arXiv:2601.02025v1 [math.ST] 5 Jan 2026

Hermite 过程的修正加权幂变差及其在积分波动率中的应用

A. Ayache*、L. Loosveldt†和 C. A. Tudor‡

2026年1月6日

摘要

我们研究任意阶 Hermite 过程的修正加权幂变差的渐近行为。通过选取适当的“良好”增量，并利用其分解为占主导地位的独立分量，我们借助 Stein–Malliavin演算中的工具，建立了加权 p-变差的中心极限定理。我们的结果将此前关于修正二次变差和基于小波的变差的研究推广到一般幂次和加权情形，并给出了瓦瑟斯坦距离下的显式界。进一步地，我们将这些极限定理应用于构造 Hermite驱动模型中积分波动率的渐近高斯估计量，从而将基于分数布朗运动的方法扩展到非高斯情形。本文的最后一部分包含数值模拟，展示了所提出估计量的实际性能。

关键词：Hermite 过程、多重 Wiener-Itˆo 积分、Stein-Malliavin演算、渐近正态性、中心极限定理、积分波动率估计、强相合性*2020*年数学主题分类：60G18、60H05、60H07、62F12、62G15、60F05。

1 引言

近几十年来，对 Hermite 过程及相关过程的研究发展迅速。这些随机过程具有良好的性质：它们是自相似的，具有平稳增量，并表现出长程依赖。这些特征使它们在实际应用中具有重要潜力。Hermite 过程类包括分数布朗运动，它是该类中唯一的高斯过程。关于 Hermite 过程及相关过程的详细介绍，请参阅专著 [26] 和 [29]。

分析 Hermite 过程时，一个重要问题是对其自相似指数（或赫斯特参数）进行统计估计，该指数刻画了其许多

*里尔大学，法国国家科学研究中心，UMR 8524——Paul Painlevé 实验室，法国里尔 F-59000。antoine.ayache@univ-lille.fr

†**通讯作者：**列日大学，数学系——Polytech 1 区，12 allée de la Découverte，B37 楼，列日 B-4000。l.loosveldt@uliege.be

‡里尔大学、法国国家科学研究中心 UMR 8524 保罗·潘勒韦实验室（法国里尔，邮编 F-59000），以及罗马尼亚布加勒斯特经济研究大学。ciprian.tudor@univ-lille.fr

性质。一系列论文（[11], [30], [6], [12]）采用幂变差或基于小波的方法，提出了Hermite 过程赫斯特指数的估计量。这些估计量有一个共同特点：尽管它们是一致的，却并非渐近高斯，这对统计估计构成了重大缺陷。Hermite驱动模型中的其他参数估计量也可以观察到类似现象（例如，参见 [21], [28]）。

为克服渐近非正态性，[5], 采用了一种新策略，沿用了 [2]中的思路。具体而言，文献 [5] 仅使用 Hermite 过程（任意阶）的某些经过精心挑选的增量，定义了一种所谓的修正二次变差。每个这样的特殊增量都可以分解为主导部分和可忽略部分，而且这些主导部分构成一列独立随机变量。得益于这些良好性质， [5]成功证明了修正二次变差满足中心极限定理，并据此构造出一种新的、用于估计 Hermite 过程赫斯特参数的强相合估计量。与其他估计量相比，它的一大优势是渐近高斯。文献 [17]还定义并分析了一种基于 Hermite 过程修正小波变差的相关渐近高斯估计量。

本文旨在通过分析 Hermite 过程（$Z_t,\ t \geq 0$）的加权修正 p变差的极限行为，将 [5] 和 [17] 中得到的结果推广到任意整数阶 $p \geq 2$，即由式（36）给出的序列（$U_{N,\ p}(Z)$ $N \geq 1$）。式（36）中的权重 h是具有适当性质的确定性函数。通过采用类似的思路，选取 Hermite 过程的“良好”增量，并运用 Stein-Malliavin 演算的技巧，我们证明，Hermite 过程的加权修正幂变差收敛于一个常数乘以权重函数 h关于与底层 Hermite 过程独立的布朗运动的维纳积分。我们首先考虑（非加权）修正幂变差的情形（即 h恒等于 1），随后运用包括关于瓦瑟斯坦距离的一些新发现等方法，将结果推广到加权情形。

我们将结果应用于一个含有厄米特噪声的简单模型，以估计积分波动率。利用幂变差估计积分波动率是金融数学中一个备受关注的课题。关于半鞅型模型，可参见文章 [7], [8], [27] 或 [15] ；关于由分数布朗运动驱动的模型，可参见论文 [13] 或 [7] 。我们的工作将分数布朗运动情形下得到的结果推广到了非高斯情形。

本文组织如下。第2节介绍关于Hermite过程的预备知识，包括其表示、基本性质，以及在我们的分析中发挥核心作用的特殊增量的定义。本节还给出了这些增量的一些关键独立性和矩估计。在第3节中，我们借助Wiener混沌工具，证明强独立随机变量的若干性质。随后，在第4节中，我们研究修正（非加权）幂变差，通过结合Stein–Malliavin论证与独立性性质，证明大数定律和中心极限定理。接下来

第5节将这些结果扩展到加权情形，推导定量的Wasserstein界，并提出一个适用于加权修正幂变差的一般极限定理。我们还将理论结果应用于Hermite驱动模型中的积分波动率估计，并进行数值模拟，以验证理论发现并展示所提出估计量的性能。第6节为附录，其中介绍Malliavin演算的基本要素。

下文中，我们用 C_a 表示依赖于参数 a 的严格正数。

2 预备知识

本节介绍一些与 Hermite 过程相关的性质。第一部分给出其定义和基本性质，第二部分则介绍该随机过程的一些特殊增量，它们在我们的构造中起着至关重要的作用。

2.1 Hermite 过程及其特殊增量

我们将 $(Z_t, t \geq 0)$ 记为阶数为 $q \geq 1$ 且自相似指数为$H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$的 Hermite 过程。对于每个 $t \geq 0$，它都可以表示为

$$Z_t = d(q,H) \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_0^t f_u(y_1, ..., y_q) du \right) dB(y_1)...dB(y_q), \tag{1}$$

其中 $(B(y)\ y \in \mathbb{R})$ 是维纳过程，并且对于每个 $y_1, ..., y_q \in \mathbb{R}$,

$$f_u(y_1, ..., y_q) = d(q,H)(u - y_1)_+^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{q}\right)} \dots (u - y_q)_+^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{q}\right)}, \tag{2}$$

并且 $d(q,\ H)$ 是严格为正的归一化常数，确保对于每个 $t \geq 0$ 都有 $\mathbf{E}Z_t^2 = t^{2H}$。或者，我们可以写成

$$Z_t = I_q(L_t), \quad t \geq 0,$$

其中 I_q 表示关于 B 的 q 阶多重随机积分，并且

$$L_t(y_1, ..., y_q) = \int_0^t f_u(y_1, ..., y_q) du,$$

对于每个 y_1、...、$y_q \in \mathbb{R}$，随机过程（$Z_t,\ t \geq 0$）是 H-自相似的，并且具有平稳增量。因此，其协方差函数为

$$\mathbf{E}Z_t Z_s = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \text{ for every } s, t \geq 0.$$

Z 的增量满足，对于 $s,\ t \geq 0$ 和 $p \geq 1$,

$$\mathbf{E}\left|Z_t - Z_s\right|^p = \mathbf{E}|Z_1|^p |t-s|^{Hp}.$$

因此，对于每个固定的 $\delta \in (0,\ H)$，Hermite 过程的样本路径在 $\mathbb{R}_+$的每个紧子区间上都是 δ-H¨older 连续函数。

接下来我们将使用关于 Hermite 过程的维纳积分。令 $|\mathcal{H}|$ 为满足下列条件的可测函数 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 所构成的空间:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(u)| \cdot |f(v)| \cdot |u-v|^{2H-2} du dv < \infty.$$

若 $f \in |\mathcal{H}|$，则可以定义函数 f 关于 Hermite 过程 Z 的维纳积分（也称为 Wiener-Hermite 积分），记作

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) dZ_u.$$

有关这一构造的细节，请参见综述 [29] 等。上述对象作为 $L^2(\Omega)$ 中的随机变量是良定义的，并满足以下等距性质：若 $f,\ g \in |\mathcal{H}|$，则

$$\mathbf{E}\left(\left(\int_{\mathbb{R}} f(u) dZ_u \right) \left(\int_{\mathbb{R}} g(u) dZ_u \right) \right) = H(2H-1) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u) g(v) |u-v|^{2H-2} du dv. \quad (3)$$

2.2 Hermite 过程的特殊增量

我们将讨论 [5] 中引入的 Hermite 过程的一些特殊增量（另见 [17]，其中介绍了一种基于小波系数的方法）。它们定义如下。首先固定一个实数 $\gamma \in$（0，1）。对于任意整数 $N \geq 1$ 和 $l = 1,\ .....,\ 2^{[N\gamma]}$，我们考虑位于单位区间 $[0,1]$上的点 $\frac{l}{2^{[N\gamma]}}$ 处、长度为 2^{-N} 的下列增量:

$$\Delta Z_{l,N} = Z_{\frac{l}{2^{[N\gamma]}}+2^{-N}} - Z_{\frac{l}{2^{[N\gamma]}}}. \quad (4)$$

参考文献 [2]中的关键观察是，上述每个增量都可以分解为方差较小的可忽略部分和占主导地位的部分，并且对于 $l = 1,...,2^{[N\gamma]}$，这些占主导地位的部分相互独立。下面回顾这一分解。首先，由 (1) 可得

$$\Delta Z_{l,N} = \int_{\mathbb{R}^q} \mathbb{1}_{\left(-\infty, \frac{l}{2^{[N\gamma]}}+2^{-N}\right)^q} \left(\int_{\frac{l}{2^{[N\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N\gamma]}}+2^{-N}} f_u(y_1,...,y_q) du \right) dB(y_1)...dB(y_q).$$

请注意，前一个积分中的示性函数，以及后文将出现的示性函数，都依赖于 $(y_1,...,y_q)$。

现在考虑一个固定实数 β，使得 $\gamma < \beta < 1$。从现在起，我们始终假设 $N \geq 2^{(1-\beta)^{-1}}$。我们将上述增量 $\Delta Z_{l,N}$ 分解为

如下方式

$$\begin{aligned}
&\Delta Z_{l,N}\\
=\ & \int_{\mathbb{R}^q} \mathbb{1}_{\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}-\frac{2^{[N^\beta]}}{2^N}+2^{-N},\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}\right)^q} \left(\int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}} f_u(y_1,...,y_q)du\right) dB(y_1)...dB(y_q)\\
&+\int_{\mathbb{R}^q} \mathbb{1}_{\overline{\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}-\frac{2^{[N^\beta]}}{2^N}+2^{-N},\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}\right)^q}} \left(\int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}} f_u(y_1,...,y_q)du\right) dB(y_1)...dB(y_q)\\
=\ & \tilde{\Delta} Z_{l,N}+\check{\Delta} Z_{l,N}, \qquad (5)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\overline{\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}-\frac{2^{[N^\beta]}}{2^N}+2^{-N},\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}\right)^q}\\
&=\left(-\infty,\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}\right)^q\setminus\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}-\frac{2^{[N^\beta]}}{2^N}+2^{-N},\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}\right)^q.
\end{aligned}$$

我们采用以下记号

$$\tilde{\Delta} Z_{l,N}=\int_{\mathbb{R}^q} \mathbb{1}_{\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}-\frac{2^{[N^\beta]}}{2^N}+2^{-N},\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}\right)^q} \left(\int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}} f_u(y_1,...,y_q)du\right) dB(y_1)...dB(y_q) \qquad (6)$$

and

$$\check{\Delta} Z_{l,N}=\int_{\mathbb{R}^q} \mathbb{1}_{\overline{\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}-\frac{2^{[N^\beta]}}{2^N}+2^{-N},\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}\right)^q}} \left(\int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}} f_u(y_1,...,y_q)du\right) dB(y_1)...dB(y_q). \qquad (7)$$

实际上，假设整数 N 足够大，使得 $N\geq 2^{(1-\ \ ^-}$，可以确保区间 $^{\beta)\ 1}$ $\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}-\frac{2^{[N^\beta]}}{2^N}+2^{-N},\ \frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\pm 2^{-N}\right)$、$l=1.....\underline{2^{[N^\gamma]}}$ 互不相交。

