离子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的整体希尔伯特展开

李富才和王义春

Abstract. 我们证明了 $\mathbb{R}^3$ 中离子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的希尔伯特展开在全时间范围内有效；该系统是描述稀薄碰撞等离子体中离子动力学的基本模型。当克努森数趋于零时，我们严格推导出支配全局光滑无旋离子流的可压缩 Euler-Poisson 系统。截断的希尔伯特展开呈现出多层次的数学结构：展开系数满足线性双曲系统，而余项方程则与描述静电势的非线性泊松方程耦合。这要求我们采用精细的椭圆估计来处理指数非线性，并对势相关项进行一些新的封闭, ∞ 估计。

arXiv:2601.02006v1 [math.AP] 5 Jan 2026

1. Introduction

1.1. 模型与我们的结果。稀薄碰撞等离子体中离子粒子的动力学演化由离子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统支配：

$$\begin{cases} \partial_t F + v\cdot\nabla_x F - \nabla_x\phi\cdot\nabla_v F = \dfrac{1}{\varepsilon}Q(F,F), \\ \Delta\phi = e^{\phi} - \rho, \quad \rho = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} F\mathrm{d}v, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$F = F(t,\ x,\ v)$ 是离子分布函数，时间为 $t \geq 0$，位置为 $x = (x^1,\ x^2,\ x^3) \in \mathbb{R}^3$，速度为 $v = (v^1,\ v^2,\ v^3) \in \mathbb{R}^3$。自洽静电势 $\phi(t,\ x)$ 通过式（1.1）中的非线性泊松方程与 $F(t,\ x,\ v)$ 耦合，并通过著名的麦克斯韦-玻尔兹曼定律纳入电子密度 e^{ϕ}。参数 $\varepsilon > 0$ 称为克努森数，与平均自由程成正比。玻尔兹曼碰撞算子 $Q(\cdot,\ \cdot)$ 定义为

$$\begin{aligned} Q(F_1,F_2) &= \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2} |(u-v)\cdot\omega|[F_1(u')F_2(v') - F_1(u)F_2(v)]\mathrm{d}\omega\mathrm{d}u \\ &= Q_{\mathrm{gain}}(F_1,F_2) - Q_{\mathrm{loss}}(F_1,F_2), \end{aligned}$$

其中，碰撞前速度 $(u,\ v)$ 和碰撞后速度 $(u',\ v')$ 满足动量守恒和能量守恒：

$$u + v = u' + v', \quad |u|^2 + |v|^2 = |u'|^2 + |v'|^2,$$

这意味着

$$u' = u - [(u-v)\cdot\omega]\omega, \quad v' = v + [(u-v)\cdot\omega]\omega, \quad \omega \in \mathbb{S}^2.$$

形式上，Bardos 等人 [2] 在无质量电子极限（电子与离子质量比趋于零）下，从双极 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统推导出了一个与 (1.1) 类似、电子温度随时间变化的系统。本文关注电子温度归一化后的系统 (1.1)。Li-Yang-Zhong [38] 证明了系统 (1.1) 的强解在 $\mathbb{R}^3$中的存在唯一性。在 [37], 中，我们证明了系统 (1.1) 在周期盒中的经典解整体存在且指数衰减。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 82D10, 35Q83, 76P05, 76N15.*Key words and phrases.* 离子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统，非线性泊松方程，全局 Hilbert 展开，可压缩离子 Euler-Poisson 系统。

在流体尺度上，离子动力学由可压缩离子 Euler-Poisson 系统控制：

$$\begin{cases} \partial_t \rho_0 + \nabla \cdot (\rho_0 u_0) = 0, \\ \partial_t u_0 + (u_0 \cdot \nabla) u_0 + \dfrac{1}{\rho_0} \nabla p_0 + \nabla \phi_0 = 0, \\ \Delta \phi_0 = e^{\phi_0} - \rho_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中， ρ_0 和 u_0 分别是流体在时刻 $t \geq 0$、位置 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$处的密度和速度。Guo-Pausader [25] 证明了在均匀状态 $[1, 0]$ 附近，具有小幅无旋扰动的方程 (1.2) 存在光滑解 $[\rho_0, u_0]$，其中扰动属于 $\mathbb{R}^3$。因此，一个自然的问题随之而来：当克努森数 $\varepsilon \to 0$ 时，我们能否证明 (1.1) 收敛到 (1.2)，从而明确二者之间的联系？本文旨在对此问题给出肯定的回答。我们将证明，当 $\varepsilon \to 0$时，离子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统 (1.1) 的强解在整个时间范围内收敛到离子 Euler-Poisson 系统 (1.2) 的经典解。这为离子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统 (1.1) 中希尔伯特展开在全空间 $\mathbb{R}^3$内的整体有效性提供了首个严格论证。

我们取截断希尔伯特展开

$$F = F_0 + \varepsilon F_1 + \cdots + \varepsilon^{2k-1} F_{2k-1} + \varepsilon^k R, \tag{1.3}$$

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \cdots + \varepsilon^{2k-1} \phi_{2k-1} + \varepsilon^k \phi_R, \tag{1.4}$$

其中， $[F_0, \phi_0]$ 为首阶项， $[F_i, \phi_i]\,(1 \leq i \leq 2k-1)$为系数， $[R, \phi_R]$ 为余项。将 (1.3) 和 (1.4) 代入 (1.1)，得到

$$\begin{cases} \partial_t \Big(\displaystyle\sum_{n=0}^{2k-1} \varepsilon^n F_n + \varepsilon^k R \Big) + v \cdot \nabla_x \Big(\sum_{n=0}^{2k-1} \varepsilon^n F_n + \varepsilon^k R \Big) \\ \quad - \nabla_x \Big(\displaystyle\sum_{n=0}^{2k-1} \varepsilon^n \phi_n + \varepsilon^k \phi_R \Big) \cdot \nabla_v \Big(\sum_{n=0}^{2k-1} \varepsilon^n F_n + \varepsilon^k R \Big) \\ \quad = \dfrac{1}{\varepsilon} Q \Big(\displaystyle\sum_{n=0}^{2k-1} \varepsilon^n F_n + \varepsilon^k R, \sum_{n=0}^{2k-1} \varepsilon^n F_n + \varepsilon^k R \Big), \\ \Delta \Big(\displaystyle\sum_{n=0}^{2k-1} \varepsilon^n \phi_n + \varepsilon^k \phi_R \Big) = \exp \Big(\sum_{n=0}^{2k-1} \varepsilon^n \phi_n + \varepsilon^k \phi_R \Big) - \int_{\mathbb{R}^3} \Big(\sum_{n=0}^{2k-1} \varepsilon^n \phi_n + \varepsilon^k \phi_R \Big) \mathrm{d}v. \end{cases} \tag{1.5}$$

我们比较 (1.5) 中参数 ε 的不同次幂的系数，得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon} : Q(F_0, F_0) = 0, \\ &\varepsilon^0 : \partial_t F_0 + v \cdot \nabla_x F_0 - \nabla_x \phi_0 \cdot \nabla_v F_0 = Q(F_1, F_0) + Q(F_0, F_1), \\ &\qquad \Delta \phi_0 = e^{\phi_0} - \int_{\mathbb{R}^3} F_0 \mathrm{d}v, \\ &\varepsilon^1 : \partial_t F_1 + v \cdot \nabla_x F_1 - \nabla_x \phi_0 \cdot \nabla_v F_1 = Q(F_2, F_0) + Q(F_0, F_2) + Q(F_1, F_1), \\ &\qquad \Delta \phi_1 = e^{\phi_0} \phi_1 - \int_{\mathbb{R}^3} F_1 \mathrm{d}v, \\ &\qquad \cdots \\ &\varepsilon^n : \partial_t F_n + v \cdot \nabla_x F_n - \nabla_x \phi_0 \cdot \nabla_v F_n - \nabla_x \phi_n \cdot \nabla_v F_0 \\ &\qquad\quad = \sum_{i,j \geq 0, i+j=n+1} Q(F_i, F_j) + \sum_{i,j \geq 1, i+j=n} \nabla_x \phi_i \cdot \nabla_v F_j, \\ &\qquad \Delta \phi_n = e^{\phi_0} A_n - \int_{\mathbb{R}^3} F_n \mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{1.6}$$

其中,

$$A_n = e^{-\phi_0}\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\varepsilon^n}\Big|_{\varepsilon=0}\left(\exp\left\{\phi_0+\varepsilon\phi_1+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}\right\}\right),\quad n=0,\ldots,2k-1.$$

注 1.1. 形式上，注意到以下差值的阶为 ε^{2k}:

$$\begin{aligned}&\exp\left\{\phi_0+\varepsilon\phi_1+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}+\varepsilon^{2k}\phi_{2k}+\cdots\right\}-\exp\left\{\phi_0+\varepsilon\phi_1+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}\right\}\\ =&\exp\left\{\phi_0+\varepsilon\phi_1+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}\right\}\left(\exp\left\{\varepsilon^{2k}\phi_{2k}+\cdots\right\}-1\right)\\ \sim&\varepsilon^{2k}\phi_{2k}\exp\left\{\phi_0+\varepsilon\phi_1+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}\right\}.\end{aligned}$$

因此，对参数 $\varepsilon>0$ 取$2k-1$)阶泰勒多项式 T_{2k-1}，可得

$$\begin{aligned}&T_{2k-1}\big(\exp\left\{\phi_0+\varepsilon\phi_1+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}+\varepsilon^{2k}\phi_{2k}+\cdots\right\}\big)\\ =&T_{2k-1}\big(\exp\left\{\phi_0+\varepsilon\phi_1+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}\right\}\big)\\ :=&T_{2k-1}(H(\varepsilon))\\ =&H(0)+\varepsilon H'(0)+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\frac{H^{2k-1}(0)}{(2k-1)!}\\ :=&e^{\phi_0}(A_0+\varepsilon A_1+\cdots+\varepsilon^{2k-1}A_{2k-1}),\end{aligned}$$

这里，我们将$\exp\left\{\phi_0+\varepsilon\phi_1+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}\right\}$记作 $H(\varepsilon)$。通过直接计算可得

$$\begin{aligned}&A_0=1,\ \ A_1=\phi_1,\ \ A_2=\phi_2+\frac{\phi_1^2}{2},\\ &A_3=\phi_3+\phi_1\phi_2+\frac{\phi_1^3}{6},\\ &\quad\cdots\\ &A_n=\phi_n+\phi_{n-1}\phi_1+\phi_{n-2}\frac{\phi_1^2}{2!}+\cdots+\phi_2\frac{\phi_1^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{\phi_1^n}{n!}+\phi_{n-2}\phi_2+\cdots\\ &\quad=\phi_n+\sum_{\varkappa}C_{\varkappa}\prod_{1\le j\le n-1}(\phi_j)^{\varkappa_j},\qquad\sum_{1\le j\le n-1,\varkappa_j\in\mathbb{N}_+}j\varkappa_j=n.\end{aligned}$$

这里，$\varkappa=[\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{n-1}]$ 和 $C_{\varkappa}>0$。

由 (1.6) 中的第 $\frac{1}{\varepsilon}$ 步和第 ε^0 步可知，首阶项 F_0 由局部麦克斯韦分布 μ给出:

$$F_0(t,x,v)=\mu(t,x,v)=\frac{\rho_0(t,x)}{(2\pi\theta_0(t,x))^{\frac{3}{2}}}\exp\Big\{-\frac{|v-u_0(t,x)|^2}{2\theta_0(t,x)}\Big\},\quad \theta_0(t,x)=K\rho_0^{\frac{2}{3}}(t,x),\tag{1.7}$$

对于某个常数 $K>0$，其中

$$\int_{\mathbb{R}^3}F_0\mathrm{d}v=\rho_0,\quad \int_{\mathbb{R}^3}vF_0\mathrm{d}v=\rho_0u_0,\quad \int_{\mathbb{R}^3}|v|^2F_0\mathrm{d}v=\rho_0|u_0|^2+3\rho_0\theta_0.$$

[5]注意到，$[\rho_0,u_0]$ 满足可压缩离子 Euler-Poisson 系统 (1.2)，其中 $p_0=\rho_0\theta_0=K\rho_0^3$。

接下来我们确定系数 $[F_i,\phi_i]$ $(1\le i\le 2k-1)$。定义围绕 $F_0=\mu$ 的线性化玻尔兹曼算子 L 和 Γ为

$$Lg=-\frac{1}{\sqrt{\mu}}\{Q(\mu,\sqrt{\mu}g)+Q(\sqrt{\mu}g,\mu)\}=\nu(\mu)g-K_\mu g,\tag{1.8}$$

$$\Gamma(g_1,\ g_2)=\frac{1}{\sqrt{\mu}}Q(\sqrt{\mu}g_1,\sqrt{\mu}g_2),\tag{1.9}$$

其中 $\nu(\mu)=\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}|(u-v)\cdot\omega|\mu(u)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}u_\circ$ L, $\mathcal{N}(L)$ 的零空间是 $L^2(\mathbb{R}^3_v)$ 的五维闭子空间，其标准正交基为

$$\chi_0(v)=\frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\sqrt{\mu},$$

$$\chi_i(v)=\frac{v^i-u_0^i}{\sqrt{\rho_0\theta_0}}\sqrt{\mu},\quad i=1,2,3,$$
$$\chi_4(v)=\frac{1}{\sqrt{6\rho_0}}\Big\{\frac{|v-u_0|^2}{\theta_0}-3\Big\}\sqrt{\mu}.$$

有 $\int_{\mathbb{R}^3}\chi_i\chi_j\mathrm{d}v=\delta_{ij}$ 对于 $0\le i,\ j\le 4$。我们将 $\mathbf{P}$ 记为在 $\mathcal{N}(L)$ 上的 L^2 正交投影。

利用 L^{-1} 的性质：$\mathcal{N}^\perp(L)\to\mathcal{N}^\perp(L)$，我们基于 (1.6) 和 $F_0=\mu$ 正式推导出展开系数 $F_1,\dots,F_{2k-1}$。我们首先对每个 $i\ge 1$ 定义

$$\mathbf{P}\Big(\frac{F_i}{\sqrt{\mu}}\Big)\equiv\frac{\rho_i}{\sqrt{\rho_0}}\chi_0+\sum_{j=1}^{3}\sqrt{\frac{\rho_0}{\theta_0}}u_i^j\cdot\chi_j+\sqrt{\frac{3\rho_0}{2}}\frac{\theta_i}{\theta_0}\chi_4. \tag{1.10}$$

容易验证

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}F_i\mathrm{d}v=&\rho_i,\\
\int_{\mathbb{R}^3}(v^k-u_0^k)F_i\mathrm{d}v=&\int_{\mathbb{R}^3}\frac{v^k-u_0^k}{\sqrt{\rho_0\theta_0}}\sqrt{\mu}\sqrt{\rho_0\theta_0}\frac{F_i}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}v\\
=&\sqrt{\rho_0\theta_0}\int_{\mathbb{R}^3}\chi_k\sqrt{\frac{\rho_0}{\theta_0}}u_i^k\chi_k\mathrm{d}v\\
=&\rho_0u_i^k,\quad k=1,2,3,\\
\int_{\mathbb{R}^3}|v-u_0|^2F_i\mathrm{d}v=&\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|v-u_0|^2-3\theta_0}{\sqrt{6\rho_0}\theta_0}\sqrt{\mu}\sqrt{6\rho_0}\theta_0\frac{F_i}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}v+3\theta_0\rho_i\\
=&\sqrt{6\rho_0}\theta_0\sqrt{\frac{3\rho_0}{2}}\frac{\theta_i}{\theta_0}\int_{\mathbb{R}^3}\chi_4^2\mathrm{d}v+3\theta_0\rho_i\\
=&3\theta_i\rho_0+3\theta_0\rho_i.
\end{aligned}$$

将 (1.6) 中关于 F_{k+1} 的方程投影到 $\mathcal{N}(L)$ 上，我们得到关于 $[\rho_{k+1},u_{k+1},\theta_{k+1}]$ 的方程：

$$\partial_t\rho_{k+1}+\nabla\cdot(\rho_0u_{k+1}+\rho_{k+1}u_0)=0, \tag{1.11}$$
$$\rho_0\{\partial_tu_{k+1}+(u_{k+1}\cdot\nabla)u_0+(u_0\cdot\nabla)u_{k+1}+\nabla\phi_{k+1}\}-\frac{\rho_{k+1}}{\rho_0}\nabla(\rho_0\theta_0)+\nabla(\rho_0\theta_{k+1}+\theta_0\rho_{k+1})=\mathfrak{f}_k, \tag{1.12}$$
$$\rho_0\{\partial_t\theta_{k+1}+\frac{2}{3}(\theta_{k+1}\nabla\cdot u_0+\theta_0\nabla\cdot u_{k+1})+u_0\cdot\nabla\theta_{k+1}+u_{k+1}\cdot\nabla\theta_0\}=\frac{1}{3}\mathfrak{g}_k, \tag{1.13}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}_k:=&-\partial_j\int_{\mathbb{R}^3}\Big\{(v^i-u_0^i)(v^j-u_0^j)-\delta_{ij}\frac{|v-u_0|^2}{3}\Big\}F_{k+1}\mathrm{d}v-\sum_{\substack{i+j=k+1\\ i,j\ge1}}\rho_j\nabla_x\phi_i,\\
\mathfrak{g}_k:=&-\partial_i\Big\{\int(v^i-u_0^i)(|v-u_0|^2-5\theta_0)F_{k+1}\mathrm{d}v+2u_0^j\int\Big((v^i-u_0^i)(v^j-u_0^j)-\delta_{ij}\frac{|v-u_0|^2}{3}\Big)F_{k+1}\mathrm{d}v\Big\}\\
&-2u_0\cdot\mathfrak{f}_k-\sum_{\substack{i+j=k+1\\ i,j\ge1}}(\rho_0u_j+\rho_ju_0)\nabla_x\phi_i.
\end{aligned}$$

这里，$\mathfrak{f}_k$ 和 $\mathfrak{g}_k$ 的下标 k 强调了它们仅依赖于 $0\le i\le k$时的 F_i 和 ϕ_i。事实上，$\frac{F_{k+1}}{\sqrt{\mu}}$的微观部分由（1.6）中的 F_k 方程确定：

$$\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}\Big(\frac{F_{k+1}}{\sqrt{\mu}}\Big)=L^{-1}\Bigg(-\frac{\{\partial_t+v\cdot\nabla_x\}F_k-\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\ge0}}\nabla_x\phi_i\cdot\nabla_vF_j-\sum_{\substack{i+j=k+1\\ i,j\ge1}}Q(F_i,F_j)}{\sqrt{\mu}}\Bigg).$$

在第 2 节中，我们将讨论系数 F_i 的存在性和正则性。

利用 (1.6)，消去 (1.5) 两边的 F_0、……、F_{2k-2} 方程，我们得到 $[R,\phi_R]$ 的余项方程如下：

$$\begin{cases} \{\partial_t + v\cdot\nabla_x - \nabla_x\phi_0\cdot\nabla_v\}R - \nabla_x\phi_R\cdot\nabla_v F_0 - \dfrac{1}{\varepsilon}\{Q(F_0,R)+Q(R,F_0)\} \\ \quad = \varepsilon^{k-1}Q(R,R) + \displaystyle\sum_{i=1}^{2k-1}\varepsilon^{i-1}\{Q(F_i,R)+Q(R,F_i)\} + \varepsilon^k\nabla_x\phi_R\cdot\nabla_v R \\ \qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{2k-1}\varepsilon^i\{\nabla_x\phi_i\cdot\nabla_v R + \nabla_x\phi_R\cdot\nabla_v F_i\} + \varepsilon^{k-1}A, \\ \Delta(\varepsilon^k\phi_R) = \exp\{\phi_0+\varepsilon\phi_1+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}+\varepsilon^k\phi_R\} - \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^k R\,\mathrm{d}v \\ \qquad\qquad - T_{2k-1}\big(\exp\{\phi_0+\varepsilon\phi_1+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}\}\big), \end{cases} \tag{1.14}$$

其中，$T_{2k-1}(y(\varepsilon))$ 是函数 $y(\varepsilon)$ 的（$2k-1$）阶泰勒多项式，并且

$$A = -\{\partial_t + v\cdot\nabla_x\}F_{2k-1} + \sum_{\substack{i+j\geq 2k\\ 1\leq i,j\leq 2k-1}}\varepsilon^{i+j-2k}Q(F_i,F_j) + \sum_{\substack{i+j\geq 2k-1\\ 0\leq i,j\leq 2k-1}}\varepsilon^{i+j-2k+1}\nabla_x\phi_i\cdot\nabla_v F_j. \tag{1.15}$$

本文的核心是在非线性动力学中通过（1.14）控制余项 R。为此，我们引入一个全局麦克斯韦分布

$$\mu_M(v) = \frac{1}{(2\pi\theta_M)^{\frac{3}{2}}}\exp\Big\{-\frac{|v|^2}{2\theta_M}\Big\}, \tag{1.16}$$

其中常数 θ_M 满足 $\theta_M \leq \inf_{t,x}\theta_0(t,x) \leq \sup_{t,x}\theta_0(t,x) \leq 2\theta_M$，并定义

$$R = \sqrt{\mu}f = \frac{\sqrt{\mu_M}}{w(v)}h, \quad w(v) = (1+|v|^2)^\beta \text{ for } \beta \geq \frac{7}{2}. \tag{1.17}$$

我们将分别对 f 和 h 建立具体估计，以确保离子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统（1.1）中的希尔伯特展开（1.3）和（1.4）在全局范围内成立。

记号。本文中，我们将 Hölder 空间记为 $C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^3_x)$，其中 $(m,\alpha)\in\mathbb{N}\times(0,1)$。对于每个非负整数 m 和实数 $1\leq p\leq\infty$，我们用 $W^{m,p}$ 表示 $(x,v)\in\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v$ 或 $x\in\mathbb{R}^3_x$ 上的标准非齐次索伯列夫空间，并将 $H^s = W^{s,2}$ 记为范数 $\|\cdot\|_{H^s}$，或简写为 $\|\cdot\|_s$。特别地，$L^2 = H^0$ 配备范数 $\|\cdot\|_{L^2}$，或简写为 $\|\cdot\|_0$。对于（1.8）中的碰撞频率 $\nu(\mu)$，我们定义带权 L^2 范数 $\|\cdot\|_\nu = \|\sqrt{\nu(\mu)}\cdot\|_0$。为简便起见，我们将 L^∞ 的范数记为 $\|\cdot\|_{L^\infty}$ 或 $\|\cdot\|_\infty$。括号 $(\cdot,\cdot)$ 用于表示 $\mathbb{R}^3_x$ 中的 L^2 内积，而 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_v$ 中的 L^2 内积。

令 $P\in\Psi^m$ 表示一个符号为 $p(x,\xi)\in S^m(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3) := S^m_{1,0}(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ 的伪微分算子，其定义如下：

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\mathcal{F}[u](\xi)\mathrm{d}\xi,$$

其中，$\mathcal{F}[u]$ 是 $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$（施瓦茨类）的傅里叶变换，而 $S^m_{1,0}$ 表示阶为 m 的 Hörmander 符号类。对于 $s\in\mathbb{N}$，我们还定义符号为 $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$ 的傅里叶乘子算子 $\Lambda^s\in\Psi^s$。将 $\Lambda^s\in\Psi^s$ 与 $P\in\Psi^m$ 的对易子记为 $[\Lambda^s,P] = \Lambda^s\circ P - P\circ\Lambda^s \in \Psi^{s+m-1}$。

在下文中，我们记

$$H(\varepsilon) := H(t,x,\varepsilon) = \exp\{\phi_0+\varepsilon\phi_1+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}\}. \tag{1.18}$$

