overrightarrow{X}_i^{\,\delta}\right)\le K\left(\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right)+\xi(i,\varepsilon,c)\right)u^*(i,\varepsilon,c)^{-\alpha}.$$

因此，取极限 $\varepsilon\downarrow 0$，可得

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{y\to\infty} y^{\alpha/\delta}\mathbb{P}\left(Z>y, C=c, \sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\,\delta}\le\varepsilon\overrightarrow{X}_i^{\,\delta}\right)=K\cdot\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right)\cdot z(\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|},c)^{\alpha/\delta}.$$

综上，我们得到

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty} y^{\alpha/\delta}\mathbb{P}(Z>y) &= \lim_{y\to\infty} y^{\alpha/\delta}\sum_{i=1}^{|\mathcal{V}|}\sum_{c\in\mathcal{C}}\mathbb{P}\left(Z>y, C=c, \sum_{j\neq i}\overrightarrow{X}_j^{\,\delta}\le\varepsilon\overrightarrow{X}_i^{\,\delta}\right)+\lim_{y\to\infty}O(y^{-2\alpha/\delta})\\
&= \sum_{i=1}^{|\mathcal{V}|}\sum_{c\in\mathcal{C}}K\cdot\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|}\right)\cdot z(\mathbf{e}_{i,|\mathcal{V}|},c)^{\alpha/\delta}=l_Z.
\end{aligned}$$

我们强调，具有尾参数 α/δ 的重尾行为，即 $\mathbb{P}(Z>y)\sim l_Z\cdot y^{-\alpha/\delta}$，当存在$c\in\mathcal{C}$ 使得对于某个 $i\in\mathcal{V}$，$\mathbb{P}\left(C=c \mid \overrightarrow{X}=\mathbf{e}_{i,\ |\mathcal{V}|}\right)\cdot z\left(\mathbf{e}_{i,\ |\mathcal{V}|},\ c\right)^{\alpha}/^{\delta}>0$，从而保证 $l_Z>0$ 时发生。否则，$\mathbb{P}(Z>y)=\mathrm{O}(y^{-2\alpha/\delta})$。

□

B 缩放与跨阶段 SRC 性质

本章节包含证明命题 3 和 4 所需的辅助结果。这些结果刻画了最小成本流、源生产和流容量函数相对于缩放变换以及顶点权重输入扰动的行为。具体而言，对于这些函数中的每一个，我们都证明了尺度不变性和顺序右连续性（SRC）；这一过程针对不同的过程阶段分步进行。首先，章节 B.1 聚焦于最小成本流函数的性质。随后，章节 B.2、B.3 和 B.4 分别展示了规划、运行和应急阶段的尺度不变性及 SRC 性质。接下来，章节 B.5 证明了特定级联序列发生的概率相对于顶点权重 $\vec{X}$ 也是 SRC，并且不依赖于 $\vec{X}$ 的尺度。最后，命题 3 和 4 利用截至目前推导出的行为性质，在章节 C中得到证明。

我们强调，我们的结果是在不存在生产能力约束的假设下成立的，即 $\boldsymbol{S} = \infty$。然而，正如注释1中所指出的，通过遵循本章节概述的证明策略，命题3和4 的结果可以扩展到适当选择的生产能力矩阵 $\boldsymbol{S}$。

B.1 最小成本流函数的性质

流矩阵 $\boldsymbol{F}^*$定义为最小成本流问题的解，是规划阶段和运行阶段中的基本构件。本章节证明，$\boldsymbol{F}^*$ 是尺度不变的（引理6），并且关于其输入参数是连续的（引理7）。下面的引理说明了尺度不变性。

引理 6。最小成本流矩阵 $\boldsymbol{F}^*$，其成本由（18）或（19）给出，是净投入矩阵和流容量向量（$\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{f}$）的尺度不变函数。特别地，

$$\boldsymbol{F}^*(\omega\boldsymbol{U}, \omega\boldsymbol{f}) = \omega\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{f}).$$

我们通过证明 $\omega\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{f})$ 是输入为 $(\omega\boldsymbol{U}, \omega\boldsymbol{f})$ 的最小成本流问题的可行解，且该流的成本等于 $\boldsymbol{F}^*(\omega\boldsymbol{U}, \omega\boldsymbol{f})$ 的成本，来证明这一结果。

证明。 回顾一下，最小成本流矩阵 $\boldsymbol{F}^*$ 是如下方程的解

$$\min_{\boldsymbol{F}\in\mathcal{D}} c_f(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{U}) \text{ s.t.: } \boldsymbol{B}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U},$$

其中，对于成本函数 (18)，$\mathrm{D} = \mathbb{R}^{|\mathrm{E}|\times|\mathrm{K}|}$；对于成本函数 (19)，$\mathrm{D} = \mathbb{R}^{|\mathrm{E}\ |\times|\ |\mathrm{K}}$。考虑尺度参数$\omega > 0$，为便于说明，令 $\boldsymbol{F}^*(\omega) := \boldsymbol{F}^*(\omega\boldsymbol{U}, \omega\boldsymbol{f})$ 表示与输入 $(\omega\boldsymbol{U}, \omega\boldsymbol{f})$ 对应的最小成本流矩阵。首先，我们证明 $\omega\boldsymbol{F}^*(1) = \omega\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{f})$ 是输入为 $(\omega\boldsymbol{U}, \omega\boldsymbol{f})$ 的最小成本流问题的可行解。显然，$\omega\boldsymbol{F}^*(1) \in \mathrm{D}$，因为 $\boldsymbol{F}^*(1) \in \mathrm{D}$。此外，

$$\boldsymbol{B}\cdot(\omega\boldsymbol{F}^*(1)) = \omega\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^*(1) = \omega\boldsymbol{U}, \tag{30}$$

因为 $\boldsymbol{F}^*(1)$ 是输入 $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{f})$ 的最优解，因此也是可行解。因此，我们得出结论：$\omega\boldsymbol{F}^*(1)$ 是输入 $(\omega\boldsymbol{U}, \omega\boldsymbol{f})$ 对应的最小成本流问题的一个可行解。

同理，我们可以证明，$\frac{1}{\omega}\boldsymbol{F}^*(\omega)$ 是输入 $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{f})$ 对应的最小成本流问题的一个可行解。具体而言，$\frac{1}{\omega}\boldsymbol{F}^*(\omega) \in \mathrm{D}$ 且 $\boldsymbol{B}\cdot\left(\frac{1}{\omega}\boldsymbol{F}^*(\omega)\right) = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^*(\omega) = \boldsymbol{U}$，因为 $\boldsymbol{F}^*(\omega)$ 是输入 $(\omega\boldsymbol{U}, \omega\boldsymbol{f})$ 对应问题的最优解。下一步中我们将使用这一性质。

还需证明，$\omega\boldsymbol{F}^*(1)$ 对于输入 $(\omega\boldsymbol{U}, \omega\boldsymbol{f})$ 不仅是可行解，而且是最优解。由于 $\boldsymbol{F}^*(\omega)$ 和 $\boldsymbol{F}^*(1)$ 分别对于 $(\omega\boldsymbol{U}, \omega\boldsymbol{f})$ 和 $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{f})$ 是最优的，且 $\omega\boldsymbol{F}^*(1)$ 和 $\frac{1}{\omega}\boldsymbol{F}^*(\omega)$ 分别具有相应的可行性，以下两个不等式成立：

$$c_f(\boldsymbol{F}^*(\omega), \omega\boldsymbol{f}) \le c_f(\omega\boldsymbol{F}^*(1), \omega\boldsymbol{f}), \tag{31}$$

$$c_f(\boldsymbol{F}^*(1), \boldsymbol{f}) \le c_f(\boldsymbol{F}^*(\omega)/\omega, \boldsymbol{f}). \tag{32}$$

现在，我们分别考虑这两个不同的成本函数。首先，假设 c_f 由（18）给出。请注意，这个特定的成本函数与其第二个自变量 $\boldsymbol{f}$无关，但为完整起见，我们仍将其写出。将（32）乘以

ω^β，我们得到

$$c_f(\omega \boldsymbol{F}^*(1), \omega\overline{\boldsymbol{f}}) = \frac{\omega^\beta}{\beta}\sum_{e\in\mathcal{E}} b_e a_e(|f_e^*(1)|/a_e)^\beta = \frac{\omega^\beta}{\beta} c_f(\boldsymbol{F}^*(1), \overline{\boldsymbol{f}})$$
$$\overset{(32)}{\leq} \frac{\omega^\beta}{\beta} c_f(\boldsymbol{F}^*(\omega)/\omega, \overline{\boldsymbol{f}}) = \frac{\omega^\beta}{\beta}\sum_{e\in\mathcal{E}} b_e a_e(|f_e^*(\omega)|/(\omega a_e))^\beta = c_f(\boldsymbol{F}^*(\omega), \omega\overline{\boldsymbol{f}}).$$

因此，应用（31），可得

$$c_f(\omega \boldsymbol{F}^*(1), \omega\overline{\boldsymbol{f}}) = c_f(\boldsymbol{F}^*(\omega), \omega\overline{\boldsymbol{f}}). \tag{33}$$

类似地，若 c_f 由（19）给出，则将（32）乘以 ω 可得

$$c_f(\omega \boldsymbol{F}^*(1), \omega\overline{\boldsymbol{f}}) = \omega\sum_{e\in\mathcal{E}} d_e f_e^*(1) + \frac{b_e}{\beta}\overline{f}_e(f_e^*(1)/\overline{f}_e)^\beta = \omega c_f(\boldsymbol{F}^*(1), \overline{\boldsymbol{f}})$$
$$\overset{(32)}{\leq} \omega c_f(\boldsymbol{F}^*(\omega)/\omega, \overline{\boldsymbol{f}}) = \omega\sum_{e\in\mathcal{E}} d_e f_e^*(\omega)/\omega + \frac{b_e}{\beta}\overline{f}_e(f_e^*(\omega)/(\omega\overline{f}_e))^\beta = c_f(\boldsymbol{F}^*(\omega), \omega\overline{\boldsymbol{f}}).$$

因此，再次应用（31）可得（33），这意味着，对于输入 $\omega\boldsymbol{U}$， $\omega\boldsymbol{F}^*(1)$ 和 $\boldsymbol{F}^*(\omega)$ 的成本相等。最后，根据第4.1节中讨论的、采用成本函数（18）和（19）的最小成本流问题解的唯一性，可得 $\boldsymbol{F}^*(\omega) = \omega\boldsymbol{F}^*(1)$。□

接下来，我们证明流函数 $\boldsymbol{F}^*$的连续性，该函数将给定的净投入矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和流量容量向量 $\boldsymbol{f}$映射为相应的最小成本流。连续性在我们的分析中起着至关重要的作用，尤其是在研究最优源生产量 $\boldsymbol{S}^*$的行为时；该生产量取决于 $\boldsymbol{F}^*$ 所满足的流容量约束（21d）。以下引理表明，对于第4.1节中引入的成本函数，最小成本流矩阵 $\boldsymbol{F}^*$ 确实是 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{f}$的连续函数。

引理 7. 令 $\boldsymbol{F}^*$ 表示定义于(17)中的最小成本流矩阵，其成本函数由(18)或(19)给出。则 $\boldsymbol{F}^*$ 是净投入矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和流容量向量 $\boldsymbol{f}$的连续函数。特别地，对于任意净投入矩阵和流容量向量序列$(\boldsymbol{U}^l, \boldsymbol{f}^l) \to (\boldsymbol{U}^\infty, \boldsymbol{f}^\infty)$，有

$$\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}^l, \overline{\boldsymbol{f}}^l) = \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}^\infty, \overline{\boldsymbol{f}}^\infty).$$

证明通过表明所有最优流都收敛到所需极限，建立了连续性。紧性保证子序列极限的存在，而我们构造了一个收敛到所需极限的可行流序列。比较可行子序列与最优子序列的成本，进而表明每个子序列极限——因此完整序列的极限——都是所需极限。