注1 需要强调的是，我们使用的增量(4)及其分解(5)与文章 *[5]*中的并不完全相同。这是因为，在 *[5],* 中，估计量是根据长度为 2^{-N}、位于点 $\frac{l\,[2^{N^\beta}]}{2^N}$ 处的增量构造的，其中 $l\in\mathbb{N}\cap\left[1,\frac{2^N}{[2^{N^\beta}]}\right]\cap[1,[2^{N^\gamma}]]$且 $0<\gamma<\beta<1$。如此一来，为计算变差而选取的区间并未均匀分布在整个区间 $[0,1]$,上，因为只选取了前 $[2^{N\gamma}]$ 个区间。这并未影响赫斯特指数的估计。然而，在本研究中，我们发现这种做法不便于处理在变差中引入权重的问题，尤其不利于定理*3*的证明。因此，我们定义了一种新的增量选取方法。

接下来，我们推导关于量$\tilde{\Delta}Z_{l,N}$ 和$\check{\Delta}Z_{l,N}$ 的矩的一些重要估计，它们分别由式（6）和式（7）给出。第一个结果的证明实质上已见于 [2]中的引理 2.3。由于我们稍微改变了随机变量$\check{\Delta}Z_{l,N}$ 和$\Delta Z_{l,N}$的定义，因此我们选择在下文给出证明。

引理 1 对于 $N \geq 1$ 和 $l = 1,2, ..., 2^{[N^\gamma]}$, 令 $\check{\Delta}Z_{l,N}$ 由式 *(7)* 给出。则

$$\mathbf{E}\check{\Delta}Z_{l,N}^2 \leq C(H,q)2^{-2HN}2^{[N^\beta]\frac{2H-2}{q}},$$

对每个 $N \geq 1$ 和 $l = 1,2, ..., 2^{[N^\gamma]}$,

证明： 由于式 (7) 中的被积函数是关于 $(y_1, ..., y_q)$ 的对称函数，利用多重随机积分的等距性质 (113)，可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\check{\Delta}Z_{l,N}^2 &= q!\int_{\mathbb{R}^q} dy_1...dy_q \mathbb{1}_{\overline{\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}-\frac{2^{[N^\beta]}}{2^N}+2^{-N},\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}\right)}^q} \\
&\quad \int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}} f_u(y_1, ..., y_q)du \int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}} f_v(y_1, ..., y_q)dv \\
&\leq q! \cdot q \int_{-\infty}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}-\frac{2^{[N^\beta]}}{2^N}+2^{-N}} dy_1 \int_{\mathbb{R}^{q-1}} dy_2...dy_q \\
&\quad \int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}} \int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}} dudv f_u(y_1, ..., y_q)f_v(y_1, ..., y_q).
\end{aligned}$$

现在，利用恒等式，对于所有实数 $-1 < a < -\frac{1}{2}$ 和 $u \neq v$, -

$$\int_{\mathbb{R}} (u-y)_+^a (v-y)_+^a dy = \beta(-1-2a, a+1)|u-v|^{2a+1},$$

其中， β表示贝塔函数，由 $\beta(a,b) = \int_0^1 r^{a-1}(1-r)^{b-1}dr$ （ $a, b > 0$）给出，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{q-1}} dy_2...dy_q f_u(y_1, ..., y_q)f_v(y_1, ..., y_q) \\
&= C(q,H)(u-y_1)_+^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q}\right)}(v-y_1)_+^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q}\right)}|u-v|^{(2H-2)\frac{q-1}{q}}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\check{\Delta}Z_{l,N}^2 &\leq C(q,H)\int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}}\int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}} dudv\int_{-\infty}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}-\frac{2^{[N^\beta]}}{2^N}+2^{-N}} dy_1 \\
&\quad (u-y_1)_+^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q}\right)}(v-y_1)_+^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q}\right)}|u-v|^{(2H-2)\frac{q-1}{q}} \\
&\leq C(q,H)\int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}}\int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}} dudv\int_{-\infty}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}-\frac{2^{[N^\beta]}}{2^N}+2^{-N}} dy_1 \\
&\quad \left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}-y_1\right)^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q}\right)}\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}-y_1\right)^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{q}\right)}|u-v|^{(2H-2)\frac{q-1}{q}} \\
&\leq C(q,H)\left(\frac{2^{[N^\beta]}}{2^N}\right)^{\frac{2H-2}{q}}\int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}}\int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}} dudv|u-v|^{(2H-2)\frac{q-1}{q}} \\
&= C(q,H)\left(\frac{2^{[N^\beta]}}{2^N}\right)^{\frac{2H-2}{q}}\left(\frac{1}{2^N}\right)^{(2H-2)\frac{q-1}{q}+2} = C(q,H)2^{-2HN}2^{[N^\beta]\frac{2H-2}{q}}.
\end{aligned}$$

■

˜关于记作 $\Delta Z_{l,N}$ 的部分的矩，我们有以下结果。情形 $p=2$ 已在 [5] 中处理。

引理 2 对于 $N\geq 1$ 和 $l=1,\ldots,2^{[N^\gamma]}$，设 $\tilde{\Delta}Z_{l,N}$ 由 (6) 给出。那么，对于任意整数 $p\geq 2$ 和 $l=1,\ldots,2^{[N^\gamma]}$,

$$\left|2^{pHN}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p-\mathbf{E}Z_1^p\right|\leq C_p 2^{[N^\beta]\frac{H-1}{q}}. \tag{8}$$

特别地,

$$2^{pHN}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p\to_{N\to\infty}\mathbf{E}Z_1^p,$$

对于任意 $l=1,\ldots,2^{[N^\gamma]}$。

证明： 固定 $p\geq 2$ 和 $l=1,\ldots,2^{[N^\gamma]}$。由 Hermite 过程的自相似性和增量平稳性,

$$\mathbf{E}(\Delta Z_{l,N})^p=2^{-pHN}\mathbf{E}Z_1^p.$$

利用 (5)，我们可以写成

$$\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p+\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^j(\check{\Delta}Z_{l,N})^{p-j}=2^{-pHN}\mathbf{E}Z_1^p,$$

so

$$\begin{aligned}\left|2^{pHN}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p-\mathbf{E}Z_1^p\right| &= 2^{pHN}\left|\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^j(\check{\Delta}Z_{l,N})^{p-j}\right| \\ &= 2^{pHN}\left|\sum_{j=0}^{p-2}\binom{p}{j}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^j(\check{\Delta}Z_{l,N})^{p-j}\right|,\end{aligned}$$

其中，被加数 $j=p-1$ 由 [5] 中的引理 2 可知为零。因此，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}\left|2^{pHN}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p-\mathbf{E}Z_1^p\right| &\leq 2^{pHN}\sum_{j=0}^{p-2}\binom{p}{j}\left(\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^{2j}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{E}(\check{\Delta}Z_{l,N})^{2(p-j)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_p 2^{pHN}\sum_{j=0}^{p-2}\left(\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^2\right)^{\frac{j}{2}}\left(\mathbf{E}(\check{\Delta}Z_{l,N})^2\right)^{\frac{p-j}{2}},\end{aligned}$$

其中，最后一个上界是利用多重随机积分的超收缩性质 (116) 得到的。最后，根据引理 1 和不等式 $\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^2 \leq \mathbf{E}(\Delta Z_{l,N})^2 = 2^{-2HN}$，可推出

$$\begin{aligned}\left|2^{pHN}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p-\mathbf{E}Z_1^p\right| &\leq C_p 2^{pHN}\sum_{j=0}^{p-1}2^{-jHN}2^{-(p-j)HN}\left(2^{[N^\beta]\frac{2H-2}{q}}\right)^{\frac{p-j}{2}} \\ &\leq C_p 2^{[N^\beta]\frac{H-1}{q}}.\end{aligned}$$

■

$\tilde{}$ $\check{}$ 随机变量 $\Delta Z_{l,N}$ 和 $\Delta Z_{l,N}$ 的以下性质在后文中起着重要作用。

命题 1 对于 $N \geq 2^{(1-\beta)^{-1}}$ 和 $l = 1, ..., 2^{[N^\gamma]}$，设 $\tilde{\Delta}Z_{l,N}$ 和 $\check{\Delta}Z_{l,N}$ 分别由 *(6)* 和 *(7)* 定义。则

1. 随机变量 $\tilde{\Delta}Z_{l,N}, l = 1, ..., 2^{[N^\gamma]}$ 相互独立且同分布。

2. 随机变量 $\check{\Delta}Z_{l,N}, l = 1, ..., 2^{[N^\gamma]}$ 同分布。

证明： 为证明第 1 点，我们回顾 [31] 中的主要结果：多重随机积分 $I_{n_i}(f_i)$ $i = 1, ..., d$（其中 $f_i \in L^2(\mathbb{R}^{n_i})$ 是对称函数）相互独立，当且仅当对于每个 $i, j = 1, ..., d$，满足 $i \neq j$，

$$f_i \otimes_1 f_j = 0 \text{ almost everywhere on } \mathbb{R}^{n_i+n_j-2}.$$

~我们可以将 $\Delta Z_{l,N}$ 表示为如下的 q 阶多重随机积分

$$\tilde{\Delta}_{l,N} = I_q(g_{l,N}\mathbb{1}_{A_{l,N}}^{\otimes q}),$$

with

$$A_{l,N} = \left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}} - \frac{2^{[N^\beta]}}{2^N} + 2^{-N}, \frac{l}{2^{[N^\gamma]}} + 2^{-N}\right),$$

并且，对于每个 $y_1, .., y_q \in \mathbb{R}$,

$$g_{l,N}(y_1, ..., y_q) = \int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}} f_u(y_1, ..., y_q)du,$$

其中 f_u 由（2）给出。要得出第 1 点的结论，只需证明对于每个$k, l = 1,..., 2^{[N^\gamma]}$，满足 $k \neq l$,

$$\left(g_{l,N}\mathbb{1}_{A_{l,N}}^{\otimes q}\right) \otimes_1 \left(g_{k,N}\mathbb{1}_{A_{k,N}}^{\otimes q}\right) = 0 \text{ almost everywhere on } \mathbb{R}^{2q-2}.$$

根据收缩的定义，对于 $y_1, ..., y_{2q-2} \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \left(g_{l,N}\mathbb{1}_{A_{l,N}}^{\otimes q}\right) \otimes_1 \left(g_{k,N}\mathbb{1}_{A_{k,N}}^{\otimes q}\right)(y_1, ..., y_{2q-2}) \\ = & \int_{\mathbb{R}} dx g_{l,N}(y_1, ..., y_{q-1}, x)\mathbb{1}_{A_{l,N}}^{\otimes q-1}(y_1, ..., y_{q-1})\mathbb{1}_{A_{l,N}}(x) \\ & g_{k,N}(y_q, ..., y_{2q-2}, x)\mathbb{1}_{A_{l,N}}^{\otimes q-1}(y_q, ..., y_{2q-2})\mathbb{1}_{A_{l,N}}(x) \end{aligned}$$

并且，后一积分为零，因为当$N \geq 2^{(1-\beta)^{-1}}$时， $k \neq l$、 $A_{l,N}$ 与 $A_{k,N}$ 是互不相交的集合。

为证明随机变量 $\tilde{\Delta}Z_{l,N}, l = 1, ..., 2^{[N^\gamma]}$ 同分布，我们写作（用 $=^{(d)}$ 表示分布相等）：

$$\begin{aligned} & \tilde{\Delta}Z_{l,N} \\ = & \int_{\mathbb{R}^q} 1^{\otimes q}_{\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}} - \frac{2^{[N^\beta]}}{2^N} + 2^{-N}, \frac{l}{2^{[N^\gamma]}} + 2^{-N}\right)} \left(\int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}} f_u(y_1, ..., y_q)du\right) dB(y_1)...dB(y_q) \\ =^{(d)} & \int_{\mathbb{R}^q} dB(y_1)...dB(y_q)\mathbb{1}^{\otimes q}_{\left(-\frac{2^{[N^\beta]}}{2^N}, 0\right)}(y_1, ..., y_q) \\ & \left(\int_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}} f_u(y_1 + \frac{l}{2^{[N^\gamma]}} + 2^{-N}, ..., y_q + \frac{l}{2^{[N^\gamma]}} + 2^{-N})du\right) \\ = & \int_{\mathbb{R}^q} \mathbb{1}^{\otimes q}_{\left(-\frac{2^{[N^\beta]}}{2^N}, 0\right)}(y_1, ..., y_q) \left(\int_{-2^{-N}}^{0} f_u(y_1, ..., y_q)du\right) dB(y_1)...dB(y_q), \end{aligned}$$

且最后一个量与 $l = 1$、..... $2^{[N^\gamma]}$ 独立。可以用类似的论证证明第 2 点。

■

3 强独立性

我们来回顾一下随机变量强独立性的概念。下一节将大量运用这一概念来证明我们的主要结果。设 F 和 G 是两个随机变量，它们可在 $L^2(\Omega)$ 中展开为 $F=\sum_{n\geq 0} I_n(f_n)$ 和 $G=\sum_{n\geq 0} I_n(g_n)$，其中 f_n、$g_n \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 对每个 $n\geq 1$ 都是对称函数。若对每个 m、$n\geq 1$，F 和 G 的 $I_m(f_m)$ 与 $I_n(g_n)$ 都是独立随机变量，则称 F 和 G 强独立。利用它们的联合特征函数可以很容易地证明，只要 F 和 G 强独立，它们就是独立的（通常意义下）；另见 [31] 中的命题 8）。