并且，$T_N(y(\varepsilon))$ 表示函数 $y(\varepsilon)$ 的 N 阶泰勒多项式。我们还将时变函数 $\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)$ 和 $\mathcal{I}_2(t,\varepsilon)$ 定义如下：

$$\mathcal{I}_1(t,\varepsilon) := \sum_{i=1}^{2k-1}[\varepsilon(1+t)]^{i-1} + \Big(\sum_{i=1}^{2k-1}[\varepsilon(1+t)]^{i-1}\Big)^2, \tag{1.19}$$

$$\mathcal{I}_2(t,\varepsilon) := \sum_{2k\leq i+j\leq 4k-2}\varepsilon^{i+j-2k}(1+t)^{i+j-2}, \tag{1.20}$$

这些函数将在本文中频繁使用。

字母 C 表示一个与克努森数 ε 无关的通用正常数，该常数在逐行估计中可能发生变化。下文中，如有必要，我们将强调 C 与某些变量无关。对于任意时间依赖函数 $g(t,\cdot)$，我们用 $g^{\mathrm{in}}(\cdot)$ 表示其初始数据 $g(0,\cdot)$。我们总是用上标 t表示行向量的转置。

现在我们给出主要结果如下。

定理 1.1. 假设函数 $[\rho_0(t,x)\ u_0(t,x)\ \phi_0(t,x)]$ 是由 *[25]* 构造的可压缩离子 *Euler-Poisson* 系统 (1.2) 的解，其中光滑初始数据 $\rho_0^{\mathrm{in}}(x)-1$ 和 $u_0^{\mathrm{in}}(x)$ 足够小且满足 $\nabla\times u_0^{\mathrm{in}}(x)=0$。那么，对于 (1.3)–(1.4)中的余项 $[R,\phi_R]$，存在一个 $\varepsilon_0>0$ 和一个与 ε 无关的常数 $C>0$，使得对于 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le\varepsilon^{-m}}\left\{\varepsilon^{\frac{3}{2}}\Big\|\frac{(1+|v|)^{2\beta+1}R}{\sqrt{\mu_M}}\Big\|_\infty+\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|D_x\phi_R\|_\infty\right\}\\
&\quad+\sup_{0\le t\le\varepsilon^{-m}}\left\{\varepsilon^5\Big\|D_{x,v}\Big(\frac{(1+|v|)^{2\beta}R}{\sqrt{\mu_M}}\Big)\Big\|_\infty+\varepsilon^5\|D_{xx}^2\phi_R\|_\infty\right\}\\
&\quad+\sup_{0\le t\le\varepsilon^{-m}}\left\{\Big\|\frac{R}{\sqrt{\mu}}\Big\|_0+\|\phi_R\|_0+\|D_x\phi_R\|_0+\|D_{xx}^2\phi_R\|_0\right\}\\
&\quad\le C\left\{\varepsilon^{\frac{3}{2}}\Big\|\frac{(1+|v|)^{2\beta+1}R^{\mathrm{in}}}{\sqrt{\mu_M}}\Big\|_\infty+\varepsilon^5\Big\|D_{x,v}\Big(\frac{(1+|v|)^{2\beta}R^{\mathrm{in}}}{\sqrt{\mu_M}}\Big)\Big\|_\infty+\Big\|\frac{R^{\mathrm{in}}}{\sqrt{\mu^{\mathrm{in}}}}\Big\|_0+1\right\}
\end{aligned}\tag{1.21}$$

对所有 $0<m<\frac{1}{2}\frac{2k-3}{2k-2}$ 和 $\beta\ge\frac{7}{2}$。

注 1.2。本文中（包括定理 *1.1*），对于初始数据，我们假设当 $s\in\mathbb{N}_+$ 充分大时，$\rho_1^{\mathrm{in}},\dots,\rho_{2k-1}^{\mathrm{in}}\in H^s(\mathbb{R}^3)$，$u_1^{\mathrm{in}},\dots,u_{2k-1}^{\mathrm{in}}\in H^s(\mathbb{R}^3)$ 以及 $\theta_1^{\mathrm{in}},\dots,\theta_{2k-1}^{\mathrm{in}}\in H^s(\mathbb{R}^3)$。其中 $[\rho_j,u_j,\theta_j]$（$1\le j\le 2k-1$）满足 (1.11)–(1.13)。这些假设将在第 *2* 节中使用。此外，我们还假设

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}}\Big\|\frac{(1+|v|)^{2\beta+1}R^{\mathrm{in}}}{\sqrt{\mu_M}}\Big\|_\infty+\varepsilon^5\Big\|D_{x,v}\Big(\frac{(1+|v|)^{2\beta}R^{\mathrm{in}}}{\sqrt{\mu_M}}\Big)\Big\|_\infty+\Big\|\frac{R^{\mathrm{in}}}{\sqrt{\mu^{\mathrm{in}}}}\Big\|_0<\infty.\tag{1.22}$$

(1.22) 用于闭合贯穿全文的主要假设，即 $\|f\|_{L^2}+\|\varepsilon^{\frac{3}{2}}h\|_{L^\infty}+\|\varepsilon^5h\|_{W^{1,\infty}}<\infty$，其中 f 和 h 由(1.17)定义。

注 *1.3.* 由定理 *1.1* 可知，余项 R 的 L^2 范数为 *O(1)*，余项 R 的加权 L^∞ 范数为 $O(\varepsilon^{-\frac{3}{2}})$，而 $D_{x,v}R$ 的加权 L^∞ 范数为 $O(\varepsilon^{-5})$。这由 *(5.15)* 得出，该式将 $D_{x,v}R$ 的 L^∞ 范数控制在 $O(\varepsilon^{-3})\|R\|_\infty+O(\varepsilon^{-4})\|R\|_0$ 及其他非奇异项之内。若将 *(5.15)* 的两边乘以 ε^4，则 $O(\varepsilon)\|R\|_\infty$ 会出现在 *(5.15)* 的右端，根据估计 *(5.12)*，这会带来另一个奇异项 $O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})\|R\|_0$。为消除这一奇异性，我们至少应将 *(5.15)* 乘以 ε^5，以得到定理 *1.1* 中的估计。此外，为涵盖小量性假设 *(5.1)*，我们选择展开参数 $k\ge 6$。在这种情况下，我们得到

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le t\le\varepsilon^{-m}}\|F-\mu\|_0&=\sup_{0\le t\le\varepsilon^{-m}}\Big\|\sum_{i=1}^{2k-1}\varepsilon^iF_i+\varepsilon^kR\Big\|_0\\
&\le\sup_{0\le t\le\varepsilon^{-m}}\left\{\sum_{i=1}^{2k-1}\varepsilon^i\Big(\Big\|\sqrt{\mu}\mathbf{P}\Big(\frac{F_i}{\sqrt{\mu}}\Big)\Big\|_0+\Big\|\sqrt{\mu}(\mathbf{I}-\mathbf{P})\Big(\frac{F_i}{\sqrt{\mu}}\Big)\Big\|_0\Big)+\varepsilon^k\Big\|\sqrt{\mu}\frac{R}{\sqrt{\mu}}\Big\|_0\right\}\\
&=O(\varepsilon)
\end{aligned}$$

对所有 $0<m\le\frac{1}{2}\frac{2k-3}{2k-2}$，这导出了可压缩离子欧拉-泊松极限。对 m 的限制源于一项技术要求：沿着余项系统 (1.14) 的动力学，在估计 (6.2)中，系数项 A 于(1.15) 中的时间增长能够在 ε 上得到一致控制。

注 1.4。 根据定理 *1.1* 中的(1.21)，我们得到了求解非线性泊松方程 $(1.14)_2$ 的 ϕ_R 的定量估计。在第*3*节中，我们首先证明 $\|\varepsilon^k\phi_R\|_{L^\infty}$ 的一致有界性，然后推导出一些精细的椭圆估计，如(3.2)、(5.11) 和(5.14)。粗略地说，(3.2) 意味着：

$$\|\phi_R\|_{L^\infty} \le C\|\phi_R\|_{H^2} \le C(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \|f\|_{L^2}),$$

(5.11) 意味着：

$$\|D_x\phi_R\|_{L^\infty} \le C\|\phi_R\|_{W^{2,p}} \le C(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \|h\|_{L^\infty}), \quad p > 3,$$

(5.14) 意味着：

$$\|D^2_{xx}\phi_R\|_{L^\infty} \le C\|\phi_R\|_{C^{2,\alpha}} \le C(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \|h\|_{L^\infty} + \|D_x h\|_{L^\infty}), \quad 0 < \alpha < 1.$$

因此， $\|\phi_R\|_\infty + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\|D_x\phi_R\|_\infty + \varepsilon^5\|D^2_{xx}\phi_R\|_\infty$ 关于 ε一致有界。上述不等式右端的项 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$由系数项给出

$$\exp\{\phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \cdots + \varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}\} - T_{2k-1}\big(\exp\{\phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \cdots + \varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}\}\big) := H(\varepsilon) - T_{2k-1}(H(\varepsilon))$$

见方程$(1.14)_2$。实际上，在命题 *3.2* 中，我们仔细推导出对于 $t \le \varepsilon^{-m}$、 $0 < m < \frac{1}{2}$，有 –

$$\varepsilon^{-k}\|H(\varepsilon) - T_{2k-1}(H(\varepsilon))\|_{L^2} \le C\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon^{-k}\|H(\varepsilon) - T_{2k-1}(H(\varepsilon))\|_{W^{1,\infty}} \le C\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

这主要是由于 ϕ_i $(1 \le i \le 2k-1)$ 在高阶H^s 范数下具有多项式时间增长。

另一方面，根据余项方程 (1.14)，我们可以直接得到一个封闭的 L^2 估计(6.3)，其中涉及$\|f\|_{L^2}$ 和 $\|\phi_R\|_{H^1}$。需要指出的是，定理 *1.1* 中额外项 $\|D^2_{xx}\phi_R\|_{L^2}$ 的估计是通过椭圆估计获得的。椭圆估计之所以成立，主要是因为非线性泊松方程 $(1.14)_2$ 在得到 $\phi_R \in H^2(\mathbb{R}^3) \subset L^\infty(\mathbb{R}^3)$后，可以被视为一个线性椭圆方程，从而产生一个新的正零阶项，增强了强制性。

1.2. **前人的工作**。

1.2.1. 希尔伯特展开。 近几十年来，动理学中希尔伯特展开的严格数学论证取得了快速发展。对于经典玻尔兹曼方程，Caflisch [4] 率先采用截断希尔伯特展开结合余项分解的方法，建立了著名的可压缩欧拉极限。在此框架基础上，Lachowicz [32, 33] 引入初始层修正，推导出了玻尔兹曼方程、恩斯科格方程和波兹纳方程的欧拉极限。然而，通过这些早期方法在欧拉方程附近构造的解无法保证非负性，而非负性是一个至关重要的物理要求。

Guo-Jang-Jiang [23, 24] 通过其创新性的 L^2–L^∞ 方法克服了这一局限。该方法最初由 Guo [20] 提出，用于证明有界区域内玻尔兹曼方程的适定性。随后，人们证明了这种方法对多种动理学模型都适用：例如，
Guo-Jang [22] 研究了硬球情形下的电子 Vlasov-Poisson-Boltzmann系统；我们随后在 [36] 中将其推广至软势情形；Speck-Strain [43], 研究了相对论玻尔兹曼方程；Guo-Xiao [26], 研究了相对论
Vlasov-Maxwell-Boltzmann 系统；Wu-Yang [45], 研究了双组分玻尔兹曼方程；Jiang和Zou [30], 研究了量子 Vlasov-Poisson-Boltzmann系统；Jiang-Luo-Zhang [29], 最近则将 Vlasov-Maxwell-Boltzmann系统推广至带欧姆定律的不可压缩 Navier-Stokes-Fourier-Maxwell 系统。另请参见 Zhou等人 [46]。对于Landau型方程和非截断Boltzmann型方程，Ouyang-Wu-Xiao [42] 证明了相对论Vlasov-Maxwell-Landau系统中希尔伯特展开的全局时间收敛。此外，Lei-Liu-Xiao-Zhao [34] 解决了更复杂的情形，包括非相对论Vlasov-Maxwell-Landau系统和非截断 Vlasov-Maxwell-Boltzmann系统。

对于半空间中的初始边界问题，Guo-Huang-Wang [21] 证明了镜面反射边界条件下玻尔兹曼方程的希尔伯特展开有效性；Ouyang-Wang [41]最近将这一论证推广到了软势情形。最近，Jiang-Luo-Tang 成功处理了麦克斯韦反射边界条件情形 [27]以及完全漫反射边界条件情形 [28]。

1.2.2. 离子动力学模型。 关于电子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统整体适定性的研究已取得大量进展。值得注意的是，Guo [19] 在 $\mathbb{T}^3$中建立了经典解，而 Yang-Zhao [49]和 Yang-Yu-Zhao [48] 研究了 $\mathbb{R}^3$ 情形。关于 $\mathbb{R}^3$中强解的最优时间衰减率，参见 Duan-Strain [9] 和 Li-Yang-Zhong [39]。Duan-Yang-Zhao [10,11] 和 Xiao-Xiong-Zhao [47]进一步研究了 $\mathbb{R}^3$ 中的硬势和软势的适定性。对于有界域，感兴趣的读者可参见例如 [5,6,35]。

与此形成鲜明对比的是，由于泊松方程引入了指数非线性，关于离子动力学模型的数学研究仍相对有限。对于离子 Vlasov-Poisson 系统，Bouchut [3]首先在 $\mathbb{R}^3$中证明了整体弱解的存在。随后，Bardos 等人 [2] 证明了二维有界域和三维环面上的弱解存在性与唯一性。Griffin-Iacobelli [17,18] 和 Cesbron-Iacobelli [7] 后来分别在三维环面、全空间 $\mathbb{R}^3$和有界区域上得到了经典解。关于 $\mathbb{R}^3$中的离子及双极性 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统，Li-Yang-Zhong [38]通过谱分析证明了强解的整体适定性和最优衰减率。Flynn 和 Guo [14] 研究了双极性 Vlasov-Poisson-Landau 系统的无质量电子极限，并得到了离子 Vlasov-Poisson-Landau 系统。Flynn [13]证明了离子 Vlasov-Poisson-Landau 系统的局部适定性。

1.2.3. 可压缩离子 *Euler-Poisson* 系统。 关于离子 Euler-Poisson 系统的研究包括 [8]Cordier 和 Grenier 对一维情形的研究。他们考察了离子流的德拜长度趋于零时准中性极限与一维可压缩 Euler 系统之间的关系。随后，G´erard、Han-Kwan 和 Rousset [15,16] 研究了半空间上具有各种边界条件的离子 Euler-Poisson 系统的准中性极限。Jung-Kwon-Suzuki [31] 讨论了存在等离子体鞘层时的准中性极限。关于可压缩离子 Euler-Poisson 系统中等离子体鞘层的渐近稳定性，可参阅 Duan-Yin-Zhu [12] 和 Yao-Yin- Zhu [50]的研究。与此同时，Guo-Pausader [25]证明了 $\mathbb{R}^3$ 中具有无旋初始速度的三维可压缩离子 Euler-Poisson 系统的整体适定性。

然而，离子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的可压缩离子欧拉-泊松极限尚未得到数学上的验证。鉴于离子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统是稀薄等离子体中离子尺度现象的基础动理学模型，我们的工作致力于严格建立这一极限。我们的分析旨在衔接离子动力学的动理学与流体描述，严格推导出可压缩离子 Euler-Poisson 系统作为离子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的首阶渐近。

1.3. **证明中的主要难点与我们的策略**。

1.3.1. 模型的构建。 将 Guo-Jang [22] 提出的电子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的希尔伯特展开与我们的离子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统进行比较，主要区别在于非线性泊松方程中出现了新的指数项 e^{ϕ}。形式上，我们对

$$\exp(\phi)=\exp\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\phi_i\right)$$

在 ε 附近的 $\varepsilon=0$ 中，随后确定不同阶的系数，即，

$$\exp\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\phi_i\right)=\tilde{A}_0+\varepsilon\tilde{A}_1+\varepsilon^2\tilde{A}_2+\cdots,$$

$$\tilde{A}_n=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\varepsilon^n}\Big|_{\varepsilon=0}\left\{\exp\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\phi_i\right)\right\}\triangleq A_n\exp(\phi_0),\ \ n\geq 0.$$

需要注意的是，对于任意 $N\in\mathbb{N}_+$,

$$A_n=\exp(-\phi_0)\tilde{A}_n=\exp(-\phi_0)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\varepsilon^n}\Big|_{\varepsilon=0}\left\{\exp\left(\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\phi_i\right)\right\},\ \ 0\leq n\leq N,$$

这意味着

$$\exp(\phi_0)(A_0+\varepsilon A_1+\cdots+\varepsilon^N A_N)=T_N\bigg(\exp\bigg(\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\phi_i\bigg)\bigg),$$

其中， $T_N(g(\varepsilon))$ 表示关于参数 $\varepsilon>0$ 的 N 阶泰勒多项式 $g(\varepsilon)$。将希尔伯特展开代入非线性泊松方程 **(1.1)**$_2$

$$\Delta\bigg(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\phi_i\bigg)=\exp\bigg(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\phi_i\bigg)-\int_{\mathbb{R}^3}\bigg(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i F_i\bigg)\mathrm{d}v$$

展开至 N 阶可得

$$\Delta\bigg(\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\phi_i\bigg)=T_N\bigg(\exp\bigg(\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\phi_i\bigg)\bigg)-\int_{\mathbb{R}^3}\bigg(\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i F_i\bigg)\mathrm{d}v.$$

将上述方程与 $N=2k-1$ 以及采用截断希尔伯特展开 **(1.3)** 和 **(1.4)** 的非线性泊松方程 **(1.5)** 作差，得到

$$\Delta(\varepsilon^k\phi_R)=\exp\bigg(\sum_{i=0}^{2k-1}\varepsilon^i\phi_i\bigg)\exp(\varepsilon^k\phi_R)-T_{2k-1}\bigg(\exp\bigg(\sum_{i=0}^{2k-1}\varepsilon^i\phi_i\bigg)\bigg)-\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^k R\,\mathrm{d}v,$$

这恰好是未知量 ϕ_R 的余项方程 **(1.14)**$_2$ 。

1.3.2. H^s 系数的估计 $\phi_n\,(1\le n\le 2k-1)$。为探究方程 **(1.14)**$_2$, 的适定性，我们推导系数 $\phi_n\,(1\le n\le 2k-1)$ 的能量估计，它满足

$$\Delta\phi_n=A_n\exp(\phi_0)-\rho_n$$

与关于 $[\rho_n,u_n,\theta_n]$ 的系统 **(1.11)–(1.13)** 耦合，其中

$$A_n\equiv\phi_n+\sum_{\varkappa}C_{\varkappa}\prod_{1\le j\le n-1}(\phi_j)^{\varkappa_j},\qquad\sum_{1\le j\le n-1,\varkappa_j\in\mathbb{N}_+}j\varkappa_j=n,$$

其中 $\varkappa=[\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{n-1}]$，常数为 $C_{\varkappa}>0$。确定 $[\rho_i,u_i,\theta_i,\phi_i]\,(1\le i\le n-1)$ 后， ϕ_n 满足一个线性椭圆方程，而 $U_n=[\rho_n,u_n,\theta_n]^t$、 $V_n=[0,\nabla\phi_n,0]^t$ 满足一个线性严格双曲系统

$$\mathcal{A}_0\{\partial_t U_n+V_n\}+\sum_{i=1}^{3}\mathcal{A}_i\partial_i U_n+\mathcal{B}U_n=\mathcal{G}_n,$$

如 **(2.3)** 所示。在 H^s 框架下，关键在于注意到 $\mathcal{A}_0V_n$ 与 U_n 的内积能够恢复一个额外项

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|e^{\frac{\phi_0}{2}}\phi_n\|_{H^s}^2+\|\nabla\phi_n\|_{H^s}^2\big)$$

通过关于 ϕ_n 的线性椭圆方程，该项出现在左端，而不只是得到一个粗略的上界

$$\|\mathcal{A}_0\|_{W^{s,\infty}}\|U_n\|_{H^s}\|V_n\|_{H^s},$$

其缺乏足够的时间衰减，例如 $t^{-16/15}$。

具体而言，利用光滑函数 ϕ_0 的高阶有界性，我们证明存在一个 Ψ^{-2}伪微分算子 $(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}$，作为椭圆算子 $e^{\phi_0}-\Delta$ 的参数拟逆，用以获得 $\partial_t\phi_0$ 所需的估计。对于 $s\in\mathbb{N}_+$，傅里叶乘子 Λ^s 与其他伪微分算子之间的交换子估计是标准的，由此可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|U_n\|_{H^s}^2+\|V_n\|_{H^s}^2+\|\phi_n\|_{H^s}^2)&\le C(1+t)^{-\frac{16}{15}}(\|U_n\|_{H^s}^2+\|V_n\|_{H^s}^2+\|\phi_n\|_{H^s}^2)\\&\quad+C(1+t)^{n-2}(\|U_n\|_{H^s}+\|V_n\|_{H^s}+\|\phi_n\|_{H^s}).\end{aligned}$$

由格朗沃尔不等式可得

$$\|U_n\|_{H^s}+\|V_n\|_{H^s}+\|\phi_n\|_{H^s}\le C(1+t)^{n-1}$$

对于 $1\le n\le 2k-1$, $s\ge 0$，这是命题 **2.1** 的主要结果。

1.3.3. $H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))$ 及其一阶导数的估计。从上述推导可知，$\|\varepsilon^k\phi_R\|_{W^{2,\infty}}$具有关于 ε 一致的上界。此外，我们可以证明$\|\phi_R\|_{L^\infty}$ 具有关于 ε 一致的上界，这意味着 $\varepsilon^k\phi_R$的大小很小。实际上，证明的关键在于考察 $H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))$ 的大小，其中 $H(\varepsilon)$ 定义于 (1.18)。形式上，根据 T_{2k-1}的定义， $H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))$ 似乎是 ε^{2k} 阶的，但 L^2或 L^∞范数中的 ϕ_1、……、ϕ_{2k-1}会随时间呈多项式增长，从而抵消 ε的部分阶数。因此，我们应考察 $H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))$ 的拉格朗日余项：对于每个 (t,x)，都存在一个 $\vartheta_{t,x}\in(0,1)$，使得

$$H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))=\frac{\varepsilon^{2k}}{(2k)!}H^{(2k)}(\vartheta_{t,x}\varepsilon)=\frac{\varepsilon^{2k}}{(2k)!}H(\vartheta_{t,x}\varepsilon)\sum_{\varpi}C_{\varpi}\prod_{1\le\ell\le 2k-1}(g^{(\ell)}(\vartheta_{t,x}\varepsilon))^{\varpi_\ell},$$

这让人联想到 Fa`a di Bruno 公式，其中 $\sum_{1\le\ell\le 2k-1}\ell\varpi_\ell=2k$ 和

$$g^{(\ell)}(\vartheta_{t,x}\varepsilon)=\ell!\phi_\ell+(\ell+1)!(\vartheta_{t,x}\varepsilon)^1\phi_{\ell+1}+\cdots+\frac{(2k-1)!}{(2k-\ell-1)!}(\vartheta_{t,x}\varepsilon)^{2k-\ell-1}\phi_{2k-1},\quad 0\le\ell\le 2k-1.$$

