arXiv:2601.01983v1 [physics.flu-dyn] 5 Jan 2026

统计状态动力学模态和平衡态构成宽通道库埃特湍流的结构与机制基础

Brian F. Farrell[2],Petros J. Ioannou[1,2]†

[1]物理系，雅典国立卡波季斯特里亚大学，雅典，希腊[2]地球与行星科学系，哈佛大学，剑桥，美国

（收到日期 xx；修订日期 xx；接受日期 xx）

宽通道库埃特（WCC）湍流的显著特征在于，其主要由一种大尺度展向周期结构主导，该结构由流向条带及与之相关的涡卷超结构组成。本文表明，这一表观平衡态对应于在统计状态动力学（SSD）框架下表述的纳维–斯托克斯方程的一个不动点解。此外，研究发现该不动点解为秩三结构，由一个通过解析方法确定的涡卷–条带结构（RSS）和两个通过解析方法确定、支撑二阶累积量的特征模态组成，其中前者构成SSD的第一累积量。这一最小表示同时捕捉了WCC湍流的结构与动力学，而其余谱分量对平衡态动力学的贡献可忽略不计。除WCC以外的湍流库埃特流可理解为极限环和混沌扩展：它们由与不动点WCC湍流相同的基础机制支撑，只是支撑WCC湍流的两个特征模态分别被两个Floquet模态和两个李雅普诺夫向量所取代。这些结果为库埃特流中的湍流提供了一个解析解。

关键词：

1. 引言

构建物理现象的理论时，最好从该现象最简单的表现形式入手，并以全面理解这一最简单实例为基础，逐步认识其更复杂的表现形式。对于壁面湍流而言，最简单的典型实例是宽通道库埃特流（WCC）中发展的湍流。

实验观测 Bech & Andersson（1994）；Papavassiliou & Hanratty（1997）；Tillmark & Alfredsson（1995, 1998）；Kitoh 等（2005）；Kitoh & Umeki（2008），以及在广泛雷诺数范围内对 WCC 进行的直接数值模拟 Komminaho 等（1996）；Tsukahara 等（2006）；Pirozzoli 等（2014）；Avsarkisov 等（2014）；Lee 与 Moser（2018）；Hoyas & Oberlack（2024）表明，库埃特湍流主要呈现一种明显的平衡态，由大尺度涡卷–条带结构（RSS）构成。这些结构体现了湍流场的基本组织形式，其中

† 通讯邮箱：pjioannou@phys.uoa.gr

条带具有特征性的展向波长，并在较长的流向距离上保持相干。随着通道在展向上变宽，流场动力学愈发不受展向边界效应影响，RSS 的时间变化显著减弱Pirozzoli 等 （2014年）。这种时间依赖性的减弱有力地表明，流场正趋近平衡态；在这一状态下，大尺度 RSS 组织在能量产生、输运和耗散过程之间达到时间无关的平衡。WCC 中这种固定平衡湍流状态的出现，为分析壁面湍流的基本结构与动力学提供了独特机会，使其得以在最简单、最清晰的形态下呈现。

WCC中的这些平衡结构并非以速度状态变量表述的纳维–斯托克斯方程（NSE）的平衡态，这正是尽管WCC的直接数值模拟（DNS）提供了令人瞩目的不动点结构证据，这些平衡态却始终未得到解释的原因。这些平衡态的解析结构一直未能确定，是因为支撑这些结构的不稳定性具有非线性。通过对纳维–斯托克斯方程进行表述，使得能够利用线性扰动理论识别剪切流湍流背后的结构，进而揭示支撑湍流状态的这一结构的动力学。要识别湍流状态，还必须对这种不稳定性的非线性平衡化过程进行解析追踪，直至其平衡化为湍流状态。实施这一方案所需的关键第一步，是用非线性变量表述纳维–斯托克斯方程，从而能够利用线性扰动理论识别湍流背后的非线性不稳定性。随后，利用同一组方程求出由这些不稳定性产生的相应平衡态，并将其识别为湍流状态的解析表达式，就十分直接了。能够实现这种分析的非线性变量纳维–斯托克斯方程表述，称为统计状态动力学（SSD）表述，具体而言，是对纳维–斯托克斯方程进行二阶累积量展开闭合。随机结构稳定性理论（S3T）表述是纳维–斯托克斯方程SSD在二阶累积量展开下的闭合，其中平均算子选为流向平均，涨落之间的相互作用则参数化为时间白噪声随机过程。S3T表述最初是作为一种理论的组成部分而发展出来的，该理论旨在解释行星湍流大气中喷流的自发形成；它也承袭了这一用途所留下的缩写名称S3TFarrell 与 Ioannou (2003年)。S3T保留了壁面湍流的基本动力学，同时最大限度地保持了解析上的清晰与简洁。在这一闭合中，涨落的协方差作为一个变量出现。将协方差作为变量进行线性扰动，可以识别湍流背后的非线性不稳定性。此前研究已表明，通过对S3T平衡态进行稳定性分析所识别出的模态，能够预测在自由来流湍流存在时转捩流中出现的扰动RSS。对维持这种扰动RSS的机制进行研究后发现，该机制也是完全湍流流动中自维持过程（SSP）背后的机制Farrell 与 Ioannou (2012年); Farrell 等人 (2017年*b*); Nikolaidis 等人 (2024年).

尽管 S3T SSD 是纳维–斯托克斯方程 SSD 最简单的非平凡闭合形式，但即便在 S3T 中，研究 SSD 动力学在数值上仍然颇具挑战，这是因为 S3T 状态空间维数很高。在对壁面湍流中纳维–斯托克斯方程 SSD 动力学进行 S3T 表述时，必须同时推进第一累积量（其维数为$O(N_y \times N_z)$，其中 N_y 和 N_z 分别表示解析壁法向和展向状态所需的谱分量数）以及二阶累积量（其最简单形式的维数为 $O(N_y^2 \times N_z^2)$）。二阶累积量的这种二次标度使直接数值积分在计算上颇具挑战。我们发现，在大多数情况下，S3T 所需的无限系综

动力学可以用有限系综充分近似 Farrell 等 (2017年*b*)。此外，我们将在下文表明，不采用显式随机闭合的 S3T 动力学系综表述不仅能够精确再现 S3T 的无限系综动力学，还能揭示标准累积量表述所掩盖的二阶累积量结构信息。具体而言，系综表述揭示了二阶累积量的秩结构和模态组成，从而为维持湍流平衡态的机制提供了物理洞见。

在下一节中，我们将推导纳维–斯托克斯方程 SSD 动力学的系综表述，并说明有限系综如何捕捉 S3T 动力学的无限系综极限。在后续各节中，我们将把这一框架应用于 WCC湍流。

2. 平面库埃特湍流统计状态动力学的系综表述

考虑密度为 ρ 的不可压缩平面库埃特流，流动位于一个沿流向、 x和展向（ z方向）均采用周期性边界条件的通道中，边界条件为 $\mathsf{u}(x+L_x,y,z)$ $=\mathsf{u}(x,y,z)$，$\mathsf{u}(x,y,z+L_z)$ $=\mathsf{u}(x,y,z)$，其中 L_x和 L_z分别为沿 x 和 z 方向的无量纲通道尺寸，横向通道壁位于 $y/h=\pm1$处；其中 $\pm U_w\hat{\mathbf{x}}$ 分别表示 $y/h=\pm1$ 处的速度（$\hat{\mathbf{x}}$ 是 x方向的单位向量）。雷诺数为 $R=U_w h/\nu$，其中 ν 为运动黏度。

速度场 $\mathbf{u}$ 由 U_w 无量纲化，压力场由 ρU_w^2 无量纲化，空间变量 x,y,z 由 h 无量纲化，时间由 h/U_w 无量纲化。采用这组无量纲变量后，描述流场的纳维–斯托克斯方程无需改变记号即可写为：

$$\partial_t\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}+\nabla p-\Delta\mathbf{u}/R=0\ ,\quad \nabla\cdot\mathbf{u}=0\ . \tag{2.1}$$