证明。 设 $(\boldsymbol{U}^l, \boldsymbol{f}^l)_{l\in\mathbb{N}}$是一个收敛到 $(\boldsymbol{U}^\infty, \boldsymbol{f}^\infty)$ 的净投入矩阵和流容量向量序列。对每个$l \in \mathbb{N}$，定义 $\boldsymbol{F}^l := \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}^l, \boldsymbol{f}^l)$ 和 $\boldsymbol{F}^\infty := \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}^\infty, \boldsymbol{f}^\infty)$。在我们的假设下，这些流均有定义，因为 i）图是强连通的；ii）根据构造，净投入矩阵满足每种商品的总需求—生产平衡；iii）成本函数是严格凸的。前两个条件确保可行流的存在，例如最短路径流；而最后一个条件保证最优解唯一。

我们首先证明，序列 $(\boldsymbol{F}^l)$ 位于 $\mathbb{R}^{|\mathcal{E}|\times|\mathcal{K}|}$ 的一个紧子集中。对每个 $\boldsymbol{U}^l$，定义总需求为

$$\xi^l := \sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{K}} \boldsymbol{U}^l_{v,k}\cdot\mathbb{1}\{\boldsymbol{U}^l_{v,k}\geq 0\}.$$

由于 $(\boldsymbol{U}^l)$ 收敛，因此它是有界的，从而 (ξ^l) 也是有界的。令 $\xi := \sup_l \xi^l < \infty$。由于成本函数非负且随流量增加而增加，最优流会避免不必要的循环，因此其流量绝不会超过总需求。因此，对于每个 $e \in \mathrm{E}$ 和 $k \in \mathrm{K}$,

$$|f^l_{e,k}| \leq \xi^l \leq \xi.$$

由此可知，对于每个 l， $\boldsymbol{F}^l \in [-\xi, \xi]^{|\mathcal{E}|\times|\mathcal{K}|}$。该集合在 $\mathbb{R}^{|\mathcal{E}|\times|\mathcal{K}|}$ 中是紧的，因此 $(\boldsymbol{F}^l)_{l\in\mathbb{N}}$存在一个收敛子序列。

我们的下一个目标是证明，任意收敛子序列 $(\boldsymbol{F}^{l_m})_{m\in\mathbb{N}}$ 的极限等于 $\boldsymbol{F}^\infty$，即 $\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{F}^{l_m} := \widehat{\boldsymbol{F}}^\infty = \boldsymbol{F}^\infty$。为此，我们首先构造一个收敛到 $\boldsymbol{F}^\infty$ 的可行流序列。令 $\boldsymbol{F}^{(cont)}(\boldsymbol{U})$

表示二次成本函数$\sum_{e\in\mathcal{E}} f_e^2$对应的流问题的解。该问题是一个带线性约束的严格凸二次规划，其解是关于 $\boldsymbol{U}$ 的连续函数；参见 [87]。定义

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}^l := \boldsymbol{F}^\infty + \boldsymbol{F}^{(cont)}(\boldsymbol{U}^l - \boldsymbol{U}^\infty).$$

注意，由于 $\boldsymbol{F}^\infty$，$\boldsymbol{F}^{(cont)}(\boldsymbol{U}^l - \boldsymbol{U}^\infty) \in \mathrm{D}$，我们有 $\widetilde{\boldsymbol{F}}^l \in \mathrm{D}$。此外，根据 $\boldsymbol{F}^\infty$ 的定义，我们有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^\infty = \boldsymbol{U}^\infty$，因此

$$\boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{F}}^l = \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^\infty + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^{(cont)}(\boldsymbol{U}^l - \boldsymbol{U}^\infty) = \boldsymbol{U}^\infty + \boldsymbol{U}^l - \boldsymbol{U}^\infty = \boldsymbol{U}^l.$$

这意味着 $\widetilde{\boldsymbol{F}}^l$ 是净投入 $\boldsymbol{U}^l$ 对应的可行流矩阵，因此它是所有 $l \in \mathbb{N}$ 的可行解。此外，由于 $\boldsymbol{F}^{(cont)}$ 具有连续性，可得当 $l \to \infty$ 时，$\widetilde{\boldsymbol{F}}^l \to \boldsymbol{F}^\infty$。

定义好可行序列后，我们现在将其流成本与最优子序列的流成本进行比较，并利用成本函数的连续性证明极限相等。由于 $\boldsymbol{F}^{l_m}$ 在成本 c_f 下是最优的，且 $\widetilde{\boldsymbol{F}}^{l_m}$ 是可行的，我们有

$$c_f(\boldsymbol{F}^{l_m}, \overline{\boldsymbol{f}}^{l_m}) \le c_f(\widetilde{\boldsymbol{F}}^{l_m}, \overline{\boldsymbol{f}}^{l_m}) \quad \text{for all } m \in \mathbb{N}.$$

令 $m \to \infty$ 取极限，并利用 c_f 的连续性，可得

$$c_f(\widehat{\boldsymbol{F}}^\infty, \overline{\boldsymbol{f}}^\infty) \le c_f(\boldsymbol{F}^\infty, \overline{\boldsymbol{f}}^\infty).$$

注意，对于每个 $m \in \mathbb{N}$, $\widehat{\boldsymbol{F}}^{l_m}$，都满足 $\boldsymbol{B}\widehat{\boldsymbol{F}}^{l_m} = \boldsymbol{U}^{l_m}$ 且 $\widehat{\boldsymbol{F}}^{l_m} \in \mathrm{D}$。因此，对等式两边取极限，并利用 $\widehat{\ }$线性变换的连续性，我们得到 $\boldsymbol{B}\widehat{\boldsymbol{F}}^\infty = \boldsymbol{U}^\infty$，且 $\widehat{\boldsymbol{F}}^\infty \in \mathrm{D}$。换言之，$\widehat{\boldsymbol{F}}^\infty$ 是净投入矩阵 $\boldsymbol{U}^\infty$ 对应的可行流。由于 $\boldsymbol{F}^\infty$ 是（$\boldsymbol{U}^\infty$，$\overline{\boldsymbol{f}}^\infty$）的唯一极小化解，且 $\widehat{\boldsymbol{F}}^\infty$ 是可行的，因此可得 $\widehat{\boldsymbol{F}}^\infty = \boldsymbol{F}^\infty$。

由于 $(\boldsymbol{F}^l)_{l\in\mathbb{N}}$ 的每个收敛子序列都收敛到 $\boldsymbol{F}^\infty$，且该序列位于一个紧集中，因此整个序列也收敛到 $\boldsymbol{F}^\infty$，即，

$$\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{F}^l = \boldsymbol{F}^\infty. \qquad \square$$

B.2 规划阶段的尺度不变性与 SRC

在确立了最小成本流函数的行为性质后，我们现在转而分析规划阶段源生产矩阵（10）的行为。首先，在假设 $\boldsymbol{S}^*$ 是资源分配问题的最小成本解（如第21章中4.2节所述）的前提下，我们证明源生产的尺度不变性。

引理 8。 假设 $\boldsymbol{S}^*$ 由最小成本源生产（21）给出，并且假设不存在生产能力约束，即 $\boldsymbol{S} = \infty$。那么，$\boldsymbol{S}^{(0)}$ 是顶点权重向量 $\overrightarrow{X}$ 的尺度不变函数。

我们通过变量替换方法，将输入为 $\omega\overrightarrow{X}$ 的最小化问题（21）转换为一个与输入为 $\overrightarrow{X}$ 的（21）具有相同解的问题。我们强调，规划阶段和运营阶段中的所有函数都是随机变量，由顶点权重 $\overrightarrow{X}$ 完全确定。基于此，在下面的证明中，对于任意随机变量 A，我们使用简写 $A(\overrightarrow{X})$ 表示在 $\overrightarrow{X}$ 条件下的随机变量 A。

证明。 固定 $\omega > 0$，并考虑顶点权重向量 $\overrightarrow{X}$ 和 $\omega\overrightarrow{X}$。根据方程（8），可知规划阶段中相应的汇点需求矩阵为

$$\boldsymbol{T}^{(0)}(\overrightarrow{X}) = \mathrm{diag}(\overrightarrow{X}) \cdot \boldsymbol{Q}, \quad \text{and} \quad \boldsymbol{T}^{(0)}(\omega\overrightarrow{X}) = \mathrm{diag}(\omega\overrightarrow{X}) \cdot \boldsymbol{Q} = \omega\boldsymbol{T}^{(0)}(\overrightarrow{X}).$$

根据公式（10），规划源生产矩阵通过求解输入为 $\boldsymbol{T}^{(0)}(\omega\overrightarrow{X})$ 且不设流或容量约束的最小成本源生产问题获得。为简洁起见，我们将其表示为

$$\boldsymbol{S}^{(0)}(\omega) := \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{T}^{(0)}(\omega\overrightarrow{X}), \infty, \infty, 1).$$

然后，利用（21），我们可以写成

$$\boldsymbol{S}^{(0)}(1) = \underset{\boldsymbol{S}\in\mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{K}|}}{\arg\min} \sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{K}} \frac{1}{\gamma} c_{v,k} s_{v,k}^\gamma \quad \text{s.t.:} \quad \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{S} = \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{T}^{(0)}(\overrightarrow{X}), \tag{34}$$

and

$$\boldsymbol{S}^{(0)}(\omega) = \underset{\widetilde{\boldsymbol{S}}\in\mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{K}|}}{\arg\min} \sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{K}} \frac{1}{\gamma} c_{v,k}\tilde{s}_{v,k}^{\gamma} \quad \text{s.t.:} \quad \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \widetilde{\boldsymbol{S}} = \omega \cdot \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{T}^{(0)}(\overrightarrow{X}). \tag{35}$$

˜使用变量代换 $\boldsymbol{S} := \omega \boldsymbol{S}$，可知（34）和（35）除相差一个标量外，是相同的最小化问题，因此

$$\boldsymbol{S}^{(0)}(\omega) = \omega \cdot \boldsymbol{S}^{(0)}(1),$$

这证明了规划阶段源生产函数具有尺度不变性。 □

下述引理表明，规划源生产矩阵在正正交象限上相对于顶点权重向量 $\overrightarrow{X}$ 是 SRC。具体而言，对于任意逐分量非递减的输入序列，若其收敛至正正交象限中的一个非零点，则该序列经 $\boldsymbol{S}^{(0)}$ 映射后的像空间收敛至该点处的函数值。

引理 9. 设 $\boldsymbol{S}^*$ 由以下问题的最小成本源生产解给出 (21)，并假设不存在生产能力约束，即 $\boldsymbol{S} = \infty$。那么，规划阶段源生产矩阵 $\boldsymbol{S}^{(0)}$ 是定义在 $\overline{\mathbb{R}}_+^{|\mathcal{V}|} \setminus \{\mathbf{0}\}$上的顶点权重向量 $\overrightarrow{X}$的 *SRC* 函数。具体而言，对于任意序列 $(\overrightarrow{X}^l)_{l\in\mathbb{N}}$，若满足 $\overrightarrow{X}^l \to \overrightarrow{X}^\infty \neq \mathbf{0}$ 且 $\overrightarrow{X}^l \geq \overrightarrow{X}^\infty$对所有 l逐分量成立，则有

$$\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^l) = \boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^\infty).$$

证明采用了与引理 7的证明类似的策略，但为生产矩阵的替代可行序列采用了不同的构造。

证明。 设 $(\overrightarrow{X}^l)_{l\in\mathbb{N}}$ 是一个满足引理条件的序列。根据（8）中的定义，与顶点权重向量 $\overrightarrow{X}$对应的规划汇需求矩阵为

$$\boldsymbol{T}^{(0)}(\overrightarrow{X}) = \operatorname{diag}(\overrightarrow{X}) \cdot \boldsymbol{Q},$$

相应的源生产矩阵定义为

$$\boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}) := \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{T}^{(0)}(\overrightarrow{X}), \infty, \infty, 1),$$