由于 $\|\phi_{\ell+1}\|_{H^s}\le C(1+t)^\ell$，因此对于 $t\le\varepsilon^{-m}$ $(0<m<\frac{1}{2})$， L^2或 L^∞范数的 $g^{(\ell)}(\vartheta_{t,x}\varepsilon)$ 吸收了 $\varepsilon^{\frac{\ell-1}{2}}$因子，并释放出$\varepsilon^{(\frac{1}{2}-m)(\ell-1)}$ 因子，如 (3.7) 和 (3.8) 所示。由此可知， L^2或 L^∞范数的 $H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))$ 贡献了 $O(\varepsilon^{k+\frac{1}{2}})$。有了这个估计，我们可以找到一个与 ε和 ϕ_R无关的常数 $C>0$，使得 $\|\phi_R\|_{H^2}\le C(\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\|f\|_{L^2})$；这对于在第 4 节中获得 f的 L^2估计至关重要。我们还考虑 $\partial_t(H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon)))$ 的 L^2范数以及 $\nabla_x(H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon)))$ 的 L^∞范数，这些范数用于获得关于 ϕ_R的精细估计。$\partial_t(H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon)))$ 和 $\nabla_x(H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon)))$ 的表达式是显式的；注意到 $\partial_t T_{2k-1}(H(\varepsilon))=T_{2k-1}(\partial_t H(\varepsilon))$ 以及 $\nabla_x T_{2k-1}(H(\varepsilon))=T_{2k-1}(\nabla_x H(\varepsilon))$，而这些结果依赖于第 3 节中证明的 $D_tD_\varepsilon H(\varepsilon)$ 和 $D_xD_\varepsilon H(\varepsilon)$ 混合偏导数的连续性。

1.3.4. ……之间的相互作用 L^2 和 $W^{1,\infty}$ 范数。在第 4 节和第 5 节中，我们不再重复那些与 Guo-Jang [22] 关于电子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的估计类似的细节，而着重讨论由离子动力学引起的差异。注意，非线性泊松方程的 $t-$阶导数

$$\Delta\psi_R=(e^{\psi_R}-1)H(\varepsilon)+H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))-\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^k R\,\mathrm{d}v$$

给出了新的能量结构 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}t\int_{\mathbb{R}^3}(\psi_R e^{\psi_R}-e^{\psi_R}+1)H(\varepsilon)\mathrm{d}x$，其中 $\psi_R e^{\psi_R}-e^{\psi_R}+1$ 非负。此外，当 $|\psi_R|\ll 1$时，有 $\psi_R e^{\psi_R}-e^{\psi_R}+1\sim\psi_R^2$，因此，本质上，离子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的 L^2能量包含 $\|f\|_{L^2}$、$\|\nabla\phi_R\|_{L^2}$ 和 $\|\phi_R\|_{L^2}$。

为了闭合 L^2 估计 (4.9)，需要加权的 $W^{1,\infty}$ 估计。首先，重新考察引理 5.1（类似于 Guo-Jang [22] 对电子所做的工作），但此处针对的是离子的静电势。接着，我们使用特征线法，通过表达式 (5.9) 估计 $\|h\|_{L^\infty}$。注意，在 (5.9) 的第七行，有一项源项涉及离子的静电势 $\nabla_x\phi_R$。我们应从 $\|\nabla_x\phi_R\|_{L^\infty}$中恢复 $\|h\|_{L^\infty}$，这需要新的椭圆估计。我们的策略在于 $(H(\varepsilon)-\Delta)^{-1}\in\Psi^{-2}$： $L^p\to W^{2,p}$、 $p>3$、Morrey嵌入以及 $\|H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))\|_{L^p}\le C\varepsilon^k\varepsilon^{\frac{1}{2}}$，以推导出$\|\nabla_x\phi_R\|_{L^\infty}\le C\|\phi_R\|_{W^{2,p}}\le C\varepsilon^{\frac{1}{2}}+C\|h\|_{L^\infty}$。这会在最终的 L^∞估计 (5.12) 中产生一个 $\varepsilon^{\frac{3}{2}}\varepsilon^1 O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})=O(\varepsilon^3)$ 项，从而证明引理 5.2。

对于 D_x 的 L^∞ 范数，我们需要从 $D_xD_x\phi_R$ 中恢复 $\|h\|_{W^{1,\infty}}$。利用 $(H(\varepsilon)-\Delta)^{-1}\in\Psi^{-2}$： $C^{0,\alpha}\to C^{2,\alpha}$ 对于 $0<\alpha<1$， $C^{0,\alpha}\subset W^{1,\infty}$以及 $\|H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))\|_{W^{1,\infty}}\le C\varepsilon^k\varepsilon^{\frac{1}{2}}$，我们得到 $\|D_xD_x\phi_R\|_{L^\infty}\le C\varepsilon^{\frac{1}{2}}+C\|h\|_{W^{1,\infty}}$。这会产生一个 $O(\varepsilon^{\frac{13}{2}})=\varepsilon^5\varepsilon^1 O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ 项。然而请注意，在最终的 $W^{1,\infty}$估计 (5.15) 中，右端的项 $\varepsilon^2\|h\|_{L^\infty}$ 提供了一个最低阶项 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}O(\varepsilon^3)=O(\varepsilon^{\frac{7}{2}})$，这正是引理 5.3 中所给出的结果。基于这些基本估计，下一步是结合 L^∞ 和 $W^{1,\infty}$ 范数，这可以按照 Guo-Jang [22] 中的相同步骤来完成。

1.4. **论文概要**。本文结构安排如下。第 2 节中，我们在 H^s 范数下估计系数 ϕ_i $(1\le i\le 2k-1)$ 的时间增长。第3节致力于通过在 $L^2\cap W^{1,\infty}$ 范数下控制源项，研究非线性泊松方程余项 ϕ_R 的椭圆估计。在

第 4 节和第 5 节中，我们分别通过余项系统 (1.14) 建立 L^2 和加权 $W^{1,\infty}$ 对 R 的估计。第 6 节总结 L^2–L^∞ 估计并完成定理 1.1 的证明。

2. Coefficients of the Hilbert Expansion

F对于任意给定的整数 $k \geq 1$，令 $[\rho_k, u_k, \theta_k]$ 满足系统（1.11）–（1.13）。记

$$U_k = \begin{bmatrix} \rho_k \\ (u_k)^t \\ \theta_k \end{bmatrix}, \quad V_k = \begin{bmatrix} 0 \\ (\nabla\phi_k)^t \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

则（1.11）–（1.13）等价于

$$\partial_t U_k + V_k + \sum_{i=1}^{3} \overline{\mathcal{A}}_i \partial_i U_k + \overline{\mathcal{B}} U_k = \overline{\mathcal{G}}_k, \tag{2.2}$$

其中

$$\overline{\mathcal{A}}_i = \begin{bmatrix} u_0^i & \rho_0 e_i & 0 \\ \frac{\theta_0}{\rho_0}(e_i)^t & u_0^i I_{3\times 3} & (e_i)^t \\ 0 & \frac{2}{3}\theta_0 e_i & u_0^i \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \nabla\cdot u_0 & \nabla\rho_0 & 0 \\ \frac{-\theta_0}{\rho_0^2}(\nabla\rho_0)^t & \nabla(u_0)^t & (\nabla\ln\rho_0)^t \\ 0 & \nabla\theta_0 & \frac{2}{3}\nabla\cdot u_0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathcal{G}}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\rho_0}\mathfrak{f}_{k-1} \\ \frac{1}{3\rho_0}\mathfrak{g}_{k-1} \end{bmatrix}.$$

需要特别指出的是，$\mathcal{A}_i$ 是可对称化的。通过引入

$$\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\theta_0}{\rho_0} & & \\ & \rho_0 I_{3\times 3} & \\ & & \frac{3\rho_0}{2\theta_0} \end{bmatrix},$$

(2.2) 等价于

$$\mathcal{A}_0\{\partial_t U_k + V_k\} + \sum_{i=1}^{3} \mathcal{A}_i \partial_i U_k + \mathcal{B} U_k = \mathcal{G}_k, \tag{2.3}$$

其中

$$\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} \frac{\theta_0}{\rho_0}u_0^i & \theta_0 e_i & 0 \\ \theta_0(e_i)^t & \rho_0 u_0^i I_{3\times 3} & \rho_0(e_i)^t \\ 0 & \rho_0 e_i & \frac{3\rho_0}{2\theta_0}u_0^i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \frac{\theta_0}{\rho_0}\nabla\cdot u_0 & \frac{\theta_0}{\rho_0}\nabla\rho_0 & 0 \\ -\theta_0(\nabla\ln\rho_0)^t & \rho_0\nabla(u_0)^t & (\nabla\rho_0)^t \\ 0 & \frac{3\rho_0}{2\theta_0}\nabla\theta_0 & \frac{\rho_0}{\theta_0}\nabla\cdot u_0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathfrak{f}_{k-1} \\ \frac{1}{2\theta_0}\mathfrak{g}_{k-1} \end{bmatrix}.$$

这里，e_i、$i = 1, 2, 3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位行基向量。

(2.3) 的适定性可由标准线性理论推出（例如，参见 [40]）。下面我们将建立更精细的 (2.3) 能量估计，以控制 H^s 范数 $\|U_k(t)\|_s + \|V_k(t)\|_s + \|\phi_k(t)\|_s$ 随时间的增长，这将在第 3 节和第 4 节的论证中使用。

命题 2.1. 对于整数 $k \geq 1$，假设 (2.1) 中的 U_k 和 V_k 是系统 (2.3)的解，则有

$$\|U_k(t)\|_s + \|V_k(t)\|_s + \|\phi_k(t)\|_s \leq C(1+t)^{k-1} \quad \text{for } s \geq 0,$$

其中 $C > 0$ 与 t无关。

证明。我们首先考虑 $k = 1$ 的 (2.3)：

$$\mathcal{A}_0\{\partial_t U_1 + V_1\} + \sum_{i=1}^{3} \mathcal{A}_i \partial_i U_1 + \mathcal{B} U_1 = \mathcal{G}_1. \tag{2.4}$$

这里，我们定义

$$\mathcal{P} U_1 := \mathcal{A}_0 \partial_t U_1 + \sum_{i=1}^{3} \mathcal{A}_i \partial_i U_1, \tag{2.5}$$

并且，如前所述，对于 $s \in \mathbb{N}$，我们将 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 的范数记为 $\|\cdot\|_s$。特别地，$L^2(\mathbb{R}^3)$ 的范数记为 $\|\cdot\|_0$。

第*1*步。对于 $\|\cdot\|_0$ 范数，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_1,\mathcal{A}_0U_1)&=(\partial_tU_1,\mathcal{A}_0U_1)+(U_1,\partial_t\mathcal{A}_0U_1)+(U_1,\mathcal{A}_0\partial_tU_1)\\&=2\bigg(U_1,\mathcal{P}U_1-\sum_{i=1}^3\mathcal{A}_i\partial_iU_1\bigg)+(U_1,\partial_t\mathcal{A}_0U_1)\\&=2(\mathcal{P}U_1,U_1)+\bigg(U_1,\Big(\partial_t\mathcal{A}_0+\sum_{i=1}^3\partial_i\mathcal{A}_i\Big)U_1\bigg)\\&=2(-\mathcal{A}_0V_1,U_1)+(-\mathcal{B}U_1+\mathcal{G}_1,U_1)+\bigg(U_1,\Big(\partial_t\mathcal{A}_0+\sum_{i=1}^3\partial_i\mathcal{A}_i\Big)U_1\bigg).\end{aligned}$$

最后一行的第一项为

$$\begin{aligned}(-\mathcal{A}_0V_1,U_1)&=\int-\rho_0\nabla\phi_1\cdot u_1\mathrm{d}x\\&=\int\phi_1\nabla\cdot(\rho_0u_1)\mathrm{d}x\\&=\int\phi_1(-\partial_t\rho_1-\nabla\cdot(\rho_1u_0))\mathrm{d}x\quad(\text{using (1.11)})\\&=\int-\phi_1\partial_t\rho_1\mathrm{d}x+\int\nabla\phi_1\cdot\rho_1u_0\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

通过使用 ε^1 步骤中的 (1.6)，我们得到

$$\begin{aligned}\int\phi_1\partial_t\rho_1\mathrm{d}x&=\int\phi_1(\partial_t(e^{\phi_0})\phi_1+e^{\phi_0}\partial_t\phi_1-\Delta(\partial_t\phi_1))\mathrm{d}x\\&=\frac12\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|\nabla\phi_1\|_0^2+\big\|\phi_1e^{\frac{\phi_0}{2}}\big\|_0^2\big)+\frac12\int\phi_1^2\partial_t(e^{\phi_0})\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

综上，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\Big\|\sqrt{U_1^t\mathcal{A}_0U_1}\Big\|_0^2+\|\nabla\phi_1\|_0^2+\big\|\phi_1e^{\frac{\phi_0}{2}}\big\|_0^2\Big)\\&\quad=2\int\nabla\phi_1\cdot\rho_1u_0\mathrm{d}x-\int\phi_1^2\partial_t(e^{\phi_0})\mathrm{d}x+(-\mathcal{B}U_1+\mathcal{G}_1,U_1)+\bigg(U_1,\Big(\partial_t\mathcal{A}_0+\sum_{i=1}^3\partial_i\mathcal{A}_i\Big)U_1\bigg).\end{aligned}$$

注意，$\mathcal{B}$、$\mathcal{G}_1$、$\partial_t\mathcal{A}_0$ 和 $\partial_i\mathcal{A}_i$ 由 ρ_0-1,u_0,θ_0 及其一阶空间导数组成。根据命题 B.1，它们以 $t^{-16/15}$ 的速率衰减，因此我们有

$$\begin{aligned}&\bigg|2\int\nabla\phi_1\cdot\rho_1u_0\mathrm{d}x+(-\mathcal{B}U_1+\mathcal{G}_1,U_1)+\bigg(U_1,\Big(\partial_t\mathcal{A}_0+\sum_{i=1}^3\partial_i\mathcal{A}_i\Big)U_1\bigg)\bigg|\\&\quad\le\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\{\|U_1\|_0^2+\|V_1\|_0^2\}+\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\{\|U_1\|_0+\|V_1\|_0\}.\end{aligned}$$

为处理项 $\int\phi_1^2\partial_t(e^{\phi_0})\mathrm{d}x$，我们研究 $\partial_t\phi_0$的估计。由于 (1.6) 的 ε^0 步骤，有$\Delta\phi_0=e^{\phi_0}-\rho_0$，因此

$$\Delta\partial_t\phi_0=e^{\phi_0}\partial_t\phi_0-\partial_t\rho_0.$$

由注 B.1 可知，$\phi_0\in C_b^\infty(\mathbb{R}^3)$ 是具有有界 $x-$ 各阶导数的光滑有界函数。因此，$e^{\phi_0}\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$，且存在常数 C_0, $C_1>0$ 使得 $0<C_0\le e^{\phi_0}\le C_1$。因此，$e^{\phi_0(x)}-\Delta$ 的符号，即 $e^{\phi_0(x)}+|\xi|^2$，满足

$$\begin{aligned}|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta(e^{\phi_0(x)}+|\xi|^2)|&\le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{2-|\alpha|},\\e^{\phi_0(x)}+|\xi|^2&\ge C_0(1+|\xi|)^2,\end{aligned}$$

其中常数 $C_{\alpha,\beta}$ 和 C_0 对所有 $t\in[0,\infty)$ 均一致；将其视为 $\phi_0(t,x)$ 中的参数时，这归因于 $\phi_0\in L^\infty(\mathbb{R}_t^+;H^s(\mathbb{R}_x^3))$。这意味着 $e^{\phi_0(x)}-\Delta$ 是一个 Ψ^2 阶椭圆伪微分算子，它具有一个 Ψ^{-2} 阶参数拟逆（见

例如 [1]）。注意，根据 Lax–Milgram 定理，存在一个有界线性算子 $(e^{\phi_0(x)}-\Delta)^{-1}: L^2 \to H^1$。因此，算子 $(e^{\phi_0(x)}-\Delta)^{-1}$ 是 $e^{\phi_0(x)}-\Delta$的一个 Ψ^{-2} 参数拟逆。根据伪微分算子的 H¨older 有界性性质（例如参见 [44]），对于 $k \in \mathbb{N}_+$ 和 $\gamma \in (0,1)$，有 $(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}: C^{k,\gamma} \to C^{k+2,\gamma}$，其算子范数常数关于 t 一致。因此

$$\begin{aligned}\|\partial_t\phi_0\|_{C^{k,\gamma}} &= \|(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}\partial_t\rho_0\|_{C^{k,\gamma}}\\ &= \|-(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}\nabla\cdot(\rho_0u_0)\|_{C^{k,\gamma}}\\ &\le C\|\rho_0u_0\|_{C^{k-1,\gamma}}\\ &\le C\|\rho_0u_0\|_{W^{k,\infty}}\\ &\le \frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

因此我们得到

$$\int \phi_1^2\partial_t(e^{\phi_0})\mathrm{d}x \le \frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\big\|\phi_1 e^{\frac{\phi_0}{2}}\big\|_0^2.$$

我们得出

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\Big\|\sqrt{U_1^t\mathcal{A}_0U_1}\Big\|_0^2+\|\nabla\phi_1\|_0^2+\big\|\phi_1e^{\frac{\phi_0}{2}}\big\|_0^2\Big)\\ &\le \frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\{\|U_1\|_0^2+\|V_1\|_0^2+\big\|\phi_1e^{\frac{\phi_0}{2}}\big\|_0^2\}+\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\{\|U_1\|_0+\|V_1\|_0\}.\end{aligned}$$

步骤 2。对于整数 $s>0$，定义傅里叶乘子算子 Λ^s，其符号为 $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$。如果 $U_1 \in H^s$，那么 $\Lambda^sU_1 \in L^2$。我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Lambda^sU_1,\mathcal{A}_0\Lambda^sU_1) &= 2(\mathcal{P}\Lambda^sU_1,\Lambda^sU_1)+\Big(\Lambda^sU_1,\Big(\partial_t\mathcal{A}_0+\sum_{i=1}^3\partial_i\mathcal{A}_i\Big)\Lambda^sU_1\Big)\\ &= 2(\Lambda^s\mathcal{P}U_1,\Lambda^sU_1)+2([\mathcal{P},\Lambda^s]U_1,\Lambda^sU_1)+\Big(\Lambda^sU_1,\Big(\partial_t\mathcal{A}_0+\sum_{i=1}^3\partial_i\mathcal{A}_i\Big)\Lambda^sU_1\Big)\\ &= -2(\Lambda^s(\mathcal{A}_0V_1),\Lambda^sU_1)+2(\Lambda^s(-\mathcal{B}U_1+\mathcal{G}_1),\Lambda^sU_1)\\ &\quad+2([\mathcal{P},\Lambda^s]U_1,\Lambda^sU_1)+\Big(\Lambda^sU_1,\Big(\partial_t\mathcal{A}_0+\sum_{i=1}^3\partial_i\mathcal{A}_i\Big)\Lambda^sU_1\Big)\\ &= -2(\mathcal{A}_0\Lambda^sV_1,\Lambda^sU_1)-2([\Lambda^s,\mathcal{A}_0]V_1,\Lambda^sU_1)+2(\Lambda^s(-\mathcal{B}U_1+\mathcal{G}_1),\Lambda^sU_1)\\ &\quad+2([\mathcal{P},\Lambda^s]U_1,\Lambda^sU_1)+\Big(\Lambda^sU_1,\Big(\partial_t\mathcal{A}_0+\sum_{i=1}^3\partial_i\mathcal{A}_i\Big)\Lambda^sU_1\Big).\end{aligned}$$

上述等式右端的第一项为

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}_0\Lambda^sV_1,\Lambda^sU_1) &= \int\rho_0\Lambda^s\nabla\phi_1\cdot\Lambda^su_1\mathrm{d}x\\ &= \int\Lambda^s\nabla\phi_1\cdot([\rho_0,\Lambda^s]u_1+\Lambda^s(\rho_0u_1))\mathrm{d}x\\ &= \int\Lambda^s\nabla\phi_1\cdot[\rho_0,\Lambda^s]u_1\mathrm{d}x-\int\Lambda^s\phi_1\Lambda^s(\nabla\cdot(\rho_0u_1))\mathrm{d}x\\ &= \int\Lambda^s\nabla\phi_1\cdot[\rho_0,\Lambda^s]u_1\mathrm{d}x+\int\Lambda^s\phi_1\Lambda^s(\partial_t\rho_1)\mathrm{d}x-\int\Lambda^s\nabla\phi_1\cdot\Lambda^s(\rho_1u_0)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

通过常规计算可得

$$\begin{aligned}\int\Lambda^s\phi_1\Lambda^s(\partial_t\rho_1)\mathrm{d}x &= \int\Lambda^s\phi_1\Lambda^s(-\Delta\partial_t\phi_1+\partial_t(e^{\phi_0})\phi_1+e^{\phi_0}\partial_t\phi_1)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|\Lambda^s\nabla\phi_1\|_0^2+\big\|e^{\frac{\phi_0}{2}}\Lambda^s\phi_1\big\|_0^2\big)+\frac{1}{2}(\Lambda^s\phi_1,\partial_t(e^{\phi_0})\Lambda^s\phi_1)\end{aligned}$$

$$+(\Lambda^s\phi_1,[\Lambda^s,\partial_t(e^{\phi_0})]\phi_1)+(\Lambda^s\phi_1,[\Lambda^s,e^{\phi_0}]\partial_t\phi_1).$$

因此，有

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\big\|\sqrt{(\Lambda^sU_1)^t\mathcal{A}_0(\Lambda^sU_1)}\big\|_0^2+\|\Lambda^s\nabla\phi_1\|_0^2+\big\|e^{\frac{\phi_0}{2}}\Lambda^s\phi_1\big\|_0^2\big)\\
&\quad=-(\Lambda^s\phi_1,\partial_t(e^{\phi_0})\Lambda^s\phi_1)-2(\Lambda^s\phi_1,[\Lambda^s,\partial_t(e^{\phi_0})]\phi_1)-2(\Lambda^s\phi_1,[\Lambda^s,e^{\phi_0}]\partial_t\phi_1)\\
&\qquad-2\int\Lambda^s\nabla\phi_1\cdot[\rho_0,\Lambda^s]u_1\mathrm{d}x+2\int\Lambda^s\nabla\phi_1\cdot\Lambda^s(\rho_1u_0)\mathrm{d}x-2([\Lambda^s,\mathcal{A}_0]V_1,\Lambda^sU_1)\\
&\qquad+2(\Lambda^s(-\mathcal{B}U_1+\mathcal{G}_1),\Lambda^sU_1)+2([\mathcal{P},\Lambda^s]U_1,\Lambda^sU_1)+\bigg(\Lambda^sU_1,\Big(\partial_t\mathcal{A}_0+\sum_{i=1}^3\partial_i\mathcal{A}_i\Big)\Lambda^sU_1\bigg).
\end{aligned}\tag{2.7}$$

回顾 (2.6)，(2.7) 右端的第一项由 $C\big\|e^{\frac{\phi_0}{2}}\Lambda^s\phi_1\big\|_0^2$ 控制。为处理 (2.7) 中的其他项，我们研究对易子 $[\Lambda^s,\partial_t(e^{\phi_0})]$，$[\Lambda^s,e^{\phi_0}]$，$[\rho_0,\Lambda^s]$，$[\Lambda^s,\mathcal{A}_0]$ 和 $[\mathcal{P},\Lambda^s]$ 对于 $s\in\mathbb{N}_+$ 的性质。由于 $\partial_t(e^{\phi_0})$，e^{ϕ_0}，ρ_0 和 $\mathcal{A}_0$ 光滑且有界，它们是 Ψ^0 伪微分算子。根据 (2.5) 中 $\mathcal{P}$ 的定义，$\mathcal{P}$ 是一个 Ψ^1 伪微分算子。显然，$\Lambda^s\in\Psi^s$。因此，由交换子标准理论（例如参见 [1]），我们得到

$$[\Lambda^s,\partial_t(e^{\phi_0})],\ [\Lambda^s,e^{\phi_0}],\ [\rho_0,\Lambda^s],\ [\Lambda^s,\mathcal{A}_0]\in\Psi^{s-1},\quad [\mathcal{P},\Lambda^s]\in\Psi^s$$

其渐近展开由于 $s\in\mathbb{N}_+$ 而是有限的。由于线性算子 $\Psi^s:\ H^s\to L^2$ 有界，我们得到

$$\begin{aligned}
([\mathcal{P},\Lambda^s]U_1,\Lambda^sU_1)&\le\|[\mathcal{P},\Lambda^s]U_1\|_0\|\Lambda^sU_1\|_0\\
&\le\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\|U_1\|_s\|\Lambda^sU_1\|_0\\
&=\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\|\Lambda^sU_1\|_0^2.
\end{aligned}$$