将满足雷诺条件（Monin & Yaglom 1973年）的平均算子记为 $\{\cdot\}$，则式（2.1）中的速度场和压力场可分解为平均量和偏差：平均量记为 $\mathsf{U}(y,z,t)=\{\mathsf{u}\}$, $P(y,z,t)=\{p\}$，偏差记为 $\mathsf{u}'(x,y,z,t)$, $p'(x,y,z,t)$，即相对于平均量的涨落；因此，$\mathsf{u}=\mathsf{U}+\mathsf{u}'$，且 $p=P(y,z,t)+p'(x,y,z,t)$。将状态分解为平均量和涨落后，纳维–斯托克斯方程便可写成分别描述平均量和涨落演化的方程：

$$\partial_t\boldsymbol{U}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{U}+\nabla P-\Delta\boldsymbol{U}/R=-\{\boldsymbol{u}'\cdot\nabla\boldsymbol{u}'\}\ , \tag{2.2a}$$

$$\partial_t\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'\cdot\nabla\boldsymbol{U}+\nabla p'-\Delta\boldsymbol{u}'/R=-(\boldsymbol{u}'\cdot\nabla\boldsymbol{u}'-\{\boldsymbol{u}'\cdot\nabla\boldsymbol{u}'\})\ , \tag{2.2b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{U}=0\ ,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}'=0\ , \tag{2.2c}$$

以及相应的边界条件。我们将考虑的平均算子包括对坐标进行空间平均和系综平均。空间平均用方括号表示，并以下标标明进行平均的自变量；例如，流向平均定义为 $[\cdot]_x=L_x^{-1}\int_0^{L_x}\cdot\,dx$，而对流场的独立实现进行的系综平均则用尖括号 $\langle\cdot\rangle$ 表示。

在构建本研究的 SSD 时，我们将流向平均作为雷诺平均算子，并将（2.2*a*）视为该雷诺平均算子下的第一累积量；同时认为，按照（$\mathbf{U}$ P）演化于平均场中的涨落系综，其涨落根据（2.2*b*）通过系综平均产生的雷诺应力散度与平均场相互作用。要得到二阶闭合的 SSD，必须以与状态无关的方式参数化系综涨落动力学中的涨落间相互作用（$\boldsymbol{u}'\cdot\nabla\boldsymbol{u}'-\{\boldsymbol{u}'\cdot\nabla\boldsymbol{u}'\}$）。过去，我们曾对这一项采用随机参数化，使其激发

扰动方程，其中包含在时间上相互独立的白噪声结构，其空间相关为$\mathbf{Q}$。尽管本文借鉴了使用这一参数化所得到的结果，但我们主要通过设定$\mathbf{Q} = 0$来忽略这一项。因此， N-系综 SSD 由以下方程支配

$$\partial_t \boldsymbol{U}_N + \boldsymbol{U}_N \cdot \nabla \boldsymbol{U}_N + \nabla P - \Delta \boldsymbol{U}_N / R = -\langle\, [\boldsymbol{u}'_n \cdot \nabla \boldsymbol{u}'_n]_x \,\rangle_N \tag{2.3a}$$

$$\partial_t \boldsymbol{u}'_n + \boldsymbol{U}_N \cdot \nabla \boldsymbol{u}'_n + \boldsymbol{u}'_n \cdot \nabla \boldsymbol{U}_N + \nabla p'_n - \Delta \boldsymbol{u}'_n / R = 0 \ , \quad n = 1, 2, \cdots, N \ , \tag{2.3b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{U}_N = 0 \,, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u}'_n = 0, \quad n = 1, 2, \cdots, N \ , \tag{2.3c}$$

其中 $n = 1, \cdots, N$表示系综成员，而 $\mathbf{U}_N$是所有 N涨落系综成员共有的平均流，而 $\langle\cdot\rangle_N$ 表示对 N系综成员取平均。在 $N \to \infty$ 的极限下，我们得到一个二阶闭合的 SSD，称为 S3T 系统，其 $\mathbf{Q} = 0$为变量，包含速度场的一阶和二阶累积量（$\mathbf{U}$,$\mathbf{C}$）。我们将系统（2.3）称为具有 N个系综成员的受限非线性系统（RNL），并记作 RNL_N。

选择流向平均作为平均算子，隐含地假设统计状态在流向上统计均匀且稳定。于是，涨落场可以展开为傅里叶级数:

$$\mathbf{u}'(x, y, z, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}} \hat{\mathbf{u}}'_{\alpha_n}(y, z, t)\, e^{i\alpha_n x} \ , \tag{2.4}$$

其中 $\alpha_n = n\alpha = 2\pi n / L_x$ 为流向波数，相应地，S3T 流向统计均匀状态在点 1 $\overset{\text{定义}}{=}$(x_1, y_1, z_1) 与点 2 $\overset{\text{定义}}{=}$ (x_2, y_2, z_2) 之间的二阶累积量为

$$C_{ij}(1,2,t) = \langle u'_i(x_1, y_1, z_1, t) u'_j(x_2, y_2, z_2, t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{ij,n}(1,2,t) e^{i\alpha_n (x_1 - x_2)},$$

with

$$C_{ij,n}(1,2,t) = \left\langle \hat{u}'_{i,\alpha_n}(y_1, z_1, t) \hat{u}'^{*}_{j,\alpha_n}(y_2, z_2, t) \right\rangle \ , \tag{2.5}$$

同一时刻速度涨落 n 次傅里叶分量 $\hat{u}'_{i,\alpha_n}$ 的协方差，其中指标 i 和 j 表示 u′ 的速度分量（$*$ 表示复共轭）。S3T SSD 方程以第一累积量 U 和第二累积量——雷诺平均扰动协方差 C——为变量，可以通过根据 (2.3b) 建立 C 的演化方程，并将平均方程 (2.3a) 中的雷诺应力强迫表示为 C 的函数来写出（参见 Farrell 与 Ioannou（2012）；Farrell 等（2017a））。RNL_N 系统的协方差通过对 N 系综成员的协方差取平均得到，它近似于无限系综协方差，后者构成 S3T SSD 状态 (2.5) 的第二累积量:

$$C_{N,ij,n}(1,2,t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \hat{u}'_{(i,\alpha_n),k}(y_1, z_1, t) \hat{u}'^{*}_{(j,\alpha_n),k}(y_2, z_2, t) \ . \tag{2.6}$$

该协方差的秩至多为 N，并且随着 $N \to \infty$，收敛于 S3T SSD 的无限系综协方差 $\mathbf{C}$。

在我们对壁面湍流统计状态动力学的研究中，经常报告受限非线性模拟的结果[1] （参见Thomas等人 (2014年)；Farrell 等人(2016年)；Farrell 与 Ioannou(2017年)）。受限非线性[1] 系统是通过采用仅含一个涨落样本的系综，对 S3T 统计状态动力学进行近似而得到的。在（2.3）中，涨落间相互作用不存在

时，涨落协方差矩阵 C 的秩为 1。尽管在（2.3b）中，式（2.2b）里涉及涨落间相互作用的项已设为零，准线性受限非线性$_1$ 系统仍能维持现实的湍流状态（参见 Bretheim 等人（2015）；Farrell 等人（2016，2017a））；这一状态由少量涨落支撑，这些涨落由动力学自发维持，从而确定了支撑受限非线性$_1$ 湍流的活跃子空间（Thomas 等人 2015；Nikolaidis & Ioannou，2022年）。类似地，准线性受限非线性$_N$ 方程和 S3T 方程也能维持现实的自维持湍流，其由少量涨落结构在几个流向波数上支撑（Farrell 与 Ioannou 2012；Thomas 等人 2015；Farrell 等人 2016）。支撑湍流的这一涨落子空间由动力学自发确定，对应于湍流状态的活跃子空间；这一概念最初由 Townsend 基于启发式推理提出（Townsend 1961，1976）。该活跃子空间被确定为由一小组李雅普诺夫指数为零的李雅普诺夫向量张成的子空间：当扰动状态在由湍流支撑的第一累积量 U(y, z, t) 下，按照涨落方程（2.3b）演化时，这些向量得以保留。这直接源于 S3T/RNL 统计状态动力学的准线性性质：在平衡态，指数为负的涨落已消失，而平衡态的存在则要求不再有指数为正的涨落。这意味着，在 S3T/RNL 统计状态动力学湍流中，湍流流场的第一累积量（Q $= 0$）已通过双向平均流—涨落相互作用被调节至中性，从而证明了扩展版 Malkus 猜想的有效性（Malkus 1956；Reynolds 与 Tiederman 1967）：湍流平均流会被调节至扰动中性状态。受限非线性中的第一累积量呈中性，这一点也反映在相应的直接数值模拟中：其第一累积量略微不稳定，这是维持向更高流向波数的能量级联所必需的；这种级联存在于直接数值模拟中，却不存在于受限非线性中（Nikolaidis 等人 2018年；Nikolaidis & Ioannou，2022年）。