由于（21）中的目标函数严格凸，因此对每个 $\overrightarrow{X} \geq \mathbf{0}$，该矩阵都存在且唯一。

我们首先证明序列 $\left(\boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^l)\right)_{l\in\mathbb{N}}$包含于 $\mathbb{R}^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{K}|}$的某个紧子集中。对于每个 $l \in \mathbb{N}$，平衡约束（21b）蕴含：对每个 $v \in \mathcal{V}$ 和 $k \in \mathcal{K}$，顶点 $v \in \mathcal{V}$ 处商品 k 的生产量有界于该商品的总需求，即

$$s_{v,k}^{(0)}(\overrightarrow{X}^l) \leq \left(\mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{T}^{(0)}(\overrightarrow{X}^l)\right)_k = \left((\overrightarrow{X}^l)^T \boldsymbol{Q}\right)_k \leq \sup_{l\in\mathbb{N}} \left((\overrightarrow{X}^l)^T \boldsymbol{Q}\right)_k =: m_k.$$

由于 $(\overrightarrow{X}^l)$ 收敛，对于每个 k，上确界 m_k 都是有限的，因此该序列位于 $[0, \max_k m_k]^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{K}|}$ 中。由于这是有限维欧几里得空间中的闭有界子集，因此它是紧集。于是，$\left(\boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^l)\right)_{l\in\mathbb{N}}$ 至少有一个收敛子序列。

接下来，我们构造另一个源生产矩阵序列 $\widetilde{\boldsymbol{S}}^l$，使其收敛到 $\boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^\infty)$，并满足约束 (21b)，对每个 $l \in \mathbb{N}$ 均成立。对于每个 l 和 $k \in \mathcal{K}$，令缩放因子 σ_k^l 为商品 k 在顶点权重向量 $\overrightarrow{X}^l$和 $\overrightarrow{X}^\infty$对应的汇点需求总量之比，即:

$$\sigma_k^l := \frac{\left(\mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{T}^{(0)}(\overrightarrow{X}^l)\right)_k}{\left(\mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{T}^{(0)}(\overrightarrow{X}^\infty)\right)_k}, \quad \boldsymbol{\sigma}^l := (\sigma_k^l)_{k\in\mathcal{K}},$$

并令

$$\widetilde{\boldsymbol{S}}^l := \boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^\infty) \cdot \operatorname{diag}(\boldsymbol{\sigma}^l).$$

因此，对于所有 l，我们都有

$$\mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \widetilde{\boldsymbol{S}}^l = \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^\infty) \cdot \operatorname{diag}(\boldsymbol{\sigma}^l) \overset{(21b)}{=} \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{T}^{(0)}(\overrightarrow{X}^\infty) \cdot \operatorname{diag}(\boldsymbol{\sigma}^l) = \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T \boldsymbol{T}^{(0)}(\overrightarrow{X}^l),$$

因此每个 $\widetilde{\boldsymbol{S}}^l$ 都满足平衡约束（21b）。此外，由于汇点需求矩阵和源生产矩阵$\boldsymbol{T}^{(0)}$（·）以及 $\boldsymbol{S}^{(0)}$（·）按构造均为非负矩阵，因此可得 $\boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^\infty) \geq 0$ 以及 $\boldsymbol{\sigma}^l \geq 0$。因此，$\widetilde{\boldsymbol{S}}^l \geq 0$，所以每个 $\widetilde{\boldsymbol{S}}^l$ 对于输入 $\boldsymbol{T}^{(0)}(\overrightarrow{X}^l)$ 都是问题（21）的可行解。此外，由于 $\boldsymbol{T}^{(0)}$（·）的线性性，$\boldsymbol{\sigma}^l$的各个分量关于 $\overrightarrow{X}$均连续，再结合收敛关系 $\overrightarrow{X}^l \to \overrightarrow{X}^\infty$，可推出

$$\lim_{l\to\infty} \widetilde{\boldsymbol{S}}^l = \boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^\infty). \tag{36}$$

接下来，我们通过比较可行子序列和最优子序列的生产成本，证明 $\left(\boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^l)\right)_{l\in\mathbb{N}}$ 的每个收敛子序列的极限都等于 $\boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^\infty)$。令 $(\boldsymbol{S}^{l_m})_{m\in\mathbb{N}}$ 为 $\boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^l)$ 的任意收敛子序列，其极限为 $\widehat{\boldsymbol{S}} := \lim_{m\to\infty} \boldsymbol{S}^{l_m}$。由于 $\boldsymbol{S}^{l_m}$ 是 $\boldsymbol{T}^{(0)}(\overrightarrow{X}^{l_m})$ 的最优子序列，且 $\widetilde{\boldsymbol{S}}^{l_m}$ 是可行的，因此对于所有 m,

$$c_s(\boldsymbol{S}^{l_m}) \leq c_s(\widetilde{\boldsymbol{S}}^{l_m}),$$

其中，c_s 表示 生产成本函数，如（21）所示。由于 c_s 关于 $\boldsymbol{S}$连续，并利用（36），可得

$$c_s(\widehat{\boldsymbol{S}}) \leq c_s(\boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^\infty)).$$

此外，由于 $\boldsymbol{S}$ 对于极限输入是可行的，且成本函数是严格凸的，因此最小化解是唯一的，从而

$$\widehat{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^\infty).$$

最后，$\boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^l)$的每个收敛子序列都收敛到同一个极限，且该序列位于一个紧集中。因此，整个序列收敛：

$$\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^l) = \boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}^\infty). \qquad \square$$

B.3 运营阶段的尺度不变性与 SRC

至此，我们已确立规划阶段相关函数的尺度不变性和 SRC 性质。本节给出的结果将这些性质扩展到运营阶段。首先，以下引理表明，运营边容量向量 $\boldsymbol{f}^{(1)}$ 从最小成本流和规划源生产函数的结构中继承了尺度不变性和 SRC 性质。

引理 10. 设 $\boldsymbol{F}^*$ 是与成本函数 (18) 或 (19)相关联的最小成本流矩阵，且 $\boldsymbol{S}^*$ 由最小成本源生产 (21)给出。此外，假设不存在生产能力约束，即 $\boldsymbol{S} = \infty$。则，

1. 运营边容量向量 $\boldsymbol{f}^{(1)}$ 是顶点权重向量 $\overrightarrow{X}$的一个尺度不变函数，即，

$$\overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}(\omega\overrightarrow{X}) = \omega\overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}(\overrightarrow{X}).$$

2. 运营边容量向量 $\boldsymbol{f}^{(1)}$ 关于顶点权重$\overrightarrow{X}$在 $\mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|}\setminus\{\mathbf{0}\}$上满足 *SRC*。换言之，对于每个序列 $\overrightarrow{X}^l \to \overrightarrow{X}^\infty \neq \mathbf{0}$，其中 $\overrightarrow{X}^l \geq \overrightarrow{X}^\infty$对每个 $l\in\mathbb{N}$均成立，

$$\lim_{l\to\infty} \overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}(\overrightarrow{X}^l) = \overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}\overrightarrow{X}^\infty.$$

证明。 请回想，在规划阶段，我们假设不存在流量容量约束，即 $\boldsymbol{f}^{(1)} = \infty$。运行边流量容量在公式（11）中定义为

$$\overline{f}_e^{(1)} = \max\{\tau f_e^{(0)}, \overline{f}_{\min}\}, \quad \text{where } \overline{f}_{\min} = \varepsilon_{\min}\sum_{v\in\mathcal{V}} \overrightarrow{X}_v.$$

我们首先证明，规划流量矩阵 $\boldsymbol{F}^{(0)} = \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}^{(0)}, \infty)$ 是尺度不变的。根据引理 8，我们有$\boldsymbol{S}^{(0)}(\omega\overrightarrow{X}) = \omega\boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X})$，因此，

$$\boldsymbol{U}^{(0)}(\omega\overrightarrow{X}) = \boldsymbol{T}^{(0)}(\omega\overrightarrow{X}) - \boldsymbol{S}^{(0)}(\omega\overrightarrow{X}) = \omega\boldsymbol{T}^{(0)}(\overrightarrow{X}) - \omega\boldsymbol{S}^{(0)}(\overrightarrow{X}) = \omega\boldsymbol{U}^{(0)}(\overrightarrow{X}).$$

此外，根据引理 6，我们得到

$$\boldsymbol{F}^{(0)}(\omega\vec{X}) = \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}^{(0)}(\omega\vec{X}),\infty) = \omega\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}^{(0)}(\vec{X}),\infty) = \omega\boldsymbol{F}^{(0)}(\vec{X}).$$

于是，总流量向量 $f_{(0)}(\cdot) = \boldsymbol{F}^{(0)}(\cdot)\mathbf{e}_{|\mathcal{K}|}$ 满足

$$f^{(0)}(\omega\vec{X}) = \boldsymbol{F}^{(0)}(\omega\vec{X})\mathbf{e}_{|\mathcal{K}|} = \omega\boldsymbol{F}^{(0)}(\vec{X})\mathbf{e}_{|\mathcal{K}|} = \omega f^{(0)}(\vec{X}).$$

因此，对于每条边 $e \in \mathrm{E}$，

$$\bar{f}_e^{(1)}(\omega\vec{X}) = \max\left\{\tau f_e^{(0)}(\omega\vec{X}), \omega\varepsilon_{\min}\sum_{v\in\mathcal{V}}\vec{X}_v\right\} = \omega\bar{f}_e^{(1)}(\vec{X}),$$

从而证明了尺度不变性。

为确立 SRC 性质，考虑某个序列 $(\vec{X}^l)_{l\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|}$，如该引理陈述中所引入，即满足 $\vec{X}^l \to \vec{X}^\infty \neq \mathbf{0}$ 以及 $\vec{X}^l \geq \vec{X}^\infty$ 对每个 $l \in \mathbb{N}$ 均逐分量成立。由于引理 9 适用于此类序列，因此 $\boldsymbol{S}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{T}^{(0)}$ 在 $\vec{X}$ 中均具有 SRC 性质，从而

$$\lim_{l\to\infty}\boldsymbol{U}^{(0)}(\vec{X}^l) = \lim_{l\to\infty}\left(\boldsymbol{T}^{(0)}(\vec{X}^l) - \boldsymbol{S}^{(0)}(\vec{X}^l)\right) = \boldsymbol{T}^{(0)}(\vec{X}^\infty) - \boldsymbol{S}^{(0)}(\vec{X}^\infty) = \boldsymbol{U}^{(0)}(\vec{X}^\infty). \tag{37}$$

此外，引理 7 推出 $\boldsymbol{F}^*$ 在 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 中均连续。因此，对于每条边 $\bar{e} \in \mathcal{E}$，

$$\begin{aligned}
\lim_{l\to\infty}\bar{f}_e^{(1)}(\vec{X}^l) &= \lim_{l\to\infty}\max\left\{\tau f_e^{(0)}(\vec{X}^l), \varepsilon_{\min}\sum_{v\in\mathcal{V}}\vec{X}_v^l\right\} && \textit{(Def. (11))}\\
&= \max\left\{\tau\lim_{l\to\infty}f_e^{(0)}(\vec{X}^l), \varepsilon_{\min}\lim_{l\to\infty}\sum_{v\in\mathcal{V}}\vec{X}_v^l\right\} && \textit{(Cont. of max operator)}\\
&= \max\left\{\tau\left[\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}^{(0)}(\vec{X}^\infty),\infty)\mathbf{e}_{|\mathcal{K}|}\right]_e, \varepsilon_{\min}\sum_{v\in\mathcal{V}}\vec{X}_v^\infty\right\} && \textit{(Def. (F), Lemma 7, (37))}\\
&= \bar{f}_e^{(1)}(\vec{X}^\infty). && \textit{(Def. (11))}
\end{aligned}$$