同理，我们得到

$$\begin{aligned}
&-2(\Lambda^s\phi_1,[\Lambda^s,\partial_t(e^{\phi_0})]\phi_1)-2\int\Lambda^s\nabla\phi_1\cdot[\rho_0,\Lambda^s]u_1\mathrm{d}x-2([\Lambda^s,\mathcal{A}_0]V_1,\Lambda^sU_1)\\
&\quad\le\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}(\|\Lambda^sU_1\|_0^2+\|\Lambda^sV_1\|_0^2+\|\Lambda^s\phi_1\|_0^2)\le\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\big(\|\Lambda^sU_1\|_0^2+\|\Lambda^sV_1\|_0^2+\big\|e^{\frac{\phi_0}{2}}\Lambda^s\phi_1\big\|_0^2\big).
\end{aligned}$$

我们还有

$$\begin{aligned}
&2\int\Lambda^s\nabla\phi_1\cdot\Lambda^s(\rho_1u_0)\mathrm{d}x+2(\Lambda^s(-\mathcal{B}U_1+\mathcal{G}_1),\Lambda^sU_1)+\bigg(\Lambda^sU_1,\Big(\partial_t\mathcal{A}_0+\sum_{i=1}^3\partial_i\mathcal{A}_i\Big)\Lambda^sU_1\bigg)\\
&\quad\le\ \frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}(\|U_1\|_s^2+\|V_1\|_s^2)+\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}(\|U_1\|_s+\|V_1\|_s).
\end{aligned}$$

(2.7) 右端的余项为 $(\Lambda^s\phi_1,\ [\Lambda^s,e^{\phi_0}]\partial_t\phi_1)$。根据 (1.6) 的 ε^1 步，我们知道 $\phi_1=(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}\rho_1$ 且

$$\Delta\partial_t\phi_1=\partial_t(e^{\phi_0})\phi_1+e^{\phi_0}\partial_t\phi_1-\partial_t\rho_1.$$

因此，有

$$\begin{aligned}
\partial_t\phi_1&=(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}\left(\partial_t\rho_1-\partial_t(e^{\phi_0})(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}\rho_1\right)\\
&=-(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}\left(\nabla\cdot(\rho_0u_1+\rho_1u_0)+\partial_t(e^{\phi_0})(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}\rho_1\right).
\end{aligned}$$

由 $(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}(\in\Psi^{-2}):\ H^s\to H^{s+2}$ 可得

$$\|\partial_t\phi_1\|_s\le C\|\rho_0u_1+\rho_1u_0\|_{s-1}+C\|\rho_1\|_{s-4}\le C\|U_1\|_s.$$

于是我们得到

$$(\Lambda^s\phi_1,[\Lambda^s,e^{\phi_0}]\partial_t\phi_1)\le\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\big(\|U_1\|_s^2+\big\|e^{\frac{\phi_0}{2}}\Lambda^s\phi_1\big\|_0^2\big).$$

总之，对于任意整数 $s\geq 0$，我们推得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|\sqrt{(\Lambda^sU_1)^t\mathcal{A}_0(\Lambda^sU_1)}\|_0^2+\|\Lambda^s\nabla\phi_1\|_0^2+\big\|e^{\frac{\phi_0}{2}}\Lambda^s\phi_1\big\|_0^2\big)\\&\quad\leq\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\big(\|\Lambda^sU_1\|_0^2+\|\Lambda^sV_1\|_0^2+\big\|e^{\frac{\phi_0}{2}}\Lambda^s\phi_1\big\|_0^2\big)\\&\qquad+\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\big(\|\Lambda^sU_1\|_0+\|\Lambda^sV_1\|_0+\big\|e^{\frac{\phi_0}{2}}\Lambda^s\phi_1\big\|_0\big).\end{aligned}\tag{2.8}$$

利用格朗沃尔不等式，我们得到 $\|U_1(t)\|_s+\|V_1(t)\|_s+\|\phi_1(t)\|_s\leq C(1+t)^0$。

现在，我们考虑关于 $k=2$ 的方程 (2.3)：

$$\mathcal{A}_0\{\partial_tU_2+V_2\}+\sum_{i=1}^3\mathcal{A}_i\partial_iU_2+\mathcal{B}U_2=\mathcal{G}_2.\tag{2.9}$$

与 $k=1$ 情形 (2.4) 相比，主要有两个不同之处。

(i). 对于 $\|\cdot\|_0$ 范数，项

$$(-\mathcal{A}_0V_2,U_2)=\int-\rho_0\nabla\phi_2\cdot u_2\mathrm{d}x=\int-\phi_2\partial_t\rho_2\mathrm{d}x+\int\nabla\phi_2\cdot\rho_2u_0\mathrm{d}x.$$

由 ε^2 步骤中的 (1.6)，我们得到

$$\begin{aligned}\int\phi_2\partial_t\rho_2\mathrm{d}x&=\int\phi_2(\partial_t(e^{\phi_0})\phi_2+e^{\phi_0}\partial_t\phi_2-\Delta(\partial_t\phi_2))\mathrm{d}x\\&\quad+\int\phi_2\Big(\partial_t(e^{\phi_0})\frac{\phi_1^2}{2}+e^{\phi_0}\partial_t\Big(\frac{\phi_1^2}{2}\Big)\Big)\mathrm{d}x\\&=\frac12\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|\nabla\phi_2\|_0^2+\|\phi_2e^{\frac{\phi_0}{2}}\|_0^2\big)+\frac12\int\phi_2^2\partial_t(e^{\phi_0})\mathrm{d}x\\&\quad+\frac12\int\phi_2(\partial_t(e^{\phi_0})\phi_1^2+e^{\phi_0}\partial_t(\phi_1^2))\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这里，右端的最后一行是新的。显然，有

$$\begin{aligned}\int\phi_2(\partial_t(e^{\phi_0})\phi_1^2+e^{\phi_0}\partial_t(\phi_1^2))\mathrm{d}x&\leq C\|\phi_2\|_0(\|\phi_1\|_0\|\phi_1\|_\infty+\|\partial_t\phi_1\|_0\|\phi_1\|_\infty)\\&\leq C\|\phi_2\|_0\leq C\|U_2\|_0.\end{aligned}$$

整数 $s>0$ 的情形也可以类似地处理。

(ii). 为了处理 (2.9) 中的项 $\mathcal{G}_2=(0,\mathfrak{f}_1,\frac{1}{2\theta_0}\mathfrak{g}_1)^t$，我们注意到 L^{-1} 在 v 中保持衰减，并且

$$\begin{aligned}&\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}\Big(\frac{F_2}{\sqrt{\mu}}\Big)\\&=L^{-1}\Big(-\frac{\{\partial_t+v\cdot\nabla_x\}F_1-\sum_{i,j\geq0,i+j=1}\nabla_x\phi_i\cdot\nabla_vF_j-Q(F_1,F_1)}{\sqrt{\mu}}\Big)\\&=L^{-1}\Big(-\frac{\{\partial_t+v\cdot\nabla_x\}\big(\sqrt{\mu}\mathbf{P}\big(\frac{F_1}{\sqrt{\mu}}\big)+\sqrt{\mu}\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}\big(\frac{F_1}{\sqrt{\mu}}\big)\big)-\sum_{i,j\geq0,i+j=1}\nabla_x\phi_i\cdot\nabla_vF_j-Q(F_1,F_1)}{\sqrt{\mu}}\Big),\end{aligned}$$

其中的项

$$L^{-1}\Big(\frac{\{\partial_t+v\cdot\nabla_x\}\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}\Big(\frac{F_1}{\sqrt{\mu}}\Big)\Big)$$

占主导地位。由于

$$\begin{aligned}\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}\Big(\frac{F_1}{\sqrt{\mu}}\Big)&=L^{-1}\Big(-\frac{\{\partial_t+v\cdot\nabla_x-\nabla_x\phi_0\cdot\nabla_v\}\mu}{\sqrt{\mu}}\Big)\\&\leq C(\|\partial\rho_0\|_\infty+\|\partial u_0\|_\infty+\|\partial\theta_0\|_\infty+\|\nabla\phi_0\|_\infty)(1+|v|^3)\sqrt{\mu}\\&\leq C(1+t)^{-\frac{16}{15}}(1+|v|^3)\sqrt{\mu},\qquad(\text{here }\partial=\partial_t\text{ or }\partial_x)\end{aligned}$$

我们有

$$L^{-1}\Big(\frac{\{\partial_t+v\cdot\nabla_x\}\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}\Big(\frac{F_1}{\sqrt{\mu}}\Big)\Big)\le C(1+|v|^3)^2\sqrt{\mu}.$$

因此，我们得到

$$\Big|\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}\Big(\frac{F_2}{\sqrt{\mu}}\Big)\Big|\le C(1+t)^0(1+|v|^3)^2\sqrt{\mu}.$$

综上，类似于（2.8），我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|\sqrt{(\Lambda^sU_2)^t\mathcal{A}_0(\Lambda^sU_2)}\|_0^2+\|\Lambda^s\nabla\phi_2\|_0^2+\big\|e^{\frac{\phi_0}{2}}\Lambda^s\phi_2\big\|_0^2\big)\\&\quad\le\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\big(\|\Lambda^sU_2\|_0^2+\|\Lambda^sV_2\|_0^2+\big\|e^{\frac{\phi_0}{2}}\Lambda^s\phi_2\big\|_0^2\big)\\&\qquad+C(1+t)^0\big(\|\Lambda^sU_2\|_0+\|\Lambda^sV_2\|_0+\big\|e^{\frac{\phi_0}{2}}\Lambda^s\phi_2\big\|_0\big),\end{aligned}\tag{2.10}$$

这意味着

$$\|U_2(t)\|_s+\|V_2(t)\|_s+\|\phi_2(t)\|_s\le C(1+t)^1$$

利用格朗沃尔不等式。

接下来，通过归纳，我们有

$$\Big|\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}\Big(\frac{F_{n+1}}{\sqrt{\mu}}\Big)\Big|\le C(1+t)^{n-1}(1+|v|^3)^{n+1}\sqrt{\mu}\quad\text{for}\quad n\in\mathbb{N}_+.$$

另一方面，由 (1.6) 的第 ε^{n+1} 步可得

$$\begin{aligned}\int\phi_{n+1}\partial_t\rho_{n+1}\mathrm{d}x=&\int\phi_{n+1}(\partial_t(e^{\phi_0})\phi_{n+1}+e^{\phi_0}\partial_t\phi_{n+1}-\Delta(\partial_t\phi_{n+1}))\mathrm{d}x\\&+\int\phi_{n+1}(\partial_t(e^{\phi_0})(A_{n+1}-\phi_{n+1})+e^{\phi_0}\partial_t(A_{n+1}-\phi_{n+1}))\mathrm{d}x\\=&\frac12\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|\nabla\phi_{n+1}\|_0^2+\big\|\phi_{n+1}e^{\frac{\phi_0}{2}}\big\|_0^2\big)+\frac12\int\phi_{n+1}^2\partial_t(e^{\phi_0})\mathrm{d}x\\&+\int\phi_{n+1}(\partial_t(e^{\phi_0})(A_{n+1}-\phi_{n+1})+e^{\phi_0}\partial_t(A_{n+1}-\phi_{n+1}))\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意，最后一行中的项 $A_{n+1}-\phi_{n+1}$ 由 $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ 中至少两个项的乘积构成，例如 $\phi_{n-m}\phi_m$，其 L^2 范数的时间增长是可控的：

$$\|\phi_{n-m}\phi_m\|_0\le C\|\phi_{n-m}\|_0\|\phi_m\|_\infty\le C(1+t)^{n-m-1}(1+t)^{m-1}\le C(1+t)^{n-2}\le C(1+t)^{n-1}.$$

由此可得

$$\int\phi_{n+1}\big(\partial_t(e^{\phi_0})(A_{n+1}-\phi_{n+1})+e^{\phi_0}\partial_t(A_{n+1}-\phi_{n+1})\big)\mathrm{d}x\le C(1+t)^{n-1}\|\phi_{n+1}\|_0.$$

类似于 (2.8) 和 (2.10)，我们可推得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\big\|\sqrt{(\Lambda^sU_{n+1})^t\mathcal{A}_0(\Lambda^sU_{n+1})}\big\|_0^2+\|\Lambda^s\nabla\phi_{n+1}\|_0^2+\big\|e^{\frac{\phi_0}{2}}\Lambda^s\phi_{n+1}\big\|_0^2\big)\\&\quad\le\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\big(\|\Lambda^sU_{n+1}\|_0^2+\|\Lambda^sV_{n+1}\|_0^2+\big\|e^{\frac{\phi_0}{2}}\Lambda^s\phi_{n+1}\big\|_0^2\big)\\&\qquad+C(1+t)^{n-1}\big(\|\Lambda^sU_{n+1}\|_0+\|\Lambda^sV_{n+1}\|_0+\big\|e^{\frac{\phi_0}{2}}\Lambda^s\phi_{n+1}\big\|_0\big),\end{aligned}\tag{2.11}$$

这意味着

$$\|U_{n+1}(t)\|_s+\|V_{n+1}(t)\|_s+\|\phi_{n+1}(t)\|_s\le C(1+t)^n,\quad n\in\mathbb{N}_+.$$

命题 2.1 的证明到此完成。 □

3. The solution ϕ_R to the remainder equation (1.14)$_2$

首先，根据命题 A.1，我们看到离子 Vlasov-泊松-玻尔兹曼系统 (1.1) 存在唯一的强解，其 $\sup_{t\geq 0}\|\phi(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} = o(1)$，其中 $\phi(t,\ x)$ 满足泊松方程 (1.1)$_2$：$\Delta\phi = e^{\phi} - \int_{\mathbb{R}^3} F\,\mathrm{d}v$.

其次，由命题 B.1 和注 B.1 可知，$\sup_{t\geq 0}\|\phi_0(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = o(1)$，其中 $\phi_0(t,\ x)$ 满足可压缩离子 Euler-Poisson 系统 (1.2) 中的泊松方程$_2$：$\Delta\phi_0 = e^{\phi_0} - \rho_0$.

此外，在命题 2.1 中，我们已证明 $\|\phi_i\|_{H^s} \leq C(1+t)^{i-1}$ 对 $1\leq i\leq 2k-1$ 和 $s\in\mathbb{N}$ 成立。对于$t\leq\varepsilon^{-m}$，$0<m<\frac{1}{2}$，有 $\varepsilon\|\phi_1\|_{L^\infty} + \varepsilon^{2k-1}\|\phi_{2k-1}\|_{L^\infty} \leq C\varepsilon\mathcal{I}_1(t,\ \varepsilon) = o(1)$，其中 $\mathcal{I}_1(t,\ \varepsilon)$ 在 (1.19) 中定义。

为便于表述，以下记 $\varepsilon^k\phi_R$ 为 ψ_R。由展开式 (1.4)，可得

$$\sup_{t\geq 0}\|\psi_R\|_{L^\infty} \leq \sup_{t\geq 0}\left\{\|\phi\|_{L^\infty} + \|\phi_0\|_{L^\infty} + \varepsilon\|\phi_1\|_{L^\infty} + \cdots + \varepsilon^{2k-1}\|\phi_{2k-1}\|_{L^\infty}\right\} = o(1),$$

这意味着$\|\psi_R\|_{L^\infty}$有一个一致上界，且该上界与 ψ_R、ε 和 t无关。

接下来，我们对 ψ_R建立一个更精确的估计，这在第 4 节中是必要的。

回顾一下，我们已将 $\exp\{\phi_0 + \cdots + \varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}\}$ 记为 $H(\varepsilon)$，并将$H(\varepsilon)$的 $(2k-1)$ 阶泰勒多项式记为 $T_{2k-1}(H(\varepsilon))$。余项 ψ_R 所满足的非线性泊松方程 (1.14)$_2$ 等价于

$$\Delta\psi_R = (e^{\psi_R}-1)H(\varepsilon) + H(\varepsilon) - T_{2k-1}(H(\varepsilon)) - \int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^k R\,\mathrm{d}v. \tag{3.1}$$

命题 3.1. 假设 $\psi_R\in H^2(\mathbb{R}^3)$ 是方程 (3.1)的唯一解。若对于 (1.17)中的 $R = \sqrt{\mu}f = \frac{\sqrt{\mu_M}}{w\ v}()h$，$\|f\|_0 + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\|h\|_\infty$有界，则对于充分小的 ε，有：

$$\|\psi_R\|_2 \leq C\varepsilon^k(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \|f\|_0), \quad \text{i.e.,}\ \|\phi_R\|_2 \leq C(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \|f\|_0), \tag{3.2}$$

其中常数 $C>0$ 与 ε 和 ϕ_R 无关。

(3.2) 的证明依赖于下述 (3.3)。为了一致地处理项 $H - T_{2k-1}(H)$ 及其导数，我们将它们汇总为以下命题。注意，(3.4) 和 (3.5) 对第 4 节和第 5 节至关重要。

命题 3.2。当 ε 充分小时，有

$$\|H(\varepsilon) - T_{2k-1}(H(\varepsilon))\|_0 \leq C\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}, \quad \|H(\varepsilon) - T_{2k-1}(H(\varepsilon))\|_\infty \leq C\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

此外，对于 $H(\varepsilon) - T_{2k-1}(H(\varepsilon))$ 的 t 和 x 的一阶导数，有

$$\|\partial_t(H(\varepsilon) - T_{2k-1}(H(\varepsilon)))\|_0 \leq C\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}, \tag{3.4}$$

$$\|\nabla_x(H(\varepsilon) - T_{2k-1}(H(\varepsilon)))\|_\infty \leq C\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}. \tag{3.5}$$

命题 *3.1* 的证明。一旦我们在命题 3.2 中证明了 (3.3)，便可直接得出命题 3.1。事实上，利用中值定理，对于任意 $x\in\mathbb{R}^3$，等式

$$e^{\psi_R} - 1 = e^{\psi_\xi}\psi_R$$

成立，其中函数 $\psi_\xi\in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ 满足该等式，这是因为 $\|\psi_R\|_2$ 有一个与 ψ_R 无关的界。由上述等式可直接得到

$$\begin{aligned}\|\psi_R\|_1 \leq & Ce^{\|\psi_R\|_\infty}\left(\|H(\varepsilon) - T_{2k-1}(H(\varepsilon))\|_0 + \left\|\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^k R\,\mathrm{d}v\right\|_0\right)\\ \leq & Ce^{\|\psi_R\|_\infty}\varepsilon^k(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \|f\|_0).\end{aligned}$$

此外，由于 ψ_R 满足

$$-(I-\Delta)\psi_R = H(\varepsilon)e^{\psi_\xi}\psi_R - \psi_R + H(\varepsilon) - T_{2k-1}(H(\varepsilon)) - \int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^k R\,\mathrm{d}v,$$

成立

$$\psi_R = -(I-\Delta)^{-1}\left(H(\varepsilon)e^{\psi_\xi}\psi_R - \psi_R + H(\varepsilon) - T_{2k-1}(H(\varepsilon)) - \int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^k R\,\mathrm{d}v\right),$$

并且存在一个常数 $C>0$，使得

$$\begin{aligned}\|\psi_R\|_2 \leq & C\Big\|H(\varepsilon)e^{\psi_\xi}\psi_R-\psi_R+H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))-\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^k R\,\mathrm{d}v\Big\|_0\\ \leq & Ce^{\|\psi_R\|_\infty}\|\psi_R\|_0+C\varepsilon^k\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\varepsilon^k\|f\|_0\\ \leq & Ce^{2\|\psi_R\|_\infty}\varepsilon^k\big(\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\|f\|_0\big),\end{aligned}$$

这意味着

$$\|\psi_R\|_\infty \leq Ce^{2\|\psi_R\|_\infty}\varepsilon^k\big(\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\|f\|_0\big).$$

由 $\|f\|_0$ 和 $\|\psi_R\|_\infty=o(1)$ 的有界性，当 ε 足够小时，有 $\|\psi_R\|_\infty=O(\varepsilon^k)$。此外，存在一个与 ψ_R 无关的常数 $C>0$，使得

$$\|\psi_R\|_2 \leq C\varepsilon^k\big(\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\|f\|_0\big).$$

因此，命题 3.1 得证。 □

接下来，我们验证命题 3.2。

命题 *3.2* 的证明。第*1*步。证明 (3.3)。注意，对于任意固定的 $(t、\ x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^3$,

$$H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))=\frac{H^{(2k)}(\vartheta_{t,x}\varepsilon)}{(2k)!}\varepsilon^{2k},\quad 0<\vartheta_{t,x}<1.$$

为估计 $H^{(2k)}(\vartheta_{t,x}\varepsilon)$，记

$$g(\varepsilon):=\phi_0+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}$$

并注意到

$$\begin{aligned}H^{(1)}(\varepsilon)=&g^{(1)}(\varepsilon)H(\varepsilon),\\ H^{(2)}(\varepsilon)=&g^{(2)}(\varepsilon)H(\varepsilon)+g^{(1)}(\varepsilon)g^{(1)}(\varepsilon)H(\varepsilon),\\ H^{(3)}(\varepsilon)=&g^{(3)}(\varepsilon)H(\varepsilon)+3g^{(2)}(\varepsilon)g^{(1)}(\varepsilon)H(\varepsilon)+g^{(1)}(\varepsilon)g^{(1)}(\varepsilon)g^{(1)}(\varepsilon)H(\varepsilon),\\ &\cdots\\ H^{(2k)}(\varepsilon)=&H(\varepsilon)\sum_{\varpi}C_\varpi\prod_{1\leq\ell\leq 2k}(g^{(\ell)}(\varepsilon))^{\varpi_\ell}=H(\varepsilon)\sum_{\varpi}C_\varpi\prod_{1\leq\ell\leq 2k-1}(g^{(\ell)}(\varepsilon))^{\varpi_\ell},\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中，系数 C_ϖ 均为非负整数，求和遍历满足 $\varpi_\ell\in\mathbb{N}_+$,$\sum_{1\leq\ell\leq 2k-1}\ell\varpi_\ell=2k$ 的那些 ϖ。注意，(3.6) 是著名的 Fa`a di Bruno 公式的一个简单形式。显然，$g^{(2k)}(\varepsilon)=0$，且

$$g^{(\ell)}(\varepsilon)=\ell!\phi_\ell+(\ell+1)!\varepsilon^1\phi_{\ell+1}+\cdots+\frac{(2k-1)!}{(2k-\ell-1)!}\varepsilon^{2k-\ell-1}\phi_{2k-1},\quad 1\leq\ell\leq 2k-1.$$