引理 3 两个正整数 q_1 和 q_2 是任意的。令 $F_1=I_{q_1}(f_1)$ 和 $F_2=I_{q_2}(f_2)$ 满足 $f_1\in L^2(\mathbb{R}^{q_1})$ 和 $f_2\in L^2(\mathbb{R}^{q_2})$。假设 F_1 和 F_2 相互独立。那么对于任意整数 a、$b\geq 1$、F_1^a和 F_2^b，它们都是强独立的。

证明： 不失一般性，可以假设与 F_1 和 F_2相关联的核函数 f_1 和 f_2分别属于 $L_S^2(\mathbb{R}^{q_1})$ 和 $L_S^2(\mathbb{R}^{q_2})$；顺便提一下，对于任意整数 $q\geq 0$，由对称函数构成的 $L^2(\mathbb{R}^q)$ 的闭子空间记为 $L_S^2(\mathbb{R}^q)$。因此，根据 [31], 中关于多重随机积分独立性的判据，随机变量 F_1和 F_2 的独立性可以改写为

$$f_1 \otimes_1 f_2 = 0 \text{ almost everywhere on } \mathbb{R}^{q_1+q_2-2}. \tag{9}$$

首先，我们研究 $a=1$ 的情形。我们将通过对整数 $b\geq 1$ 进行归纳，证明随机变量 F_1 和 F_2^b 强独立。对于 $b=1$，根据假设，结论成立。下文中，我们假设对于任意整数 $b\geq 1$，F_1 和 F_2^b 强独立，并证明 F_1 和 F_2^{b+1} 也强独立。由多重 Wiener-Itˆo 积分的乘积公式 **(114)**，我们知道 F_2^b 有如下混沌展开：

$$F_2^b = \sum_{k=0}^{bq_2} I_k(h_{2,k}) \text{ with } h_{2,k}\in L_S^2(\mathbb{R}^k). \tag{10}$$

那么，归纳假设表明，对于所有 $k=1$，.....，bq_2,

$$f_1 \otimes_1 h_{2,k} = 0 \text{ almost everywhere on } \mathbb{R}^{q_1+k-2}. \tag{11}$$

注意到，可以由 **(10)** 和多重 Wiener-Itô 积分的乘积公式推得

$$\begin{aligned} F_2^{b+1} &= \sum_{k=0}^{bq_2} I_k(h_{2,k}) I_{q_2}(f_2) \\ &= \sum_{k=0}^{bq_2}\sum_{r=0}^{q_2\wedge k} r!\binom{k}{r}\binom{q_2}{r} I_{k+q_2-2r}\left(h_{2,k}\otimes_r f_2\right). \end{aligned}$$

因此，只需证明，对于满足$k+q_2>2r$的任意 $k=0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ bq_2$ 和 $r=0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ q_2\wedge k$，随机变量 $F_1=I_{q_1}(f_1)$ 与 $I_{k+q_2-2r}(h_{2,\ k}\otimes_r f_2)$ 相互独立。这等价于

$$(h_{2,k}\tilde{\otimes}_r f_2)\otimes_1 f_1=0 \text{ almost everywhere on } \mathbb{R}^{q_1+q_2+k-2r-2}, \tag{12}$$

其中 $h_{2,k}\tilde{\otimes}_r f_2$ 表示 $h_{2,k}\otimes_r f_2$的对称化。根据收缩的定义，

$$\begin{aligned}&\left((h_{2,k}\tilde{\otimes}_r f_2)\otimes_1 f_1\right)(t_1,...,t_{k+q_2+q_1-2r-2})\\&=\int_{\mathbb{R}}dx(h_{2,k}\tilde{\otimes}_r f_2)(t_1,...,t_{k+q_2-2r-1},x)f_1(t_{k+q_2-2r},...,t_{k+q_2-2r+q_1-2},x).\end{aligned}\tag{13}$$

注意到，对于所有 $n\geq 2$，以及任意函数 $g\in L^2(\mathbb{R}^n)$，其对称化 $\tilde{g}$可对每个 $(t_1,...,t_{n-1},x)\in\mathbb{R}^n$写为

$$\tilde{g}(t_1,...,t_{n-1},x)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_{n-1}}\sum_{i=1}^{n}g(t_{\sigma(1)},...,t_{\sigma(i-1)},x,t_{\sigma(i)},...,t_{\sigma(n-1)}),$$

其中 S_{n-1}是 $\{1,\ldots,n-1\}$的排列集合。因此，将上述公式用于 (13)，可得

$$\begin{aligned}&\left((h_{2,k}\tilde{\otimes}f_2)\otimes_1 f_1\right)(t_1,...,t_{k+q_2+q_1-2r-2})\\&=\frac{1}{(k+q_2-2r)!}\sum_{\sigma\in S_{k+q_2-2r-1}}\sum_{i=1}^{k+q_2-2r}\int_{\mathbb{R}}dx\\&\times(h_{2,k}\otimes_r f_2)(t_{\sigma(1)},...,t_{\sigma(i-1)},x,t_{\sigma(i)},...,t_{\sigma(k+q_2-2r-1)})\\&\times f_1(t_{k+q_2-2r},...,t_{k+q_2-2r+q_1-2},x).\end{aligned}$$

于是，为了得到结论 (12)，只需证明：对于满足 $k+q_2>2r$的每个 $k=0,1,...,bq_2$和 $r=0,1,...,q_2\wedge k$，以及所有 $\sigma\in S_{k+q_2-2r-1}$和$i=1,...,k+q_2-2r$，有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}dx(h_{2,k}\otimes_r f_2)(t_{\sigma(1)},...,t_{\sigma(i-1)},x,t_{\sigma(i)},...,t_{\sigma(k+q_2-2r-1)})\\&\times f_1(t_{k+q_2-2r},...,t_{k+q_2-2r+q_1-2},x)=0\end{aligned}\tag{14}$$

关于 $t_1,...,t_{k+q_2-2r+q_1-2}$几乎处处。假设 $k-r\leq i-1$。那么，利用富比尼定理，(14) 式的左端可写为

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}^r} d\,\overline{y} \times h_{2,k}(t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(k-r)}, \overline{y}) \\
&\times f_2(\overline{y}, t_{\sigma(k-r+1)}, ..., t_{\sigma(i-1)}, x, t_{\sigma(i)}, ..., t_{\sigma(k+q_2-2r-1)}) \\
&\times f_1(t_{k+q_2-2r}, ..., t_{k+q_2-2r+q_1-2}, x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^r} d\,\overline{y} \times h_{2,k}(t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(k)}, \overline{y}) \\
&\times \int_{\mathbb{R}} dx \times f_2(\overline{y}, t_{\sigma(k+1)}, ..., t_{\sigma(i-1)}, x, t_{\sigma(i)}, ..., t_{\sigma(k+q_2-2r-1)}) \\
&\times f_1(t_{k+q_2-2r}, ..., t_{k+q_2-2r+q_1-2}, x),
\end{aligned}
$$

并且，由于 (9)， $\mathbb{R}$ 上的最后一个积分为零。假设 $k - r \geq i$。那么，利用富比尼定理，(14) 式的左端可写为

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^r} d\,\overline{y} \times f_2(t_{\sigma(k-r)}, ..., t_{\sigma(k+q_2-2r-1)}, \overline{y}) \\
&\times \int_{\mathbb{R}} dx \times h_{2,k}(\overline{y}, t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(i-1)}, x, t_{\sigma(i)}, ..., t_{\sigma(k-r-1)}) f_1(t_{k+q_2-2r}, ..., t_{k+q_2-2r+q_1-2}, x)
\end{aligned}
$$

再次，由于（11），对 $\mathbb{R}$ 的积分为零。

现在我们来研究整数 $a \geq 1$ 任意的一般情形。我们将对 a 使用归纳法，证明 F_1^a 和 F_2^b 强独立。我们已经证明，当 $a = 1$ 时，该结论成立。假设 F_1^a 和 F_2^b 强独立，下面证明 F_1^{a+1} 和 F_2^b 也满足这一强独立性。

由多重 Wiener-Itˆo 积分的乘积公式（114）可知， F_1^a 有如下混沌展开：

$$
F_1^a = \sum_{k=0}^{aq_1} I_k(h_{1,k}) \text{ with } h_{1,k} \in L_S^2(\mathbb{R}^k). \tag{15}
$$

于是，根据归纳假设，对所有整数 $k \geq 1$ 和 $l \geq 1$，有

$$
h_{1,k} \otimes_1 h_{2,l} = 0 \text{ almost everywhere on } \mathbb{R}^{k+l-2}. \tag{16}
$$

对于每个整数 $l \geq 1$，由 $a = 1$ 的情形还可得

$$
f_1 \otimes_1 h_{2,l} = 0 \text{ almost everywhere on } \mathbb{R}^{q_1+l-2}. \tag{17}
$$

此外，利用（15）和乘积公式（114），我们得到

$$
F_1^{a+1} = \sum_{k=0}^{aq_1} \sum_{r=0}^{q_1 \wedge k} r! \binom{q_1}{r} \binom{k}{r} I_{k+q_1-2r}(h_{1,k} \otimes_r f_1).
$$

因此，只需证明：对于所有满足 $k+q_1-2r>0$ 的 $l=1$、..... bq_2、 $k=0$，1、..... bq_1 和 $r=0$，1、..... $q_1\wedge k$，两个随机变量 $I_l(h_{2,\,l})$ 和 $I_{k+q_1-2r}(h_{1,\,k}\otimes_r f_1)$ 相互独立；这相当于证明

$$(h_{1,k}\tilde{\otimes}_r f_1)\otimes_1 h_{2,l}=0 \text{ almost everywhere on } \mathbb{R}^{k+q_1-2r+l-2}.$$

这与情形 $a=1$ 完全相同，依据的是假设 (16) 和 (17)。 ■

结束本节之前，我们先回顾 [10] 中的以下结果，该结果与强独立随机变量和 Malliavin演算有关（见第6节）。

引理 4 设 F,G 为强独立随机变量。假设 $F,G\in\mathbb{D}^{1,2}$。则

1. 我们有 $\langle DF,D(-L)^{-1}G\rangle_{L^2(\mathbb{R})}=\langle DG,D(-L)^{-1}F\rangle_{L^2(\mathbb{R})}=0.$
2. 随机变量 $\langle DF,D(-L)^{-1}F\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ 和 $\langle DG,D(-L)^{-1}G\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ 是强独立的。

4 Hermite 过程的修正幂变差

设 $Z=(Z_t,\ t\geq 0)$ 为 Hermite 过程，$p\geq 2$ 为任意整数。本节旨在分析 Z 的修正幂变差的渐近行为，记为 $S_{N,\,p}(Z)$。$S_{N,\,p}(Z)$ 与通常幂变差的区别在于，$S_{N,\,p}(Z)$ 的定义仅考虑第 2.2 节中引入的 Z 的特殊增量。也就是说，对每个整数 $N\geq 1$，它定义为将后者的增量提升至 p 次幂后所得的如下重归一化和：

$$S_{N,p}(Z)=\frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}(\Delta Z_{l,N})^p\,. \tag{18}$$

我们首先证明，修正幂变差满足大数定律 .