由于这对每条边 $e \in \mathrm{E}$ 都成立，我们得出 $\boldsymbol{f}_{(1)}(\vec{X}^l) \nrightarrow \boldsymbol{f}_{(1)}(\vec{X}^\infty)$，当 $l \to \infty$ 时，即 $\boldsymbol{f}_{(1)}$ 相对于 X 是 SRC，$\vec{\ }$。 □

接下来，我们证明运营源生产矩阵 $\boldsymbol{S}^{(1)}$ 会从其输入中继承尺度不变性。具体而言，我们证明，如果源生产矩阵和流量向量分别是通过求解各自的最小成本问题得到的，那么运营源生产矩阵会随顶点权重向量 $\vec{X}$ 线性缩放。

引理 11. 假设 $\boldsymbol{S}^*$ 和 $\boldsymbol{F}^*$ 分别由最小成本源生产函数和流函数给出。此外，假设不存在生产能力约束，即 $\boldsymbol{S} = \infty$。那么，运营源生产矩阵 $\boldsymbol{S}^{(1)}$ 是顶点权重向量 $\vec{X}$ 的尺度不变函数。

该引理的证明使用了与引理 8 的证明类似的论证。不过，还需要应用引理 6 和引理 10，以证明约束 (21d) 随 ω 的缩放方式与约束 (21b) 相同。

证明。 固定 $\omega > 0$，并考虑两个顶点权重向量 $\vec{X}$ 和 $\omega\vec{X}$。与规划阶段一样，相应的汇点需求矩阵为

$$\boldsymbol{T}^{(1)}(\vec{X}) = \mathrm{diag}(\vec{X})\cdot\boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{T}^{(1)}(\omega\vec{X}) = \mathrm{diag}(\omega\vec{X})\cdot\boldsymbol{Q} = \omega\cdot\boldsymbol{T}^{(1)}(\vec{X}).$$

我们希望证明

$$\boldsymbol{S}^{(1)}(\omega\vec{X}) = \omega\cdot\boldsymbol{S}^{(1)}(\vec{X}),$$

其中，$\boldsymbol{S}^{(1)}(\vec{X}) := \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{T}^{(1)}(\vec{X}), \infty, \boldsymbol{f}^{(1)}(\vec{X}), \lambda^{(1)})$ 定义为凸规划 (21) 的唯一极小化解，其中约束 (21b) 和 (21d) 处于激活状态，且 $\boldsymbol{S} = \infty$。 $\bar{\ }$

我们先考察约束如何随 ω变化。根据引理 10，运行流容量向量随 $\overrightarrow{X}$线性变化；也就是说，

$$\overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}(\omega\overrightarrow{X}) = \omega \cdot \overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}(\overrightarrow{X}).$$

因此，输入 $\omega\overrightarrow{X}$ 的流容量约束（21d）变为

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{F}^*(\omega\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X}) - \boldsymbol{S}, \omega\overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}(\overrightarrow{X}))\mathbf{e}_{|\mathcal{K}|}| &= |\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{T}^{(1)}(\omega\overrightarrow{X}) - \boldsymbol{S}, \overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}(\omega\overrightarrow{X}))\mathbf{e}_{|\mathcal{K}|}| \\ &\le \lambda^{(1)}\overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}(\omega\overrightarrow{X}) = \lambda^{(1)}\omega\overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}(\overrightarrow{X}).\end{aligned}$$

根据引理 6，最小成本流函数相对于其参数具有尺度不变性。因此，对于任意元组$(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{f})$，我们有：

$$\boldsymbol{F}^*(\omega(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}), \omega\overline{\boldsymbol{f}}) = \omega \cdot \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}, \overline{\boldsymbol{f}}).$$

现在考虑以下两个优化问题：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}) = \underset{\boldsymbol{S}\in\mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{K}|}}{\arg\min} & \sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{K}}\frac{1}{\gamma}c_{v,k}s_{v,k}^{\gamma} \\ \text{s.t.:}\quad & \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T\boldsymbol{S} = \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X}), \\ & |\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X}) - \boldsymbol{S}, \overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}(\overrightarrow{X}))\mathbf{e}_{|\mathcal{K}|}| \le \lambda^{(1)} \cdot \overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}(\overrightarrow{X}),\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^{(1)}(\omega\overrightarrow{X}) = \underset{\boldsymbol{S}\in\mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{K}|}}{\arg\min} & \sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{K}}\frac{1}{\gamma}c_{v,k}s_{v,k}^{\gamma} \\ \text{s.t.:}\quad & \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T\boldsymbol{S} = \omega \cdot \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X}), \\ & |\boldsymbol{F}^*(\omega(\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X}) - \boldsymbol{S}/\omega), \omega\overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}(\overrightarrow{X}))\mathbf{e}_{|\mathcal{K}|}| \le \lambda^{(1)} \cdot \omega \cdot \overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}(\overrightarrow{X}).\end{aligned} \tag{39}$$

˜现在对（39）进行变量代换：定义 $\tilde{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}/\omega$。目标函数变为

$$\sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{K}}\frac{1}{\gamma}c_{v,k}(\omega\tilde{s}_{v,k})^{\gamma} = \omega^{\gamma}\sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{K}}\frac{1}{\gamma}c_{v,k}\tilde{s}_{v,k}^{\gamma}.$$

约束也得到了简化：第一个变为 $\mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T\tilde{\boldsymbol{S}} = \mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X})$，而第二个利用 $\boldsymbol{F}^*$ 的尺度不变性以及 $\omega > 0$这一事实，化简为

$$|\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X}) - \tilde{\boldsymbol{S}}, \overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}(\overrightarrow{X}))\mathbf{e}_{|\mathcal{K}|}| \le \lambda^{(1)} \cdot \overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}(\overrightarrow{X}).$$

我们观察到，经过变量代换后，这两个优化问题仅在目标函数上相差一个常数乘法因子 ω^{γ}。这意味着 $\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X})$是（38）的最优解，当且仅当 $\omega\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X})$是（39）的最优解。因此，

$$\boldsymbol{S}^{(1)}(\omega\overrightarrow{X}) = \omega \cdot \boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}),$$

从而确立了 $\boldsymbol{S}^{(1)}$的尺度不变性。 □

以下结果表明，运行生产矩阵关于 $\overrightarrow{X}$ 是 SRC。证明思路与引理9的证明类似。

引理 12。 假设 $\boldsymbol{S}^*$ 和 $\boldsymbol{F}^*$ 分别由最小成本源生产和流给出。此外，假设不存在生产能力约束，即 $\boldsymbol{S} = \infty$，并且满足以下任一条件：

1. 流成本函数是二次函数，即由下式给出(18) 其中 $\beta = 2$；或 *2.* 不存在流容量约束，即 $\lambda^{(1)} = \infty$，且流成本函数由下式给出 (19)。

那么， $\boldsymbol{S}^{(1)}$ 是顶点权重向量 $\overrightarrow{X}$ 在 $\mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|}\setminus\{\mathbf{0}\}$上的 *SRC* 函数。特别地，对于任意收敛序列$(\overrightarrow{X}^l)_{l\in\mathbb{N}}$，其极限为 $\overrightarrow{X}^\infty\neq\mathbf{0}$，且满足对所有 l均有 $\overrightarrow{X}^l\geq\overrightarrow{X}^\infty$，我们有

$$\lim_{l\to\infty}\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^l)=\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^\infty).$$

证明。 首先我们注意到，在情形2下，该结果可由引理 9 立即得出，因为在无流量约束的假设下， $\boldsymbol{S}^{(1)}=\boldsymbol{S}^{(0)}$。因此，接下来只需证明情形 1下的引理。

回顾一下， $\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X})=\boldsymbol{S}^*\big(\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X}),\ \infty,\ \boldsymbol{f}_{(1)}(\overrightarrow{X}),\ \lambda^{(1)}\big)$。在假设流量成本为二次函数（$\beta=1$）的情况下，最优流关于 $\overrightarrow{X}$呈线性，因此优化问题（21）是凸的，且具有严格凸目标函数和线性约束。因此，对于每个 $\overrightarrow{X}\in\mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|}\setminus\{\mathbf{0}\}$ [53]，解 $\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X})$存在且唯一。

取一个序列 $(\overrightarrow{X}^l)_{l\in\mathbb{N}}$收敛至 $\overrightarrow{X}^\infty$，且 $\overrightarrow{X}^l\geq\overrightarrow{X}^\infty$对所有 l均成立。类似于引理 9中的证明，总需求有界意味着 $\big(\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^l)\big)_{l\in\mathbb{N}}$属于 $\mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|\times|\mathcal{K}|}$的一个紧子集。

接下来，我们构造一个可行的源生产矩阵序列，使其收敛至 $\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^\infty)$。为此，对于每条边 $e\in\mathrm{E}$，考虑 $\overrightarrow{X}^l$与 $\overrightarrow{X}^\infty$的运行流量容量之比。令 ν_l 为这些比值中的最小值，并将其上限设为 1，即

$$\nu_l:=\min\left\{\min_{e\in\mathcal{E}}\frac{\overline{f}_e^{(1)}(\overrightarrow{X}^l)}{\overline{f}_e^{(1)}(\overrightarrow{X}^\infty)},\,1\right\},$$

并定义

$$\widehat{\boldsymbol{S}}^l:=\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X}^l)-\nu_l\cdot\Big(\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X}^\infty)-\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^\infty)\Big).$$

首先，我们验证 $\widehat{\boldsymbol{S}}^l$对于以 $(\boldsymbol{T}_{(1)}(\overrightarrow{X}^l),\ \infty,\ \boldsymbol{f}_{(1)}(\overrightarrow{X}^l),\ \lambda^{(1)})$ 为输入的优化问题（21）的可行性。

生产平衡：对于输入为 $\overrightarrow{X}^l$ 的优化问题，由于 $\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^l)$，取极限 $l\to\infty$ 后可知，$\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^\infty)$ 对应输入为 $\overrightarrow{X}^\infty$ 的问题是可行的。利用这一点，我们计算得：

$$\mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T\widehat{\boldsymbol{S}}^l=\mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X}^l)-\nu_l\cdot\underbrace{\mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T\Big(\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X}^\infty)-\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^\infty)\Big)}_{=0}=\mathbf{e}_{|\mathcal{V}|}^T\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X}^l),$$

因此，约束（21b）得以满足。

流量容量：首先注意，假设的流成本函数不依赖于 $\boldsymbol{f}$；尽管如此，为完整起见，我们在记号中保留 $\boldsymbol{F}^*$ 和 f_e^* 的两个参数。利用引理 $\boldsymbol{F}^*$ 给出的尺度不变性（引理 6），可得：

$$\boldsymbol{F}^*\Big(\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X}^l)-\widehat{\boldsymbol{S}}^l,\overline{\boldsymbol{f}}(\overrightarrow{X}^l)\Big)=\nu_l\cdot\boldsymbol{F}^*\Big(\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X}^\infty)-\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^\infty),\overline{\boldsymbol{f}}(\overrightarrow{X}^l)\Big).$$

因此，对于每条边 $e\in\mathrm{E}$，均有

$$\Big|f_e^*\Big(\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X}^l)-\widehat{\boldsymbol{S}}^l,\overline{\boldsymbol{f}}(\overrightarrow{X}^l)\Big)\Big|=\nu_l\cdot\Big|f_e^{(1)}(\overrightarrow{X}^\infty)\Big|\leq\lambda^{(1)}\cdot\overline{f}_e^{(1)}(\overrightarrow{X}^l),$$

其中，不等式根据定义由 $\nu_l\leq1$ 得出，并且由 $\boldsymbol{S}^{(1)}$ $(\overrightarrow{X}^\infty)$ 的可行性保证；这确保流量容量约束（21d）成立。因此，当源生产给定为 $\widehat{\boldsymbol{S}}^l$ 时，约束（21d）也得以满足。