对于 $t\leq\varepsilon^{-m}$、$0<m<\frac{1}{2}$ 和 $1\leq\ell\leq 2k-1$，我们有

$$\begin{aligned}\|g^{(\ell)}(\vartheta_{t,x}\varepsilon)\|_0 \leq & \ell!\|\phi_\ell\|_0+(\ell+1)!\|(\vartheta_{t,x}\varepsilon)^1\phi_{\ell+1}\|_0+\cdots+\frac{(2k-1)!}{(2k-\ell-1)!}\|(\vartheta_{t,x}\varepsilon)^{2k-\ell-1}\phi_{2k-1}\|_0\\ \leq & \ell!\|\phi_\ell\|_0+(\ell+1)!\varepsilon^1\|\phi_{\ell+1}\|_0+\cdots+\frac{(2k-1)!}{(2k-\ell-1)!}\varepsilon^{2k-\ell-1}\|\phi_{2k-1}\|_0\\ \leq & C_\ell((1+t)^{\ell-1}+\varepsilon^1(1+t)^\ell+\cdots+\varepsilon^{2k-\ell-1}(1+t)^{2k-2})\\ \leq & C_\ell((\varepsilon^{-m})^{\ell-1}+\varepsilon^1(\varepsilon^{-m})^\ell+\cdots+\varepsilon^{2k-\ell-1}(\varepsilon^{-m})^{2k-2}),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|g^{(\ell)}(\vartheta_{t,x}\varepsilon)\|_\infty \leq & \ell!\|\phi_\ell\|_\infty+(\ell+1)!\|(\vartheta_{t,x}\varepsilon)^1\phi_{\ell+1}\|_\infty+\cdots+\frac{(2k-1)!}{(2k-\ell-1)!}\|(\vartheta_{t,x}\varepsilon)^{2k-\ell-1}\phi_{2k-1}\|_\infty\\ \leq & \ell!\|\phi_\ell\|_\infty+(\ell+1)!\varepsilon^1\|\phi_{\ell+1}\|_\infty+\cdots+\frac{(2k-1)!}{(2k-\ell-1)!}\varepsilon^{2k-\ell-1}\|\phi_{2k-1}\|_\infty\end{aligned}$$

$$\leq C_\ell((1+t)^{\ell-1}+\varepsilon^1(1+t)^\ell+\cdots+\varepsilon^{2k-\ell-1}(1+t)^{2k-2})$$
$$\leq C_\ell((\varepsilon^{-m})^{\ell-1}+\varepsilon^1(\varepsilon^{-m})^\ell+\cdots+\varepsilon^{2k-\ell-1}(\varepsilon^{-m})^{2k-2}).$$

因此,

$$\begin{aligned}(\varepsilon^{\frac12})^{\ell-1}\|g^{(\ell)}(\vartheta_{t,x}\varepsilon)\|_0 &\leq C_\ell(\varepsilon^{\frac12})^{\ell-1}((\varepsilon^{-m})^{\ell-1}+\varepsilon^1(\varepsilon^{-m})^\ell+\cdots+\varepsilon^{2k-\ell-1}(\varepsilon^{-m})^{2k-2})\\ &=C_\ell((\varepsilon^{\frac12-m})^{\ell-1}+\varepsilon^{\frac12}(\varepsilon^{\frac12-m})^\ell+\cdots+\varepsilon^{\frac{2k-\ell-1}{2}}(\varepsilon^{\frac12-m})^{2k-2})\\ &\leq 2C_\ell(\varepsilon^{\frac12-m})^{\ell-1},\end{aligned}\tag{3.7}$$

and

$$(\varepsilon^{\frac12})^{\ell-1}\|g^{(\ell)}(\vartheta_{t,x}\varepsilon)\|_\infty \leq 2C_\ell(\varepsilon^{\frac12-m})^{\ell-1}.\tag{3.8}$$

因此，我们得到一个关键估计:

$$\begin{aligned}&\Big\|\varepsilon^{2k}\prod_{1\leq\ell\leq2k-1}(g^{(\ell)}(\vartheta_{t,x}\varepsilon))^{\varpi_\ell}\Big\|_0\\ &\leq C(\varepsilon^{\frac12})^{2k}(\varepsilon^{\frac12})^{2k-\sum_{1\leq\ell\leq2k-1}(\ell-1)\varpi_\ell}(\varepsilon^{\frac12-m})^{\sum_{1\leq\ell\leq2k-1}(\ell-1)\varpi_\ell}\\ &\leq C(\varepsilon^{\frac12})^{2k}(\varepsilon^{\frac12})^{\sum_{1\leq\ell\leq2k-1}\varpi_\ell}\\ &\leq C(\varepsilon^{\frac12})^{2k}(\varepsilon^{\frac12})^1=C\varepsilon^k\varepsilon^{\frac12}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

上面的第二个不等式源于 $\sum_{1\leq\ell\leq2k}\ell\varpi_\ell=2k$ 和 $\varpi_\ell\in\mathbb{N}_{+\circ}$ 由于 $\|H(\vartheta_{t,\ x}\varepsilon)\|_\infty<\infty$对 $t\leq\varepsilon^{-m}$成立，我们得到

$$\begin{aligned}\|H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))\|_0&=\Big\|\frac{H^{(2k)}(\vartheta_{t,x}\varepsilon)}{(2k)!}\varepsilon^{2k}\Big\|_0\\ &=\Big\|H(\vartheta_{t,x}\varepsilon)\varepsilon^{2k}\frac{1}{(2k)!}\sum_{\varpi}C_\varpi\prod_{1\leq\ell\leq2k-1}(g^{(\ell)}(\vartheta_{t,x}\varepsilon))^{\varpi_\ell}\Big\|_0\\ &\leq C\Big\|\varepsilon^{2k}\prod_{1\leq\ell\leq2k-1}(g^{(\ell)}(\vartheta_{t,x}\varepsilon))^{\varpi_\ell}\Big\|_0\\ &\leq C\varepsilon^k\varepsilon^{\frac12}.\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\|H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))\|_\infty\leq C\varepsilon^{k+\frac12}.$$

因此，(3.3) 得证。

步骤 *2.* 证明 (3.4)。我们断言

$$\partial_t(T_{2k-1}(H)(\varepsilon))=T_{2k-1}(\partial_tH)(\varepsilon).$$

事实上，这直接由混合偏导数相等得出。只需验证对于每个 $t>0$, $\partial_tH(\varepsilon)$ 的连续性（从而也验证 $\partial_t\partial_\varepsilon H(\varepsilon)$ 的连续性）。由于

$$\partial_tH(\varepsilon)=H(\varepsilon)\partial_tg(\varepsilon)=(\partial_t\phi_0+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\partial_t\phi_{2k-1})H(\varepsilon),$$

we s将证明 $\partial_{tt}\phi_i$ 在每个时间区间内有界。为此，我们先证明

$$\|\partial_t\phi_i\|_s\leq C(1+t)^{i-1}$$

对于 $1\leq i\leq2k-1$ 和 $s\in\mathbb{N}_{+\circ}$

由 (1.6) 的 ε^0 步: $\Delta\phi_0=e^{\phi_0}-\rho_0$，可得

$$\Delta(\partial_t\phi_0)=\partial_t\phi_0e^{\phi_0}-\partial_t\rho_0.$$

因此，有

$$\partial_t\phi_0=(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}(\partial_t\rho_0)=-(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}(\nabla\cdot(\rho_0u_0)).$$

由于 $\|\nabla\cdot(\rho_0u_0)\|_s\le C$ 和 $(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}\in\Psi^{-2}$，我们可以推导出 $\|\partial_t\phi_0\|_{s+2}\le C$。

由 (1.6) 的 ε^1 步：$\Delta\phi_1=e^{\phi_0}\phi_1-\rho_1$，我们得到

$$\Delta(\partial_t\phi_1)=\partial_t\phi_0e^{\phi_0}\phi_1+e^{\phi_0}\partial_t\phi_1-\partial_t\rho_1.$$

因此，有

$$\begin{aligned}\partial_t\phi_1=&(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}(\partial_t\rho_1-\partial_t\phi_0e^{\phi_0}\phi_1)\\=&-(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}(\nabla\cdot(\rho_1u_0+\rho_0u_1)+\partial_t\phi_0e^{\phi_0}\phi_1).\end{aligned}$$

由于乘以 $e^{\phi_0}\in C_b^\infty(\mathbb{R}^3)$ 是从 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 到其自身的连续映射，$\|\partial_t\phi_0\|_s+\|\phi_1\|_s\le C$，且对于 $s>\frac{3}{2}$，$H^s(\mathbb{R}^3)$ 是一个巴拿赫代数，因此我们有

$$\|\nabla\cdot(\rho_1u_0+\rho_0u_1)+\partial_t\phi_0e^{\phi_0}\phi_1\|_s\le C.$$

由 $(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}\in\Psi^{-2}$，我们推得 $\|\partial_t\phi_1\|_{s+2}\le C$。

归纳地，假设

$$\|\partial_t\phi_j\|_s\le C(1+t)^{j-1}\quad\text{for }\ 1\le j\le i.$$

对于 $j=i+1$，由 (1.6) 的第 ε^j 步可得

$$\partial_t\phi_{i+1}=-(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}(\nabla\cdot(\rho_{i+1}u_0+\rho_0u_{i+1})+e^{\phi_0}\partial_t(A_{i+1}-\phi_{i+1})+\partial_t\phi_0e^{\phi_0}A_{i+1}),$$

其中

$$A_{i+1}-\phi_{i+1}=\sum C_{\varkappa}\prod_{1\le j\le i}(\phi_j)^{\varkappa_j}$$

其中 $\sum_{1\le j\le i}j\varkappa_j=i+1$ 和 $C_{\varkappa}>0$。由于对 $1\le j\le 2k-1$ 有 $\|\phi_j\|_s\le C(1+t)^{j-1}$，我们得到

$$\|\nabla\cdot(\rho_{i+1}u_0+\rho_0u_{i+1})+e^{\phi_0}\partial_t(A_{i+1}-\phi_{i+1})+\partial_t\phi_0e^{\phi_0}A_{i+1}\|_s\le C(1+t)^i.$$

因此，由 $(e^{\phi_0}-\Delta)^{-1}\in\Psi^{-2}$ 可推出 $\|\partial_t\phi_{i+1}\|_{s+2}\le C(1+t)^i$。于是，我们得出

$$\|\partial_t\phi_i\|_s\le C(1+t)^{i-1}\quad\text{for }\ 1\le i\le 2k-1\ \text{ and }\ s\in\mathbb{N}_+.$$

接下来，我们研究 $0\le i\le 2k-1$ 时的 $\partial_{tt}\phi_i$。由 (1.6) 的第 ε^0 步可得

$$\begin{aligned}-(e^{\phi_0}-\Delta)\partial_{tt}\phi_0=&(\partial_t\phi_0)^2e^{\phi_0}-\partial_{tt}\rho_0\\=&(\partial_t\phi_0)^2e^{\phi_0}+\partial_t\nabla_x\cdot(\rho_0u_0)\\=&(\partial_t\phi_0)^2e^{\phi_0}+\partial_tu_0\cdot\nabla\rho_0+u_0\cdot\nabla\partial_t\rho_0+\partial_t\rho_0\nabla\cdot u_0+\rho_0\nabla\cdot\partial_tu_0\\=&(\partial_t\phi_0)^2e^{\phi_0}-((u_0\cdot\nabla)u_0+\frac{1}{\rho_0}\nabla(\rho_0\theta_0)+\nabla\phi_0)\cdot\nabla\rho_0\\&-(u_0\cdot\nabla)\nabla\cdot(\rho_0u_0)-\nabla\cdot(\rho_0u_0)\nabla\cdot u_0\\&-\rho_0\nabla\cdot((u_0\cdot\nabla)u_0+\frac{1}{\rho_0}\nabla(\rho_0\theta_0)+\nabla\phi_0).\end{aligned}$$

由椭圆估计 es，对于任意 $\eta>0$、$s\ge2$，$\sup_{0\le t\le\eta}\|\partial_{tt}\phi_0\|_s$ 都有界。由 (1.6) 的 ε^1 步，我们得 et

$$\begin{aligned}-(e^{\phi_0}-\Delta)\partial_{tt}\phi_1=&((\partial_t\phi_0)^2\phi_1+\partial_{tt}\phi_0\phi_1+2\partial_t\phi_0\partial_t\phi_1)e^{\phi_0}-\partial_{tt}\rho_1\\=&((\partial_t\phi_0)^2\phi_1+\partial_{tt}\phi_0\phi_1+2\partial_t\phi_0\partial_t\phi_1)e^{\phi_0}+\nabla_x\cdot\partial_t(\rho_0u_1+\rho_1u_0)\\=&((\partial_t\phi_0)^2\phi_1+\partial_{tt}\phi_0\phi_1+2\partial_t\phi_0\partial_t\phi_1)e^{\phi_0}\\&+\partial_tu_1\cdot\nabla\rho_0+u_1\cdot\nabla\partial_t\rho_0+\partial_t\rho_1\nabla\cdot u_0+\rho_1\nabla\cdot\partial_tu_0,\end{aligned}$$

其中，将 (1.11) 和 (1.12) 代入上述右端中的 $\partial_t\rho_1$ 和 ∂_tu_1，可得到 ρ_1 的 x 阶导数，u_1，ρ_0 和 u_0。由椭圆估计，对于任意 $\eta>0$、$s\ge2$，$\sup_{0\le t\le\eta}\|\partial_{tt}\phi_0\|_s$ 都有界。

类似地，我们推导出对于任意 $\eta>0$，$\partial_t\phi_i\in W^{1,\infty}([0,\eta])$，这意味着 $\partial_t\phi_i(0\le i\le2k-1)$ 在 t 上连续。因此，我们得出 $\partial_t(T_{2k-1}(H(\varepsilon)))=T_{2k-1}(\partial_tH)(\varepsilon)$。

注意，对于任意固定的 $(t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}\partial_t(H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon)))&=\partial_tH(\varepsilon)-T_{2k-1}(\partial_tH)(\varepsilon)\\&=\frac{(\partial_tH)^{(2k)}(\vartheta'_{t,x}\varepsilon)}{(2k)!}\varepsilon^{2k},\quad 0<\vartheta'_{t,x}<1.\end{aligned}$$

根据 (3.6)，有

$$(\partial_tH)^{(2k)}(\varepsilon)=\partial_t(H^{(2k)}(\varepsilon))=\partial_tH(\varepsilon)\sum_{\varpi}C_{\varpi}\prod_{1\le\ell\le2k-1}(g^{(\ell)}(\varepsilon))^{\varpi_\ell}+H(\varepsilon)\sum_{\varpi}C_{\varpi}\partial_t\Big(\prod_{1\le\ell\le2k-1}(g^{(\ell)}(\varepsilon))^{\varpi_\ell}\Big).$$

现在处理 $\|\partial_tH(\varepsilon)\|_\infty$ 和 $\|\partial_tg^{(\ell)}(\varepsilon)\|_0$。注意到

$$\partial_tH(\varepsilon)=(\partial_t\phi_0+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\partial_t\phi_{2k-1})\exp\{\phi_0+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}\},\tag{3.10}$$

$$\partial_tg^{(\ell)}(\varepsilon)=\ell!\partial_t\phi_\ell+(\ell+1)!\varepsilon^1\partial_t\phi_{\ell+1}+\cdots+\frac{(2k-1)!}{(2k-\ell-1)!}\varepsilon^{2k-\ell-1}\partial_t\phi_{2k-1},\quad 1\le\ell\le2k-1.\tag{3.11}$$

由 (2.6)、(3.10) 和 (3.11)，对于 $t\le\varepsilon^{-m}$、$0<m<\frac12$，可得

$$\begin{aligned}\|\partial_tH(\varepsilon)\|_\infty&\le(\|\partial_t\phi_0\|_\infty+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\|\partial_t\phi_{2k-1}\|_\infty)\exp\{\|\phi_0\|_\infty+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\|\phi_{2k-1}\|_\infty\},\\&\le C\Big(\frac{1}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}+\varepsilon\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)\Big)e^{C+C\varepsilon\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)}\le C,\end{aligned}\tag{3.12}$$

对于 $1\le\ell\le2k-1$,

$$\begin{aligned}\|\partial_tg^{(\ell)}(\varepsilon)\|_0&\le\ell!\|\partial_t\phi_\ell\|_0+(\ell+1)!\varepsilon^1\|\partial_t\phi_{\ell+1}\|_0+\cdots+\frac{(2k-1)!}{(2k-\ell-1)!}\varepsilon^{2k-\ell-1}\|\partial_t\phi_{2k-1}\|_0\\&\le C_\ell((1+t)^{\ell-1}+\varepsilon^1(1+t)^\ell+\cdots+\varepsilon^{2k-\ell-1}(1+t)^{2k-2})\\&\le C_\ell((\varepsilon^{-m})^{\ell-1}+\varepsilon^1(\varepsilon^{-m})^\ell+\cdots+\varepsilon^{2k-\ell-1}(\varepsilon^{-m})^{2k-2}),\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}(\varepsilon^{\frac12})^{\ell-1}\|\partial_tg^{(\ell)}(\vartheta'_{t,x}\varepsilon)\|_0&\le C_\ell(\varepsilon^{\frac12})^{\ell-1}((\varepsilon^{-m})^{\ell-1}+\varepsilon^1(\varepsilon^{-m})^\ell+\cdots+\varepsilon^{2k-\ell-1}(\varepsilon^{-m})^{2k-2})\\&=C_\ell((\varepsilon^{\frac12-m})^{\ell-1}+\varepsilon^{\frac12}(\varepsilon^{\frac12-m})^\ell+\cdots+\varepsilon^{\frac{2k-\ell-1}{2}}(\varepsilon^{\frac12-m})^{2k-2})\\&\le2C_\ell(\varepsilon^{\frac12-m})^{\ell-1}.\end{aligned}$$

结合 上述不等式与估计式 (3.7) 和 (3.8)，类似于 (3.9)，可得

$$\begin{aligned}&\|\partial_t(H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon)))\|_0\\&\le\Big\|\partial_tH(\vartheta'_{t,x}\varepsilon)\varepsilon^{2k}\frac{1}{(2k)!}\sum_{\varpi}C_{\varpi}\prod_{1\le\ell\le2k-1}(g^{(\ell)}(\vartheta'_{t,x}\varepsilon))^{\varpi_\ell}\Big\|_0\\&\quad+\Big\|H(\vartheta'_{t,x}\varepsilon)\varepsilon^{2k}\frac{1}{(2k)!}\sum_{\varpi}C_{\varpi}\partial_t\Big(\prod_{1\le\ell\le2k-1}(g^{(\ell)})^{\varpi_\ell}\Big)(\vartheta'_{t,x}\varepsilon)\Big\|_0\\&\le C\Big\|\varepsilon^{2k}\prod_{1\le\ell\le2k-1}(g^{(\ell)}(\vartheta'_{t,x}\varepsilon))^{\varpi_\ell}\Big\|_0+C\Big\|\varepsilon^{2k}\partial_t\Big(\prod_{1\le\ell\le2k-1}(g^{(\ell)})^{\varpi_\ell}\Big)(\vartheta'_{t,x}\varepsilon)\Big\|_0\\&\le C\varepsilon^k\varepsilon^{\frac12}.\end{aligned}$$

因此，(3.4) 得证。

步骤 *3.* 证明 (3.5)。由于 $\nabla_xH(\varepsilon)$ 关于 x 连续，我们交换 x 和 ε 的混合偏导数，得到

$$\begin{aligned}\nabla_x(H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon)))&=\nabla_xH(\varepsilon)-T_{2k-1}(\nabla_xH)(\varepsilon)\\&=\frac{(\nabla_xH)^{(2k)}(\vartheta''_{t,x}\varepsilon)}{(2k)!}\varepsilon^{2k},\quad 0<\vartheta''_{t,x}<1,\end{aligned}$$

对于任意固定的 $(t,\ x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^3$。这里，

$$(\nabla_x H)^{(2k)}(\varepsilon)=\nabla_x(H^{(2k)}(\varepsilon))=\nabla_x H(\varepsilon)\sum_{\varpi}C_{\varpi}\prod_{1\le\ell\le 2k-1}(g^{(\ell)}(\varepsilon))^{\varpi_\ell}+H(\varepsilon)\sum_{\varpi}C_{\varpi}\nabla_x\Big(\prod_{1\le\ell\le 2k-1}(g^{(\ell)}(\varepsilon))^{\varpi_\ell}\Big).$$

与推导式 (3.4) 类似，我们得到

$$\begin{aligned}
&\|\nabla_x(H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon)))\|_\infty\\
\le&\Big\|\nabla_x H(\vartheta''_{t,x}\varepsilon)\varepsilon^{2k}\frac{1}{(2k)!}\sum_{\varpi}C_{\varpi}\prod_{1\le\ell\le 2k-1}(g^{(\ell)}(\vartheta''_{t,x}\varepsilon))^{\varpi_\ell}\Big\|_0\\
&+\Big\|H(\vartheta''_{t,x}\varepsilon)\varepsilon^{2k}\frac{1}{(2k)!}\sum_{\varpi}C_{\varpi}\nabla_x\Big(\prod_{1\le\ell\le 2k-1}(g^{(\ell)}(\vartheta''_{t,x}\varepsilon))^{\varpi_\ell}\Big)\Big\|_0\\
\le&C\Big\|\varepsilon^{2k}\prod_{1\le\ell\le 2k-1}(g^{(\ell)}(\vartheta''_{t,x}\varepsilon))^{\varpi_\ell}\Big\|_0+C\Big\|\varepsilon^{2k}\nabla_x\Big(\prod_{1\le\ell\le 2k-1}(g^{(\ell)}(\vartheta''_{t,x}\varepsilon))^{\varpi_\ell}\Big)\Big\|_0\\
\le&C\varepsilon^k\varepsilon^{\frac12}.
\end{aligned}$$

因此，(3.5) 得证。命题 3.2 的证明至此完成。 □

4. L^2 Estimates for the Remainders R and ϕ_R

本节旨在进行 o 执行 L^2 余项 $f=\frac{R}{\sqrt{\mu}}$ 和 ϕ_R 的估计。由 (1.14)， f 满足 es

$$\begin{aligned}
&\{\partial_t+v\cdot\nabla_x-\nabla_x\phi_0\cdot\nabla_v\}f+\frac{1}{\varepsilon}Lf\\
&=-\frac{v-u_0}{\theta_0}\sqrt{\mu}\cdot\nabla_x\phi_R-\frac{\{\partial_t+v\cdot\nabla_x-\nabla_x\phi_0\cdot\nabla_v\}\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}f\\
&\quad+\varepsilon^{k-1}\Gamma(f,f)+\sum_{i=1}^{2k-1}\varepsilon^{i-1}\Big\{\Gamma\Big(\frac{F_i}{\sqrt{\mu}},f\Big)+\Gamma\Big(f,\frac{F_i}{\sqrt{\mu}}\Big)\Big\}\\
&\quad+\varepsilon^k\nabla_x\phi_R\cdot\nabla_v f-\varepsilon^k\nabla_x\phi_R\cdot\frac{v-u_0}{2\theta}f+\sum_{i=1}^{2k-1}\varepsilon^i\frac{\nabla_v F_i}{\sqrt{\mu}}\cdot\nabla_x\phi_R\\
&\quad-\sum_{i=1}^{2k-1}\varepsilon^i\nabla_x\phi_i\cdot\Big\{\frac{v-u_0}{2\theta_0}f-\nabla_v f\Big\}+\varepsilon^{k-1}\frac{A}{\sqrt{\mu}}.
\end{aligned}\tag{4.1}$$

对（4.1）两边取与 $\theta_0 f$ 的 L^2 内积，得到

$$\begin{aligned}
&\frac12\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\sqrt{\theta_0}f\|_0^2+\frac{1}{\varepsilon}\langle Lf,\theta_0 f\rangle+\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}v\sqrt{\mu}f\cdot\nabla_x\phi_R\mathrm{d}x\mathrm{d}v\\
&=\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}u_0\sqrt{\mu}f\cdot\nabla_x\phi_R\mathrm{d}x\mathrm{d}v+\varepsilon^{k-1}\langle\Gamma(f,f),\theta_0 f\rangle\\
&\quad+\Big\langle\frac12\{\partial_t+v\cdot\nabla_x\}\theta_0 f-\theta_0\frac{\{\partial_t+v\cdot\nabla_x-\nabla_x\phi_0\cdot\nabla_v\}\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}f,f\Big\rangle\\
&\quad+\Big\langle\theta_0\sum_{i=1}^{2k-1}\varepsilon^{i-1}\Big\{\Gamma\Big(\frac{F_i}{\sqrt{\mu}},f\Big)+\Gamma\Big(f,\frac{F_i}{\sqrt{\mu}}\Big)\Big\},f\Big\rangle\\
&\quad-\varepsilon^k\Big\langle\nabla_x\phi_R\cdot\frac{v-u_0}{2}f,f\Big\rangle+\Big\langle\theta_0\sum_{i=1}^{2k-1}\varepsilon^i\frac{\nabla_v F_i}{\sqrt{\mu}}\cdot\nabla_x\phi_R,f\Big\rangle\\
&\quad-\Big\langle\sum_{i=1}^{2k-1}\varepsilon^i\nabla_x\phi_i\cdot\frac{v-u_0}{2}f,f\Big\rangle+\varepsilon^{k-1}\Big\langle\frac{A}{\sqrt{\mu}},\theta_0 f\Big\rangle.
\end{aligned}\tag{4.2}$$