由此可知，与 RNL$_N$ 和 S3T 分别对应的协方差 $\mathbf{C}_N$ 和 $\mathbf{C}$，其协方差秩较低，与构成活跃子空间的李雅普诺夫指数为零的涨落结构集合的规模相当。对于 S3T，少量解析已知且具有相应低秩协方差$\mathbf{C}$的涨落即可支撑真实的剪切湍流；这一发现表明，纳维–斯托克斯方程湍流本质上也由一组与之密切相关、可识别的有限结构支撑，尽管涨落间非线性所产生的大量非本质结构可能会掩盖这种内在的动力学简洁性（Nikolaidis & Ioannou，2022年）。如上所述，识别这些结构的第一步是认识到，协方差 $\mathbf{C}_N$（或 $\mathbf{C}$）的秩，等于二阶累积量中由第一累积量 $\mathbf{U}_N$（或$\mathbf{U}$）所支撑的“中性模态”数量（在混沌湍流、极限环湍流或不动点湍流情形下，分别对应李雅普诺夫指数为零的李雅普诺夫向量、特征值实部为零的弗洛凯向量或特征模态）。

如前所述，当$\mathbf{C}$随由 S3T 湍流支撑的第一累积量 $U(y,\ z,\ t)$ 演化时，具有$\mathbf{Q} = 0$ 的 S3T 状态的协方差$\mathbf{C}$的秩等于李雅普诺夫指数为零的李雅普诺夫向量的数量，而相应 RNL$_N$ 模拟中$\mathbf{C}_N$的秩自然受限于 N，即构成该模拟的系综成员数量。这意味着，随着 $N \to \infty$，且 RNL$_N$ 收敛至 S3T，$\mathbf{C}_N$ 的秩会变为常数，并等于 N_0，即 S3T$\mathbf{C}$ 的秩。当然，这假设$\mathbf{C}$ 具有有限秩，我们所有的黏性槽道流模拟都是如此。这意味着，对于具有$\mathbf{Q}$ $= 0$ 的无限系综 S3T SSD 状态，只要 RNL$_N$ 中的 N 大于或等于有限秩 N_0，即 S3T 的$\mathbf{C}$的秩，就已经实现了收敛。这一结果对构成湍流状态的第一累积量和 N_0 涨落的结构都提出了非同寻常的要求。虽然这种 N_0 起初未知，但很容易确定

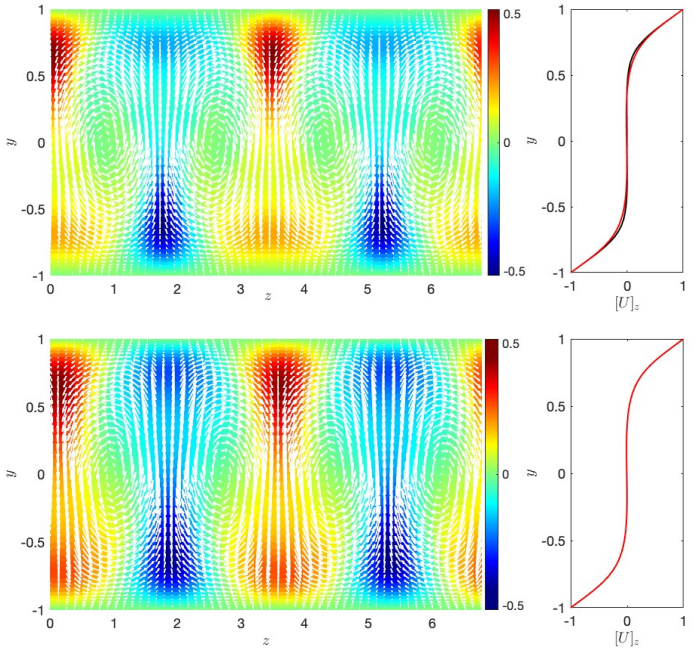

图1：左上：WCC S3T平衡态的流向速度条带分量 $U_s(y,z) = U(y,z) - [U(y,z)]_z$（彩色等值线）以及平均速度矢量（$W(y,z)$ $V(y,z)$）。右上：WCC 平衡态的平均湍流剖面 $[U(y,z)]_z$ 随 y （黑色）的变化。红色表示直接数值模拟（DNS）得到的对应平均湍流剖面。低速条带之间的展向间距为$z = 3.5$。左下：直接数值模拟得到的对应时间平均条带分量 $[U_s(y,z)]_t$ 以及时间平均速度矢量（$[W(y,z)]_t, [V(y,z)]_t$）。右下：直接数值模拟得到的时间和展向平均流向流动 $[U(y,z,t)]_{t,z}$。对于在 $R = 600$ 处具有 $z = 2.2\pi$ 的通道。

通过 RNL$_N$ 模拟可以确定；模拟结果表明，对于某些 N，$\mathbf{C}_N$ 的秩会变为常数，不再随着保留的系综成员数量增加而增大；该常数秩即为无限系综 S3T 的秩 N_0。

为了理解所有 RNL 收敛$_N$ 到 $N \geqslant N_0$ S3T 状态所必需的非凡条件，简单考虑这样的情形：涨落由单一流向波数支撑，k，且 S3T 协方差的秩 $\mathbf{C}$ 为 $N_0 = 2$，因此扰动状态由两个归一化† 中性李雅普诺夫向量的线性组合构成，其傅里叶分量为 $\hat{\mathbf{u}}'_{1,k}$ 和 $\hat{\mathbf{u}}'_{2,k}$。对于此例，在第 α 个系综成员 RNL$_N$ 中，$N \geqslant N_0$ 扰动状态的速度分量为：

$$\lambda_\alpha \hat{u}'_{1i,k}(y,z,t) + \mu_\alpha \hat{u}'_{2i,k}(y,z,t) \ , \tag{2.7}$$

† 如果 中性向量随时间变化，则会在指定时刻对这些向量进行归一化。

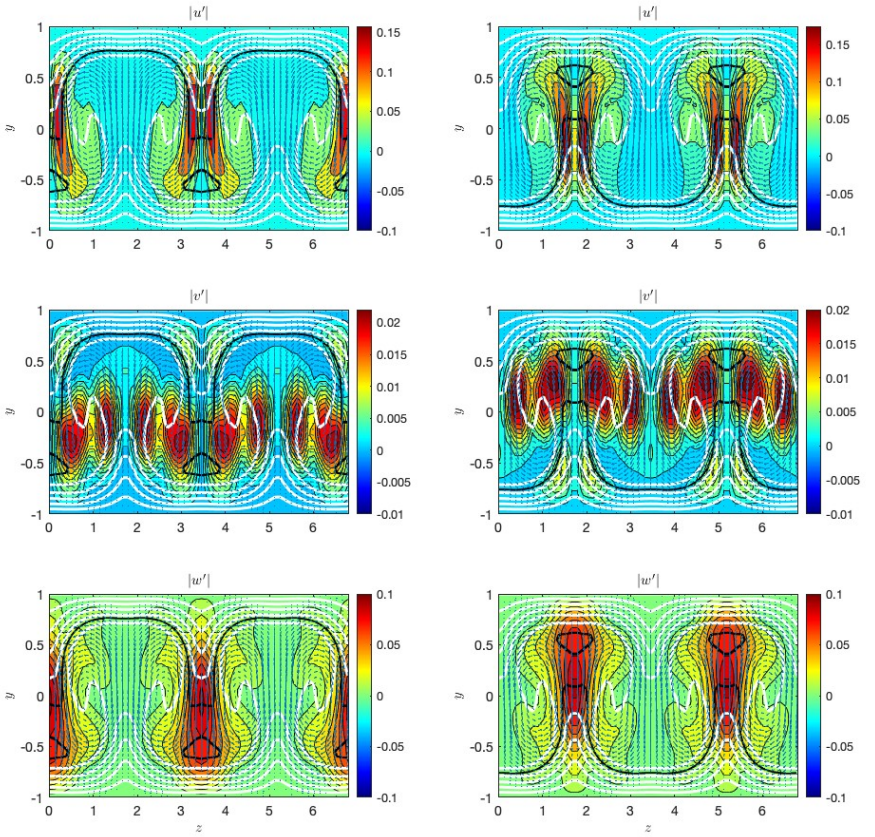

图2：支撑上方面板图中所示 WCC S3T平衡态的两个中性模态的1。左侧面板从上到下依次为流场 $|u'|$，$|v'|$ 以及 $|w'|$ 相速度为 $c_r = 0.106$ 的中性模态在 $y-z$ 流场截面上的速度等值线。黑线表示该模态的临界层线。图中还以白色显示 $U(y,\ z)$ 的等值线，并以蓝色矢量表示 S3T平衡态平均流的（W，V）。右侧面板从上到下依次为中性模态在对应 $c_r = -0.106$ 处的 $y-z$ 流场截面上的速度场。