非负性：利用 $\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X})=\mathrm{diag}(\overrightarrow{X})\boldsymbol{Q}$，我们得到：

$$\widehat{\boldsymbol{S}}^l=\Big(\mathrm{diag}(\overrightarrow{X}^l)-\nu_l\cdot\mathrm{diag}(\overrightarrow{X}^\infty)\Big)\boldsymbol{Q}+\nu_l\cdot\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^\infty).$$

由于 $\overrightarrow{X}^l\geq\overrightarrow{X}^\infty$和 $\nu_l\leq1$，两个加项均为非负，从而确保 $\widehat{\boldsymbol{S}}^l\geq0$。

综上，我们得到 $\widehat{\boldsymbol{S}}^l$是定义 $\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^l)$的问题的可行解。此外，根据引理 10， $\nu_l\to1$ 当$l\to\infty$时，因此

$$\lim_{l\to\infty}\widehat{\boldsymbol{S}}^l=\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^\infty).$$

最后，令 $\left(\boldsymbol{S}^{l_m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ 为 $\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^{l})$ 的任意收敛子序列。由于 $\boldsymbol{S}^{l_m}$ 是输入 $\overrightarrow{X}^{l_m}$ 的最优解，且 $\widehat{\boldsymbol{S}}^{l_m}$ 对同一问题可行，因此我们得到

$$\sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{K}}\frac{1}{\gamma}c_{v,k}\left(s_{v,k}^{l_m}\right)^{\gamma}\leq\sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{K}}\frac{1}{\gamma}c_{v,k}\left(\hat{s}_{v,k}^{l_m}\right)^{\gamma}.$$

从两边取极限 $m\to\infty$，得到

$$c_s\left(\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{S}^{l_m}\right)\leq c_s\left(\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^{\infty})\right),$$

其中 c_s 表示目标函数。由目标函数的严格凸性以及最优解的唯一性，我们得出 $\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{S}^{l_m}=\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^{\infty})$。由于每个收敛子序列都有相同的极限，且该序列包含于一个紧集，因此整个序列收敛，即

$$\lim_{l\to\infty}\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^{l})=\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X}^{\infty}),$$

如上所述。 □

B.4 应急阶段的尺度不变性与 SRC

本章节的结果表明，流、流容量、源生产和汇点需求关于 $\overrightarrow{X}$ 的尺度不变性和 SRC 性质在级联过程中得以保留。以下两个引理将证明，对于给定的级联序列 C，这些性质对所有缩放 ω 均成立。这些结果通过归纳论证证明，其中归纳基础由引理 6–12给出。

我们强调，应急阶段中的所有函数都是随机变量，每个函数都完全由顶点权重 $\overrightarrow{X}$ 和级联序列 C 确定。在接下来的证明中，对于任意随机变量 A，我们用简写记号 $A(\overrightarrow{X},\ c)$ 表示在给定 $\overrightarrow{X}$ 和事件 $C=c$ 的条件下的随机变量 A。

引理 13。 假设 $\boldsymbol{S}^{*}$ 和 $\boldsymbol{F}^{*}$ 分别由最小成本源生产和流给出，并且不存在生产能力约束，即 $\boldsymbol{S}=\infty$。设 $c\in C$ 为一个固定的级联序列。那么，对于级联的每个阶段 t，在以级联 $C=c$ 为条件时，流矩阵 $\boldsymbol{F}^{(t)}$、流容量向量 $\boldsymbol{f}_{(t)}$、源生产矩阵 $\boldsymbol{S}^{(t)}$ 和汇点需求矩阵 $\boldsymbol{T}^{(t)}$ 都是顶点权重向量 $\overrightarrow{X}$ 的尺度不变函数。

证明。 我们通过对级联阶段 t 进行归纳来证明该结果。

基础情形$(t=1)$**：**

1. 根据引理10，流容量向量 $\boldsymbol{f}_{(1)}$ 相对于 $\overrightarrow{X}$ 是尺度不变的。

2. 汇点需求矩阵为 $\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X})=\mathrm{diag}(\overrightarrow{X})\cdot\boldsymbol{Q}$。根据线性，该函数相对于 $\overrightarrow{X}$ 是尺度不变的。

3. 根据引理11，源生产矩阵 $\boldsymbol{S}^{(1)}$ 相对于 $\overrightarrow{X}$ 是尺度不变的。

4. 由于 $\boldsymbol{T}_{(1)}$ 和 $\boldsymbol{S}^{(1)}$ 都是尺度不变的，因此净投入 $\boldsymbol{U}^{(1)}=\boldsymbol{T}^{(1)}-\boldsymbol{S}^{(1)}$ 是尺度不变的。于是，根据引理6，流矩阵 $\boldsymbol{F}^{(1)}(\overrightarrow{X})=\boldsymbol{F}^{*}(\boldsymbol{U}^{(1)}(\overrightarrow{X}),\boldsymbol{f}_{(1)}(\overrightarrow{X}))$ 相对于 $\overrightarrow{X}$ 是尺度不变的。

归纳步骤： 假设尺度不变性在阶段 t 成立。我们证明，对于四个函数中的每一个，它在阶段 $t+1$ 也成立。

流容量向量。 根据方程（13），对于每个 $e\in\mathcal{E}$:

- If $e\notin c^{(t)}$, then $\overline{f}_e^{(t+1)}(\omega\overrightarrow{X},c)=\overline{f}_e^{(t)}(\omega\overrightarrow{X},c)=\omega\overline{f}_e^{(t)}(\overrightarrow{X},c)=\omega\overline{f}_e^{(t+1)}(\overrightarrow{X},c)$.

- 如果 $e\in c(t)$ 和 e 完全失效，即 $e\in c(t)_R$，那么对于所有 ω，$f_{(t+1)e}(\omega\overrightarrow{X},c)=0$，因此 $f_{(t+1)e}(\omega\overrightarrow{X},c)=\omega f_{(t+1)e}(\overrightarrow{X},c)=0$。否则，也就是说，如果 e 部分失效，那么根据 $\boldsymbol{F}(t)$ 和 $\boldsymbol{f}(t)$ 的尺度不变性，由 —

公式（12）可得

$$\phi_e^{(t)}(\omega\overrightarrow{X},c)=\frac{\left|\left(\boldsymbol{F}^{(t)}(\omega\overrightarrow{X},c)\mathbf{e}_{|\mathcal{K}|}\right)_e\right|}{\overline{f}_e^{(t)}(\omega\overrightarrow{X},c)}=\frac{\omega\left|\left(\boldsymbol{F}^{(t)}(\overrightarrow{X},c)\mathbf{e}_{|\mathcal{K}|}\right)_e\right|}{\omega\overline{f}_e^{(t)}(\overrightarrow{X},c)}=\phi_e^{(t)}(\overrightarrow{X},c). \tag{40}$$

因此，

$$\overline{f}_e^{(t+1)}(\omega\overrightarrow{X},c)=\omega\cdot\psi_e^{(t)}\left(\phi_e^{(t)}(\overrightarrow{X},c)\right)\cdot\overline{f}_e^{(t)}(\overrightarrow{X},c)=\omega\overline{f}_e^{(t+1)}(\overrightarrow{X},c).$$

汇点矩阵和源点矩阵。 如果图在 $t+1$ 处不是非连通的，那么这些矩阵保持不变，并且$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$保持尺度不变。否则，对于每个连通分量 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ 和 $k\in\mathcal{K}$，利用方程（14）以及时刻 t处的尺度不变性：

$$\eta_k^{(t)}(\widetilde{\mathcal{V}},\omega\overrightarrow{X},c)=\frac{\sum_{v\in\widetilde{V}}t_{v,k}^{(t)}(\omega\overrightarrow{X},c)}{\sum_{v\in\widetilde{V}}s_{v,k}^{(t)}(\omega\overrightarrow{X},c)}=\frac{\omega\sum_{v\in\widetilde{V}}t_{v,k}^{(t)}(\overrightarrow{X},c)}{\omega\sum_{v\in\widetilde{V}}s_{v,k}^{(t)}(\overrightarrow{X},c)}=\eta_k^{(t)}(\widetilde{\mathcal{V}},\overrightarrow{X},c).$$

因此，由（14）以及 $\boldsymbol{T}^{(t)}$和 $\boldsymbol{S}^{(t)}$的尺度不变性可知， $\boldsymbol{T}^{(t+1)}$和 $\boldsymbol{S}^{(t+1)}$相对于 X也具有尺度不变性。

流矩阵。 根据引理 6， $\boldsymbol{U}^{(t+1)}=\boldsymbol{T}^{(t+1)}-\boldsymbol{S}^{(t+1)}$和 $\boldsymbol{f}^{(t+1)}$ 的尺度不变性意味着 $\boldsymbol{F}^{(t+1)}$相对于 $\overrightarrow{X}$具有尺度不变性。

至此，归纳步骤和证明完成。 □

下一个引理表明，在特定级联 $C=c$发生的条件下，相应的 SRC 性质成立。

引理 14. 假设 $\boldsymbol{S}^*$ 和 $\boldsymbol{F}^*$ 分别由最小成本源生产函数和流函数给出。进一步假设不存在生产能力约束，即 $\boldsymbol{S}=\infty$，且满足以下任一条件：

(i) 流成本函数是二次的，如(18)中所定义，且 $\beta=2$，或

(ii) 流量成本由(19) 给出，且不存在流容量约束，即 $\lambda^{(1)}=\infty$。

设 $c\in C$为固定的级联序列。那么，对于每个时间步 $t\in\mathbb{N}$，在级联 $C=c$ 发生的条件下，流 $\boldsymbol{F}^{(t)}$、流量容量向量 $\boldsymbol{f}^{(t)}$、流超额向量 $\boldsymbol{\phi}^{(t)}$、源生产矩阵 $\boldsymbol{S}^{(t)}$和汇点需求矩阵 $\boldsymbol{T}^{(t)}$都是顶点权重向量 $\overrightarrow{X}$在 $\mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|}\setminus\{\mathbf{0}\}$上的 *SRC* 函数。

证明。 我们对级联阶段 $t\in\mathbb{N}$进行归纳。

基础情形（$t=1$）。在运行阶段，级联尚未开始，因此这些函数与具体的级联序列 $C=c$ 无关。根据引理 7、10 和 12，我们得出： $\boldsymbol{F}^{(1)}(\overrightarrow{X},c)$、 $\boldsymbol{f}^{(1)}(\overrightarrow{X},c)$、 $\boldsymbol{S}^{(1)}(\overrightarrow{X},c)$ 和$\boldsymbol{T}^{(1)}(\overrightarrow{X},c)$ 都是定义在 $\overrightarrow{X}$ 上的 SRC 函数（$\mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|}\setminus\{0\}$）。此外，由于在 (12) 中定义的 $\boldsymbol{\phi}^{(1)}(\overrightarrow{X},c)$ 是 $\boldsymbol{F}^{(1)}(\overrightarrow{X},c)$ 和 $\boldsymbol{f}^{(1)}(\overrightarrow{X},c)$ 的连续函数，因此 $\boldsymbol{\phi}^{(1)}(\overrightarrow{X},c)$ 相对于 $\overrightarrow{X}$ 也是 SRC。

归纳步骤。 假设对于某个 $t\in\mathbb{N}$，五个函数 $\boldsymbol{F}^{(t)}(\overrightarrow{X},c)$、 $\boldsymbol{f}^{(t)}(\overrightarrow{X},c)$、 $\boldsymbol{\phi}^{(t)}(\overrightarrow{X},c)$、 $\boldsymbol{S}^{(t)}(\overrightarrow{X},c)$ 和$\boldsymbol{T}^{(t)}(\overrightarrow{X},c)$ 都是 SRC。我们证明，在阶段 $t+1$ 这一结论仍然成立。