命题2 对于所有整数 $p\geq 2$，令 $\mu_{\quad p}=\mathbf{E}Z_1^p$。设 S_{N_p} 由 *(18)* 给出。则

$$S_{N,p}(Z)\to_{N\to\infty}\mu_p \ in\ L^1(\Omega).$$

证明： 我们使用分解式 (5)，其中 $\tilde{\Delta}Z_{l,N}$ 和 $\check{\Delta}Z_{l,N}$ 分别由 (6) 和 (7) 给出。由此，我们可以写成：

$$\begin{aligned}(\Delta Z_{l,N})^p &= \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^j(\check{\Delta}Z_{l,N})^{p-j}\\ &= (\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p+\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^j(\check{\Delta}Z_{l,N})^{p-j},\end{aligned} \tag{19}$$

因此

$$\begin{aligned} S_{N,p}(Z)-\mu_p &= \frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}\left((\Delta Z_{l,N})^p-2^{-pHN}\mu_p\right)\\ &= \frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}\left((\Delta Z_{l,N})^p-\mathbf{E}(\Delta Z_{l,N})^p\right)\\ &= S^{(1)}_{N,p}(Z)+(R_{N,p}(Z)-\mathbf{E}R_{N,p}(Z)), \end{aligned}$$

with

$$S^{(1)}_{N,p}(Z)=\frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}\left((\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p-\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p\right)$$

and

$$R_{N,p}(Z)=\frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^j(\check{\Delta}Z_{l,N})^{p-j}. \tag{20}$$

我们首先处理余项 $R_{N,\ p}(Z)$。由柯西-施瓦茨不等式、引理1和引理2中的估计以及（116）可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|R_{N,p}(Z)| &\le \frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}\left(\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^{2j}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{E}(\check{\Delta}Z_{l,N})^{2(p-j)}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le C2^{[N^\beta]\frac{H-1}{q}}. \end{aligned} \tag{21}$$

因此，当 $N\to\infty$ 时，$R_{N,\ p}(Z)$ 在 $L^1(\Omega)$ 中收敛于零。接下来，我们处理被加数 $S^{(1)}_{N,\ p}(Z)$，并证明当 $N\to\infty$ 时，它在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于零。我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(S^{(1)}_{N,p}(Z)\right)^2 &= \frac{2^{2pHN}}{2^{2[N^\gamma]}}\sum_{l,l'=1}^{2^{[N^\gamma]}}\mathbf{E}\left((\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p-\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p\right)\left((\tilde{\Delta}Z_{l',N})^p-\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l',N})^p\right)\\ &= \frac{2^{2pHN}}{2^{2[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}\mathbf{E}\left((\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p-\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p\right)^2\\ &\le C\frac{2^{2pHN}}{2^{2[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^{2p}\\ &\le C\frac{1}{2^{[N^\gamma]}}, \end{aligned}$$

这里用到了命题 1 第 1 点中的独立性以及引理 2 中的估计式 (8)。我们得到

$$\mathbf{E}|S_{N,p}(Z)-\mu_p|\le C\left(2^{[N^\beta]\frac{H-1}{q}}+2^{-\frac{[N^\gamma]}{2}}\right)\le C2^{-\frac{[N^\gamma]}{2}}.$$

■

下一步是证明，经过适当的重归一化后，幂变差序列 (18) 满足中心极限定理。对于任意整数 $p \geq 2$，我们引入序列 ($V_{N,\ p}(Z)\ N \geq 1$)，其定义为

$$\begin{aligned} V_{N,p}(Z) &= \sqrt{2^{[N^\gamma]}}\,(S_{N,p}(Z) - \mu_p) \\ &= \frac{2^{pHN}}{\sqrt{2^{[N^\gamma]}}} \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} \left[(\Delta Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\Delta Z_{l,N})^p\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

由 (19),

$$\begin{aligned} V_{N,p}(Z) &= \frac{2^{pHN}}{\sqrt{2^{[N^\gamma]}}} \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} \left[(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p\right] \\ &\quad + \frac{2^{pHN}}{\sqrt{2^{[N^\gamma]}}} \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} \left[(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^j (\check{\Delta} Z_{l,N})^{p-j} - \mathbf{E}(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^j (\check{\Delta} Z_{l,N})^{p-j}\right] \\ &= V_{N,p}^{(1)} + \sqrt{2^{[N^\gamma]}}(R_{N,p}(Z) - \mathbf{E} R_{N,p}(Z)), \end{aligned} \tag{23}$$

with

$$V_{N,p}^{(1)} = \frac{2^{pHN}}{\sqrt{2^{[N^\gamma]}}} \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} \left[(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p\right] \tag{24}$$

以及由 (20) 给出的$R_{N,p}(Z)$。由 (21),

$$\sqrt{2^{[N^\gamma]}} \mathbf{E} |R_{N,p}(Z) - \mathbf{E} R_{N,p}(Z)| \leq C 2^{N^\beta \frac{H-1}{q} + \frac{N^\gamma}{2}}. \tag{25}$$

现在我们将重点关注序列 $\left(V_{(1)\ N,p},\, N \geq 1\right)$ 的渐近行为。我们将证明该序列满足中心极限定理。首先研究二阶矩的渐近行为。

引理 5 设 $p \geq 2$ 为一个整数。考虑由 *(24)* 给出的序列 $\left(V_{(1)\ N,p},\, N \geq 1\right)$。则

$$\left|\mathbf{E}(V_{N,p}^{(1)})^2 - m_p\right| \leq C 2^{[N^\beta] \frac{H-1}{q}}, \tag{26}$$

其中

$$m_p = \mathrm{Var}(Z_1^p) = \mathbf{E} Z_1^{2p} - (\mathbf{E} Z_1^p)^2 = \mu_{2p} - \mu_p^2. \tag{27}$$

特别是,

$$\mathbf{E}(V_{N,p}^{(1)})^2 \to_{N \to \infty} m_p.$$

证明： 对于 $N \geq 1$ 和 $p \geq 1$，我们记

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(V_{N,p}^{(1)})^2 &= \frac{2^{2pHN}}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{l,k=1}^{2^{[N^\gamma]}} \mathbf{E}\left[(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p\right]\left[(\tilde{\Delta}Z_{k,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{k,N})^p\right] \\ &= \frac{2^{2pHN}}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} \mathbf{E}\left[(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p\right]^2,\end{aligned}$$

这里用到了 $\tilde{\Delta}Z_{l,N}, l = 1, ..., 2^{[N^\gamma]}$ 相互独立这一事实（命题 1，第 1 点）。现在利用随机变量 $\tilde{\Delta}Z_{l,N}, l = 1, ..., 2^{[N^\gamma]}$ 同分布这一事实，可得

$$\mathbf{E}(V_{N,p}^{(1)})^2 = 2^{2pHN}\mathbf{E}\left[(\tilde{\Delta}Z_{1,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{1,N})^p\right]^2. \tag{28}$$

接下来写作

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(V_{N,p}^{(1)})^2 - m_p &= 2^{2pHN}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{1,N})^{2p} - \mathbf{E}Z_1^{2p} \\ &\quad - \left[\left(2^{pHN}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{1,N})^p\right)^2 - (\mathbf{E}Z_1^p)^2\right].\end{aligned} \tag{29}$$

由引理 2 可得

$$\left|2^{2pHN}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{1,N})^{2p} - \mathbf{E}Z_1^{2p}\right| \leq C_{2p}\ 2^{[N^\beta]\frac{H-1}{q}}. \tag{30}$$

此外，再次利用引理 2 以及不等式

$$|2^{pHN}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{1,N})^p + \mathbf{E}Z_1^p| \leq |2^{pHN}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{1,N})^p - \mathbf{E}Z_1^p| + 2\mathbf{E}|Z_1|^p,$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\left(2^{pHN}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{1,N})^p\right)^2 - (\mathbf{E}Z_1^p)^2\right| \\ &\leq |2^{pHN}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{1,N})^p - \mathbf{E}Z_1^p| \times |2^{pHN}\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{1,N})^p + \mathbf{E}Z_1^p| \\ &\leq C_p'\ 2^{[N^\beta]\frac{H-1}{q}}.\end{aligned} \tag{31}$$

最后，结合 (29)、(30) 和 (31)，可知 (26) 成立。 ■

现在，我们需要定义随机变量的概率分布之间的一些距离。更多详情请参见 [20], 附录C。通常，两个实值随机变量 F 和 G的分布之间的距离定义为

$$d(F, G) = \sup_{h \in \mathcal{A}} |\mathbf{E}h(F) - \mathbf{E}h(G)|, \tag{32}$$

其中， $\mathcal{A}$ 是一类满足以下条件的函数：对于每个 $h \in \mathcal{A}$， $h(F)$ $h(G)$ $\in L^1(\Omega)$。当 $\mathcal{A}$ 为 Lipschitz 连续函数 $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的集合，且满足 $\|h\|_{Lip} \leq 1$时，其中

$$\|h\|_{Lip} = \sup_{x,y \in \mathbb{R}, x \neq y} \frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|},$$

于是，(32) 给出了瓦瑟斯坦距离。当 $\mathcal{A}$ 为示性函数集合 $\{\mathbb{1}_{(-\infty,z]}, z \in \mathbb{R}\}$ 时，(32) 给出了 Kolmogorov 距离；对于 $\mathcal{A} = \{\mathbb{1}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$，我们得到全变差距离；而选择 $\mathcal{A}$ 为满足 $\|h\|_{Lip} + \|h\|_\infty < \infty$ 的函数类 h，则得到 Fortet-Mourier 距离。

我们回顾 Stein-Malliavin 演算中的一个经典结果（参见 [20]中的定理 5.1.3 和注 5.1.4）。下文中， d 可以是上述任一种距离（Kolmogorov 距离、全变差距离、瓦瑟斯坦距离或 Fortet-Mourier 距离）。关于 Malliavin 导数 D 以及相对于等距正态过程 $(W(h) \ h \in \mathcal{H})$ 的 Ornstein-Uhlenbeck 算子 L的定义，请参见附录，其中 $\mathcal{H}$ 是一个实可分无限维 Hilbert 空间。请注意，在本文中，我们有 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$。

定理 1 设 F 是一个属于有限个 *Wiener* 混沌之和的随机变量，使得 $\mathbf{E}F = 0$ 且 $\mathbf{E}F^2 = \sigma^2$。设 $\gamma > 0$。则

$$d(F, N(0, \gamma^2)) \leq C \left(\sqrt{\mathrm{Var}\left(\langle DF, D(-L)^{-1}F \rangle_{\mathcal{H}} \right)} + |\sigma^2 - \gamma^2| \right).$$

通过应用定理 1，我们将证明由 (24) 给出的序列依分布收敛到一个高斯分布，并估计与该极限定理相对应的瓦瑟斯坦距离。

命题 3 考虑由 *(24)* 给出的序列 $(V_{(1)\,N,p}, N \geq 1)$。则

$$V_{N,p}^{(1)} \to_{N \to \infty}^{(d)} N(0, m_p)$$

且当 N 足够大时，

$$d\left(V_{N,p}^{(1)}, N(0, m_p)\right) \leq C 2^{-\frac{[N^\gamma]}{2}}.$$

证明： 在整个证明过程中，我们假设 $N \geq 2^{(1-\beta)^{-1}}$；作出这一假设并无限制。下面来计算量 $\mathrm{Var}\left(\langle DV_{(1)\,N,\,p},\ D(-L)^{-1}V_{(1)\,N,\,p} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \right)$。我们有

$$DV_{N,p}^{(1)} = \frac{2^{pHN}}{\sqrt{2^{[N^\gamma]}}} \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} D\left[(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p \right]$$

and

$$D(-L)^{-1}V_{N,p}^{(1)} = \frac{2^{pHN}}{\sqrt{2^{[N^\gamma]}}} \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} D(-L)^{-1}\left[(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p \right].$$

由引理 3 可知，对于所有满足 $k \neq l$ 的 $k,\ l = 1,...,2^{[N^\gamma]}$，随机变量$\tilde{}$ $\tilde{}$($\Delta Z_{l,\ N})^p$和 $(\Delta Z_{k,\ N})^p$是强独立的。因此

$$\begin{aligned}
&\langle DV_{N,p}^{(1)}, D(-L)^{-1}V_{N,p}^{(1)}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
= &\frac{2^{2pHN}}{2^{[N^\gamma]}}\sum_{l,k=1}^{2^{[N^\gamma]}}\langle D\left[(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p\right], D(-L)^{-1}\left[(\tilde{\Delta}Z_{k,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{k,N})^p\right]\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
= &\frac{2^{2pHN}}{2^{[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}\langle D\left[(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p\right], D(-L)^{-1}\left[(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p\right]\rangle_{L^2(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

这里应用了引理 4 的第 1 点。因此

$$\begin{aligned}
&\langle DV_{N,p}^{(1)}, D(-L)^{-1}V_{N,p}^{(1)}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
= &\mathbf{E}\langle DV_{N,p}^{(1)}, D(-L)^{-1}V_{N,p}^{(1)}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{2^{2pHN}}{2^{[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}(F_l - \mathbf{E}F_l),
\end{aligned}$$

这里采用记号

$$F_l = \langle D\left[(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p\right], D(-L)^{-1}\left[(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p\right]\rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$$

根据引理 4 的第 2 点，随机变量 F_l、$l = 1$、.....、$2^{[N^\gamma]}$ 两两独立。因此，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\left(\langle DV_{N,p}^{(1)}, D(-L)^{-1}V_{N,p}^{(1)}\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right) \\
= &\mathbf{E}\left(\langle DV_{N,p}^{(1)}, D(-L)^{-1}V_{N,p}^{(1)}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \mathbf{E}\langle DV_{N,p}^{(1)}, D(-L)^{-1}V_{N,p}^{(1)}\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right)^2 \\
= &\frac{2^{4pHN}}{2^{2[N^\gamma]}}\sum_{l,k=1}^{2^{[N^\gamma]}}\mathbf{E}\left((F_l - \mathbf{E}F_l)(F_k - \mathbf{E}F_k)\right) \\
= &\frac{2^{4pHN}}{2^{2[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}\mathbf{E}\left((F_l - \mathbf{E}F_l)\right)^2. \qquad (33)
\end{aligned}$$