回顾时变函数 $\mathcal{I}_1(t,\ \varepsilon)$ 和 $\mathcal{I}_2(t,\ \varepsilon)$:

$$\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{2k-1}[\varepsilon(1+t)]^{i-1}+\Big(\sum_{i=1}^{2k-1}[\varepsilon(1+t)]^{i-1}\Big)^2, \tag{4.3}$$

$$\mathcal{I}_2(t,\varepsilon)=\sum_{2k\le i+j\le 4k-2}\varepsilon^{i+j-2k}(1+t)^{i+j-2}. \tag{4.4}$$

为处理 (4.2) 左端的项 $\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} v\sqrt{\mu}f\cdot\nabla_x\phi_R\mathrm{d}x\mathrm{d}v$，我们回顾方程 (3.1):

$$\Delta\psi_R=H(\varepsilon)(e^{\psi_R}-1)+H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))-\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^k R\,\mathrm{d}v,$$

这意味着

$$\Delta(\partial_t\psi_R)=\partial_t H(\varepsilon)(e^{\psi_R}-1)+H(\varepsilon)\partial_t(e^{\psi_R}-1)+\partial_t(H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon)))-\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^k\partial_t R\,\mathrm{d}v. \tag{4.5}$$

由于恒等式成立

$$\partial_t[H(\varepsilon)(e^{\psi_R}-1)]\psi_R=\partial_t[H(\varepsilon)(\psi_R e^{\psi_R}-e^{\psi_R}+1)]+\partial_t H(\varepsilon)(e^{\psi_R}-\psi_R-1),$$

将 (4.5) 乘以 ψ_R，得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}(\psi_R e^{\psi_R}-e^{\psi_R}+1)H(\varepsilon)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi_R|^2\mathrm{d}x\\&\quad=-\int_{\mathbb{R}^3}\big[\partial_t(H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon)))\psi_R+(e^{\psi_R}-\psi_R-1)\partial_t H(\varepsilon)\big]\mathrm{d}x\\&\qquad+\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\varepsilon^k\partial_t R\psi_R\mathrm{d}x\mathrm{d}v.\end{aligned} \tag{4.6}$$

根据 (1.14)，(4.6) 右端的最后一项等于

$$\varepsilon^{2k}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\partial_t R\phi_R\mathrm{d}x\mathrm{d}v=\varepsilon^{2k}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}-v\cdot\nabla_x R\phi_R\mathrm{d}x\mathrm{d}v=\varepsilon^{2k}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}v\sqrt{\mu}f\cdot\nabla_x\phi_R\mathrm{d}x\mathrm{d}v.$$

因此我们得到以下恒等式:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}(\psi_R e^{\psi_R}-e^{\psi_R}+1)H(\varepsilon)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi_R|^2\mathrm{d}x\\&\quad=-\int_{\mathbb{R}^3}\big[\partial_t(H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon)))\psi_R+(e^{\psi_R}-\psi_R-1)\partial_t H(\varepsilon)\big]\mathrm{d}x\\&\qquad+\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\varepsilon^k v\sqrt{\mu}f\cdot\nabla_x\psi_R\mathrm{d}x\mathrm{d}v.\end{aligned} \tag{4.7}$$

由 (3.4)，(4.7) 右端的第一项可由下式控制

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t(H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon)))\psi_R\mathrm{d}x\right|\le\|\partial_t(H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon)))\|_0\|\psi_R\|_0\le C\varepsilon^{2k}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\phi_R\|_0.$$

由 (3.2) 和 (3.12)，(4.7) 右端的第二项受控于

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^3}(e^{\psi_R}-\psi_R-1)\partial_t H(\varepsilon)\mathrm{d}x\right|\le&\|\partial_t H(\varepsilon)\|_\infty\int_{\mathbb{R}^3}|\psi_R|^2\Big(\frac{1}{2!}+\frac{|\psi_R|}{3!}+\frac{|\psi_R|^2}{4!}+\cdots\Big)\mathrm{d}x\\\le&C\Big(\frac{1}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}+\varepsilon\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)\Big)\int_{\mathbb{R}^3}|\psi_R|^2\cdot e\mathrm{d}x\\\le&C\Big(\frac{1}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}+\varepsilon\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)\Big)\|\psi_R\|_0^2\\=&C\varepsilon^{2k}\Big(\frac{1}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}+\varepsilon\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)\Big)\|\phi_R\|_0^2.\end{aligned}$$

因此，(4.7) 表明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^{-2k}H(\varepsilon)(\psi_R e^{\psi_R}-e^{\psi_R}+1)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\phi_R|^2\mathrm{d}x$$
$$-\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}v\sqrt{\mu}f\cdot\nabla_x\phi_R\mathrm{d}x\mathrm{d}v\le C\Big(\frac{1}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}+\varepsilon\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\Big)(\|\phi_R\|_0^2+\|\phi_R\|_0). \tag{4.8}$$

现在我们逐项处理 (4.2) 的右端。

(1). 对于第一项，由 (3.1) 可得

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}u_0\sqrt{\mu}f\cdot\nabla_x\phi_R\mathrm{d}x\mathrm{d}v=&-\int_{\mathbb{R}^3}\Delta\phi_R u_0\cdot\nabla_x\phi_R\mathrm{d}x\\&+\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^{-k}H(\varepsilon)\big(e^{\varepsilon^k\phi_R}-1\big)u_0\cdot\nabla_x\phi_R\mathrm{d}x\\&+\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^{-k}(H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon)))u_0\cdot\nabla_x\phi_R\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对于上面的右端各项，我们推得

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}^3}\Delta\phi_R u_0\cdot\nabla\phi_R\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla\phi_R\cdot\nabla)u_0\cdot\nabla\phi_R\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla\cdot u_0)|\nabla\phi_R|^2\mathrm{d}x\\&\le\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\|\nabla_x\phi_R\|_0^2,\end{aligned}$$

并且再次由 (3.2) 和中值定理可得,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^{-k}H(\varepsilon)\big(e^{\varepsilon^k\phi_R}-1\big)u_0\cdot\nabla_x\phi_R\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^3}H(\varepsilon)e^{\psi_\xi}\phi_R u_0\cdot\nabla_x\phi_R\mathrm{d}x\\&\le\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\|\phi_R\|_0\|\nabla_x\phi_R\|_0,\end{aligned}$$

并且由 (3.3) 可得,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^{-k}(H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon)))u_0\cdot\nabla_x\phi_R\mathrm{d}x&\le\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\|\varepsilon^{-k}(H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon)))\|_0\|\nabla_x\phi_R\|_0\\&\le\frac{C\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\|\nabla_x\phi_R\|_0.\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\Big|\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}u_0\sqrt{\mu}f\cdot\nabla_x\phi_R\mathrm{d}x\mathrm{d}v\Big|\le\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}(\|\phi_R\|_0^2+\|\nabla_x\phi_R\|_0^2+\|\nabla_x\phi_R\|_0).$$

（2）。由于这一项

$$\frac{1}{2}\{\partial_t+v\cdot\nabla_x\}\theta_0-\theta_0\frac{\{\partial_t+v\cdot\nabla_x-\nabla_x\phi_0\cdot\nabla_v\}\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}$$

在 $|v|$ 较大时表现得如同 $|v|^3$，我们注意到，对于 $\beta\ge7/2$，有 $(1+|v|^2)^{3/2}f\le(1+|v|^2)^{-2}h$，并得到

$$\begin{aligned}&\Big\langle\frac{1}{2}\{\partial_t+v\cdot\nabla_x\}\theta_0 f-\theta_0\frac{\{\partial_t+v\cdot\nabla_x-\nabla_x\phi_0\cdot\nabla_v\}\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}f,f\Big\rangle\\&\le C(\|\partial\rho_0\|_0+\|\partial u_0\|_0+\|\partial\theta_0\|_0+\|\nabla\phi_0\|_0)\big\|(1+|v|^2)^{3/2}f\mathbf{1}_{\{|v|\ge\frac{\kappa}{\sqrt{\varepsilon}}\}}\big\|_\infty\|f\|_0\\&\quad+C(\|\partial\rho_0\|_\infty+\|\partial u_0\|_\infty+\|\partial\theta_0\|_\infty+\|\nabla\phi_0\|_\infty)\big\|(1+|v|^2)^{3/4}f\mathbf{1}_{\{|v|\le\frac{\kappa}{\sqrt{\varepsilon}}\}}\big\|_0^2\\&\le C_\kappa\varepsilon^2\|h\|_\infty\|f\|_0+\frac{C}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}\big(\|f\|_0^2+\frac{\kappa^2}{\varepsilon}\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})f\|_\nu^2\big).\end{aligned}$$

（3）。显然可以推得

$$\big\langle\varepsilon^{k-1}\Gamma(f,f),\theta_0 f\big\rangle\le C\varepsilon^{k-1}\|h\|_\infty\|f\|_0^2,$$

and

$$\Big\langle \theta_0 \sum_{i=1}^{2k-1} \varepsilon^{i-1} \Big\{ \Gamma\Big(\frac{F_i}{\sqrt{\mu}}, f\Big) + \Gamma\Big(f, \frac{F_i}{\sqrt{\mu}}\Big) \Big\}, f \Big\rangle \le C_\kappa \varepsilon \mathcal{I}_1(t,\varepsilon) \|f\|_0^2 + \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})f\|_\nu^2,$$

and

$$\begin{aligned} &-\varepsilon^k \Big\langle \nabla_x \phi_R \cdot \frac{v-u_0}{2} f, f \Big\rangle + \Big\langle \theta_0 \sum_{i=1}^{2k-1} \varepsilon^i \frac{\nabla_v F_i}{\sqrt{\mu}} \cdot \nabla_x \phi_R, f \Big\rangle \\ &\quad \le C\varepsilon^k \|h\|_\infty \|\nabla_x \phi_R\|_0 \|f\|_0 + C\varepsilon \mathcal{I}_1(t,\varepsilon)(\|\nabla_x \phi_R\|_0^2 + \|f\|_0^2), \end{aligned}$$

and

$$\Big\langle \sum_{i=1}^{2k-1} \varepsilon^i \nabla_x \phi_i \cdot \frac{v-u_0}{2} f, f \Big\rangle \le C_\kappa \varepsilon \mathcal{I}_1(t,\varepsilon) \|f\|_0^2 + \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})f\|_\nu^2,$$

and

$$\varepsilon^{k-1} \Big\langle \frac{A}{\sqrt{\mu}}, \theta_0 f \Big\rangle \le C\mathcal{I}_2(t,\varepsilon) \varepsilon^{k-1} \|f\|_0.$$

众所周知，存在一个 $\delta_0 > 0$ 使得 $\langle Lf,\ f\rangle \ge \delta_0 \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})f\|_\nu^2$。取 κ 充分小，并将（4.2）与（4.8）结合可得

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon^{-2k} H(\varepsilon)(\psi_R e^{\psi_R} - e^{\psi_R} + 1)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|\nabla \phi_R\|_0^2 + \|\sqrt{\theta_0} f\|_0^2\big) + \frac{\delta_0}{2\varepsilon}\theta_M \|(\mathbf{I}-\mathbf{P})f\|_\nu^2 \\ &\quad \le C\Big(\frac{1}{(1+t)^{\frac{16}{15}}} + \varepsilon \mathcal{I}_1(t,\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\Big)(\|\phi_R\|_0^2 + \|\phi_R\|_0 + \|\nabla_x \phi_R\|_0^2 + \|\nabla_x \phi_R\|_0 + \|f\|_0^2) \\ &\qquad + C\mathcal{I}_2(t,\varepsilon)\varepsilon^{k-1}\|f\|_0 + C\big(\varepsilon^2 \|h\|_\infty \|f\|_0 + \varepsilon^{k-1}\|h\|_\infty \|f\|_0^2 + \varepsilon^k \|h\|_\infty \|f\|_0 \|\nabla_x \phi_R\|_0\big). \end{aligned} \tag{4.9}$$

5. $W^{1,\infty}$ Estimates for the Remainder R

我们先给出如下一个重要引理。对于任意函数 $\phi \in L^\infty([0,T]; C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3))$，定义经过 $(t,\ x,\ v)$ 的特征线 $[X(\tau; t,\ x,\ v)\ V(\tau; t,\ x,\ v)]$，使得

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}X(\tau;t,x,v)}{\mathrm{d}\tau} = V(\tau;t,x,v),\ \ X(t;t,x,v) = x, \\ &\frac{\mathrm{d}V(\tau;t,x,v)}{\mathrm{d}\tau} = -\nabla_x \phi(\tau, X(\tau;t,x,v)),\ \ V(t;t,x,v) = v. \end{aligned}$$

为简便起见，我们将 $[X(\tau; t,\ x,\ v)\ V(\tau; t,\ x,\ v)]$ 记作 $[X(\tau)\ V(\tau)]$。

引理 5.1。回顾 $h(t,x,v) = w(v)^{R_{(t,\ x,\ v)}\sqrt{\mu M(v)}}$。假设 $0 \le T \le \varepsilon^{-m}$、$0 < m < \frac{1}{2}$，以及

$$\sup_{0\le\tau\le T} \varepsilon^k \|h(\tau)\|_{W^{1,\infty}} \le \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{5.1}$$

那么，有

$$\sup_{0\le\tau\le T} \{\|\partial_x X(\tau)\|_\infty + \|\partial_v V(\tau)\|_\infty\} \le C. \tag{5.2}$$

此外，存在一个充分小的 $T_0 \in (0,\ T]$，使得对于每个 $0 \le \tau \le t \le T_0$，我们都有

$$\frac{1}{2}|t-\tau|^3 \le \Big|\text{行列式}\Big(\frac{\partial X(\tau)}{\partial v}\Big)\Big| \le 2|t-\tau|^3, \tag{5.3}$$

$$|\partial_v X(\tau)| \le 2|t-\tau|, \tag{5.4}$$

$$\frac{1}{2} \le \Big|\det\Big(\frac{\partial V(\tau)}{\partial v}\Big)\Big| \le 2,\ \ \frac{1}{2} \le \Big|\det\Big(\frac{\partial X(\tau)}{\partial x}\Big)\Big| \le 2, \tag{5.5}$$

$$\sup_{0\le\tau\le T_0,\, x_0\in\mathbb{R}^3,\, |v|\le N} \Big(\int_{\{|x-x_0|\le N\}} (|\partial_{xv} X(\tau)|^2 + |\partial_{vv} X(\tau)|^2)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}} \le C_N,\ \text{ for } N \ge 1. \tag{5.6}$$

证明。对于任意 $\alpha\in(0,1/2)$，$H^2(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3)$。由（3.2）可得

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{C^{0,\alpha}}&\le\|\phi_0\|_{C^{0,\alpha}}+\varepsilon\|\phi_1\|_{C^{0,\alpha}}+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\|\phi_{2k-1}\|_{C^{0,\alpha}}+\varepsilon^k\|\phi_R\|_{C^{0,\alpha}}\\&\le C\left(\|\phi_0\|_2+\varepsilon\|\phi_1\|_2+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\|\phi_{2k-1}\|_2+\varepsilon^k\|\phi_R\|_2\right)\\&\le C\big(1+\varepsilon+\cdots+\varepsilon^{2k-1}(1+t)^{2k-2}+\varepsilon^k\big(\varepsilon^{\frac12}+\|f\|_0\big)\big)\\&\le C+C\varepsilon\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)\le C.\end{aligned}$$

由 $(1.1)_2$, 可知

$$\begin{aligned}-(I-\Delta)\phi&=e^\phi-\phi-1-(\rho-1)\\&=e^\phi-\phi-1-\Big(\rho_0-1+\varepsilon\rho_1+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\rho_{2k-1}+\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^kR\,\mathrm{d}v\Big).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\|(I-\Delta)\phi\|_{C^{0,\alpha}}&\le\|e^\phi-\phi-1\|_{C^{0,\alpha}}+\Big(\|\rho_0-1\|_{C^{0,\alpha}}+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\|\rho_{2k-1}\|_{C^{0,\alpha}}+\Big\|\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^kR\,\mathrm{d}v\Big\|_{C^{0,\alpha}}\Big)\\&\le e^{\|\phi\|_{C^{0,\alpha}}}+C\left(\|\rho_0-1\|_2+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\|\rho_{2k-1}\|_2+\varepsilon^k\|h\|_{W^{1,\infty}}\right)\\&\le e^C+C(1+C\varepsilon\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)+\varepsilon^{\frac12})\le C.\end{aligned}$$

由于 $(I-\Delta)^{-1}\in\Psi^{-2}$，存在一个与 ϕ 无关的常数 $C>0$，使得

$$\|\phi\|_{C^{2,\alpha}}\le C\|(I-\Delta)\phi\|_{C^{0,\alpha}}\le C.\tag{5.7}$$

注意到，当 $\partial=\partial_x$ 或 ∂_v 时，有

$$\frac{\mathrm{d}^2\partial X(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2}=-\nabla_{xx}\phi(\tau,X(\tau))\partial X.$$

利用 $\|\nabla_{xx}\phi\|_\infty\le C$ 并对时间积分，可得

$$\sup_{0\le\tau\le T}\{\|\partial_xX(\tau)\|_\infty+\|\partial_vV(\tau)\|_\infty\}\le C.$$

此外，考虑 $\partial X_{(\tau)}/\partial v$、$\partial X_{(\tau)}/\partial x$ 和 $\partial V_{(\tau)}/\partial v$ 在 τ 附近关于 t 的泰勒展开:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X(\tau)}{\partial v}&=(\tau-t)I+\frac{(\tau-t)^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{\partial X(\bar\tau)}{\partial v},\\\frac{\partial X(\tau)}{\partial x}&=I+\frac{(\tau-t)^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{\partial X(\bar\tau)}{\partial x},\\\frac{\partial V(\tau)}{\partial v}&=I+(\tau-t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial V(\bar\tau)}{\partial v}\\&=I-(\tau-t)\nabla_{xx}\phi(\bar\tau)\frac{\partial X(\bar\tau)}{\partial v},\end{aligned}$$

对于 $\tau\le\bar\tau\le t$。注意到

$$\Big|\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{\partial X(\bar\tau)}{\partial v}\Big|=\Big|\frac{\partial}{\partial v}\nabla_x\phi(\bar\tau,X(\bar\tau))\Big|\le|\nabla_{xx}\phi(\bar\tau)|\Big|\frac{\partial X(\bar\tau)}{\partial v}\Big|\le C\sup_{0\le\bar\tau\le T}\Big\|\frac{\partial X(\bar\tau)}{\partial v}\Big\|_\infty,$$

and

$$\Big|\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{\partial X(\bar\tau)}{\partial x}\Big|=\Big|\frac{\partial}{\partial x}\nabla_x\phi(\bar\tau,X(\bar\tau))\Big|\le|\nabla_{xx}\phi(\bar\tau)|\Big|\frac{\partial X(\bar\tau)}{\partial x}\Big|\le C\sup_{0\le\bar\tau\le T}\Big\|\frac{\partial X(\bar\tau)}{\partial x}\Big\|_\infty,$$

因此，我们选取 T_0 足够小，使得对于 $0\le\tau\le t\le T_0$，(5.3)、(5.4)和(5.5)成立。为证明 (5.6)，我们注意到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\partial\partial_vX(\tau)&=\partial\partial_v\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}X(\tau)\Big)\\&=-\partial\partial_v(\nabla_x\phi(\tau,X(\tau)))\\&=-\partial(\nabla_x^2\phi(\tau,X(\tau))\partial_vX(\tau))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\nabla_x^3\phi(\tau, X(\tau))\partial_v X(\tau)\partial X(\tau)\\
&\quad -\nabla_x^2\phi(\tau, X(\tau))\partial\partial_v X(\tau).
\end{aligned}
$$

通过对上述方程关于时间积分两次，我们得到

$$
\begin{aligned}
\|\partial\partial_v X(\tau)\|_{L^2(\{|x-x_0|\le N\})} \le\ & \frac{T_0^2\|\nabla_{x,v}X\|_\infty^2}{2}\sup_{0\le\tau\le T_0}\|\nabla_x^3\phi(\tau, X(\tau))\|_{L^2(\{|x-x_0|\le N\})}\\
&+\frac{T_0^2\|\nabla_{x,v}\phi\|_\infty^2}{2}\sup_{0\le\tau\le T_0}\|\partial\partial_v X(\tau)\|_{L^2(\{|x-x_0|\le N\})}.
\end{aligned}
$$

对于 $|v|\le N$，我们很容易推出

$$
\{|x-x_0|\le N\}\cap\{|v|\le N\}\subset\{|X(\tau)-x_0|\le CN\}
$$

对于 $0\le\tau\le T_0\ll 1$ 和 $N\ge 1$。根据 (5.2)、(5.4)、(5.5) 和 (5.7)，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le\tau\le T_0,\, x_0\in\mathbb{R}^3,\, |v|\le N}\|\partial\partial_v X(\tau)\|_{L^2(\{|x-x_0|\le N\})}\\
\le& C\sup_{0\le\tau\le T_0,\, x_0\in\mathbb{R}^3,\, |v|\le N}\|\nabla_x^3\phi(\tau, X(\tau))\|_{L^2(\{|X(\tau)-x_0|\le CN\})}\\
\le& C\sup_{0\le\tau\le T_0,\, x_0\in\mathbb{R}^3,\, |v|\le N}\|\nabla_x^3\phi(\tau)\|_{L^2(\{|x-x_0|\le CN\})}\Big|\det\Big\{\frac{\partial X(\tau)}{\partial x}\Big\}\Big|^{-\frac12}\\
\le& C\sup_{0\le\tau\le T_0,\, x_0\in\mathbb{R}^3,\, |v|\le N}\|\nabla_x^3\phi(\tau)\|_{L^2(\{|x-x_0|\le CN\})}.
\end{aligned}
$$

为了控制 $\|\nabla_x^3\phi(\tau)\|_{L^2(\{|x-x_0|\le CN\})}$，我们将 $\chi(x)$ 定义为定义在区域 $\{|x-x_0|\le CN+1\}$ 上、关于 x 的光滑截断函数。利用 Calder´on-Zygmund 不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
\|\nabla_x^3\phi(\tau)\|_{L^2(\{|x-x_0|\le CN\})} \le& \|\partial_{ij}\partial_k(\chi\phi)\|_{L^2}\\
\le& C\|\Delta D_x(\chi\phi)\|_{L^2}\\
\le& C\|\chi D_x\phi e^\phi\|_{L^2}+C\|\chi(D_x\rho_0+\cdots+\varepsilon^{2k-1}D_x\rho_{2k-1})\|_{L^2}\\
&+C\Big\|\chi\varepsilon^k\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\sqrt{\mu_M}}{w}D_x h\mathrm{d}v\Big\|_{L^2}+C\Big\|\sum_{|\alpha|+|\beta|=3,\,|\beta|\le 2}\partial^\alpha\chi\partial^\beta\phi\Big\|_{L^2}\\
\le& CN^{\frac32}\|\phi\|_{C^{2,\alpha}}+C+C\varepsilon\mathcal{I}_1+\varepsilon^k N^{\frac32}\|h\|_{W^{1,\infty}}\\
\le& CN^{\frac32}.
\end{aligned}
$$

于是得到 (5.6)。引理 5.1 得证。 □

5.1. L^∞ **估计**。回顾全局麦克斯韦分布 μ_M:

$$
\mu_M(v)=\frac{1}{(2\pi\theta_M)^{\frac32}}\exp\Big\{-\frac{|v|^2}{2\theta_M}\Big\},
$$