流量容量。设 $(\overrightarrow{X}^l)_{l\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|}$是一个序列，使得 $\overrightarrow{X}^l\geq\overrightarrow{X}^\infty$对所有 l和 $\overrightarrow{X}^l\to\overrightarrow{X}^\infty\neq\mathbf{0}$均成立，并将故障集合划分为部分故障和完全失效 $c^{(t)}=c_P^{(t)}\cup c_R^{(t)}$。如果一条边 e 在步骤 $t+1$中未发生故障，即 $e\notin c^{(t)}$，则 $f_{(t+1)\,e}(\overrightarrow{X}^l,c)=f_{(t)\,e}(\overrightarrow{X}^l,c)$，SRC 性质可由归纳法得到。如果 e 完全失效，即 $e\in c_R^{(t)}$，则$f_{(t+1)\,e}(\overrightarrow{X},c)=0$对任意 $\overrightarrow{X}$均成立，因此相对于 $\overrightarrow{X}$它也具有 SRC 性质。最后，如果 e 发生部分故障，即 $e\in c_P^{(t)}$，则利用更新规则（13），我们有

$$\overline{f}_e^{(t+1)}(\overrightarrow{X}^l,c)=\psi_e^{(t)}\left(\phi_e^{(t)}(\overrightarrow{X}^l,c)\right)\cdot\overline{f}_e^{(t)}(\overrightarrow{X}^l,c).$$

两次应用归纳假设以及 $\psi_e^{(t)}$的连续性，

$$\begin{aligned}\lim_{l\to\infty}\overline{f}_e^{(t+1)}(\overrightarrow{X}^l,c) &= \lim_{l\to\infty}\left(\psi_e^{(t)}\left(\phi_e^{(t)}(\overrightarrow{X}^l,c)\right)\cdot\overline{f}_e^{(t)}(\overrightarrow{X}^l,c)\right)\\ &= \psi_e^{(t)}\left(\lim_{l\to\infty}\phi_e^{(t)}(\overrightarrow{X}^l,c)\right)\cdot\lim_{l\to\infty}\overline{f}_e^{(t)}(\overrightarrow{X}^l,c)\\ &\overset{ind.\,hyp.}{=} \psi_e^{(t)}\left(\frac{\lim_{l\to\infty}f_e^{(t)}(\overrightarrow{X}^l,c)}{\lim_{l\to\infty}\overline{f}_e^{(t)}(\overrightarrow{X}^l,c)}\right)\cdot\overline{f}_e^{(t)}(\overrightarrow{X}^\infty,c)\\ &\overset{ind.\,hyp.}{=} \psi_e^{(t)}\left(\phi_e^{(t)}(\overrightarrow{X}^\infty,c)\right)\cdot\overline{f}_e^{(t)}(\overrightarrow{X}^\infty,c)\\ &= \overline{f}_e^{(t+1)}(\overrightarrow{X}^\infty,c).\end{aligned}$$

因此，$\overline{\boldsymbol{f}}^{(t+1)}$是 SRC。

汇点需求和源生产。由（14），$\boldsymbol{T}^{(t+1)}$和 $\boldsymbol{S}^{(t+1)}$的更新是前一阶段值 $\boldsymbol{T}_{(t)}$ 和 $\boldsymbol{S}^{(t)}$的连续函数；相对于 $\overrightarrow{X}$，它们是 SRC。由于连续性保持 SRC，因此函数 $\boldsymbol{T}^{(t+1)}$和 $\boldsymbol{S}^{(t+1)}$相对于 $\overrightarrow{X}$是 SRC。

流矩阵。我们有

$$\boldsymbol{F}^{(t+1)}(\overrightarrow{X},c) = \boldsymbol{F}^*\left(\boldsymbol{U}^{(t+1)}(\overrightarrow{X},c),\overline{\boldsymbol{f}}^{(t+1)}(\overrightarrow{X},c)\right),$$

其中 $\boldsymbol{U}^{(t+1)} = \boldsymbol{T}_{(t+1)} - \boldsymbol{S}^{(t+1)}$。根据引理 7，流量映射 $\boldsymbol{F}^*$关于两个参数都是连续的。由于输入是 SRC，产出也同样是 SRC。

超越量。考虑任意边 $e \in \mathrm{E}$，该边在此前或当前的任何阶段都未完全失效。于是，e在图中仍然存在，并且其容量在每个阶段都严格为正。特别地，由于每次部分失效都会将容量乘以 $[l_e,1]$中的一个因子，因此存在 $\varepsilon_e > 0$（例如，$\varepsilon_e := (l_e)^{t+1} f(1)_e$），使得 $f(t+1)_e(\overrightarrow{X}^l,c) \geq \varepsilon_e$。这意味着 $f(t+1)_e(\overrightarrow{X}^\infty,c) \geq \varepsilon > 0$。因此，超越量 $\phi_e^{(t+1)}(\overrightarrow{X}^l,c)$和 $\phi_e^{(t+1)}(\overrightarrow{X}^\infty,c)$均定义良好。由此，$\boldsymbol{\phi}^{(t+1)}(\overrightarrow{X},c)$是 SRC；这再次由 $\boldsymbol{\phi}^{(t+1)}$关于 $\boldsymbol{F}^{(t+1)}$和 $\boldsymbol{f}_{(t+1)}$的连续性，以及流矩阵 $\boldsymbol{F}^{(t+1)}(\overrightarrow{X},c)$和流容量向量 $\boldsymbol{f}_{(t+1)}(\overrightarrow{X},c)$的 SRC 性质得出。

至此，归纳证明完成，结论得证。 □

B.5 级联的概率性质

截至目前，我们已证明，在模型的每个阶段，所有关注的函数——即流矩阵、流容量向量、源生产矩阵和汇点需求矩阵——相对于 $\overrightarrow{X}$ 均为 SRC 且具有尺度不变性。现在，我们来验证在命题 2 和假设 1 的设定下，假设 3 和 4中的陈述 2 是否成立。具体而言，下面的结果表明，给定顶点权重向量 $\overrightarrow{X}$，观察到特定级联 $C = c$ 的概率关于 $\overrightarrow{X}$ 是 SRC，且不依赖其尺度 $\omega > 0$。以下引理将对此作出形式化表述。

引理 15。假设 $\boldsymbol{S}^*$ 和 $\boldsymbol{F}^*$ 分别由最小成本源生产函数和流量函数给出。进一步假设不存在生产能力约束，即 $\boldsymbol{S} = \infty$，并且满足以下任一条件：

(i) 流成本函数为二次函数，如(18)中所定义的，且 $\beta = 2$；或

(ii) 流量成本由(19) 给出，且不存在流容量约束，即 $\lambda^{(1)} = \infty$。

考虑任意级联序列 $c \in C$。给定顶点权重向量 $\omega\overrightarrow{X}$时，尺度 $\omega > 0$ 不会影响级联 c发生的概率。特别地，

$$\mathbb{P}\left(C = c \mid \omega\overrightarrow{X}\right) = \mathbb{P}\left(C = c \mid \overrightarrow{X}\right)\ \forall\,\omega > 0.$$

此外，给定 $\overrightarrow{X}$时，级联 $C = c$ 发生的概率关于 $\overrightarrow{X}$是一个 *SRC* 函数。

证明。设 $\omega > 0$。考虑一个特定的级联 $c = (c^{(1)}、\ldots\ldots、c^{(t_c)})$，其中 $t_c := |c|$。回顾一下，$c^{(t)} = c_P^{(t)} \cup c_R^{(t)}$表示在时间步 $t \in \{1、\ldots\ldots、t_c\}$ 已失效的边的集合，其中 $c_P^{(t)}$和 $c_R^{(t)}$分别表示部分失效和

完全失效的集合。为了通过归纳证明特定级联的概率与缩放因子 ω 无关，只需证明以下断言：在给定固定的边失效历史的条件下，在阶段 t，任意边 $e \in \mathrm{E}$ 部分失效或完全失效的概率，在对顶点权重向量进行任意正比例缩放后保持不变。更准确地说，对于所有 $t \in \{2、\ldots\ldots、 t_c\}$、任意失效历史 $\{C_{(1)}= c^{(1)}、\ldots\ldots、 C_{(t-1)} = c^{(t-1)}\}$ 以及任意缩放因子 $\omega > 0$，有

$$\mathbb{P}\left(e \text{ fails partially at stage } t \mid \omega\overrightarrow{X}, C^{(1)} = c^{(1)}, \ldots, C^{(t-1)} = c^{(t-1)})\right) = \mathbb{P}\left(e \text{ fails partially at stage } t \mid \overrightarrow{X}, C^{(1)} = c^{(1)}, \ldots, C^{(t-1)} = c^{(t-1)})\right) \quad (41)$$

$$\mathbb{P}\left(e \text{ fails completely at stage } t \mid \omega\overrightarrow{X}, C^{(1)} = c^{(1)}, \ldots, C^{(t-1)} = c^{(t-1)})\right) = \mathbb{P}\left(e \text{ fails completely at stage } t \mid \overrightarrow{X}, C^{(1)} = c^{(1)}, \ldots, C^{(t-1)} = c^{(t-1)})\right) \quad (42)$$

在我们的框架中，边失效由超越概率决定：尚未失效达到其最大次数的边 e，可能以概率 $p_{e,\ c}(\phi_e^{(t)}) + p_{e,\ r}(\phi_e^{(t)})$ 独立失效，其中 $\phi_e^{(t)}$表示边 e 在阶段 t经历的超越量。令 $\nu_e^{(t)}(c)$ 表示在级联 c下，边 e 在时间 t 之前失效（部分或完全）的次数。因此，条件部分失效概率可表示为

$$\mathbb{P}\left(e \text{ fails partially at stage } t \mid \omega\overrightarrow{X}, C^{(1)} = c^{(1)}, \ldots, C^{(t-1)} = c^{(t-1)})\right) = p_{e,c}\left(\phi_e^{(t)}(\omega\overrightarrow{X}, c^{(1)}, \ldots, c^{(t-1)})\right) \cdot \mathbb{1}\{\nu_e^{(t)} \neq n_e\}.$$

回顾引理 13 的证明可知，超越向量 $\boldsymbol{\phi}^{(r)}$ 在对 $\overrightarrow{X}$ 进行缩放 ω 时保持不变，见（40）。也就是说，

$$\boldsymbol{\phi}^{(r)}(\omega\overrightarrow{X}, c^{(1)}, \ldots, c^{(r-1)}) = \boldsymbol{\phi}^{(r)}(\overrightarrow{X}, c^{(1)}, \ldots, c^{(t-1)}).$$

因此，立即可得等式（41）成立。采用类似的方法，可以证明等式（42）也成立。

最后请注意，初始边故障是根据概率律 $p^{(1)}(\cdot)$ 随机选取的，且与 ω相互独立。因此，整个失效序列在对 $\overrightarrow{X}$ 进行正比例缩放后，其分布保持不变；对级联的所有阶段归纳应用（41）和（42）中的等式即可得出结论。

还需证明 $\mathbb{P}\left(C = c \mid \overrightarrow{X}\right)$ 是 SRC。注意到 $p_{e,c}(\cdot)$ 和 $p_{e,r}(\cdot)$ 根据假设均为连续函数（参见章节 2.3.2中的步骤 4），由引理 14 可知 $\phi_e^{(t)}(\overrightarrow{X}, c)$ 相对于 $\overrightarrow{X}$对所有 $t \in \mathbb{N}$ 和所有 $e \in \mathcal{E}$均为 SRC。因此，由于 $\mathbb{P}\left(C = c \mid \overrightarrow{X}\right)$ 是 SRC 函数的乘积，它本身也是关于 $\overrightarrow{X}$的 SRC 函数。 □

C 命题 3 和 4的证明

在章节B中确立了所有辅助结果后，只需验证假设 1和 4的条件，即可得出命题 1。这些条件依赖于级联成本函数的尺度不变性、SRC 性质和有界性，以及级联概率的 SRC 性质和不变行为。