下面证明，对于每个 $l = 1$、.....、$2^{[N^\gamma]}$,

$$\mathbf{E}F_l^2 \leq C2^{-4pHN}. \qquad (34)$$

两次运用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}F_l^2 &\leq C\mathbf{E}\langle DV_{N,p}^{(1)}, D(-L)^{-1}V_{N,p}^{(1)}\rangle_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\leq C\mathbf{E}\|DV_{N,p}^{(1)}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\|D(-L)^{-1}V_{N,p}^{1}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\leq C\left(\mathbf{E}\|DV_{N,p}^{(1)}\|_{L^2(\mathbb{R})}^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{E}\|D(-L)^{-1}V_{N,p}^{1}\|_{L^2(\mathbb{R})}^4\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

另一方面，由于 $V_N^{(1)}$ ，p 是一个属于有限个Wiener 混沌之和的随机变量，

$$\mathbf{E}\|DV_{N,p}^{(1)}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C\mathbf{E}|V_{N,p}^{(1)}|^2 \leq C2^{-2pHN},$$

and

$$\mathbf{E}\|D(-L)^{-1}V_{N,p}^{(1)}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C\mathbf{E}|V_{N,p}^{(1)}|^2 \leq C2^{-2pHN}.$$

此外，由于 $\|DV_N^{(1)},p\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ 和 $\|D(-L)^{-1}V_{(1)\,N,p}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ 也都是有限个 Wiener混沌之和中的随机变量，根据超收缩性 (116)，我们有

$$\mathbf{E}\|DV_{N,p}^{(1)}\|_{L^2(\mathbb{R})}^4 \leq C\left(\mathbf{E}\|DV_{N,p}^{(1)}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right)^2 \leq C2^{-4pHN}$$

and

$$\mathbf{E}\|D(-L)^{-1}V_{N,p}^{(1)}\|_{L^2(\mathbb{R})}^4 \leq C\left(\mathbf{E}\|D(-L)^{-1}V_{N,p}^{(1)}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right)^2 \leq C2^{-4pHN}.$$

因此，界 (34) 得证。将此不等式代入 (33)，得到

$$\mathrm{Var}\left(\langle DV_{N,p}^{(1)}, D(-L)^{-1}V_{N,p}^{(1)}\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right) \leq C2^{-[N^\gamma]}. \tag{35}$$

最后，结合 (26)、(35) 和定理 1，我们得到该命题。 ■

现在可以得出 Hermite 过程的修正 p-变差收敛。

定理2 考虑由 *(22)* 给出的序列 $(V_{N,p}(Z)\ N \geq 1)$ 。则

$$V_{N,p}(Z) \to_{N\to\infty}^{(d)} N(0, m_p),$$

其中 $m_p =$ 方差(Z_1^p) （见 *(27)*）。此外，记 d_W 为瓦瑟斯坦距离，当 N 充分大时，我们有

$$d_W\left(V_{N,p}(Z), N(0, m_p)\right) \leq C2^{-\frac{N^\gamma}{2}}$$

证明： 由 (23)、命题 3 和 (25) 可得依分布收敛，这意味着随机变量 $\sqrt{2^{[N^\gamma]}}(R_{N,\ p}(Z) - \mathbf{E}R_{N,\ p}(Z))$ 在 $L^1(\Omega)$ 中收敛到 0，当 $N \to \infty$ 时。为了估计瓦瑟斯坦距离，我们首先注意到

$$d_W(V_{n,p}(Z), V_{N,p}^{(1)}) \leq \mathbf{E}|V_{N,p}(Z) - V_{N,p}^{(1)}| = \mathbf{E}\sqrt{2^{[N^\gamma]}}|R_{N,p}(Z) - \mathbf{E}R_{N,p}(Z)|,$$

其中$R_{N,\ p}(Z)$ 由 (20) 给出。因此，当 N 足够大时，

$$\begin{aligned} d_W(V_{N,p}, N(0,m_p)) &\leq d_W(V_{N,p}^{(1)}, N(0,m_p)) + d_W(V_{n,p}(Z), V_{N,p}^{(1)}) \\ &\leq d_W(V_{N,p}^{(1)}, N(0,m_p)) + \sqrt{2^{[N^\gamma]}}\mathbf{E}|R_{N,p}| \leq C2^{-\frac{N^\gamma}{2}}, \end{aligned}$$

由命题 3 和界（21）可得。 ■

5 加权幂变差及其在波动率估计中的应用

本部分旨在通过考察 Hermite 过程的加权（修正）幂变差的渐近行为，扩展上一节的结果。本节的第二部分还将把这些结果应用于一个含有厄米特噪声的简单模型中的波动率估计。

5.1 Hermite 过程的加权幂变差

我们首先介绍 Hermite 过程的加权修正幂变差。设h： $[0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个可测的确定性函数。对于每个整数 $p \geq 2$，我们考虑序列（$U_{N,\ p}$（Z） $N \geq 1$），其定义如下：

$$U_{N,p}(Z) = \frac{2^{pHN}}{\sqrt{2^{[N^\gamma]}}} \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right) \left((\Delta Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\Delta Z_{l,N})^p\right), \tag{36}$$

其中，对于每个 $l = 1$，...，$2^{[N^\gamma]}$， $\Delta Z_{l,\ N}$是由（4）给出的 Hermite 过程的特殊增量。我们研究序列（36）当 $N \to \infty$时的分布极限行为。

设（W_t， $t \in [0,1]$）是一个与（1）中的维纳过程 B独立的布朗运动。对于任意确定性函数 g： $[0,1] \to \mathbb{R}$， $g \in L^2$（$[0,1]$），我们令

$$\mathcal{I}(g) = \int_0^1 g(s) dW_s,$$

它表示 g 关于 W的维纳积分。

定理3 令 $p \geq 2$ 为整数，且 m_p 如式（*27*）所示。我们假设式（*36*）中的函数 h 满足以下假设：

$$h \text{ is (bounded) and } \alpha\text{-Hölder continuous on the interval } [0,1] \text{ with } \alpha \in (0,1). \tag{37}$$

那么，对于每个 $\nu \in (0, \gamma)$，存在一个常数 C，它依赖于 ν 和 h，使得对于所有足够大的 N，有

$$d_W(U_{N,p}(Z), \sqrt{m_p}\mathcal{I}(h)) \leq C 2^{-\alpha N^\nu}. \tag{38}$$

特别地，

$$U_{N,p}(Z) \to^{(d)}_{N\to\infty} \sqrt{m_p}\mathcal{I}(h).$$

定理3的证明主要依赖于以下关于瓦瑟斯坦距离的一般引理。

引理 6 令 $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为任意有界可测确定性函数，且$\|h\|_\infty=\sup_{v\in\mathbb{R}}|h(v)|$。令 U、 V、 X和 Y为 $L^2(\Omega)$上的四个实值随机变量，使得二维随机向量(U,V)与(X,Y)相互独立。则有

$$d_W\big(U+h(V)X,U+h(V)Y\big)\le\|h\|_\infty d_W(X,Y). \tag{39}$$

证明：记 $\mathcal{A}_W$ 为 Lipschitz 连续函数 f 的集合： $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得$\|f\|_{Lip}\le 1$。注意，对于任意这样的 f，对所有 $z\in\mathbb{R}$，都有 $|f(z)|\le|z|+|f(0)|$。后一个事实结合假设 U、 V、 X、 $Y\in L^2(\Omega)$ 和 $\|h\|_\infty<\infty$，推出期望 $\mathrm{E}\big(f(U+h(V)X)-f(U+h(V)Y)\big)$是良定义且有限的。接下来记 $\mathrm{P}_{U、V}$ 和 $\mathrm{P}_{X、Y}$ 为两个随机向量 (U,V) 和 (X,Y) 的概率分布。利用这两个随机向量相互独立这一事实以及富比尼定理，可得

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbf{E}\big(f(U+h(V)X)-f(U+h(V)Y)\big)\Big|\\
&=\Big|\int_{\mathbb{R}^2}d\mathbf{P}_{U,V}(u,v)\int_{\mathbb{R}^2}\Big(f(u+h(v)x)-f(u+h(v)y)\Big)d\mathbf{P}_{X,Y}(x,y)\Big|\\
&\le\int_{\mathbb{R}^2}d\mathbf{P}_{U,V}(u,v)\Big|\int_{\mathbb{R}^2}\Big(f(u+h(v)x)-f(u+h(v)y)\Big)d\mathbf{P}_{X,Y}(x,y)\Big|\\
&=\int_{\mathbb{R}^2}d\mathbf{P}_{U,V}(u,v)\Big|\mathbf{E}\Big(f(u+h(v)X)-f(u+h(v)Y)\Big)\Big|\\
&=\|h\|_\infty\int_{\mathbb{R}^2}d\mathbf{P}_{U,V}(u,v)\big|\mathbf{E}\big(g_{u,v}(X)-g_{u,v}(Y)\big)\big|,
\end{aligned}\tag{40}$$

其中，对于每个固定的 (u,v)， $\in\mathbb{R}^2$、 $g_{u,v}$ 表示关于 $\mathcal{A}_W$ 定义的函数，该函数对每个 $z\in\mathbb{R}$ 定义为 $g_{u,v}(z)=\|h\|_\infty^{-1}f(u+h(v)z)$。于是，可以推出 (40) 和 (32)，其中 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_W$ 满足

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbf{E}\big(f(U+h(V)X)-f(U+h(V)Y)\big)\Big|\\
&\le\|h\|_\infty\int_{\mathbb{R}^2}d\mathbf{P}_{U,V}(u,v)d_W(X,Y)=\|h\|_\infty d_W(X,Y),
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
d_W\big(U+h(V)X,U+h(V)Y\big) &= \sup_{f\in\mathcal{A}_W}\Big|\mathbf{E}\big(f(U+h(V)X)-f(U+h(V)Y)\big)\Big|\\
&\le\|h\|_\infty d_W(X,Y).
\end{aligned}$$

■

定理3的证明： 在整个证明过程中，我们固定任意整数 $N\ge 2^{(1-\beta)^{-1}}$。令$U_N=U_{N,p}(Z)$和 $h_N:[0,1)\to\mathbb{R}$ 为阶梯函数，对所有 $k\in$

$\{1,\dots,2^{[N^\nu]}\}$，在区间 $\left[\frac{k-1}{2^{[N^\nu]}},\frac{k}{2^{[N^\nu]}}\right)$ 上等于 $h\left(\frac{k-1}{2^{[N^\nu]}}\right)$。首先，注意到利用三角不等式可得

$$\begin{aligned}
&d_W(U_N,\sqrt{m_p}\mathcal{I}(h))\\
&\le d_W(U_N,\widetilde{U}_N)+d_W(\widetilde{U}_N,\widetilde{B}_N)+d_W(\widetilde{B}_N,\sqrt{m_p}\mathcal{I}(h_N))+d_W(\sqrt{m_p}\mathcal{I}(h_N),\sqrt{m_p}\mathcal{I}(h)).\\
&\le \mathbf{E}|U_N-\widetilde{U}_N|+\mathbf{E}|\widetilde{U}_N-\widetilde{B}_N|+d_W(\widetilde{B}_N,\sqrt{m_p}\mathcal{I}(h_N))+\sqrt{m_p}\,\mathbf{E}|\mathcal{I}(h_N)-\mathcal{I}(h)|. \quad (41)
\end{aligned}$$

在上述不等式中，我们使用了以下记号:

$$\widetilde{U}_N=\frac{2^{pHN}}{\sqrt{2^{[N^\gamma]}}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right)\left((\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p-\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p\right); \quad (42)$$

$$\widetilde{B}_N=\sum_{k=1}^{2^{[N^\nu]}}h\left(\frac{k-1}{2^{[N^\nu]}}\right)\widetilde{v}_N^{(k)}, \quad (43)$$

其中，对每个 $k\in\{1,\dots,2^{[N^\nu]}\}$,

$$\widetilde{v}_N^{(k)}=\frac{2^{pHN}}{\sqrt{2^{[N^\gamma]}}}\sum_{l=(k-1)\delta(N)+1}^{l=k\delta(N)}\left[(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p-\mathbf{E}(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p\right], \quad (44)$$

正整数 $\delta(N)$ 定义为

$$\delta(N)=2^{[N^\gamma]-[N^\nu]}; \quad (45)$$

and

$$\mathcal{I}(h_N)=\sum_{k=1}^{2^{[N^\nu]}}h\left(\frac{k-1}{2^{[N^\nu]}}\right)\Delta^{(\nu)}W_{k-1,N}, \quad (46)$$