以及局部麦克斯韦分布 μ:

$$
\mu(t,x,v)=\frac{\rho_0(t,x)}{(2\pi\theta_0(t,x))^{\frac32}}\exp\Big\{-\frac{|v-u_0(t,x)|^2}{2\theta_0(t,x)}\Big\},\quad \theta_0(t,x)=K\rho_0^{\frac23}(t,x).
$$

现在，我们定义

$$
L_M g=-\frac{1}{\sqrt{\mu_M}}\{Q(\mu,\sqrt{\mu_M}g)+Q(\sqrt{\mu_M}g,\mu)\}=(\nu(\mu)+K_M)g,
$$

and

$$
K_{M,w}g=wK_M\Big(\frac{g}{w}\Big).
$$

根据 (1.14)，$h=\frac{wR}{\sqrt{\mu_M}}$ 的方程为 ——

$$
\Big\{\partial_t+v\cdot\nabla_x-\nabla_x\phi\cdot\nabla_v+\frac{\nu(\mu)}{\varepsilon}\Big\}h+\frac{1}{\varepsilon}K_{M,w}h
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon^{k-1}w}{\sqrt{\mu_M}}Q\Big(\frac{h\sqrt{\mu_M}}{w},\frac{h\sqrt{\mu_M}}{w}\Big)+\nabla_x\phi\cdot\frac{w}{\sqrt{\mu_M}}\nabla_v\Big(\frac{\sqrt{\mu_M}}{w}\Big)h\\
&\quad+\sum_{i=1}^{2k-1}\frac{\varepsilon^{i-1}w}{\sqrt{\mu_M}}\Big\{Q\Big(F_i,\frac{h\sqrt{\mu_M}}{w}\Big)+Q\Big(\frac{h\sqrt{\mu_M}}{w},F_i\Big)\Big\}\\
&\quad+\nabla_x\phi_R\cdot\frac{w}{\sqrt{\mu_M}}\nabla_v\Big(\mu+\sum_{i=1}^{2k-1}\varepsilon^iF_i\Big)+\varepsilon^{k-1}\frac{w}{\sqrt{\mu_M}}A,
\end{aligned}\tag{5.8}
$$

其中 $\phi=\phi_0+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}+\varepsilon^k\phi_R$。我们有

引理 5.2. 假设(5.1) 成立。存在一个 $T_0>0$，使得当 $0\le T_0\le T\le\varepsilon^{-m}$ $(0<m<\frac12)$ 且ε 充分小时，

$$
\begin{aligned}
\sup_{0\le s\le T_0}\{\varepsilon^{\frac32}\|h(s)\|_\infty\}&\le C\{\|\varepsilon^{\frac32}h_0\|_\infty+\sup_{0\le s\le T}\|f(s)\|_0+\varepsilon^3\},\\
\varepsilon^{\frac32}\|h(T_0)\|_\infty&\le\frac12\|\varepsilon^{\frac32}h_0\|_\infty+C\sup_{0\le s\le T}\|f(s)\|_0+C\varepsilon^3.
\end{aligned}
$$

证明. 沿着轨迹 $[X(\tau)\ V(\tau)],$，有

$$
\begin{aligned}
h(t,x,v)=&\exp\Big\{-\frac1\varepsilon\int_0^t\nu(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\}h(0,X(0;t,x,v),V(0;t,x,v))\\
&-\int_0^t\exp\Big\{-\frac1\varepsilon\int_s^t\nu(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\}\frac1\varepsilon K_{M,w}h(s,X(s),V(s))\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t\exp\Big\{-\frac1\varepsilon\int_s^t\nu(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\}\frac{\varepsilon^{k-1}w}{\sqrt{\mu_M}}Q\Big(\frac{h\sqrt{\mu_M}}{w},\frac{h\sqrt{\mu_M}}{w}\Big)(s,X(s),V(s))\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t\exp\Big\{-\frac1\varepsilon\int_s^t\nu(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\}\sum_{i=1}^{2k-1}\frac{\varepsilon^{i-1}w}{\sqrt{\mu_M}}Q\Big(F_i,\frac{h\sqrt{\mu_M}}{w}\Big)(s,X(s),V(s))\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t\exp\Big\{-\frac1\varepsilon\int_s^t\nu(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\}\sum_{i=1}^{2k-1}\frac{\varepsilon^{i-1}w}{\sqrt{\mu_M}}Q\Big(\frac{h\sqrt{\mu_M}}{w},F_i\Big)(s,X(s),V(s))\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t\exp\Big\{-\frac1\varepsilon\int_s^t\nu(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\}\nabla_x\phi\cdot\frac{w}{\sqrt{\mu_M}}\nabla_v\Big(\frac{\sqrt{\mu_M}}{w}\Big)h(s,X(s),V(s))\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t\exp\Big\{-\frac1\varepsilon\int_s^t\nu(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\}\nabla_x\phi_R\cdot\frac{w}{\sqrt{\mu_M}}\nabla_v\Big(\mu+\sum_{i=1}^{2k-1}\varepsilon^iF_i\Big)(s,X(s),V(s))\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t\exp\Big\{-\frac1\varepsilon\int_s^t\nu(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\}\frac{\varepsilon^{k-1}w}{\sqrt{\mu_M}}A(s,X(s),V(s))\mathrm{d}s.
\end{aligned}\tag{5.9}
$$

由于 $\nu(\mu)\sim\int|v-u|\mu\mathrm{d}v\sim(1+|v|)\rho_0(t,\ x)\ge2\nu_0>0$，我们看到

$$
\begin{aligned}
\int_0^t\exp\Big\{-\frac1\varepsilon\int_s^t\nu(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\}\mathrm{d}s&\le e^{-\frac{\nu_0}{\varepsilon}(t-s)}\int_0^t\exp\Big\{-\frac{1}{2\varepsilon}\int_s^t\nu(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\}\mathrm{d}s\\
&\le e^{-\frac{\nu_0}{\varepsilon}(t-s)}\int_0^t\exp\Big\{-\frac{1}{2\varepsilon}\int_s^t\nu(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\}\frac{\nu}{2\varepsilon}\cdot\frac{2\varepsilon}{\nu}\mathrm{d}s\\
&\le C\varepsilon(1+|v|)^{-1}e^{-\frac{\nu_0}{\varepsilon}(t-s)}.
\end{aligned}
$$

现在，我们处理 (5.9) 右端的各项。

对于第六项　利用 (5.7)，(5.9) 中的这一行可由 $Ce^{-\frac{\nu_0t}{2\varepsilon}}\sup_{0\le s\le t}\{e^{\frac{\nu_0s}{2\varepsilon}}\|h(s)\|_\infty\}$ 控制—　　.

对于 (5.9) 中的第七行，我们按如下方式考察 $\|\nabla_x\phi_R\|_\infty$。回顾关于 $\psi_R=\varepsilon^k\phi_R$ 的方程 (3.1)，它等价于

$$
-(H(\varepsilon)-\Delta)\psi_R=H(\varepsilon)(e^{\psi_R}-1-\psi_R)+H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))-\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^kR\,\mathrm{d}v.\tag{5.10}
$$

注意到 ϕ_0，……， ϕ_{2k-1} 是满足以下条件的光滑函数

$$\sup_{t\le\varepsilon^{-m}}\|\phi_0+\cdots+\varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}\|_\infty\le C+C\varepsilon\sup_{t\le\varepsilon^{-m}}\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)\le C,$$

因此， $H(\varepsilon)-\Delta$ 是一个椭圆伪微分算子。由 Lax-Milgram 定理，逆算子（$H(\varepsilon)-\Delta$）$^{-1}$： $L^2\to H^1$ 作为有界线性算子存在，因此（$H(\varepsilon)-\Delta$）$^{-1}\in\Psi^{-2}$ 是$H(\varepsilon)-\Delta$的参数拟逆。对于任意 $p>3$，我们有

$$\|\psi_R\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^3)}\le C\|(H(\varepsilon)-\Delta)\psi_R\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

回顾 (3.2)， $\|\psi_R\|_\infty\le C\varepsilon^k$。由泰勒公式，对于每个 $x\in\mathbb{R}^3$，存在函数 $\psi_\xi\in L^\infty(\mathbb{R}^3)$，使得$\|\psi_\xi\|_\infty\le C\varepsilon^k$，且 $e^{\psi_R}-1-\psi_R=\frac{e^{\psi_\xi}}{2}\psi_R^2$。由插值， $H(\varepsilon)\in L^1\cap L^\infty\subset L^p$，我们还注意到，根据 (3.3)， $\|H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))\|_{L^p}\le C\varepsilon^{k+\frac12}$。因此我们得到

$$\begin{aligned}\|\psi_R\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^3)}&\le C\Big\|H(\varepsilon)(e^{\psi_R}-1-\psi_R)+H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))-\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^kR\,\mathrm{d}v\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\\&\le C\Big\|H(\varepsilon)\frac{e^{\psi_\xi}}{2}\psi_R^2\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}+C\|H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}+C\varepsilon^k\Big\|\int_{\mathbb{R}^3}R\,\mathrm{d}v\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\\&\le C\varepsilon^{2k}\|H(\varepsilon)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}+C\varepsilon^{k+\frac12}+C\varepsilon^k\Big\|\int_{\mathbb{R}^3}h\frac{\sqrt{\mu_M}}{w}\mathrm{d}v\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\\&\le C\varepsilon^{2k}+C\varepsilon^{k+\frac12}+C\varepsilon^k\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)},\end{aligned}$$

因此，对某个 $0<\bar\alpha<1$,

$$\|\nabla_x\phi_R\|_{L^\infty}\le\|\phi_R\|_{C^{1,\bar\alpha}}\le C\|\phi_R\|_{W^{2,p}}\le C\varepsilon^{\frac12}+C\|h\|_{L^\infty}.\tag{5.11}$$

这意味着 (5.9) 中的第七行可由以下量控制

$$C\varepsilon^{\frac32}+C\varepsilon e^{-\frac{\nu_0t}{2\varepsilon}}\sup_{0\le s\le t}\big\{e^{\frac{\nu_0s}{2\varepsilon}}\|h(s)\|_\infty\big\}.$$

对于 (5.9) 右端的其他项，其 L^∞ 估计与 [22]（见第 489–493 页）类似，其中 L^∞ 与 L^2相互作用。为简洁起见，此处省略细节。

总之，在假设 (5.1) 下，我们得到

$$\sup_{0\le s\le T_0}\big\{e^{\frac{\nu_0s}{2\varepsilon}}\|h(s)\|_\infty\big\}\le C\|h_0\|_\infty+\frac{C_N}{\varepsilon^{\frac32}}e^{\frac{\nu_0T_0}{2\varepsilon}}\sup_{0\le s\le T}\|f(s)\|_0+C\varepsilon^{\frac32}e^{\frac{\nu_0T_0}{2\varepsilon}}+C\varepsilon^ke^{\frac{\nu_0T_0}{2\varepsilon}}.$$

令 $s=T_0$并将所得结果乘以 $\varepsilon^{\frac32}e^{-\frac{\nu_0T_0}{2\varepsilon}}$，当 ε充分小时，我们推得

$$\varepsilon^{\frac32}\|h(T_0)\|_\infty\le\frac12\|\varepsilon^{\frac32}h(0)\|_\infty+C\sup_{0\le s\le T}\|f(s)\|_0+C\varepsilon^3,\tag{5.12}$$

由于 $k\ge6$。因此，引理 5.2 的证明完成。 □

5.2. $W^{1,\infty}$ **估计**。为验证假设 (5.1)，我们进一步研究 D_xh 的 L^∞ 范数。取 (5.8) 的 D_x，得到

$$\begin{aligned}\Big\{\partial_t+v\cdot\nabla_x-\nabla_x\phi\cdot\nabla_v+\frac{\nu(\mu)}{\varepsilon}\Big\}(D_xh)=\;&\nabla_x(D_x\phi)\cdot\nabla_vh-\frac{D_x\nu(\mu)}{\varepsilon}h\\&-\frac1\varepsilon D_x(K_{M,w}h)+\frac{\varepsilon^{k-1}w}{\sqrt{\mu_M}}D_x\Big(Q\Big(\frac{h\sqrt{\mu_M}}{w},\frac{h\sqrt{\mu_M}}{w}\Big)\Big)\\&+\sum_{i=1}^{2k-1}\frac{\varepsilon^{i-1}w}{\sqrt{\mu_M}}D_x\Big\{Q\Big(F_i,\frac{h\sqrt{\mu_M}}{w}\Big)+Q\Big(\frac{h\sqrt{\mu_M}}{w},F_i\Big)\Big\}\\&+D_x\Big(\nabla_x\phi\cdot\frac{w}{\sqrt{\mu_M}}\nabla_v\Big(\frac{\sqrt{\mu_M}}{w}\Big)h\Big)\\&+D_x\Big(\nabla_x\phi_R\cdot\frac{w}{\sqrt{\mu_M}}\nabla_v\Big(\mu+\sum_{i=1}^{2k-1}\varepsilon^iF_i\Big)\Big)\end{aligned}$$

$$+\varepsilon^{k-1}\frac{w}{\sqrt{\mu_M}}D_xA. \tag{5.13}$$

引理 5.3。对于引理 *5.2* 中得到的 T_0，以及所有充分小的 $\varepsilon>0$，有

$$\begin{aligned}\sup_{0\le s\le T_0}\{\varepsilon^5\|D_{x,v}h(s)\|_\infty\}\le{}&C\varepsilon^5\{\|D_{x,v}h(0)\|_\infty+\|(1+|v|)h(0)\|_\infty\}+C\varepsilon^2\|h(0)\|_\infty\\&+C\varepsilon^{\frac12}\sup_{0\le s\le T}\|f(s)\|_0+C\varepsilon^{\frac72},\\ \varepsilon^5\|D_{x,v}h(T_0)\|_\infty\le{}&\frac12\varepsilon^5\{\|D_{x,v}h(0)\|_\infty+\|(1+|v|)h(0)\|_\infty\}+\frac12\varepsilon^2\|h(0)\|_\infty\\&+C\varepsilon^{\frac12}\sup_{0\le s\le T}\|f(s)\|_0+C\varepsilon^{\frac72}.\end{aligned}$$

证明。根据 (5.7)，我们得到 $\|D_x^2\phi\|_\infty\le C$。沿着轨迹，(5.13) 右端第四行的贡献为

$$C\varepsilon e^{-\frac{\nu_0 t}{2\varepsilon}}\sup_{0\le s\le t}\{e^{\frac{\nu_0 s}{2\varepsilon}}\|h\|_{W^{1,\infty}}\}.$$

接下来我们估计 $\|D_x^2\phi_R\|_\infty$，以处理 (5.13) 右端第五行。

回顾关于 ψ_R 的方程 (5.10)：$=\varepsilon^k\phi_R$,

$$-(H(\varepsilon)-\Delta)\psi_R=H(\varepsilon)(e^{\psi_R}-1-\psi_R)+H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))-\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^kR\,\mathrm{d}v,$$

其中 $H(\varepsilon)$ 定义于 (1.18)。由于 $(H(\varepsilon)-\Delta)^{-1}\in\Psi^{-2}$，对于任意 $0<\tilde\alpha<1$，我们有 ，

$$\begin{aligned}\|\psi_R\|_{C^{2,\tilde\alpha}}\le{}&C\Big\|H(\varepsilon)(e^{\psi_R}-1-\psi_R)+H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))-\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^kR\,\mathrm{d}v\Big\|_{C^{0,\tilde\alpha}}\\\le{}&C\|H(\varepsilon)(e^{\psi_R}-1-\psi_R)\|_{W^{1,\infty}}+C\|H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))\|_{W^{1,\infty}}+C\Big\|\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^kR\,\mathrm{d}v\Big\|_{W^{1,\infty}}.\end{aligned}$$

由 (3.2)：$\|\psi_R\|_\infty\le C\varepsilon^k$ 和 (5.11)：$\|\nabla_x\psi_R\|_\infty\le C\varepsilon^{k+\frac12}+C\varepsilon^k\|h\|_\infty$，可得

$$\begin{aligned}&\|H(\varepsilon)(e^{\psi_R}-1-\psi_R)\|_{W^{1,\infty}}\\=\,&\|H(\varepsilon)(e^{\psi_R}-1-\psi_R)\|_\infty+\|\nabla_xH(\varepsilon)(e^{\psi_R}-1-\psi_R)\|_\infty+\|H(\varepsilon)(e^{\psi_R}-1)\nabla_x\psi_R\|_\infty\\\le\,&\frac12(\|H(\varepsilon)\|_\infty+\|\nabla_xH(\varepsilon)\|_\infty)\big\|e^{|\psi_R|}\psi_R^2\big\|_\infty+\|H(\varepsilon)\|_\infty\|\nabla_x\psi_R\|_\infty\|e^{|\psi_R|}\psi_R\|_\infty\\\le\,&C\varepsilon^{2k}+C\varepsilon^{2k}(\varepsilon^{\frac12}+\|h\|_\infty)\le C\varepsilon^{2k}(1+\|h\|_\infty).\end{aligned}$$

由关键估计 (3.3) 和 (3.5)，我们得到 $\|H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))\|_{W^{1,\infty}}\le C\varepsilon^{k+\frac12}$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\|\psi_R\|_{C^{2,\tilde\alpha}}\le{}&C\|H(\varepsilon)(e^{\psi_R}-1-\psi_R)\|_{W^{1,\infty}}+C\|H(\varepsilon)-T_{2k-1}(H(\varepsilon))\|_{W^{1,\infty}}+C\Big\|\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^kR\,\mathrm{d}v\Big\|_{W^{1,\infty}}\\\le{}&C\varepsilon^{2k}(1+\|h\|_\infty)+C\varepsilon^{k+\frac12}+C\varepsilon^k(\|h\|_\infty+\|D_xh\|_\infty),\end{aligned}$$

这意味着

$$\|D_x^2\phi_R\|_\infty\le\|\phi_R\|_{C^{2,\tilde\alpha}}\le C\varepsilon^k\|h\|_\infty+C\varepsilon^{\frac12}+C(\|h\|_\infty+\|D_xh\|_\infty)\le C\varepsilon^{\frac12}+C(\|h\|_\infty+\|D_xh\|_\infty). \tag{5.14}$$

因此，(5.13) 右端第五行的贡献为

$$C\varepsilon^{\frac32}+C\varepsilon e^{-\frac{\nu_0 t}{2\varepsilon}}\sup_{0\le s\le t}\big\{e^{\frac{\nu_0 s}{2\varepsilon}}(\|h\|_\infty+\|D_xh\|_\infty)\big\}.$$

$W^{1,\infty}$ 对 (5.13) 右端其他项的估计与 [22] 类似（见第 494–499 页），其中引理 5.1 起着关键作用。为简洁起见，这里省略细节。

综上所述，我们有

$$\begin{aligned}\sup_{0\le s\le T_0}\big\{e^{\frac{\nu_0 s}{2\varepsilon}}\|D_xh(s)\|_\infty\big\}\le{}&C\|(1+|v|)h(0)\|_\infty+C\|D_xh(0)\|_\infty\\&+C\varepsilon\sup_{0\le s\le T_0}\big\{e^{\frac{\nu_0 s}{2\varepsilon}}\|D_vh(s)\|_\infty\big\}+\frac{C}{\varepsilon^3}\sup_{0\le s\le T_0}\big\{e^{\frac{\nu_0 s}{2\varepsilon}}\|h(s)\|_\infty\big\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(C\varepsilon+o(1))\sup_{0\le s\le T_0}\left\{e^{\frac{\nu_0 s}{2\varepsilon}}\|D_x h(s)\|_\infty+e^{\frac{\nu_0 s}{2\varepsilon}}\|(1+|v|)h(s)\|_\infty\right\}\\
&+C\varepsilon^k\sup_{0\le s\le T_0}\left\{\left(e^{\frac{\nu_0 s}{2\varepsilon}}\|D_x h(s)\|_\infty\right)^2+\left(e^{\frac{\nu_0 s}{2\varepsilon}}\|(1+|v|)h(s)\|_\infty\right)^2\right\}\\
&+\frac{C}{\varepsilon^4}e^{\frac{\nu_0 T_0}{2\varepsilon}}\sup_{0\le s\le T}\|f(s)\|_0+Ce^{\frac{\nu_0 T_0}{2\varepsilon}}\varepsilon^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

此外，为了闭合 $\|D_v h\|_\infty$ 的估计，我们推得

$$
\begin{aligned}
\sup_{0\le s\le T_0}\left\{e^{\frac{\nu_0 s}{2\varepsilon}}\|D_{x,v}h(s)\|_\infty\right\}\le{}&C\|(1+|v|)h(0)\|_\infty+C\|D_{x,v}h(0)\|_\infty\\
&+(C\varepsilon+o(1))\sup_{0\le s\le T_0}\left\{e^{\frac{\nu_0 s}{2\varepsilon}}\|D_{x,v}h(s)\|_\infty+e^{\frac{\nu_0 s}{2\varepsilon}}\|(1+|v|)h(s)\|_\infty\right\}\\
&+C\varepsilon^k\sup_{0\le s\le T_0}\left\{\left(e^{\frac{\nu_0 s}{2\varepsilon}}\|D_{x,v}h(s)\|_\infty\right)^2+\left(e^{\frac{\nu_0 s}{2\varepsilon}}\|(1+|v|)h(s)\|_\infty\right)^2\right\}\\
&+\frac{C}{\varepsilon^3}\sup_{0\le s\le T_0}\left\{e^{\frac{\nu_0 s}{2\varepsilon}}\|h(s)\|_\infty\right\}+\frac{C}{\varepsilon^4}e^{\frac{\nu_0 T_0}{2\varepsilon}}\sup_{0\le s\le T}\|f(s)\|_0+Ce^{\frac{\nu_0 T_0}{2\varepsilon}}\varepsilon^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}\tag{5.15}
$$

令 $s=T_0$ 并将结果乘以 $\varepsilon^5 e^{-\frac{\nu_0 T_0}{2\varepsilon}}$，当 ε 足够小时，我们可推得

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^5\|D_{x,v}h(T_0)\|_\infty\le{}&\frac{1}{2}\varepsilon^5\{\|D_{x,v}h(0)\|_\infty+\|(1+|v|)h(0)\|_\infty\}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\|h(0)\|_\infty\\
&+C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sup_{0\le s\le T}\|f(s)\|_0+C\varepsilon^{\frac{7}{2}}.
\end{aligned}
$$

至此，引理 5.3 的证明完成。 □

结合引理 5.2 和引理 5.3，并通过自举将时间区间延拓至任意给定的时刻 $T\le\varepsilon^{-m}$、$0<m<\frac{1}{2}$，我们可得如下结论–

命题 5.4. 给定 $0<T\le\varepsilon^{-m}$、$0<m<\frac{1}{2}$。假设 (5.1) 成立。对于任意充分小的 ε，存在一个与 T 和 ε 无关的常数 $C>0$，使得

$$
\sup_{0\le s\le T}\left\{\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|h(s)\|_\infty\right\}\le C\|\varepsilon^{\frac{3}{2}}h_0\|_\infty+C\sup_{0\le s\le T}\|f(s)\|_0+C\varepsilon^3,\tag{5.16}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le s\le T}\left\{\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|(1+|v|)h(s)\|_\infty+\varepsilon^5\|D_{x,v}h(s)\|_\infty\right\}\\
&\quad\le C\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|(1+|v|)h_0\|_\infty+C\varepsilon^5\|D_{x,v}h_0\|_\infty+C\sup_{0\le s\le T}\|f(s)\|_0+C\varepsilon^3.
\end{aligned}\tag{5.17}
$$