RNL$_N$ 模拟的 N_0 秩协方差为

$$C_{N,ij,n}(1,2,t) = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\lambda_\alpha \hat{u}'_{1i,k}(1) + \mu_\alpha \hat{u}'_{2i,k}(1)\right)\left(\lambda_\alpha \hat{u}'_{1j,k}(2) + \mu_\alpha \hat{u}'_{2j,k}(2)\right)^*$$
$$= \Lambda \hat{u}'_{1i,k}(1)\hat{u}'^{*}_{1j,k}(2) + M\hat{u}'_{2i,k}(1)\hat{u}'^{*}_{2j,k}(2) + \Phi \hat{u}'_{1i,k}(1)\hat{u}'^{*}_{2j,k}(2) + \Phi^* \hat{u}'^{*}_{1i,k}(2)\hat{u}'_{2j,k}(1)$$

with

$$\Lambda = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}|\lambda_\alpha|^2 \quad , \quad M = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}|\mu_\alpha|^2 \quad , \Phi = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\lambda_\alpha \mu_\alpha^*.$$

中性向量之和（2.7）对 N系综中的每个成员都各不相同

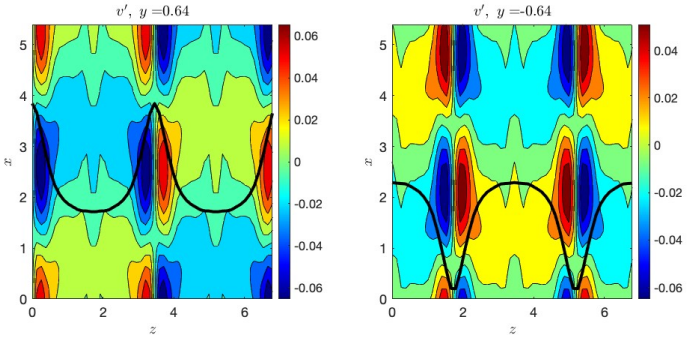

图3： 横流速度分量， v'，即图2两列中所示中性模态的横流速度分量。 v' 分量显示在 $x-z$ 相应条带最大值所在高度 $y=\pm 0.64$的横截面上。该高度处相应的流向流动以黑色示意。此图显示，这两个模态分别是围绕各自条带的蜿蜒斜波。

（除去测度为零的例外），但总体而言，这些中性向量和必须构成一个系综，使其对于任意 $N \geqslant N_0$ 以及任意可能产生相同 Λ 和 M的 λ_α 和 μ_α组合，都能支持相同的第一累积量；该第一累积量由它们合成的雷诺应力决定，而雷诺应力又由平均扰动协方差 $\mathbf{C}_N$决定。这要求作用于第一累积量与第二累积量之间的有效反馈调节器能够调整李雅普诺夫向量的结构及其系数，以满足

$$\Phi = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha \mu_\alpha^* = 0 \ , \tag{2.8}$$

因此，模态相互干涉所产生的协方差分量对（2.3a）中的净雷诺应力散度没有贡献；也就是说，模态之间不会相互干涉，从而不会产生频率为其两倍的额外雷诺应力，因为这与不动点的存在不相容。这一条件对应的要求是，各模态单独产生的雷诺应力之和能够支撑第一累积量。换言之，任何一个含有 $N \geqslant N_0$ 的 RNL_N 受限非线性模拟所维持的湍流状态，都等同于一个具有涨落的 N_0 系综模拟所维持的状态（对于 $N_0 = 2$的情况）$\sqrt{\Lambda}\,\hat{\mathbf{u}}'_{1,\,k}$ 位于第一个系综成员中，而 $\sqrt{M}\,\hat{\mathbf{u}}'_{2,\,k}$ 位于第二个系综成员中。只有满足这些要求时，具有任意 $N \geqslant N_0$ 的 RNL$_N$ 模拟系综才会产生相同的第一累积量$\mathbf{U}$，并因此在 $N = N_0$ 收敛到完整的 S3T。本文将展示，在 S3T 湍流状态为稳定不动点的情况下，第一累积量与二阶累积量之间运行的有效反馈调节器如何强制满足这些要求。

如上所述，在 S3T 状态下，调节器需要确保第一累积量保持中性，同时还要确保系综中中性向量所产生的雷诺应力之和能够支撑第一累积量。值得注意的是，与此同时，调节器还必须使这些中性向量构成这样一个集合：对每个系综成员的中性模态之间的交叉协方差求和后结果为零，从而避免支撑中性向量之间的干涉导致收敛后的第一累积量状态发生波动；这种干涉会产生波动的雷诺应力，并以中性模态的拍频扰动第一累积量结构。我们

注意到，调节器要满足第二项要求——使系综通量中的交叉项之和消失——更加困难，因此定点解被限制在参数空间的有限区域内。

我们得出结论： RNL_{N_0} 系综揭示了完整 S3T库埃特湍流态的解析结构。该 S3T湍流态由平均流以及一组由该平均流支撑的中性李雅普诺夫向量构成。这些要素以何种构型形成不动点、极限环或混沌湍流，取决于调节器。调节器可能根据参数、初始条件，或外部施加或内部生成的扰动，使湍流维持在这些湍流状态中的某一种。

我们再次强调，在为 SSD 选择流向平均算子时，我们假设平面库埃特湍流在流向上具有统计均匀性，但并未强制要求其在展向上具有统计均匀性。鉴于人们历来假设平面剪切湍流的统计平均态在展向和流向上均不变化，这一选择或许出人意料；这一假设既符合问题在流向和展向上的均匀性，也与如下观察一致：无论是对多个流场实现进行无条件系综平均，还是对单个流场实现进行长时间平均，所得平均态都缺乏展向结构。然而，对湍流状态进行无条件系综平均，并不是表述剪切湍流 SSD 的恰当雷诺平均，因为 SSD 模态不稳定性会导致自发对称性破缺，从而产生展向结构。与此相符，众所周知，当滤除沿流向拉长的结构的展向分量时，剪切流中无法维持湍流（Jim´enez & Pinelli 1999年）。这一结果表明，展向的自发对称性破缺是湍流状态的内在特征。与传统的速度状态变量形式相比，以累积量形式表示纳维–斯托克斯方程，能够识别出剪切流中湍流所依赖的这些展向对称性破缺模态结构Farrell 与 Ioannou (2012年)。

3. 方法

我们对库埃特湍流的 SSD 研究将在雷诺数为 $R = 600$ 、流向周期性为 $L_x = 1.75\pi$ 且展向周期性各异的 L_z周期通道中进行，但主要研究展向周期性为 $L_z = 2.2\pi$的通道。对于完整纳维–斯托克斯方程（2.2）和 RNL_N 方程（2.3）的数值积分，动力学以壁法向涡量和壁法向速度的拉普拉斯算子的演化方程形式表示；在展向采用空间离散和傅里叶去混叠，在壁法向则采用切比雪夫多项式，方法同 Kim 等人（Kim 等人 1987）。时间推进采用三阶半隐式龙格-库塔方法。方程（2.2）和（2.3）使用 M-A. Nikolaidis（Nikolaidis 2024年开发的向量化系综直接数值模拟代码进行积分，离散采用 $N_z = 60$ 个等距点，在 z 时$L_z \leqslant 2.2\pi$；当 z 时， $L_z > 2.2\pi$则按比例调整 $N_y = 53$ 中的点数，并在 y采用切比雪夫配置点。

纳维–斯托克斯方程湍流维持着全谱涨落场，而该通道中的受限非线性$_N$ 湍流仅由基频流向波数 $\alpha = 2\pi/L_x$处的涨落支撑，因为该波数对应于李雅普诺夫指数为零的涨落，因此是在此雷诺数下唯一能够支撑受限非线性湍流的流向傅里叶分量Farrell & Ioannou (2017年);Nikolaidis & Ioannou (2022年)。这个单一涨落流向波数确定了