其中，对所有 $k\in\{1,\dots,2^{[N^\nu]}\}$,

$$\Delta^{(\nu)}W_{k-1,N}=W_{\frac{k}{2^{[N^\nu]}}}-W_{\frac{k-1}{2^{[N^\nu]}}}. \quad (47)$$

从现在起，我们的目标是为 (41) 右侧的四项分别给出适当的上界。

由于 h 是有界函数，结合 (36) 和 (42)，可得

$$\mathbf{E}|U_N-\widetilde{U}_N|\le\frac{2^{pHN+1}\|h\|_\infty}{\sqrt{2^{[N^\gamma]}}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}\mathbf{E}\left|(\Delta Z_{l,N})^p-(\tilde{\Delta}Z_{l,N})^p\right|.$$

然后，由（19）、（20）和（21）可得

$$\mathbf{E}|U_N-\widetilde{U}_N|\le C2^{N^\beta\frac{H-1}{q}+\frac{N^\gamma}{2}}. \quad (48)$$

~ ~现在我们来估计$\mathbf{E}|U_N - B_N|$。注意到，由（42）、（43）和（44）可得

$$\widetilde{U}_N - \widetilde{B}_N = \frac{2^{pHN}}{\sqrt{2^{[N^\gamma]}}} \sum_{k=1}^{2^{[N^\nu]}} \sum_{l=(k-1)\delta(N)+1}^{l=k\delta(N)} \left(h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right) - h\left(\frac{k-1}{2^{[N^\nu]}}\right)\right) \left[(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p \right]. \tag{49}$$

此外，注意到，对于所有 $k \in \{1, \ldots, 2^{[N^\nu]}\}$和 $l \in \{(k-1)\delta(N) + 1, \ldots k\delta(N)\}$，利用 (45) 可得

$$\left| \frac{l}{2^{[N^\gamma]}} - \frac{k-1}{2^{[N^\nu]}} \right| = \frac{l - (k-1)\delta(N)}{2^{[N^\gamma]}} \leq \frac{k\delta(N) - (k-1)\delta(N)}{2^{[N^\gamma]}} = 2^{-[N^\nu]}.$$

那么，由于 h 是区间 $[0,1]$ 上的一个 α-H¨older 连续函数，因此

$$\left| h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right) - h\left(\frac{k-1}{2^{[N^\nu]}}\right) \right| \leq C 2^{-\alpha[N^\nu]}. \tag{50}$$

接下来，由 (49)、命题 1 的第 1 点、(50) 和 (8) 可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|\widetilde{U}_N - \widetilde{B}_N|^2 &= \frac{2^{2pHN}}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{k=1}^{2^{[N^\nu]}} \sum_{l=(k-1)\delta(N)+1}^{l=k\delta(N)} \left(h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right) - h\left(\frac{k-1}{2^{[N^\nu]}}\right)\right)^2 \\
&\quad \times \mathbf{E}\left[\left((\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p \right)^2 \right] \\
&\leq C 2^{-2\alpha[N^\nu]} \frac{2^{2pHN}}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{k=1}^{2^{[N^\nu]}} \sum_{l=(k-1)\delta(N)+1}^{l=k\delta(N)} \mathbf{E}(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^{2p} \\
&\leq C 2^{-2\alpha[N^\nu]}.
\end{aligned}$$

因此，利用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\mathbf{E}|\widetilde{U}_N - \widetilde{B}_N| \leq \sqrt{\mathbf{E}|\widetilde{U}_N - \widetilde{B}_N|^2} \leq C 2^{-\alpha[N^\nu]}. \tag{51}$$

现在来界定 $\mathbf{E}|\mathcal{I}(h_N) - \mathcal{I}(h)|$。由柯西-施瓦茨不等式、维纳积分 $\mathcal{I}$ 的等距性质、阶梯函数 h_N 的定义，以及 h 是区间 $[0,1]$ 上的 α-H¨older 连续函数这一事实，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}|\mathcal{I}(h_N) - \mathcal{I}(h)|^2 = \int_0^1 |h_N(s) - h(s)|^2 ds \\
&= \sum_{k=1}^{2^{[N^\nu]}} \int_{\frac{k-1}{2^{[N^\nu]}}}^{\frac{k}{2^{[N^\nu]}}} \left| h\Big(\frac{k-1}{2^{[N^\nu]}}\Big) - h(s) \right|^2 ds \leq C 2^{-2\alpha[N^\nu]}.
\end{aligned}$$

因此，利用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\mathbf{E}|\mathcal{I}(h_N)-\mathcal{I}(h)| \le \sqrt{\mathbf{E}|\mathcal{I}(h_N)-\mathcal{I}(h)|^2} \le C2^{-\alpha[N^\nu]}. \tag{52}$$

~现在我们来界定 $d_W(B_N,\ \sqrt{m_p}\mathcal{I}(h_N))$。为此，需要引入一些额外的记号。对于所有 $L\in\{0,\dots,2^{[N^\nu]}\}$，定义

$$\widetilde{B}_{N,L}=\sum_{k=1}^{L} h\left(\frac{k-1}{2^{[N^\nu]}}\right)\widetilde{v}_N^{(k)}+\sqrt{m_p}\sum_{k=L+1}^{2^{[N^\nu]}} h\left(\frac{k-1}{2^{[N^\nu]}}\right)\Delta^{(\nu)}W_{k-1,N}. \tag{53}$$

此外，定义

$$\widetilde{B}'_{N,0}=\sqrt{m_p}\sum_{k=2}^{2^{[N^\nu]}} h\left(\frac{k-1}{2^{[N^\nu]}}\right)\Delta^{(\nu)}W_{k-1,N}, \tag{54}$$

并且，对于每个 $L\in\{1,\dots,2^{[N^\nu]}\}$,

$$\widetilde{B}'_{N,L}=\sum_{k=1}^{L-1} h\left(\frac{k-1}{2^{[N^\nu]}}\right)\widetilde{v}_N^{(k)}+\sqrt{m_p}\sum_{k=L+1}^{2^{[N^\nu]}} h\left(\frac{k-1}{2^{[N^\nu]}}\right)\Delta^{(\nu)}W_{k-1,N}. \tag{55}$$

由（53）、（54）和（55）可立即推出，对于所有 $L\in\{1,\dots,2^{[N^\nu]}\}$,

$$\widetilde{B}_{N,L}=\widetilde{B}'_{N,L}+h\left(\frac{L-1}{2^{[N^\nu]}}\right)\widetilde{v}_N^{(L)} \tag{56}$$

and

$$\widetilde{B}_{N,L-1}=\widetilde{B}'_{N,L}+\sqrt{m_p}\,h\left(\frac{L-1}{2^{[N^\nu]}}\right)\Delta^{(\nu)}W_{L-1,N}. \tag{57}$$

此外，随机变量 $\widetilde{v}_N^{(1)}$、.....、$\widetilde{v}^{(2^{[N^\nu]})}{}_N$、$\Delta^{(\nu)}W_{0,\ N}$、$\dots\Delta^{(\nu)}W_{2^{[N^\nu]},\ N}$相互独立这一事实意味着，对于每个 $L\in\{1,\dots,2^{[N^\nu]}\}$，随机变量$\widetilde{B}'_{N,\ L}$与二维随机向量$\left(\sqrt{m_p}\,\Delta^{(\nu)}W_{L-1,\ N},\ \widetilde{v}_N^{(L)}\right)$也相互独立。接下来注意到，由（43）、—（46）、（53）、三角不等式、（56）和（57）可以推出

$$d_W(\widetilde{B}_N,\sqrt{m_p}\mathcal{I}(h_N))=d_W(\widetilde{B}_{N,2^{[N^\nu]}},\widetilde{B}_{N,0})\le\sum_{L=1}^{2^{[N^\nu]}} d_W(\widetilde{B}_{N,L-1},\widetilde{B}_{N,L})$$

$$=\sum_{L=1}^{2^{[N^\nu]}} d_W\left(\widetilde{B}'_{N,L}+\sqrt{m_p}\,h\left(\frac{L-1}{2^{[N^\nu]}}\right)\Delta^{(\nu)}W_{L-1,N},\widetilde{B}'_{N,L}+h\left(\frac{L-1}{2^{[N^\nu]}}\right)\widetilde{v}_N^{(L)}\right).$$

因此，由引理 6 可得

$$d_W(\widetilde{B}_N,\sqrt{m_p}\mathcal{I}(h_N))\le\|h\|_\infty\sum_{L=1}^{2^{[N^\nu]}} d_W\left(\sqrt{m_p}\,\Delta^{(\nu)}W_{L-1,N}\,,\widetilde{v}_N^{(L)}\right). \tag{58}$$

接下来，注意到由（44）以及命题 1 中的第 1 点可知，随机变量 $\widetilde{v}_N^{(L)}$、 $L \in \{1, \dots 2^{[N^\nu]}\}$ 同分布。还要注意，（47）意味着随机变量 $\sqrt{m_p}\,\Delta^{(\nu)} W_{L-1,\ N}$、 $L \in \{1, \dots 2^{[N^\nu]}\}$ 同分布。因此，由于对于任意 $L \in \{1, \dots 2^{[N^\nu]}\}$，两个随机变量 $\widetilde{v}_N^{(L)}$ 和 $\sqrt{m_p}\,\Delta^{(\nu)} W_{L-1,\ N}$ 相互独立，可以得出随机向量 $\left(\sqrt{m_p}\,\Delta^{(\nu)} W_{L-1,N}\,, \widetilde{v}_N^{(L)}\right)$、 $L \in \{1, \dots 2^{[N^\nu]}\}$ 同分布。然后，由（58）以及等式 $\sqrt{m_p}\,\Delta^{(\nu)} W_{0,\ N} = \sqrt{m_p}\, W_{\frac{1}{2^{[N^\nu]}}}$ 可推得

$$d_W(\widetilde{B}_N, \sqrt{m_p}\,\mathcal{I}(h_N)) \le \|h\|_\infty 2^{[N^\nu]} d_W\left(\sqrt{m_p}\, W_{\frac{1}{2^{[N^\nu]}}}\,, \widetilde{v}_N^{(1)}\right). \tag{59}$$

由于 $\sqrt{m_p} W_{\frac{1}{2^{[N^\nu]}}}$ 是中心高斯随机变量，为了界定 Wasserstein 距离 $d_W\left(\sqrt{m_p}\, W_{\frac{1}{2^{[N^\nu]}}}\,, \widetilde{v}_N^{(1)}\right)$ 我们将利用基本的定理 1。首先界定 $\left|\mathrm{Var}\left(\sqrt{m_p}\, W_{\frac{1}{2^{[N^\nu]}}}\right) - \mathrm{Var}\left(\widetilde{v}_N^{(1)}\right)\right|$。显然，

$$\mathrm{Var}\left(\sqrt{m_p}\, W_{\frac{1}{2^{[N^\nu]}}}\right) = m_p\, 2^{-[N^\nu]}. \tag{60}$$

此外，根据 (44) 和 (45)，利用中心随机变量 $\tilde{}$ $\tilde{}(\Delta Z_{l,\ N})^p - \mathbf{E}(\Delta Z_{l,\ N})^p$ 与 $l \in \{1, ..., \delta(N)\}$ 独立同分布这一事实，可得

$$\mathrm{Var}(\widetilde{v}_N^{(1)}) = \mathbf{E}(\widetilde{v}_N^{(1)})^2 = \frac{2^{2pHN}\delta(N)}{2^{[N^\gamma]}} \mathbf{E}\left[(\tilde{\Delta} Z_{1,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta} Z_{1,N})^p\right]^2 = 2^{-[N^\nu]} \mathbf{E}(V_{N,p}^{(1)})^2, \tag{61}$$

其中，最后一个等式由式 (28) 得出。然后，结合式 (60)、(61) 和 (26)，可得

$$\left|\mathrm{Var}\left(\sqrt{m_p}\, W_{\frac{1}{2^{[N^\nu]}}}\right) - \mathrm{Var}\left(\widetilde{v}_N^{(1)}\right)\right| \le C 2^{-[N^\nu] + [N^\beta]\frac{H-1}{q}}. \tag{62}$$

另一方面，利用式 (44) 和 (45)，并采用推导式 (35) 时所用的相同论证，可以证明

$$\mathrm{Var}\left(\langle D\widetilde{v}_N^{(1)}, D(-L)^{-1}\widetilde{v}_N^{(1)}\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right) \le C 2^{-[N^\nu]-[N^\gamma]}. \tag{63}$$