首先，我们通过依次应用迄今推导出的结果来证明命题 3 。

命题 *3*的证明。 考虑 $\boldsymbol{F}^*$、 $\boldsymbol{S}^*$、 $\boldsymbol{S}$和 Z，它们如命题中的陈述 1–4 所述。为了证明假设 1 成立，我们首先需要证明，在发生级联 $C = c$ 的情况下， Z 是 ρ-尺度不变的，且相对于 $\overrightarrow{X}$满足 SRC。回顾一下， Z 是广义级联规模，定义见式（24），即:

$$Z = \sum_{v \in \mathcal{V}} \sum_{k \in \mathcal{K}} w_{v,k} \left(t_{v,k}^{(1)} - t_{v,k}^{(end)}\right)^{\rho}.$$

考虑一个固定的级联 $c \in C$。根据引理 13，我们知道汇点需求矩阵在级联的每个阶段都是尺度不变的。因此，我们发现，对于任意 $\omega > 0$

$$Z(\omega\overrightarrow{X}, c) = \sum_{v \in \mathcal{V}} \sum_{k \in \mathcal{K}} w_{v,k} \left(t_{v,k}^{(1)}(\omega\overrightarrow{X}, c) - t_{v,k}^{|c|}(\omega\overrightarrow{X}, c)\right)^{\rho} = \omega^{\rho} Z(\overrightarrow{X}, c).$$

因此，确实， Z 是 ρ-尺度不变的。

为证明 Z的 SRC 性质，我们首先注意到 Z是 $\boldsymbol{T}^{(1)}$的连续函数，且 $\boldsymbol{T}^{(end)}$。此外，根据引理 14，汇点需求矩阵 $\boldsymbol{T}^{(1)}(\vec{X}, c)$和 $\boldsymbol{T}^{(end)}(\vec{X}, c)$相对于 $\vec{X}$均具有 SRC 性质。由于连续性保留 SRC 性质，我们得出结论： Z 也是 $\vec{X}$的 SRC 函数，其中级联固定不变 $C = c$。

接下来需要证明 Z是适当有界的。对于给定 $\vec{X}$的条件级联成本 Z，记为 $Z(\vec{X})$，我们得到

$$Z(\vec{X}) \le \sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{K}} w_{v,k}\left(t^{(1)}_{v,k}(\vec{X})\right)^{\rho} = \sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{K}} w_{v,k}q^{\rho}_{v,k}\vec{X}^{\rho}_{v} \le |\mathcal{K}| \max_{v\in\mathcal{V},k\in\mathcal{K}} w_{v,k}q^{\rho}_{v,k}\sum_{v\in\mathcal{V}}\vec{X}^{\rho}_{v}.$$

因此，令 $m_Z = \max_{v\in\mathcal{V},\ k\in\mathcal{K}} w_{v,\ k}q^{\rho}_{v,\ k}$，我们得到

$$Z(\vec{X}) \le m_Z \cdot \sum_{v\in\mathcal{V}}\vec{X}^{\rho}_{v}.$$

这证明了假设1 中的陈述1 成立。此外，根据引理2 中的陈述也成立，这要归功于引理15，至此证明完成。□

我们采用类似的证明方法来证明命题4。然而，与前一种情况不同，这一结果也允许Z 由级联流成本函数给出。因此，我们还必须确立该成本函数的其他性质。

命题*4*的证明。考虑命题步骤 1–4 中描述的函数 $\boldsymbol{F}^{*}$、$\bar{\boldsymbol{S}}^{*}$、$\boldsymbol{S}$ 和 Z。如果 Z 是广义级联成本，如式（24）所示，那么证明与命题 3 的证明类似，因此这里省略这部分证明，只关注式（25）中定义的级联流成本。首先，我们证明 1-尺度不变性。引理 13 表明，对于每个级联阶段， $\boldsymbol{F}^{(t)}(\omega\vec{X}, c) = \omega\boldsymbol{F}^{(t)}(\vec{X}, c)$ 且 $\boldsymbol{f}^{(t)}(\omega\vec{X}, c) = \omega\boldsymbol{f}^{(t)}(\vec{X}, c)$ t。因此，

$$\begin{aligned}
Z(\omega\vec{X}, c) &= \sum_{e\in\mathcal{E}}\left(d_e|f^{(end)}_e(\omega\vec{X}, c)| + \frac{1}{\beta}b_e\bar{f}_e(\omega\vec{X}, c)^{(end)}\left(\phi^{(end)}_e(\omega\vec{X}, c)\right)^{\beta}\right)\\
&\quad - \sum_{e\in\mathcal{E}}\left(d_e|f^{(1)}_e(\omega\vec{X}, c)| + \frac{1}{\beta}b_e\bar{f}_e(\omega\vec{X}, c)^{(1)}\left(\phi^{(1)}_e(\omega\vec{X}, c)\right)^{\beta}\right)\\
&= \sum_{e\in\mathcal{E}}\left(d_e\omega|f^{(end)}_e(\vec{X}, c)| + \frac{1}{\beta}b_e\omega\bar{f}_e(\vec{X}, c)^{(end)}\left(\phi^{(end)}_e(\vec{X}, c)\right)^{\beta}\right)\\
&\quad - \sum_{e\in\mathcal{E}}\left(d_e\omega|f^{(1)}_e(\vec{X}, c)| + \frac{1}{\beta}b_e\omega\bar{f}_e(\vec{X}, c)^{(1)}\left(\phi^{(1)}_e(\vec{X}, c)\right)^{\beta}\right) = \omega Z(\vec{X}, c),
\end{aligned}$$

这表明级联流成本具有 1-尺度不变性。

Z 的 SRC 性质可由引理 14 得出。具体而言，该引理表明，给定级联 $C = c$ 发生时，对于每个级联阶段 t，函数 $\boldsymbol{F}^{(t)}$、$\bar{\boldsymbol{f}}^{(t)}$ 和 $\boldsymbol{\phi}^{(t)}$ 关于 $\vec{X}$ 均具有 SRC 性质。我们注意到， Z 关于上述函数是连续的。由于连续性保持 SRC 性质，因此在级联 $C = c$ 发生时，可得 $Z(\vec{X},\ c)$ 关于 $\vec{X}$ 具有 SRC 性质。

剩下需要证明 Z 是有界的。我们利用这样一个事实：对于每种商品 $k \in$ K，在任意给定时刻，该商品在边 $e \in$ E 上的流量不超过该商品的总需求。特别地，

$$|f_{e,k}| \le \sum_{v\in\mathcal{V}} q_{v,k}\vec{X}_v.$$

因此，

$$|f_e| \le \sum_{k\in\mathcal{K}}\sum_{v\in\mathcal{V}} q_{v,k}\vec{X}_v \le \max_{v\in\mathcal{V},k\in\mathcal{K}}\{q_{v,k}\}\sum_{v\in\mathcal{V}}\vec{X}_v.$$

接下来，我们对级联阶段 r的流量容量进行界定。回顾一下，完全失效的边会从图中移除。因此，仍然存在的边 e 的容量最多降低了 $l^{r}_{\min}$倍。此外，

运行流量容量的下界为$\varepsilon_{\min}\sum_{v\in\mathcal{V}}\overrightarrow{X}_v$，上界为$f_{(0)e}$。因此，

$$l^r_{\min}\varepsilon_{\min}\sum_{v\in\mathcal{V}}\overrightarrow{X}_v \le \overline{f}_e^{(l)} \le \max\left\{\tau|f_e^{(0)}|, \varepsilon_{\min}\sum_{v\in\mathcal{V}}\overrightarrow{X}_v\right\} \le \max\{\varepsilon_{\min}, \tau\max_{v\in\mathcal{V},k\in\mathcal{K}}\{q_{v,k}\}\}\sum_{v\in\mathcal{V}}\overrightarrow{X}_v.$$

令 $\kappa = \max\{\varepsilon_{\min}, \tau\max_{v\in\mathcal{V},\,k\in\mathcal{K}}\{q_{v,\,k}\}\}$。注意，每个级联至多包含 $r^* = \sum_{e\in\mathcal{E}} n_e$ 步。利用这一点并应用上述界，我们可以得到，级联结束时的流量成本具有如下上界

$$c_f(\boldsymbol{F}^{(end)}, \overline{\boldsymbol{f}}^{(end)}) \le \sum_{e\in\mathcal{E}_{b_e}}\left(d_e\kappa\sum_{v\in\mathcal{V}}\overrightarrow{X}_v + \frac{1}{\beta}b_e\kappa\sum_{v\in\mathcal{V}}\overrightarrow{X}_v\left(\max_{v\in\mathcal{V},k\in\mathcal{K}}\{q_{v,k}\}/l^{r^*}_{\min}\right)^{\beta}\right) \le m_Z\sum_{v\in\mathcal{V}}\overrightarrow{X}_v,$$

其中 $m_Z = |\mathrm{E}|\cdot\kappa\cdot\max_{e\in\mathcal{E}}\left\{d_e + \frac{b_e}{\beta}\left(\max_{v\in\mathcal{V},\,k\in\mathcal{K}}\{q_{v,\,k}\}/l^{r^*\text{最小值}}\right)^{\beta}\right\}$。最后，由于流量成本非负，我们得到

$$Z = c_f(\boldsymbol{F}^{(end)}, \overline{\boldsymbol{f}}^{(end)}) - c_f(\boldsymbol{F}^{(1)}, \overline{\boldsymbol{f}}^{(1)}) \le c_f(\boldsymbol{F}^{(end)}, \overline{\boldsymbol{f}}^{(end)}) \le m_Z\sum_{v\in\mathcal{V}}\overrightarrow{X}_v.$$

因此，我们得出结论：假设 1 的陈述 1 成立。此外，由于引理 2，假设的陈述 15成立，证明完毕。□

D 非拟凸图流

在本章节中，我们讨论一个产生非拟凸流的图的例子。如章节4.2所述，这带来了挑战，因为缺乏拟凸性时，上层优化问题（21）的最优解不再能保证唯一。这一问题促使我们在命题 $\beta = 2$ 中将流成本函数限制为参数 3。

例1（$\boldsymbol{K_4}$ 图中的非拟凸性。）。考虑一个有四个顶点 K_4 的完全图，以及式(18)中的成本函数，其中 $\beta = 3$, $a_e = b_e = 1$ 对所有 $e\in\mathcal{E}$ 均成立，即 $c_f = \sum_{e\in\mathcal{E}}\frac{1}{3}|f_e|^3$。对于这组参数，流成本函数不依赖于流量容量 $\boldsymbol{f}$，因此我们在记号中省略这一依赖关系。我们为每条边指定一个指向索引较小顶点的方向，从而得到以下关联矩阵：

$$\boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} (1,2) & (1,3) & (1,4) & (2,3) & (2,4) & (3,4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

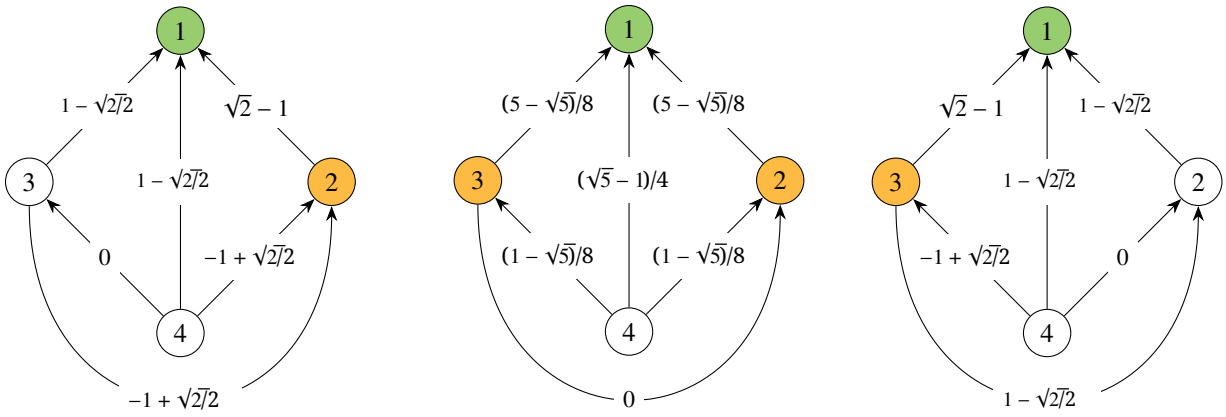
假设 $|K| = 1$，即只有一种商品，并且汇点需求矩阵为$\boldsymbol{T} = (1, 0, 0, 0)^T$。我们旨在说明，在这种情况下，$|\boldsymbol{f}^*| = |\boldsymbol{F}^*|$不是拟凸的，即 (22) 不成立。我们选择 $\boldsymbol{S}_1 = (0, 1, 0, 0)^T$和 $\boldsymbol{S}_2 = (0, 0, 1, 0)^T$，从而得到 $\boldsymbol{U}_1 := \boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}_1 = (1, -1, 0, 0)^T$和 $\boldsymbol{U}_2 := \boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}_2 = (1, 0, -1, 0)^T$。我们研究流 $\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}(\eta))$，其中 $\boldsymbol{U}(\eta) := (1-\eta)\boldsymbol{U}_1 + \eta\boldsymbol{U}_2$，且 $\eta\in[0,1]$。选择 $\boldsymbol{U}(\eta)$ 意味着必须将一个单位的商品运输到顶点 1，其中该商品的 $1-\eta$ 比例起源于顶点 2，η 比例起源于顶点 3。