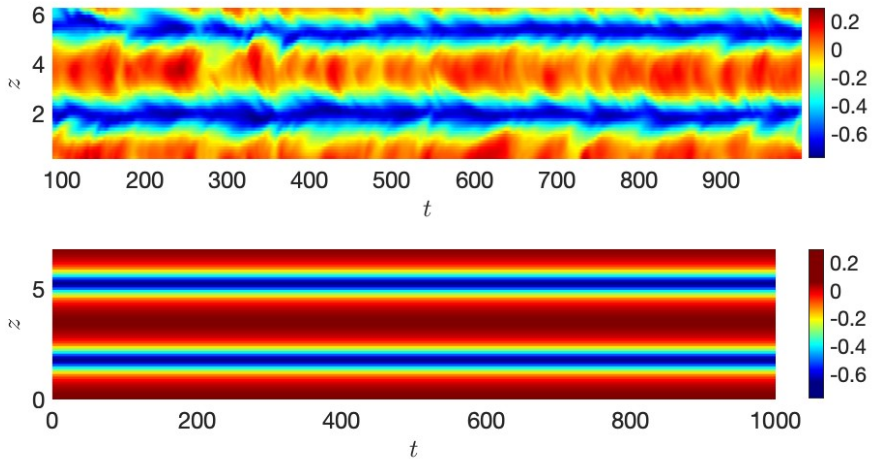

图4：上图：在平面库埃特流的直接数值模拟中，横流方向位置 $y=-0.7$ 处的流向平均速度随时间 t和展向距离 z的变化，模拟参数为 $R=600$ ，其中 $L_z=2.2\pi$、$L_x=1.75\pi$ ；为防止条带漂移，已滤除流向平均展向速度 W。该图显示了这种库埃特湍流的直接数值模拟中条带的持续存在。下图：对应的S3T平衡态。

该流场受限非线性湍流活跃子空间中的流向分量；其余流向波数均为被动波数，因为它们的李雅普诺夫指数为负。这一点与此结论一致：在受限非线性$_N$ 模拟中，代码经过修改，在 x、 $k_x=0$ 和 $k_x=1\alpha$中保留两个谐波。

随着展向空间周期 L_z增大，流场的展向均匀分量（对应于展向波数 $k_z=0$）的能量减小，并在展向宽度趋于无穷大时趋近于零。流场的 $k_z=0$ 分量源于形如（k_x，k_z）+（k_x'，$-k_z$）的傅里叶模态之间的所有三波相互作用；在受限非线性模拟中，这些相互作用仅限于两种类型：（0，k_z）+（0，$-k_z$）和（0，k_z）+（α，$-k_z$）。流场的（0，0）傅里叶分量表示平均展向漂移，而（k_x，0）分量对应于展向均匀脉动。对于WCC，在我们的受限非线性$_N$ 模拟中，当通道宽度$L_z>2\pi$时，我们对所有情形都滤除了展向平均（0，0）分量和展向均匀（k_x，0）脉动分量。正如Hamilton等人（1995年）所指出的，尽管展向均匀脉动分量对于维持较窄的最小通道中的湍流至关重要，但当 $L_z>2\pi$时，在我们的通道 $R=600$ 中，湍流仍能维持较长时间。

4. $R=600$ 和 $L_z/h=2.2\pi$ 下的定点S3T平衡态及其意义

我们首先关注展向空间周期为 $L_z/h=2.2\pi$ 的通道，它支持一个 S3T 平衡态，所有$_N$ 取 $N\geqslant 2$ 的 RNL 模拟均收敛于该平衡态。此平衡态由一个流向平均流、$\mathbf{U}^{eq}(y,z)$，两条低速条带和两条高速条带构成，如图1 （上）所示；其脉动协方差的秩为二，记为 $\mathbf{C}$。平衡态的平均流和协方差具有平移-旋转对称性，该对称性由变换 $[u,v,w](x,y,z)$ $\rightarrow[-u,-v,w](-x+L_x/2,-y,z+L_z/4)$描述。它并非

无法通过二阶累积量**C**反推出构成涨落场的结构。不过，协方差矩阵**C**的秩揭示了构成涨落场的独立结构数量；其两个正交特征向量确定了维持湍流的涨落活跃子空间，但不能确定维持湍流的各个具体结构。这些结构是方程（2.3*b*）中算子在平均流$\mathbf{U}_{eq}$下的中性模态，可通过对该算子进行特征值分析确定。这两个中性模态是具有平移-旋转对称性的对应结构，相速度为 $c_r = \pm 0.106$ ，其形态分别为以低速条带上方和下方为中心的斜波，如图2和3所示。以一组 $N \geqslant 2$ 随机初始化的系综成员为初始条件，S3T系统会收敛到一个不动点，其中每个系综的涨落场均由这些中性结构构成，但其振幅因初始条件不同而异。尽管两个模态的系数通常在各个系综中有所不同，但这些系数的总和会产生各模态正确的振幅平方，并满足非相互作用条件（2.8）。另外，对$\mathbf{U}_{eq}$ 进行特征值分析确定其中性模态后，最直观地实现 S3T 平衡态的方法是用两个涨落系综成员进行初始化：将第一个系综成员初始化为其中一个中性模态的涨落场，第二个系综成员则初始化为另一个中性模态在适当振幅下的涨落场。

如前所述，中性模态在能量度量下并不正交，因此彼此之间可以相互作用，并通过与平均流（第一累积量）交换能量，在其拍频处产生雷诺应力散度。由于两个中性模态的相互作用，S3T不动点无法在受限非线性$_1$模拟或其对应的直接数值模拟中被完美实现。然而，尽管S3T平衡态在受限非线性$_1$ 模拟中不会收敛到不动点，但由此产生的流场仍接近S3T平衡态的不动点；直接数值模拟中出现的条带持续存在并反映了S3T平衡态的结构，这表明这种接近关系在直接数值模拟中也得以保持。图4展示了直接数值模拟中条带的持续性，而图1 则说明了这些条带与S3T不动点在结构上的相似性。综合来看，这些结果证实，由S3T不动点平衡态以理想形式揭示的动力学构成了直接数值模拟中所见湍流的基础；而直接数值模拟中维持湍流的涨落，正是由S3T所识别的活跃子空间中的少数相同结构组成。

WCC湍流的S3T平衡态不动点解在很大程度上取决于滚流速度对流场脉动分量的平流作用 V 和W。关闭 V 和 W 在涨落方程（2.3*b*）中的平流作用后，原本被流向滚涡平流至通道中心的涨落会立即向边界松弛，平衡态随之崩溃。继而产生的湍流表现为滚-条带结构的混沌运动。需要注意的是，中性模态主要通过从流向平均流的展向剪切中获取能量而得以维持，$U(y,\ z)$，同时能量从这些中性模态传递至流场的滚动分量，以维持WCC湍流的不动点。这表明，S3T平衡态由一种自维持过程（SSP）支撑Waleffe （2003年）。然而，与不稳定的ECS平衡态不同，该S3T平衡态是稳定的，且维持这一平衡态的中性模态依赖于 V 和 W 速度，而非拐点模态。鉴于WCC中的不动点解会在高雷诺数下持续存在，而此时拐点模态将变得奇异，这些模态由V 和 W 速度主导至关重要；这与观测结果相悖，因为观测显示，在高雷诺数下表征WCC湍流的RSS会连续变化。我们发现，这些模态的连续结构取决于

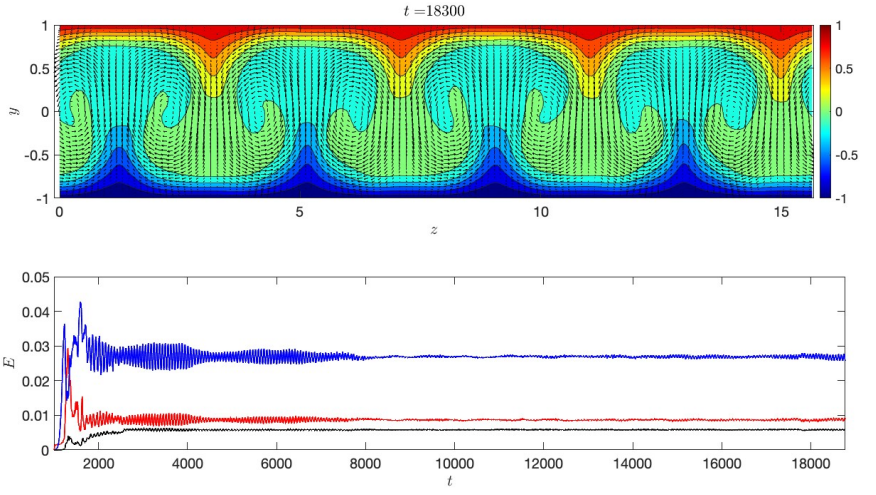

图5：上图：来自 WCC 湍流受限非线性$_8$ 模拟的 $t = 18300$ 时刻流向平均条带 U_s（颜色等级）以及（W，V）的矢量。流向平均流几乎处于 S3T平衡态。下图：同一模拟中条带分量（蓝色）、涨落（红色）和滚动分量（黑色）的能量随时间的演化。模拟从 $t = 1000$时的层流态开始。首先通过施加随机强迫驱动流场进入湍流状态，强迫持续至 $t = 2500$。此后，流场持续处于空间和时间上均呈湍流的状态，直至在$t \approx 3000$ 被抑制，进入上图所示的 S3T 吸引子态。通道宽度为 $L_z = 5\pi$，雷诺数为 $R = 600$。