然后，由式 (62)、(63) 和定理 1 可得

$$d_W\left(\sqrt{m_p}\, W_{\frac{1}{2^{[N^\nu]}}}\,, \widetilde{v}_N^{(1)}\right) \le C 2^{-[N^\nu]-[N^\gamma]},$$

结合式 (59)，这意味着

$$d_W(\widetilde{B}_N, \sqrt{m_p}\,\mathcal{I}(h_N)) \le C 2^{-[N^\gamma]}. \tag{64}$$

最后，由于 $0 < \alpha < 1$ 和 $0 < \nu < \gamma \le \beta < 1$，结合 (41)、(48)、(51)、(52) 和 (64)，可得 (38)。 ■

注 2 仔细检查定理3的证明可知，在较弱的条件下，即 h 是 $[0,1]$ 上的连续函数（其不一定是 $H\ddot{o}lder$ 函数），仍有 $d_W(U_{N,p}(Z)\sqrt{m_p\mathcal{I}(h)}) \le C\rho_h(2^{-N^\nu})$，其中，非负、非递减的连续函数 ρ_h 是 h的一致连续模，对于每个 $\delta \in [0,1]$，定义为 $\rho_h(\delta) = \sup\{|h(x)-h(y)|, (x,y) \in [0,1]^2 \text{和 } |x-y| \le \delta\}$。

5.2 波动率估计

令 $h: [0,1] \to \mathbb{R}$ 为满足（37）的可测函数。我们考虑随机过程 $(X_t, t \in [0,1])$，其定义如下

$$X_t = x_0 + \int_0^t h(s)dZ_s, \tag{65}$$

其中 $x_0 \in \mathbb{R}$ 是确定性的，且（65）中关于 Z 的随机积分是维纳–厄米特积分；回顾一下，第 2.1 节已对这类随机积分作了简要介绍。注意，函数 h可视为定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数，在区间 $[0,1]$ 之外为零，并且对每个 $t \in [0,1]$，都有 $h\mathbb{1}_{(0,t)} \in |\mathcal{H}|$；因此，根据第 2.1 节可知，厄米特–维纳积分 $\int_0^t h(s)dZ_s$ 是良定义的。顺便提及，对于所有$t \in [0,1]$，$h\mathbb{1}_{(0,t)} \in |\mathcal{H}|$ 这一事实是函数h 有界性的直接结果（见（37））。事实上，由于 $\|h\|_\infty < \infty$ 且 $H \in (1/2,1)$，对每个 $t \in [0,1]$，都有

$$\int_0^t \int_0^t |h(u)| \cdot |h(v)| \cdot |u-v|^{2H-2} dudv \le \|h\|_\infty^2 \int_0^1 \int_0^1 |u-v|^{2H-2} dudv < \infty.$$

我们强调，对 $\int_0^1 h(s)^p ds$的积分波动率进行估计（其中$p \ge 1$）是金融数学中的一个常见课题。当（65）式中的噪声 Z 是半鞅时，关于这一主题已有大量文献。关于积分波动率的多种估计方法（即使假设其为随机过程），除其他文献外，我们还可参阅 [9], [8], [15] 或 [27]。当过程 X 在区间 $[0,1]$, 上的离散时刻被观测时，最常用的方法之一是通过过程X的幂变差来进行估计。在厄米特噪声的情形下，我们将采用类似的方法，但我们的幂变差将仅利用过程 X 的一些特殊增量来定义，而该过程由（65）式给出。这将使我们能够证明，下文定义的幂变差序列构成积分波动率的一个相合估计量；此外，经过适当的重归一化后，它还满足中心极限定理。当 Z 为分数布朗运动时所得到的相关结果，可参见 [7]或 [13]。

我们首先定义过程 X 的修正幂变差。对于任意整数 $p \ge 2$ 和 $N \ge 1$，我们设

$$S_{N,p}(X) = \frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} (\Delta X_{l,N})^p, \tag{66}$$

其中，对于 $l=1$，……，$2^{[N^\gamma]}$，

$$\Delta X_{l,N} = X_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}+2^{-N}} - X_{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}}. \tag{67}$$

因此，与(4)和(18)中的做法类似，我们使用单位区间 $[0,1]$上位于点$\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}$、长度为2^{-N}的 X 的增量。下面的结果表明,—X 的修正幂变差为积分波动率的一个相合估计量。

命题4 假设 h 满足*(37)*，并考虑由*(66)*给出的序列$(S_{N,p}(X)\ N\geq 1)$，其中 $p\geq 2$为整数。令 $\mu_p = \mathbf{E}Z_1^p$，则有

$$S_{N,p}(X) \to_{N\to\infty} \mu_p \int_0^1 h(s)^p ds \ in\ L^1(\Omega). \tag{68}$$

证明： 正如我们在定理3的证明中所做的那样，我们采用一种基于黎曼和逼近(65)中的随机积分的方法，该方法受 [7] 或 [13]的工作启发。设 M和 N为满足 $2<2^{(1-\beta)^{-1}}\leq M\leq [N^\gamma]$ 的任意两个整数。我们将差$S_{N,p}(X)\ -\mu_p\int_0^1 h(s)^p ds$ 分解为以下四项：

$$\begin{aligned}
&S_{N,p}(X) - \mu_p \int_0^1 h(s)^p ds \\
&= \frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} (\Delta X_{l,N})^p - \frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} h\left(\frac{l}{2^{N^\gamma]}}\right)^p (\Delta Z_{l,N})^p \\
&+ \frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{k=1}^{2^M} \sum_{l=(k-1)\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}+1}^{l=k\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}} \left(h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right)^p - h\left(\frac{k-1}{2^M}\right)^p\right)(\Delta Z_{l,N})^p \\
&+ \frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{k=1}^{2^M} h\left(\frac{k-1}{2^M}\right)^p \sum_{l=(k-1)\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}+1}^{l=k\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}} (\Delta Z_{l,N})^p - \mu_p \frac{1}{2^M} \sum_{k=1}^{2^M} h\left(\frac{k-1}{2^M}\right)^p \\
&+ \mu_p \left(\frac{1}{2^M} \sum_{k=1}^{2^M} h\left(\frac{k-1}{2^M}\right)^p - \int_0^1 h(s)^p ds\right) \\
:=\ & A_{N,p} + B_{N,M,p} + C_{N,M,p} + D_{M,p}.
\end{aligned} \tag{69}$$

我们的下一个目标是分别对后面四个被加数给出上界。

对 $A_{N、p}$ 的估计。 我们使用三角不等式以及不等式

$$|A^p - B^p| \leq 2^{p-2} p \left(|B|^{p-1}|A-B| + |A-B|^p\right), \tag{70}$$

该结论对任意 A，$B\in\mathbb{R}$ 以及所有整数 $p\geq 2$ 均成立。因此，我们得到

$$|A_{N,p}| \leq C_p \left(|A_{N,p,1}| + |A_{N,p,2}|\right),$$

with

$$A_{N,p,1}=\frac{2^{pHN}}{2^{[N^{\gamma}]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^{\gamma}]}}\left|h\left(\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}\right)\right|^{p-1}|\Delta Z_{l,N}|^{p-1}\left|\Delta X_{l,N}-h\left(\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}\right)\Delta Z_{l,N}\right|$$

and

$$A_{N,p,2}=\frac{2^{pHN}}{2^{[N^{\gamma}]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^{\gamma}]}}\left|\Delta X_{l,N}-h\left(\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}\right)\Delta Z_{l,N}\right|^{p}.$$

设 $a\geq 2$ 为任意正整数，由 (65) 可得

$$\mathbf{E}\left|\Delta X_{l,N}-h\left(\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}\right)\Delta Z_{l,N}\right|^{a}=\mathbf{E}\left|\int_{\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}}^{\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}+2^{-N}}\left(h(s)-h\left(\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}\right)\right)dZ_{s}\right|^{a}.$$

由于关于 Z 的任意 $|\mathcal{H}|$ 函数的维纳积分属于第 q 阶 Wiener混沌，利用超收缩性 (116) 和维纳积分的等距性质 (3)，可由前述等式推得

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|\Delta X_{l,N}-h\left(\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}\right)\Delta Z_{l,N}\right|^{a}\\
&\leq C\left(\mathbf{E}\left|\int_{\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}}^{\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}+2^{-N}}\left(h(s)-h\left(\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}\right)\right)dZ_{s}\right|^{2}\right)^{\frac{a}{2}}\\
=&\left(C\int_{\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}}^{\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}+2^{-N}}\int_{\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}}^{\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}+2^{-N}}\left(h(u)-h\left(\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}\right)\right)\right.\\
&\left.\times\left(h(v)-h\left(\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}\right)\right)|u-v|^{2H-2}dudv\right)^{\frac{a}{2}}\\
\leq& C\left(2^{-2\alpha N}\int_{\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}}^{\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}+2^{-N}}\int_{\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}}^{\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}+2^{-N}}|u-v|^{2H-2}dudv\right)^{\frac{a}{2}},
\end{aligned}$$

最后一个不等式中用到了 (37)。因此，我们得到

$$\mathbf{E}\left|\Delta X_{l,N}-h\left(\frac{l}{2^{[N^{\gamma}]}}\right)\Delta Z_{l,N}\right|^{a}\leq C2^{-\alpha Na}2^{-HNa}. \tag{71}$$

我们将使 利用柯西-施瓦茨不等式和（71）来界定记作 $A_{N,p,}$ 1

以及$A_{N,\ p,\ 2}$。对于 $A_{N,\ p,\ 1}$，我们写作

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|A_{N,p,1}| &\leq C\frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}\mathbf{E}|\Delta Z_{l,N}|^{p-1}\left|\Delta X_{l,N}-h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right)\Delta Z_{l,N}\right| \\
&\leq C\frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}\left(\mathbf{E}|\Delta Z_{l,N}|^{2p-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{E}\left|\Delta X_{l,N}-h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right)\Delta Z_{l,N}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}2^{-(p-1)HN}2^{-HN}2^{-\alpha N} \\
&\leq C2^{-\alpha N}.
\end{aligned}$$

关于 $A_{N,\ p,\ 2}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|A_{N,p,2}| &\leq \frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}\left(\mathbf{E}\left|\Delta X_{l,N}-h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right)\Delta Z_{l,N}\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}}2^{-\alpha pN}2^{-HpN}\leq C2^{-\alpha pN}.
\end{aligned}$$

因此我们得出结论:

$$\mathbf{E}|A_{N,p}|\leq C2^{-\alpha N}. \tag{72}$$

的 $B_{N,\ M,\ p}$。我们注意到，对于每个整数 $l\in\left[(k-1)\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}+1,\ k\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}\right]$，估计

$$\left|\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}-\frac{k-1}{2^M}\right|\leq 2^{-M}. \tag{73}$$

于是，由（37）和不等式（70），

$$\left|h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right)^p-h\left(\frac{k-1}{2^M}\right)^p\right|\leq C2^{-M\alpha},$$

对任意整数 $p \geq 2$。可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|B_{N,M,p}| &\leq \frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{k=1}^{2^M} \sum_{l=(k-1)\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}+1}^{l=k\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}} \left| h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right)^p - h\left(\frac{k-1}{2^M}\right)^p \right| \mathbf{E}|\Delta Z_{l,N}|^p \\
&\leq C\frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{k=1}^{2^M} \sum_{l=(k-1)\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}+1}^{l=k\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}} 2^{-M\alpha}\mathbf{E}|\Delta Z_{l,N}|^p \\
&\leq C\frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{k=1}^{2^M} \sum_{l=(k-1)\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}+1}^{l=k\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}} 2^{-M\alpha}2^{-pHN} \\
&\leq C2^{-M\alpha}. \qquad (74)
\end{aligned}$$

对 $C_{N、M、p}$ 的估计。利用等式 $EZ_1^p = 2^{pHN}\mathbf{E}(\Delta Z_{l、N})^p)$，对于所有 $l \in\{1,\ldots,2^{[N^\gamma]}\}$，我们可以将这个被加数表示为

$$\begin{aligned}
C_{N,M,p} &= \frac{1}{2^M}\sum_{k=1}^{2^M} h\left(\frac{k-1}{2^M}\right)^p \frac{2^{pHN}2^M}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{l=(k-1)\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}+1}^{l=k\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}} ((\Delta Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\Delta Z_{l,N})^p) \\
&= C^{(1)}_{N,M,p} + R_{N,M,p}, \qquad (75)
\end{aligned}$$

with

$$C^{(1)}_{N,M,p} = \frac{1}{2^M}\sum_{k=1}^{2^M} h\left(\frac{k-1}{2^M}\right)^p \frac{2^{pHN}2^M}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{l=(k-1)\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}+1}^{l=k\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}} \left((\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta} Z_{l,N})\right)$$

and

$$\begin{aligned}
R_{N,M,p} = \quad & \frac{1}{2^M}\sum_{k=1}^{2^M} h\left(\frac{k-1}{2^M}\right)^p \frac{2^{pHN}2^M}{2^{[N^\gamma]}} \\
& \times \sum_{l=(k-1)\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}+1}^{l=k\frac{2^{[N^\gamma]}}{2^M}} \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} \left((\tilde{\Delta} Z_{l,N})^j (\check{\Delta} Z_{l,N})^{p-j} - \mathbf{E}(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^j (\check{\Delta} Z_{l,N})^{p-j}\right).
\end{aligned}$$