6. L^2–L^∞ Estimates of the Remainder R

将 (5.16) 代入 (4.9)，得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^{-2k}H(\varepsilon)(\psi_R e^{\psi_R}-e^{\psi_R}+1)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla_x\phi_R\|_0^2+\|\sqrt{\theta_0}f\|_0^2)+\frac{\delta_0}{2\varepsilon}\theta_M\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})f\|_\nu^2\\
\le{}&C\Big(\frac{1}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}+\varepsilon\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\mathcal{I}_2(t,\varepsilon)\varepsilon^{k-1}\Big)(\|\phi_R\|_0^2+\|\nabla_x\phi_R\|_0^2+\|f\|_0^2+1)\\
&+C\varepsilon^{\frac{1}{2}}[\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|h\|_\infty](\|f\|_0+\varepsilon^{k-3}\|f\|_0^2+\varepsilon^{k-2}\|f\|_0\|\nabla_x\phi_R\|_0)\\
\le{}&C\Big(\frac{1}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}+\varepsilon\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\mathcal{I}_2(t,\varepsilon)\varepsilon^{k-1}\Big)(\|\phi_R\|_0^2+\|\nabla_x\phi_R\|_0^2+\|f\|_0^2+1)\\
&+C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\Big[\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|h_0\|_\infty+\sup_{0\le s\le T}\|f(s)\|_0+\varepsilon^3\Big](\|f\|_0^2+\|\nabla_x\phi_R\|_0^2+1)\\
\le{}&C\Big(\frac{1}{(1+t)^{\frac{16}{15}}}+\varepsilon\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\mathcal{I}_2(t,\varepsilon)\varepsilon^{k-1}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\Big[\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|h_0\|_\infty+\sup_{0\le s\le T}\|f(s)\|_0+\varepsilon^3\Big]\Big)\\
&\times(\|\phi_R\|_0^2+\|\nabla_x\phi_R\|_0^2+\|f\|_0^2+1).
\end{aligned}
$$

需要特别注意的是

$$3x^2 \geq xe^x - e^x + 1 \geq \frac{1}{12}x^2, \quad \text{for } |x| \leq \ln 6.$$

根据 式 (3.2)，有 $\|\psi_R\|_\infty \ll 1$，且存在两个常数 C_1，$C_2 > 0$ 使得

$$\begin{aligned} C_1\varepsilon^{2k}\|\phi_R\|_0^2 &\geq 3\int_{\mathbb{R}^3} H(\varepsilon)|\psi_R|^2\mathrm{d}x \geq \int_{\mathbb{R}^3} H(\varepsilon)(\psi_R e^{\psi_R} - e^{\psi_R} + 1)\mathrm{d}x \\ &\geq \frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^3} H(\varepsilon)|\psi_R|^2\mathrm{d}x \geq C_2\varepsilon^{2k}\|\phi_R\|_0^2, \end{aligned} \tag{6.1}$$

其中 $H(\varepsilon) \in [e^{-C-C\varepsilon\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)}\ e^{C+C\varepsilon\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)}]$。因此，有

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^{-2k}H(\varepsilon)(\psi_R e^{\psi_R} - e^{\psi_R} + 1)\mathrm{d}x + \|\nabla_x\phi_R\|_0^2 + \|\sqrt{\theta_0}f\|_0^2 + 1\Big\} \\ &\leq C\Big(\frac{1}{(1+t)^{\frac{16}{15}}} + \varepsilon\mathcal{I}_1(t,\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{k-1}\mathcal{I}_2(t,\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\big[\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|h_0\|_\infty + \sup_{0\leq s\leq T}\|f(s)\|_0 + \varepsilon^3\big]\Big) \\ &\quad\times\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^{-2k}H(\varepsilon)(\psi_R e^{\psi_R} - e^{\psi_R} + 1)\mathrm{d}x + \|\nabla_x\phi_R\|_0^2 + \|\sqrt{\theta_0}f\|_0^2 + 1\Big). \end{aligned}$$

利用格朗沃尔不等式，可得

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^{-2k}H(t,x,\varepsilon)[(\psi_R e^{\psi_R} - e^{\psi_R} + 1)(t,\varepsilon)]\mathrm{d}x + \|\nabla_x\phi_R\|_0^2 + \|\sqrt{\theta_0}f\|_0^2 + 1 \\ &\leq\Big\{\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^{-2k}H(0,x,\varepsilon)[(\psi_R e^{\psi_R} - e^{\psi_R} + 1)(0,\varepsilon)]\mathrm{d}x + \|\nabla_x\phi_R(0)\|_0^2 + \|\sqrt{\theta_0}f(0)\|_0^2 + 1\Big\} \\ &\quad\times\exp\Big\{\int_0^t C\Big(\frac{1}{(1+t)^{\frac{16}{15}}} + \varepsilon\mathcal{I}_1(t,\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{k-1}\mathcal{I}_2(t,\varepsilon) + C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\Big[\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|h_0\|_\infty + \sup_{0\leq s\leq T}\|f(s)\|_0 + \varepsilon^3\Big]\Big)\mathrm{d}s\Big\} \\ &\leq\Big\{\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^{-2k}H(0,x,\varepsilon)[(\psi_R e^{\psi_R} - e^{\psi_R} + 1)(0,\varepsilon)]\mathrm{d}x + \|\nabla_x\phi_R(0)\|_0^2 + \|\sqrt{\theta_0}f(0)\|_0^2 + 1\Big\} \\ &\quad\times\exp\Big\{C + C\varepsilon t\mathcal{I}_1(t,\varepsilon) + C\varepsilon^{\frac{1}{2}}t + C\varepsilon^{k-1}t\mathcal{I}_2(t,\varepsilon) + C\varepsilon^{\frac{1}{2}}t\Big[\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|h_0\|_\infty + \sup_{0\leq s\leq T}\|f(s)\|_0\Big]\Big\}. \end{aligned}$$

这里，如式 (1.18) 中所定义，$H(\varepsilon) = H(t,x,\varepsilon) = \exp\{\phi_0 + \cdots + \varepsilon^{2k-1}\phi_{2k-1}\}$。显然，对于 $t \leq \varepsilon^{-m}$, $0 < m < \frac{1}{2}$, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(t,\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{2k-1}[\varepsilon(1+t)]^{i-1} + \Big(\sum_{i=1}^{2k-1}[\varepsilon(1+t)]^{i-1}\Big)^2 \leq C\sum_{i=1}^{2k-1}\varepsilon^{(1-m)(i-1)} \leq C, \\ \mathcal{I}_2(t,\varepsilon) &= \sum_{2k\leq i+j\leq 4k-2}\varepsilon^{i+j-2k}(1+t)^{i+j-2} \leq C_k\varepsilon^{2k(1-m)}\varepsilon^{2m-2k} \leq C\varepsilon^{2m-2mk}. \end{aligned}$$

此外，对于 $0 \leq t \leq \varepsilon^{-m}$, $0 < m \leq \frac{1}{2}\ \frac{2k-3}{2k-2}$ (~~$< \frac{1}{2}$~~)， -

$$\mathcal{I}_1(t,\varepsilon)t\varepsilon + \mathcal{I}_2(t,\varepsilon)t\varepsilon^{k-1} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}-m} \leq 1. \tag{6.2}$$

由 (6.1) 可得

$$\begin{aligned} \|\phi_R\|_0^2 + \|\nabla_x\phi_R\|_0^2 + \|f\|_0^2 + 1 \leq&\big\{\|\phi_R(0)\|_0^2 + \|\nabla_x\phi_R(0)\|_0^2 + \|f(0)\|_0^2 + 1\big\} \\ &\times C\exp\Big\{C\varepsilon^{\frac{1}{2}-m}\Big[\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|h_0\|_\infty + \sup_{0\leq s\leq T}\|f(s)\|_0\Big]\Big\}. \end{aligned}$$

当 ε 充分小时，有

$$\begin{aligned} \|\phi_R(t)\|_0^2 + \|\nabla_x\phi_R(t)\|_0^2 + \|f(t)\|_0^2 + 1 \leq& C\Big\{\|\phi_R(0)\|_0^2 + \|\nabla_x\phi_R(0)\|_0^2 + \|f(0)\|_0^2 + 1\Big\} \\ &\times\Big\{1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}-m}\Big[\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|h_0\|_\infty + \sup_{0\leq s\leq T}\|f(s)\|_0\Big]\Big\}. \end{aligned}$$

因此，存在一个与 ε无关的常数 C，使得

$$\sup_{0\leq t\leq\varepsilon^{-m}}\{\|\phi_R(t)\|_0 + \|\nabla\phi_R(t)\|_0 + \|f(t)\|_0\}$$

$$\leq C\big(1+\|\phi_R(0)\|_0+\|\nabla\phi_R(0)\|_0+\|f(0)\|_0+\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|h_0\|_\infty\big). \tag{6.3}$$

综上，结合式（5.17），我们得到

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leq t\leq\varepsilon^{-m}}\big\{\|f(t)\|_0+\|\phi_R(t)\|_0+\|\nabla\phi_R(t)\|_0+\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|(1+|v|)h(t)\|_\infty+\varepsilon^5\|D_{x,v}h(t)\|_\infty\big\}\\&\quad\leq C\big(1+\|f(0)\|_0+\|\phi_R(0)\|_0+\|\nabla\phi_R(0)\|_0+\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|(1+|v|)h(0)\|_\infty+\varepsilon^5\|D_{x,v}h(0)\|_\infty\big).\end{aligned}$$

定理 1.1 的证明至此完成。 □

Appendix A. Global strong solution to the ionic Vlasov-Poisson-Boltzmann system (1.1)

在本附录中，我们回顾 Li-Yang-Zhong [38] 在 $\mathbb{R}^3$ 中得到的离子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统 (1.1) 强解的整体存在性。

我们定义两个范数:

$$\mathcal{X}_1^2:=\{g\in L^2:\|g\|_{\mathcal{X}_1^2}<\infty\},\quad \|g\|_{\mathcal{X}_1^2}:=\Big(\sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2}\|\nu\partial_x^\alpha\partial_v^\beta g\|_{L^2}^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$L^{2,1}:=L^2(\mathbb{R}^3_v;L^1(\mathbb{R}^3_x)),\quad \|g\|_{L^{2,1}}:=\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|g(x,v)|\mathrm{d}x\Big)^2\mathrm{d}v\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

我们还定义 $M(v)=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{|v|^2}{2}}$ 和以初始数据 $g^{\mathrm{in}}=\frac{F^{\mathrm{in}}-M}{\sqrt{M}}$ 为初值的 $g=\frac{F-M}{\sqrt{M}}$ 于是有

命题 A.1 ([38], 定理 2.7)。 假设 $g^{\mathrm{in}}\in\mathcal{X}_1^2\cap L^{2,1}$ 且 $\|g^{\mathrm{in}}\|_{\mathcal{X}_1^2\cap L^{2,1}}\leq\delta_0$ 对于某个足够小的常数 δ_0。那么，存在一个全局唯一的强解 $F(t,x,v)$，它是系统 (1.1) 的解，其中 $g=\frac{F-M}{\sqrt{M}}$ 满足

$$\begin{aligned}&\|\partial_x^\alpha\mathbf{P}g(t)\|_{L^2_{x,v}}+\|\partial_x^\alpha\phi(t)\|_{H^1_x}\leq C\delta_0(1+t)^{-\frac{3}{4}},\\&\|\partial_x^\alpha\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}g(t)\|_{L^2_{x,v}}\leq C\delta_0(1+t)^{-\frac{5}{4}},\\&\|\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}g(t)\|_{\mathcal{X}_1^2}+\|\nabla_x\mathbf{P}g(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v;H^1(\mathbb{R}^3_x))}\leq C\delta_0(1+t)^{-\frac{5}{4}},\end{aligned}$$

对于 $|\alpha|=0,1$ 且常数 $C>0$。

Appendix B. Global smooth solution to the compressible ionic Euler-Poisson system(1.2)

在本附录中，我们回顾 Guo-Pausader [25]关于可压缩离子 Euler-Poisson 系统 (1.2) 在 $\mathbb{R}^3$ 中的存在性结果。

为 $k\geq 5$ 定义两个范数如下

$$\begin{aligned}\|g(x)\|_Y&:=\||\nabla|^{-1}g\|_{H^{2k+1}}+\|g\|_{W^{k+\frac{12}{5},\frac{10}{9}}},\\\|g(t,x)\|_X&:=\sup_t\big(\big\||\nabla|^{-1}(I-\Delta)^{k+\frac{1}{2}}g(t)\big\|_{L^2}+(1+t)^{\frac{16}{15}}\big\|(I-\Delta)^{\frac{k}{2}}g(t)\big\|_{L^{10}}\big).\end{aligned}$$

于是，我们有

命题 B.1 ([25], 定理 1.1)。 存在一个 $\varepsilon_0>0$，使得任何满足 $\nabla\times u_0^{\mathrm{in}}=0$ 且 $\|\rho_0^{\mathrm{in}}-1\|_Y+\|u_0^{\mathrm{in}}\|_Y\leq\varepsilon_0$ 的初始扰动 $[\rho_0^{\mathrm{in}},u_0^{\mathrm{in}}]$ 都会导出方程(1.2) 的整体解 $[\rho_0,u_0]$，并且 $\|\rho_0-1\|_X+\|u_0\|_X\leq 2\varepsilon_0$。

注 B.1。 特别地， $\rho_0-1=:\ \rho$ 和 u_0 都属于 H^{2k-1}，并且当 $t^{-\frac{16}{15}}$ 时，对于 $k\geq 5$，它们在 $W^{k,10}$ 中衰减。至于 ϕ_0，注意到

$$\overline{\rho}=(I-\Delta)\phi_0+\frac{\phi_0^2}{2}+\Big[e^{\phi_0}-1-\phi_0-\frac{\phi_0^2}{2}\Big],$$

其定义了逆算子 $\rho\mapsto\phi_0(\rho)$。将其展开至三阶可得

$$\phi_0(\overline{\rho})=(I-\Delta)^{-1}\overline{\rho}-\frac{1}{2}(I-\Delta)^{-1}[(I-\Delta)^{-1}\overline{\rho}]^2+\mathcal{R}(\overline{\rho}),$$

其中， $\mathcal{R}$ 满足良好的性质。结合 $\|\rho\|_X \ll 1$ 与 $(I-\Delta)^{-1} \in \Psi^{-2}$，我们推得 $\phi_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^1_+;\ H^{2k+1})$ 以及

$$\|\phi_0\|_{W^{k+2,10}} \le C\|\bar{\rho}\|_{W^{k,10}} \le C\varepsilon_0(1+t)^{-\frac{16}{15}},$$

这意味着 $\|\phi_0\|_{C^{k+1,\,\alpha}} \le (1+t)^{-\frac{16}{15}}$ 对于 $k \ge 5$。

致谢：Li 部分得到国家自然科学基金（项目编号：12331007、12071212）和江苏省“333工程”的资助。Wang 部分得到国家自然科学基金（项目编号：12401288）和江苏省自然科学基金（项目编号：BK20241259）的资助。

References

[1] S. Alinhac, G. Patrick, *Pseudo-differential operators and the Nash-Moser theorem*, 由 Stephen S. Wilson 从 1991 年法文原版翻译, *Graduate Studies in Mathematics*, 82。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007[2] C. Bardos, F. Golse, T. T. Nguyen, R. Sentis，离子动力学建模中的麦克斯韦-玻尔兹曼近似， *Phys. D*，376/377，94–107，2018[3] F. Bouchut，小电子质量下 Vlasov-Poisson 系统的整体弱解， *Comm. Partial Differential Equations*，16，1337–1365，1991[4] R. Caflisch，非线性玻尔兹曼方程的流体动力学极限， *Comm. Pure Appl. Math.*，33(5)，651–666，1980[5] C.-Q. Cao, D.-Q Deng, X.-Y. Li，麦克斯韦分布附近带多项式扰动的 Vlasov-Poisson-Boltzmann/Landau 系统。*SIAM J. Math. Anal.* **56**(1)，820–876，2024[6] Y. Cao, C. Kim 和 D. Lee，有界区域中 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的整体强解， *Arch. Ration.Mech. Anal.*，233(3)，1027–1130，2019[7] L. Cesbron, M. Iacobelli，有界区域中 Vlasov-Poisson 型系统的整体适定性， *Anal. PDE*，16，2465–2494，2023[8] S.Cordier, E.Grenier，源于等离子体物理的 Euler–Poisson 系统的准中性极限， *Comm. Partial DifferentialEquations*，25(5-6)，1099–1113，2000[9] R.-J. Duan, R. Strain, Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的最优时间衰减， $\mathbb{R}^3$， *Arch. Ration. Mech. Anal.*，199，291–328，2011[10] R.-J. Duan, T. Yang, H.-J. Zhao，全空间中的 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统：硬势情形， *J. DifferentialEquations*，252(12)，6356–6386，2012[11] R.-J. Duan, T. Yang, H.-J. Zhao}，软势下的 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统， *Math. Models Methods Appl. Sci.*，23(6)，979–1028，2013 [12] R.-J. Duan, H.-Y. Yin, C.-J. Zhu，完整 Euler-Poisson 系统的半空间问题， *SIAM J. Math. Anal.*，53(5)，6094–6121，2021[13] P. Flynn，Vlasov-Poisson-Landau 系统及相关模型的局部适定性。 *Kinet. Relat. Models* **18**(4)，583–608，2025[14] P. Flynn, Y. Guo, Vlasov-Poisson-Landau 系统的无质量电子极限。 *Comm. Math. Phys.* **405**(2)，1–73，2024[15] D. G´erard-Varet, D. Han-Kwan, F. Rousset，带边界区域中离子 Euler-Poisson 系统的准中性极限，*Indiana Univ. Math. J.*，62，359–402，2013[16] D. G´erard-Varet, D. Han-Kwan, F. Rousset，带边界区域中离子 Euler-Poisson 系统的准中性极限 II， *J. Éc. Polytech. Math.*，1，343–386，2014[17] M. Griffin-Pickering, M. Iacobelli， $\mathbb{R}^3$ 中离子 Vlasov-Poisson 系统的整体强解， *Kinet. Relat. Models*，14，571–597，2021[18] M. Griffin-Pickering, M. Iacobelli，三维环面上含无质量电子的 Vlasov-Poisson 系统的整体适定性， *Comm. Partial Differential Equations*，46，1892–1939，2021[19] Y. Guo，麦克斯韦分布附近的 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统， *Comm. Pure Appl. Math.*，55(9)，1104–1135，2002[20] Y. Guo，有界区域中玻尔兹曼方程的衰减与连续性， *Arch. Ration. Mech. Anal.*，197(3)，713–809，2010[21] Y. Guo, F.-M. Huang, Y. Wang，半空间中带镜面反射边界条件的玻尔兹曼方程的希尔伯特展开，*Arch. Ration. Mech. Anal.*，241，231–309，2021[22] Y. Guo, J. Jang，Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的全局希尔伯特展开， *Comm. Math. Phys.*，299(2)，469–501，2010[23] Y. Guo, J. Jang, N. Jiang，玻尔兹曼方程的局部希尔伯特展开， *Kinet. Relat. Models*，2(1)，205–214，2009[24] Y. Guo, J. Jang, N. Jiang，最优尺度下玻尔兹曼方程的声学极限， *Comm. Pure Appl. Math.*，63(3)，337–361，2010[25] Y. Guo, B. Pausader，Euler-Poisson 系统中的离子动力学整体光滑解， *Comm. Math. Phys.*，303，89–125，2011

[26] Y. Guo, Q.-H. Xiao，相对论 Vlasov-Maxwell-Boltzmann 系统的全局希尔伯特展开。 *Comm. Math. Phys.*，384(1)，341–401，2021 [27] N. Jiang, Y.-L. Luo, S.-J. Tang，半空间中带麦克斯韦反射边界条件的玻尔兹曼方程的可压缩欧拉极限，arXiv:2101.11199，2021[28] N. Jiang, Y.-L. Luo, S.-J. Tang，半空间中带完全扩散边界条件的玻尔兹曼方程的可压缩欧拉极限， *Trans. Amer. Math. Soc.*，377(8)，5323–5359，2024[29] N. Jiang, Y.-L. Luo, T.-F. Zhang，从 Vlasov-Maxwell-Boltzmann 系统出发，满足欧姆定律的不可压缩 Navier-Stokes-Fourier-Maxwell 系统的流体力学极限：希尔伯特展开方法， *Arch. Ration. Mech. Anal.*，247(3)，1–85，2023[30] N. Jiang, W. Yang, K. Zhou，具有费米-狄拉克统计的 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的可压缩 Euler-Poisson 极限。 *J. Differential Equations*，442，1–62，2025[31] C. Jung, B. Kwon, M. Suzuki，存在球对称等离子体鞘层时 Euler-Poisson 系统的准中性极限， *Math. Models Methods Appl. Sci.*，26(12)，2369–2392，2016[32] M. Lachowicz，关于非线性玻尔兹曼方程的初始层与存在性定理， *Math. Methods Appl. Sci.*，9(3)，342–366，1987[33] M. Lachowicz，非线性动理学方程解的渐近行为， *Ann. Mat. Pura Appl.*，160，41–62，1991[34] Y.-J. Lei, S.-Q. Liu, Q.-H. Xiao, H.-J. Zhao，某些非相对论动理学方程的全局希尔伯特展开， *J. Lond. Math.Soc.*，110(5)，1–82，2024[35] F.-C. Li, Y.-C. Wang，有界区域中软势下 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的整体强解，*J. Differential Equations*，305，143–205，2021[36] F.-C. Li, Y.-C. Wang，软势下 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的整体 Euler-Poisson 极限， *SIAM J. Math. Anal.*，55(4)，2877–2916，2023[37] F.-C. Li, Y.-C. Wang，三维周期盒中离子 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的整体经典解， *arXiv: 2502.05745v2*，2025[38] H.-L. Li, T. Yang, M.-Y. Zhong，双极 Vlasov-Poisson-Boltzmann 方程的谱分析与最优衰减率，*Indiana Univ. Math. J.*，65，665–725，2016[39] H.-L. Li, T. Yang, M.-Y. Zhong，Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的谱分析，*Arch. Ration. Mech. Anal.*，241，311–355，2021[40] A. Majda，*Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*，应用数学科学，第 53 卷，施普林格，纽约，1984[41] J. Ouyang, Y. Wang，半空间中软势下带镜面反射边界条件的玻尔兹曼方程的希尔伯特展开，*J. Differential Equations*，414，143–200，2025[42] Z.-M. Ouyang, L. Wu, Q.-H. Xiao，库仑碰撞动理学模型的希尔伯特展开， *Quart. Appl. Math.*，83(2)，211–279，2025 [43] J. Speck, R. Strain，从玻尔兹曼方程到相对论流体的希尔伯特展开。 *Comm. Math. Phys*，304(1)，229–280，2011[44] E. M. Stein，*Harmonic analysis: real-variable methods*， *orthogonality*， *and oscillatory integrals*，普林斯顿数学丛书，43，调和分析专著 III。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1993[45] T.-F. Wu, X.-F. Yang，混合气体玻尔兹曼方程的流体力学极限， *J. Differential Equations*，377，418–468，2023[46] W.-J. Wu, F.-J. Zhou, W.-H. Gong, Y. Xu，单组分 Vlasov-Maxwell-Boltzmann 系统在截断硬势下的扩散极限，*SIAM J. Math. Anal.*，57(2)，1526–1585，2025[47] Q.-H. Xiao, L.-J. Xiong, H.-J. Zhao，截断软势全范围下的 Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统， *J. Funct.Anal.*，272(1)，166–226，2017[48] T. Yang, H.-J. Yu, H.-J. Zhao，Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统的柯西问题。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，182(3)，415–470，2006[49] T. Yang, H.-J. Zhao，Vlasov-Poisson-Boltzmann 系统经典解的整体存在性， *Commun. Math. Phys.*，268(3)，569–605，2006[50] L. Yao, H.-Y. Yin, M.-M. Zhu，完整 Euler-Poisson 系统中等离子体鞘层的渐近稳定性， *Nonlinear Anal. RealWorld Appl.*，85，1–22，2025

School of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, P. R. China*Email address*: fli@nju.edu.cn

School of Mathematics, Southeast University, Nanjing, 211189, P. R. China
Email address: yichunwang@seu.edu.cn