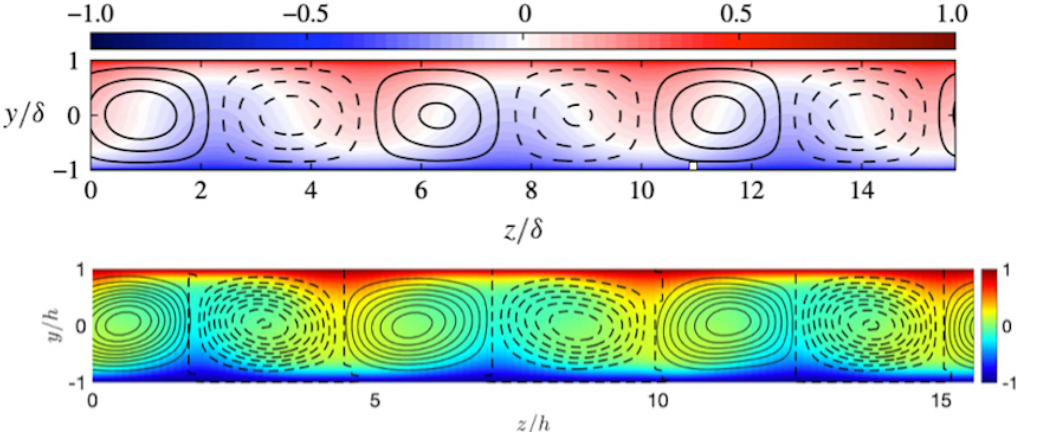

图6：上图：Lee 与 Moser（ U（y，z）处的时间平均流向速度以及（V，W）的时间平均流函数等值线。该结果由 Lee 与 Moser（Lee 与 Moser 2018年）通过 WCC 的直接数值模拟获得，模拟在 $R_\tau = 500$ 的通道中进行，$L = 5\pi$，$L_x = 20\pi$。下图：在 $L_z = 5\pi$ 和 $L_x = 1.75\pi$ 条件下，于 $R = 600$进行的 WCC S3T 模拟所得到的相应时间平均流向平均流。本图中 y 和 z 均为有量纲量。

在流场中， V 和 W 速度将从平均条带传递而来的脉动能量分散开来。

S3T平衡态在宽度接近 $L_z/h = 2.2\pi$的通道中仍然存在。然而，当通道宽度偏离这一最优值时，允许的展向波数将无法容纳滚-条带结构，平衡态因而受挫，并经历一系列分岔。随着展向宽度变化，系统首先转变为周期1状态（例如在 $L_z/h = 1.225$处观察到），随后经倍周期分岔转变为周期2状态（例如在 $L_z/h = 1.25$处出现），最终进入混沌状态。然而，受挫态中出现的混沌主要表现为时间上的混沌：滚-条带结构本身仍保持空间相干且持久，只是在固定的空间位置附近以小振幅不规则振荡。因此，时间平均流场呈现出与 $L_z/h = 2.2\pi$处S3T平衡态定性相似的滚-条带结构。

图5展示了一个代表性示例，其中给出了受限非线性$_8$ 模拟的通道快照，该通道具有 $L_z/h = 5\pi$ ，并展示了从层流初始状态出发，流场中条带、滚动结构和脉动分量能量随时间的演变。滚动结构—条带结构围绕这一时间平均状态的涨落很小。从定性上看，这一 S3T 湍流状态极为逼真地再现了 Lee 与 MoserLee& Moser （2018年）在直接数值模拟中获得的大尺度滚动结构—条带结构；该模拟采用了展向宽度相同、但流向长度不同的通道，且雷诺数显著更高， $R_\tau = 500$。图5 中 S3T 状态的条带在展向波数 4 处达到平衡，不过，在同一通道的其他模拟中，流场最终达到展向波数为 3、且时间平均流如图 6 （下图）所示的 S3T 状态，这表明该通道存在具有多个展向波数的 S3T 平衡态。直接数值模拟中观察到的准平衡态与 S3T 得到的准平衡态相对应，这表明高雷诺数直接数值模拟中的大尺度结构，根本上由与低雷诺数下 S3T 中所识别出的相同扰动模态所支撑。

此通道中的 S3T 模拟渐近趋于图5所示的统计稳态。在持续时间为 $2000 < t < 3000$ 的初始瞬态阶段，统计状态动力学会调整各系综分量中活跃模态的系数，以消除它们之间的交叉相互作用。在所有模拟中都能观察到这一调整阶段（例如，见图7）。经过这一调整阶段后，流场要么收敛到图8所示的不动点，要么达到空间相干且时间调制较弱的状态，如图5所示。即使时间动力学呈现混沌行为，调制仍主要由特征时间尺度为 O(70)的振荡主导。我们将证明，这对应于自维持过程（SSP）的时间特征。图8所示趋近平衡态的过程中，以及所有模拟中，都会出现这一特征振荡周期。这一观察表明，图5中的时变状态代表受到微弱扰动的 S3T平衡态：滚动结构—条带结构并未与其中性模态达到平衡，而是处于附近一个具有有限振幅的振荡状态，其主要周期为滚动结构—条带结构的自然振荡周期。

5. WCC S3T平衡态的稳定性

此前的研究曾通过对该平衡态附近的S3T系统扰动方程进行特征值分析，来确定S3T平衡态的稳定性性质Farrell 与 Ioannou (2012年, 2024年)。此外，本文通过RNL数值模拟趋近平衡态的过程，确定衰减率、振荡

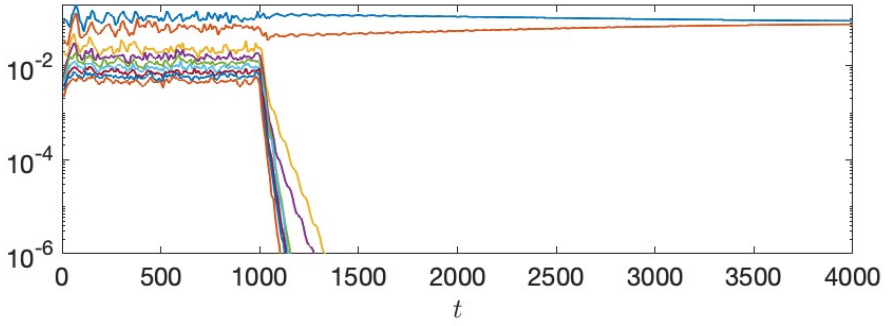

图 7： 涨落协方差的九个特征值的时间序列，$\mathbf{C}$，属于一个受限非线性$_9$ 模拟，随着模拟逐渐收敛至 S3T 平衡态。协方差的非零特征值数量反映了协方差秩。该模拟在 $t < 1000$ 期间受到随机激励，在此期间，协方差秩等于系综成员的数量，但只有两个结构占主导地位。关闭随机激励后，只有这两个主导结构得以维持。这两个结构张成的子空间是该雷诺数下湍流的活跃子空间。9 个系综成员的受限非线性模拟最终收敛至平衡态，该平衡态也在受限非线性$_2$ 中得到，并见图 1。对于一个 $z = 2.2\pi$ 处的通道 $R = 600$。

频率以及该S3T 平衡态阻尼最小模态的结构。

我们已验证，趋近平衡态是 S3T 的固有性质，与 RNL$_N$ 模拟无关。这使我们得以深入了解 S3T系统中的平衡化机制（参见图 5和 8）。例如，图8 展示了 RNL$_2$ 模拟中趋近 WCC 平衡态的过程。在模拟开始的前 5000 个时间单位内，调节器改变两个系综中的模态混合，从而建立等效的正交性，进而抑制它们在系综平均中的相互作用；这反映了特定 RNL$_2$ 模拟的一项性质。相比之下，随后渐近趋近 S3T 平衡态的过程在所有 RNL$_N$模拟中都相同，因此构成一项 S3T 普适性质。图 9 中，我们重新绘出了涨落分量的能量 E_p，展示其趋近图 8 所示平衡态的过程。从图中可知，阻尼最小模态的衰减率约为 $\sigma = 0.0015$ ，该 S3T 模态的周期约为 70。我们已确认，条带振幅和滚流速度的振幅以与涨落能量相同的速率衰减至各自的平衡值。这是 S3T 稳定性的一项性质，其变量包括流向平均流（第一累积量）和涨落的二次协方差。因此，当趋近 S3T 平衡态时，流向平均流振幅趋向其平衡值的衰减率，与涨落二次协方差变量趋向其平衡值的衰减率相同。图 10 展示了 RNL$_9$ 模拟中趋近平衡态的过程。在该图中，我们将条带、滚流速度分量的涨落以及涨落能量的涨落乘以衰减率 $\sigma = 0.0015$ ，并对其振幅进行归一化，以清晰展示流场三个分量共有的振荡周期，并说明条带、涨落和流场的滚动分量具有相同的振荡周期，即自维持过程的周期。