表 2给出了关于 $\eta\in\{0, 1/2, 1\}$ 的最优流。根据这些结果，我们观察到，对于 $\eta = \frac{1}{2}$ 和边 $e = (1,4)$，等式 (22) 不成立，因为

$$|F_e(\boldsymbol{U}(\eta))| = (\sqrt{5}-1)/4 \approx 0.309 > 0.292 \approx 1 - \sqrt{2}/2 = \max\{|F_e(\boldsymbol{U}(0))|, |F_e(\boldsymbol{U}(1))|\}.$$

η \ edge	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
0	$\sqrt{2}-1$	$1-\sqrt{2}/2$	$1-\sqrt{2}/2$	$-1+\sqrt{2}/2$	$-1+\sqrt{2}/2$	0
1/2	$(5-\sqrt{5})/8$	$(5-\sqrt{5})/8$	$(\sqrt{5}-1)/4$	0	$(1-\sqrt{5})/8$	$(1-\sqrt{5})/8$
1	$1-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}-1$	$1-\sqrt{2}/2$	$1-\sqrt{2}/2$	0	$-1+\sqrt{2}/2$

表2：每条边的最优流 $\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}(\eta))$ 和 $\eta\in\{0, 1/2, 1\}$ 的值，见图 2.



(a) $\eta = 0$ (b) $\eta = \frac{1}{2}$ (c) $\eta = 1$

图2：对于参数 η 的不同取值， K_4 图上的最优流 $\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}(\eta))$。在每种情况下，都需要将单位流传输到顶点 1（绿色）。根据 η 的取值，流来自顶点 2 和/或顶点 3（橙色）。负流表示沿边的相反方向移动。

我们注意到，我们的数值分析还表明，当 $\beta > 2$ 取其他值时， K_4 中也会出现非拟凸行为。这表明，尽管最小费用流问题具有凸性，但这一性质通常不会传递给最优解，甚至连较弱形式的拟凸性也不会传递。

在本例的其余部分，我们将完整计算表 2 中给出的最优流。首先注意，对于每个参数 $\eta \in [0,1]$，对应的最优流都是唯一的，因为它是一个目标函数严格凸的凸优化问题的解。参数 $\eta \in \{0、1 2、1\}$ 对应的最优流如图 2所示。我们注意到，由于图的对称性，可以根据 $\eta = 1$的流得到 $\eta = 0$的流；我们先推导后者。

情形 *1*： $\eta = 0$。我们注意到，从顶点 *2* 到顶点 *1* 的流可以沿五条路径之一流动： $p_1 = 2 \to 1$、$p_2 = 2 \to 3 \to 1$、 $p_3 = 2 \to 4 \to 1$、 $p_4 = 2 \to 3 \to 4 \to 1$ 和 $p_5 = 2 \to 4 \to 3 \to 1$。最优流是唯一的；因此，基于图和成本函数的对称性，路径 p_2 和 p_3上的流量，以及路径 p_4 和 p_5 上的流量，分别相等。注意，只有路径 p_4 和p_5会经过边 *(3, 4)*；由于它们的流量相等且方向相反，我们知道 F^* *(3,4) (U(0))* $= 0$。为计算其余流量，令 $x = F^*$ *(1,2) (U(0))*。路径 $p_2 + p_4$和 $p_3 + p_5$分别经过边 *(1, 3)* 和 *(1, 4)*。因此，基于 p_2 和 p_3 以及 p_4 和 p_5的对称性，我们可以得出，边 *(1,3)* 和 *(1,4)* 上的流量大小相同，即 $\boldsymbol{F}^*$ *(1,3) (U(0))* $= \boldsymbol{F}^*$ *(1,4) (U(0))*。此外，由于顶点 *1* 的净需求等于 *1*，$\boldsymbol{F}^*$*(1,2) (U(0))* $+ \boldsymbol{F}^*$*(1,3) (U(0))* $+ \boldsymbol{F}^*$*(1,4) (U(0))* $= 1$，由此可得 $\boldsymbol{F}^*$*(1,3) (U(0))* $= \boldsymbol{F}^*$ *(1,4) (U(0))* $= \frac{1-x}{2}$。同理，由于顶点 *3* 和 *4* 的净需求等于 *0*，即 $U_3(0) = U_4(0) = 0$，它们的流平衡必须为 *0*，即

$$0 = \boldsymbol{F}^*_{(2,3)}(\boldsymbol{U}(0)) + \boldsymbol{F}^*_{(1,3)}(\boldsymbol{U}(0)) + \boldsymbol{F}^*_{(3,4)}(\boldsymbol{U}(0)) = \boldsymbol{F}^*_{(2,3)}(\boldsymbol{U}(0)) + \boldsymbol{F}^*_{(1,3)}(\boldsymbol{U}(0)),$$
$$0 = \boldsymbol{F}^*_{(2,4)}(\boldsymbol{U}(0)) + \boldsymbol{F}^*_{(1,4)}(\boldsymbol{U}(0)) + \boldsymbol{F}^*_{(3,4)}(\boldsymbol{U}(0)) = \boldsymbol{F}^*_{(2,4)}(\boldsymbol{U}(0)) + \boldsymbol{F}^*_{(1,4)}(\boldsymbol{U}(0)).$$

综上，我们得到

$$F^*_{(1,3)}(\boldsymbol{U}(0)) = F^*_{(1,4)}(\boldsymbol{U}(0)) = -F^*_{(2,3)}(\boldsymbol{U}(0)) = -F^*_{(2,4)}(\boldsymbol{U}(0)) = \tfrac{1-x}{2}.$$

有了这一点，我们可以通过求最小流量成本来确定 x。流量成本为

$$c_f(\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}(0))) = x^3 + 4 \cdot \left(\tfrac{1-x}{2}\right)^3$$

其唯一正极小值点为 $x = \sqrt{2} - 1$。由此得到最优流

$$\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}(0)) = (\sqrt{2} - 1, 1 - \sqrt{2}/2, 1 - \sqrt{2}/2, -1 + \sqrt{2}/2, -1 + \sqrt{2}/2, 0)^T,$$

如图 2所示。根据图的对称性，我们还可以立即得出结论： t

$$\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}(1)) = (1 - \sqrt{2}/2, \sqrt{2} - 1, 1 - \sqrt{2}/2, 1 - \sqrt{2}/2, 0, -1 + \sqrt{2}/2)^T.$$

情形 2： $\eta = \frac{1}{2}$。我们再次利用问题的对称性来计算最小成本流。首先，我们注意到顶点 2 和 3 具有相同的净需求，即 $-\frac{1}{2}$；由于图的对称性，它们在结构上无法区分。这意味着 $F^*_{(2,3)}(\boldsymbol{U}(1\,2)) = 0$，因为任何经过边 *(2,3)* 的路径上的最优流，都会被反方向上大小相同的流抵消。接下来，令 $x = F^*_{(1,2)}(\boldsymbol{U}(1\,2))$。那么，根据对称性，

$$F^*_{(1,3)}\left(\boldsymbol{U}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = x, \quad -F^*_{(2,4)}\left(\boldsymbol{U}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = -F^*_{(3,4)}\left(\boldsymbol{U}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} - x, \quad \textit{and} \quad F^*_{(1,4)}\left(\boldsymbol{U}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = 1 - 2x,$$

其中，最后一个等式是由于 $F^*_{(1,2)}(\boldsymbol{U}(1\,2)) + F^*_{(1,3)}(\boldsymbol{U}(1\,2)) + F^*_{(1,4)}(\boldsymbol{U}(1\,2)) = 1$。由此可得以下流量成本

$$c_f\left(\boldsymbol{F}^*\left(\boldsymbol{U}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)\right) = 2 \cdot x^3 + 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2} - x\right)^3 + (1 - 2x)^3.$$

由于 $x = (5 - \sqrt{5})/8$ 是上述成本函数的唯一正极小值点，因此可得

$$\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{U}(\tfrac{1}{2})) = ((5 - \sqrt{5})/8, (5 - \sqrt{5})/8, (\sqrt{5} - 1)/4, 0, (1 - \sqrt{5})/8, (1 - \sqrt{5})/8)^T.$$

◊

E 引理5的证明

证明。 我们通过证明直流潮流 $\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{VU}$ 满足引理中所述最小成本流问题的 Karush–Kuhn–Tucker (KKT) 条件来证明该引理。首先，我们注意到成本函数可以写成

$$\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{S}^{-1/2}\boldsymbol{F}\right)^T\left(\boldsymbol{S}^{-1/2}\boldsymbol{F}\right)$$

因为 $\boldsymbol{S}$ 是一个对角矩阵 具有正元素的矩阵。因此，(17) 对应的 KKT 条件如下：

$$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{B}^T\mu = 0, \tag{43a}$$

$$\boldsymbol{BF} = \boldsymbol{U}, \tag{43b}$$

对于某个 $\mu \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}|}$。回想一下， $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{SB}^T\boldsymbol{L}^+$和 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{BSB}^T$。取 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{VU}$和 $\mu = -\boldsymbol{L}^+\boldsymbol{U}$，我们得到

$$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{VU} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{L}^+\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{L}^+\boldsymbol{U} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{L}^+\boldsymbol{U} = 0$$

and

$$\boldsymbol{BVU} = \boldsymbol{BSB}^T\left(\boldsymbol{BSB}^T\right)^+\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}.$$

注意，最后一个等式成立是因为

- $\boldsymbol{BSB}^T\left(\boldsymbol{BSB}^T\right)^+$是到 $\boldsymbol{BSB}^T$ 的像空间上的正交投影，
- $\boldsymbol{BSB}^T$ 的像空间为 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}|}: \mathbf{e}^T_{|\mathcal{V}|}x = 0\}$，因为 $\text{rank}(\boldsymbol{BSB}^T) = \text{rank}(\boldsymbol{B}) = |\text{V}| - 1$且$\boldsymbol{BSB}^T\mathbf{e}_{|\mathcal{V}|} = 0$，
- $\mathbf{e}^T_{|\mathcal{V}|}\boldsymbol{U} = 0$ 根据构造可知，这意味着 $\boldsymbol{U}$ 的每一列都属于 $\boldsymbol{BSB}^T$ 的像空间，因此在投影后保持不变。

因此，我们得出结论，所提出的 $\boldsymbol{F}$ 和 μ 选择满足（43a）和（43b）。由于（17）是一个带等式约束的凸问题，因此满足斯莱特条件，这意味着（17）具有强对偶性 [53]。最后，成本函数是严格凸的，这意味着（17）只有一个最优解。这三个性质共同表明，直流潮流 $\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{VU}$ 是所讨论问题的最优解 [53]。 □