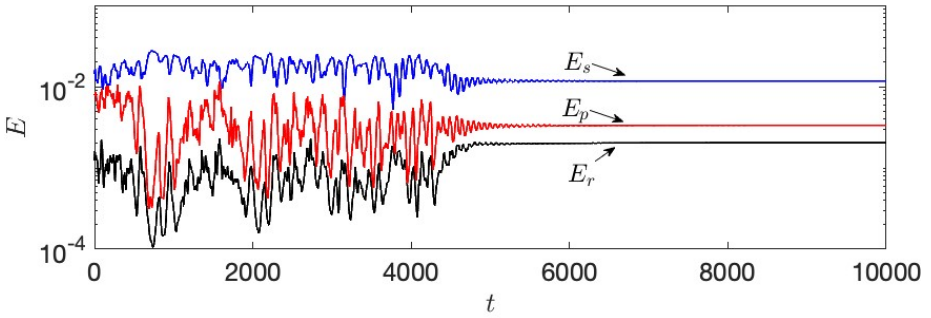

图8： 通过从直接数值模拟获得的湍流状态出发进行受限非线性模拟，收敛至图1 所示的S3T 平衡态。图中显示了条带能量密度$E_s = [U_s^2]_{y,\ z}/2$ 以蓝色表示；扰动能量密度 $E_p = [|\mathbf{u}'|^2]_{x,\ y,\ z}/2$ 以红色表示；滚转能量密度$E_r = [V^2 + W^2]_{y,\ z}/2$以黑色表示。对于 $z = 2.2\pi$ 处的通道 $R = 600$

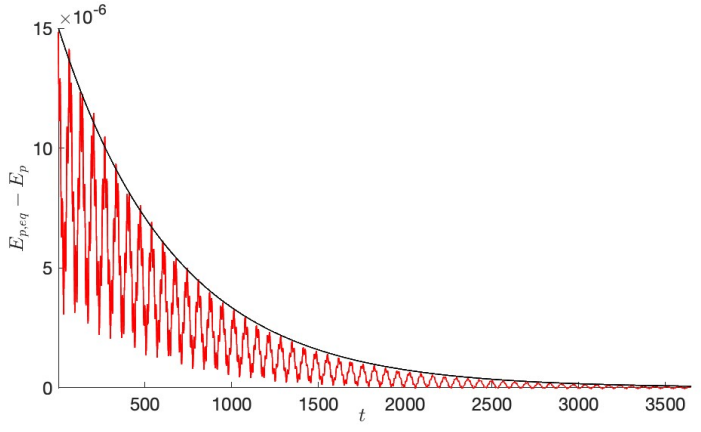

图9： 涨落能量， E_p，在受限非线性模拟中最终趋近S3T平衡态期间的变化。本图截取自图 8所示受限非线性模拟中 E_p 的演化片段。黑色曲线表明，系统以速率 $\sigma \approx 0.0015$ 呈指数形式趋近平衡态，主振荡的周期与自维持过程的周期相同，为 ≈ 70。

在混沌S3T态中也观察到了周期大致相同的同类自维持过程振荡，例如在图 $t > 10000$ 所示 $L = 5\pi$ 通道中，时间 $L = 5\pi$ 的情形。所有情况下，流场都由两个结构主导，例如图 7清楚显示了这一点；在任何时刻，自维持过程都由滚动结构与这两个主导扰动模态之间的相互作用维持，这两个模态已在我们的 S3T分析中得到识别。

6. 结论

壁面剪切流中湍流最简单的表现形式是 WCC 湍流，它呈现出清晰的不动点结构。若想通过先从理论上理解 WCC 湍流背后的不动点，进而建立剪切流湍流理论，却未能成功，其根源在于未能识别该不动点的解析结构。

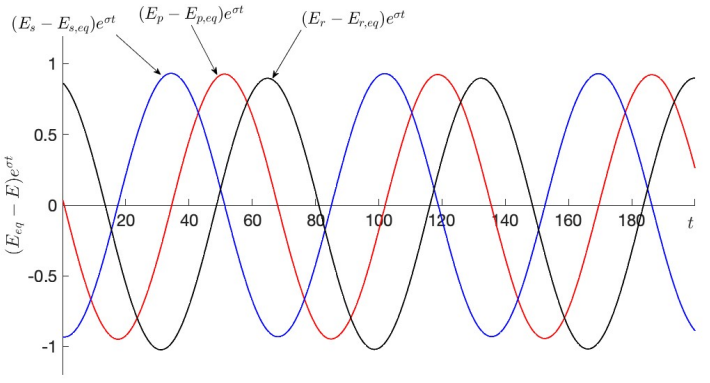

图10：在受限非线性$_9$ 模拟中趋近平衡态时，归一化条带（$E_s - E_{s,eq}$）$e^{\sigma t}$（蓝色）、涨落能量（$E_p - E_{p,eq}$）$e^{\sigma t}$（红色）以及滚流速度（$E_r - E_{r,eq}$）$e^{\sigma t}$（黑色）。流场的所有分量都以相同速率 σ趋近平衡态。此趋近速率与图9所示受限非线性$_2$ 模拟中得到的速率相同。振荡周期也与受限非线性$_2$ 模拟中的相同，为 ≈ 70。请注意，当偏离平衡态的程度较小时，$E_s - E_{s,eq}$ 与$U_s - U_{s,eq}$, $E_r - E_{r,eq}$ 与 $V - V_{eq}$ 和 $W - W_{eq}$呈线性关系，而$E_p - E_{p,eq}$ 则与涨落速度偏离平衡态值的程度呈二次关系。此图表明，条带振幅、涨落能量和滚流分量的振幅均呈现自维持过程的特征周期。

这种失败又源于长期以来人们习惯使用以速度状态变量表示的纳维–斯托克斯方程，分析剪切流湍流的动力学；在这种表述中，WCC 湍流背后的不动点没有解析表达式。然而，将纳维–斯托克斯方程表述为 SSD 后，WCC 湍流背后的不动点解便可立即获得：它是 SSD 发生线性模态失稳后形成的有限振幅平衡态。这一解既为 WCC 湍流提供了解析解，也给出了解析转捩机制。一旦获得这一解，便可分析转捩至 WCC 湍流并维持其存在的整个动力学过程，包括支撑该湍流状态的特征模态背后的结构及物理机制。

本研究采用纳维–斯托克斯方程的 S3T SSD 表述，证明 WCC湍流围绕一个具有稳健吸引性的平衡不动点 SSD 状态组织起来。该不动点状态由三个经解析识别的要素构成：流向平均流（第一累积量），以及一对支撑二阶累积量的中性特征模态。因此，这种湍流是三阶的，且其全部三种结构均可在 S3T SSD 框架中进行解析表征。此外，值得注意的是，极限环和混沌湍流态本质上也都是三阶的，主要由第一累积量和两个李雅普诺夫指数/弗洛凯指数为零的涨落结构支撑。

WCC湍流不动点的三阶动力学构成了 S3T SSD 中的整个湍流状态。在纳维–斯托克斯方程中，此外还存在一组由非线性散射维持的流向波数，它们本质上寄生于 S3T 状态之上，不会显著影响动力学。通过在 S3T闭合中加入时空白噪声随机参数化，以刻画这种非线性散射，可以研究这部分波数的结构（Nikolaidis & Ioannou，2022年）。在

高雷诺数下，湍流边界层会在横向边界处形成，但它们不会对其Jim´enez & Pinelli（1999）附近以外的湍流产生显著影响。

WCC的不动点湍流揭示了自维持过程最简单的表现形式：一个RSS（第一累积量）由第一累积量的两个中性稳定模态支撑。这些模态并非传统的拐点模态，因为它们的动力学取决于RSS的滚动分量对其的平流；若无该滚动分量，这些模态便不会存在。不动点湍流的存在有赖于这些模态，也有赖于RSS；二者相互支撑。它们共同构成S3T不动点湍流状态。对于给定的其他参数，S3T不动点湍流得以存在的条件之一，是对S3T RSS的展向波数施加量子化条件。在展向受限通道中，不动点存在于一段展向通道宽度范围内；超出此范围，不动点S3T湍流状态则会演变为极限环或混沌态。我们将这些非不动点状态称为受挫态，因为S3T系统若非从不动点出发，总需要花一段时间寻找不动点；随着其在相空间中搜索不动点，系统会呈现混沌或极限环行为。当通道无法满足支撑这些中性模态所需的存在量子化条件，导致不动点不存在时，混沌搜索便永无止境，因此搜索过程本身就成为湍流的统计状态。这些湍流状态在直接数值模拟中十分常见（参见Hamilton 等（1995年））。当通道宽度足够大时，量子化条件便不再起作用，这解释了为何只有在足够宽的通道中研究湍流时，才发现了不动点湍流状态。

总之，S3T的不动点与模态，以及第一累积量的伴随模态，是构建剪切流湍流解析解的基本基础。该基础支撑着剪切流中最简单的湍流——WCC中的不动点湍流。极限环和混沌湍流态均构建于与基本不动点湍流相同的三阶基本结构之上。所有情况下的组成要素都是一阶S3T滚动剪切结构（第一累积量）和涨落的协方差；后者由两个特征模态组成，具体为Floquet模态或Lyapunov模态，取决于展向量子化是否允许存在组织性统计状态动力学特征模态。

7. 致谢

作者感谢Myoungkyu Lee教授进行了富有见地的讨论。本研究部分由欧洲研究理事会通过Caust项目（ERC-AdG-101018287）资助。

REFERENCES

Avsarkisov, V., Hoyas, S., Oberlack, M. & Garcia-Galache, J. P. 2014 中等高雷诺数下的湍流平面库埃特流。 *J. Fluid Mech.* **751**, R1。Bech, K. H. & Andersson, H. I. 1994 *Very-Large-Scale Structures in DNS*, 第13–24页。多德雷赫特：施普林格·荷兰。Bretheim, J. U., Meneveau, C. & Gayme, D. F. 2015 半通道湍流带限受限非线性模型中的标准对数平均速度分布。*Phys. Fluids* **27**, 011702。Farrell, B. F., Gayme, D. F. & Ioannou, P. J. 2017*a* 壁面湍流的统计状态动力学方法。 *Phil. Trans. R. Soc. A* **375** （2089）, 20160081。

Farrell, B. F. & Ioannou, P. J. 2003 湍流射流的结构稳定性。 *J. Atmos. Sci.* **60**, 2101 2118–。
Farrell, B. F. & Ioannou, P. J. 2012 湍流壁面约束剪切流中流向滚涡和条带的动力学。
J. Fluid Mech. **708**, 149–196。Farrell, B. F. & Ioannou, P. J. 2017 基于统计状态动力学的库埃特流中维持和调控湍流的物理机制分析。 *Phys. Rev. Fluids* **2** （8）, 084608。Farrell, B. F. & Ioannou,
P. J. 2024 基于统计状态动力学的壁面约束湍流平均统计状态稳定性研究。 *Phys. Rev. Fluids* **9**, 024605。
Farrell, B. F. Ioannou P. J. Jiménez J. Constantinou N. C. Lozano-Durán A. &, , ,
Nikolaidis M.-A. 2016
, , , , , , 平面泊肃叶流中大尺度运动结构和机制的统计状态动力学研究。 *J. Fluid Mech.* **809**, 290–315。Farrell, B. F., Ioannou, P. J. & Nikolaidis, M.-A. 2017*b* 转捩前库埃特流中背景湍流诱导的滚涡–条带结构不稳定性。

Phys. Rev. （）, 。
Fluids **2** 3 034607
Hamilton, J. M., Kim, J. & Waleffe, F. 1995 近壁湍流结构的再生机制。 *J. Fluid Mech.* **287**, 317–348。
Hoyas, Sergio & Oberlack Martin 2024 $Re_\tau = 2000$ *Journal*, 高达。湍
of Fluid Mechanics **987** 9
流库埃特流。R 。Jiménez,
J. & Pinelli A. 1999 *J. Fluid Mech.*, 近壁湍流的自
389 335 359
维持循环。, –。Kim, J., Moin, P. & Moser, R. 1987 低雷诺数下充分发展管道流中的湍流统计特性。
J. Fluid Mech. **177**, 133–166。Kitoh, O., Nakabyashi, K. & Nishimura, F. 2005 平面库埃特流平均速度和湍流特性的实验研究：低雷诺数效应与大型纵向涡结构。 *Journal of Fluid Mechanics* **539**, 199–227。
Kitoh, O. & Umeki, M. 2008 湍流平面库埃特流核心区域大尺度条带结构的实验研究。
Physics of Fluids **20** （2）, 025107。Komminaho, J., Lundbladh, A. & Johansson, A. 1996平面湍流库埃特流中的超大尺度结构。 *J. Fluid Mech.* **320**, 259–285。Lee, Myoungkyu & Moser,
Robert D. 2018 湍流平面库埃特流中的极大尺度运动。 *Journal of Fluid Mechanics* **842**, 128–145。
Malkus, W. V. R. 1956 湍流剪切流理论概要。 *J. Fluid Mech.* **1**, 521–539。Monin, A. S. & Yaglom,
A. M. 1973 *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, , 第1卷。麻省理工学院出版社。
Nikolaidis, M.-A. 2024 用于平面平行流的矢量化纳维–斯托克斯方程集合直接数值模拟代码, arXiv: https://arXiv.org/abs/2306.12739。Nikolaidis, M.-A., Farrell, B. F. & Ioannou, P. J. 2018 非线性在平面库埃特流中维持湍流的机制。 *J. Phys.: Conf. Ser.* **1001**, 012014。Nikolaidis,
Marios-Andreas & Ioannou, Petros J. 2022 低雷诺数平面库埃特湍流的同步。
Journal of Fluid Mechanics **933**, A5。Nikolaidis, Marios-Andreas, Ioannou, Petros J. & Farrell,
Brian F. 2024 基于涨落协方差的泊肃叶流湍流滚涡–条带动力学研究。 *Journal of*
Fluid Mechanics **988** 14 , A 。
Papavassiliou, Dimitrios V. & Hanratty, Thomas J. 1997 对湍流平面库埃特流中观测到的大尺度结构的解释。*Fluid Flow* **18** 1 55 69 *International Journal of Heat and* （）, –。
Pirozzoli, Sergio, Bernardini, Matteo & Orlandi, Paolo 2014 高雷诺数库埃特流中的湍流统计特性。
Journal of Fluid Mechanics **758**, 327–343。Reynolds, W. C. & Tiederman, W. G. 1967 湍流管道流的稳定性及其在Malkus理论中的应用。 *J. Fluid Mech.* **27**, 253–272。Thomas, V., Farrell, B. F.,
Ioannou, P. J. & Gayme, D. F. 2015 自维持湍流的最小模型。 *Phys. Fluids* **27**, 105104。Thomas,
V., Lieu, B. K., Jovanović, M. R., Farrell, B. F., Ioannou, P. J. & Gayme,
D. F. 2014 平面库埃特流受
限非线性模型中的自维持湍流。 *Phys. Fluids* **26**, 105112。Tillmark, Nils & Alfredsson,
P. Henrik 1995 湍流平面库埃特流中的结构

通过相关测量获得。在 *Advances in Turbulence V*（编者：Roberto Benzi），第502–507页。多德雷赫特：施普林格·荷兰。Tillmark, Nils & Alfredsson, P. Henrik 1998 湍流平面库埃特流中的大尺度结构。载于 *Advances in Turbulence VII*（编者：Uriel Frisch），第59–62页。多德雷赫特：施普林格·荷兰。Townsend, A. A. 1961 平衡层与壁面湍流。 *Journal of Fluid Mechanics* **11** 1 97 120 （），–

。Townsend, A. A. 1976 *The structure of turbulent shear flow*，第 2 版。剑桥大学出版社。Tsukahara, T., Kawamura, H & Shingai, K. 2006 湍流库埃特流的直接数值模拟，重点研究核心区域中的大尺度结构。 *Journal of Turbulence* **7**，N19。Waleffe, F. 2003 平面剪切流中精确相干结构的同伦。 *Phys. Fluids* **15**，1517 1534–。