由于 h 是区间 $[0,1]$ 上的有界函数（见（37）），与证明（21）类似，可以证明

$$\mathbf{E}|R_{N,M,p}| \leq C2^{[N^\beta]\frac{H-1}{q}}, \qquad (76)$$

对于满足 $2^{(1-\beta)^{-1}} \le M \le [N^\gamma]$ 的所有整数 N 和 M。接下来我们处理 $C_N^{(1)}$，M，p。为了利用命题 1 中的独立性，我们将在 $L^2(\Omega)$ 中计算其范数。对于满足 $2^{(1-\beta)^{-1}} \le M \le [N^\gamma]$ 的所有整数 M，N，有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(C_{N,M,p}^{(1)})^2 \\
= \;& \frac{1}{2^{2M}} \sum_{k=1}^{2^M} h\left(\frac{k-1}{2^M}\right)^p \frac{2^{2pHN} 2^{2M}}{2^{2[N^\gamma]}} \sum_{l=(k-1)\frac{2[N^\gamma]}{2^M}+1}^{l=k\frac{2[N^\gamma]}{2^M}} \mathbf{E}\left((\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p\right)^2 \\
\le \;& C \frac{2^{2pHN}}{2^{2[N^\gamma]}} \sum_{k=1}^{2^M} \sum_{l=(k-1)\frac{2[N^\gamma]}{2^M}+1}^{l=k\frac{2[N^\gamma]}{2^M}} \mathbf{E}\left((\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\tilde{\Delta} Z_{l,N})^p\right)^2 \\
\le \;& C \frac{1}{2^{2[N^\gamma]}} \sum_{k=1}^{2^M} \sum_{l=(k-1)\frac{2[N^\gamma]}{2^M}+1}^{l=k\frac{2[N^\gamma]}{2^M}} 1 \le C 2^{-[N^\gamma]}.
\end{aligned}$$

因此，利用后一个不等式、柯西-施瓦茨不等式、(75) 和 (76)，我们得到

$$\mathbf{E}|C_{N,M,p}| \le C 2^{-\frac{[N^\gamma]}{2}}. \tag{77}$$

$D_{M,\ p}$ 的估计。我们可以写成

$$D_{M,p} = \mu_p \sum_{k=1}^{2^M} \int_{\frac{k-1}{2^M}}^{\frac{k}{2^M}} \left(h\left(\frac{k-1}{2^M}\right)^p - h(s)^p \right) ds,$$

并根据 (70) 和 (37),

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|D_{M,p}| &\le C \sum_{k=1}^{2^M} \int_{\frac{k-1}{2^M}}^{\frac{k}{2^M}} \left| h\left(\frac{k-1}{2^M}\right)^p - h(s)^p \right| ds \\
&\le C \sum_{k=1}^{2^M} \int_{\frac{k-1}{2^M}}^{\frac{k}{2^M}} 2^{-M\alpha} ds \le C 2^{-M\alpha}.
\end{aligned} \tag{78}$$

最后，利用 (69)、(72)、(74)、(77) 和 (78)，对于所有整数 $M \ge 2^{(1-\beta)^{-1}}$，我们得到

$$\limsup_{N\to+\infty} \mathbf{E} \left| S_{N,p}(X) - \mu_p \int_0^1 h(s)^p ds \right| \le C 2^{-M\alpha}.$$

因此，令 M 趋于 $+\infty$，可得

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{E} \left| S_{N,p}(X) - \mu_p \int_0^1 h(s)^p ds \right| = \limsup_{N\to+\infty} \mathbf{E} \left| S_{N,p}(X) - \mu_p \int_0^1 h(s)^p ds \right| = 0.$$

■

对于任意整数 $p \geq 2$ 和 $N \geq 1$，我们设

$$V_{N,p}(X) = \sqrt{2^{[N^\gamma]}} \left(S_{N,p}(X) - \mu_p \int_0^1 h(s)^p ds \right), \tag{79}$$

其中 $S_{N,\ p}(X)$ 由式 (66) 给出。回顾一下，$h : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是满足式 (37) 的确定性函数。下一个结果表明，只要函数 h足够光滑，重整化修正幂变差 $V_{N,\ p}(X)$ 就依分布收敛于一个高斯随机变量；除乘法常数 $\sqrt{m_p}$ 外，该随机变量可表示为函数 h 的维纳积分。

定理 4 令 $p \geq 2$ 为一个整数。考虑由式 *(79)* 给出的序列 $(V_{N,\ p}(X)\ N \geq 1)$，并假设 h 满足式 *(37)*，其中 $\alpha > \frac{1}{2}$。则

$$V_{N,p}(X) \to^{(d)}_{N\to\infty} \sqrt{m_p} \int_0^1 h(s) dW_s,$$

其中 $(W_t, t \geq 0)$ 是一个维纳过程，m_p 由式 *(27)* 给出。此外，对每个 $\nu \in (0, \gamma)$，存在常数 C，它依赖于 ν 和 h，使得对所有足够大的 N，都有

$$d_W \left(V_{N,p}(Z), \sqrt{m_p} \int_0^1 h(s)^p dW_s \right) \leq C 2^{-\alpha N^\nu}. \tag{80}$$

证明： 我们写作

$$\begin{aligned}
V_{N,p}(X) &= \sqrt{2^{[N^\gamma]}} \left(\frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} (\Delta X_{l,N})^p - \mu_p \int_0^1 h(s)^p ds \right) \\
&= \sqrt{2^{[N^\gamma]}} \left(\frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} (\Delta X_{l,N})^p - \frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right)^p (\Delta Z_{l,N})^p \right) \\
&\quad + \sqrt{2^{[N^\gamma]}} \left(\frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}} \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right)^p (\Delta Z_{l,N})^p - \frac{1}{2^{[N^\gamma]}} \mu_p \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right)^p \right) \\
&\quad + \sqrt{2^{[N^\gamma]}} \left(\frac{1}{2^{[N^\gamma]}} \mu_p \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right)^p - \mu_p \int_0^1 h(s)^p ds \right) \\
&:= T_{1,N,p} + T_{2,N,p} + T_{3,N,p}.
\end{aligned}$$

下面对三个被加数分别作上界估计。首先注意到

$$T_{1,N,p} = \sqrt{2^{[N^\gamma]}} A_{N,p},$$

其中$A_{N,\ p}$ 由式（69）给出。利用界（72），我们得到

$$\mathbf{E}|T_{1,N,p}| \leq C2^{\frac{[N^\gamma]}{2}-\alpha N} \to_{N\to\infty} 0. \tag{81}$$

对于$T_{2,\ N,\ p}$，我们写作

$$\begin{aligned} T_{2,N,p} &= = \sqrt{2^{[N^\gamma]}}\frac{2^{pHN}}{2^{[N^\gamma]}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right)^p \left((\Delta Z_{l,N})^p - 2^{-pHN}\mu_p\right) \\ &= \frac{2^{pHN}}{\sqrt{2^{[N^\gamma]}}}\sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right)^p \left((\Delta Z_{l,N})^p - \mathbf{E}(\Delta Z_{l,N})^p\right). \end{aligned}$$

由于 h 是 α-H¨older 连续的，因此 h^p 在 $[0,1]$上也是 α-H¨older 连续的。因此，我们可以应用定理3，得出

$$T_{2,N,p} \to^{(d)}_{N\to\infty} \sqrt{m_p}\int_0^1 h(s)^p dW_s,$$

其中 $(W_t,\ t\geq 0)$ 表示布朗运动。此外，当 N 足够大时 ，

$$d_W\left(T_{2,N,p}, \sqrt{m_p}\int_0^1 h(s)^p dW_s\right) \leq C2^{-\alpha N^\nu}. \tag{82}$$

最后，我们处理被加数 $T_{3,\ N,\ p}$。该项可估计如下:

$$T_{3,N,p} = \sqrt{2^{[N^\gamma]}}\mu_p \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} \int_{\frac{l-1}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}} \left(h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right)^p - h(s)^p ds\right) ds$$

然后，由(37)可得,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|T_{3,N,p}| &\leq \sqrt{2^{[N^\gamma]}}\mu_p \sum_{l=1}^{2^{[N^\gamma]}} \int_{\frac{l-1}{2^{[N^\gamma]}}}^{\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}} \left|h\left(\frac{l}{2^{[N^\gamma]}}\right)^p - h(s)^p ds\right| ds \\ &\leq C\sqrt{2^{[N^\gamma]}}2^{-\alpha[N^\gamma]} \to_{N\to\infty} 0, \end{aligned} \tag{83}$$

因为 $\alpha > \frac{1}{2}$。

Th瓦瑟斯坦距离的所需界由(81)、(82)和(83)得出。 ■

5.3 数值实验

本小节旨在利用随机过程 $X = (X_t,\ t\in[0,1])$（见式 (65)）模拟样本路径生成的数据，对式 (66) 中引入的积分波动率估计量的性能进行数值研究。为简单起见，假设 $x_0 = 0$。因此，对所有 $t\in[0,1]$，随机变量 X_t（有时记作 $X(t)$）可化简为

$$X_t = X(t) = \int_0^t h(s)dZ_s. \tag{84}$$

注 3 为进行数值近似，需要对每个 $t \in [0,1]$，维纳–厄米特积分 $\int_0^t h(s)dZ_s$（见第 *2.1* 节）也是定义良好的路径意义下的 *Riemann–Stieltjes* 积分。为此，要求确定性函数 h 满足以下假设：

(A) 函数 h 在区间 $[0,1]$ 上是 α-*Hölder* 连续的，阶数为某个 $\alpha \in (0,1]$，满足

$$\alpha + H > 1, \tag{85}$$

其中 H 表示 *Hermite* 过程 Z的赫斯特参数。实际上，当 $\delta < H$ 足够接近 H时，(85) 可推出 $\alpha + \delta > 1$。那么，由于 *Hermite* 过程 $Z = (Z_s, s \in [0,1])$ 的样本路径是 δ-*Hölder* 连续函数，根据例如 *[18]*可知，对于每个 $t \in [0,1]$， h 相对于积分器 Z 在 $[0,t]$ 上的路径 *Riemann–Stieltjes* 积分是良定义的。此外，根据 *[29,* 命题 *3.2],* 可知，后一个积分与维纳–厄米特积分 $\int_0^t h(s)dZ_s$一致。因此，对于任意 $t \in [0,1]$ 以及任意序列

$$\left(P_j := \left\{0 = x_0^{(j)} < x_1^{(j)} < \cdots < x_m^{(j)} = t\right\}\right)_j$$

将区间 $[0,t]$ 细分，使其网格趋于0，几乎必然有 $y,$

$$\int_0^t h(s)dZ_s = \lim_{j \to +\infty} \sum_{k=0}^{m-1} h(x_k^{(j)}) \left(Z_{x_{k+1}^{(j)}} - Z_{x_k^{(j)}}\right). \tag{86}$$

鉴于 (84) 和 (86)，粗略地说，要模拟过程 $X = (X_t,\ t \in [0,1])$ 的样本路径，一种合理的策略是考虑对$[0,1]$ 的一个划分，并利用 Hermite 过程 Z 本身的模拟样本路径，计算 (86) 右侧出现的 Riemann–Stieltjes 和；该样本路径可通过近期在 [4] 中介绍的模拟方法获得。

现在，我们简要描述后一个模拟方法。它依赖于分辨率参数 $J \in \mathbb{N}$，该参数对应于近似层级（见下文公式（92））。此外，它还依赖于另外两个参数 $a \in (1/2,\ 1)$ 和 $\varepsilon > 0$，这些参数是确保近似过程满足收敛速率（92）所必需的，参见第 3 节以及其中对 [3] 的引用。在引入这三个参数后，我们先固定一些记号。回顾一下， $q \in \mathbb{N}$ 是 Wiener混沌的阶数，Hermite 过程 Z（赫斯特参数为 $H \in (1/2,\ 1)$）属于该 Wiener混沌。在下文中，我们设 $\delta = \frac{H-1}{q} + \frac{1}{2}$。阶数为 δ 的单变量 Meyer 分数阶尺度函数 [19] 记为 $\Phi_\Delta^{(\delta)}$，并通过其傅里叶变换定义为

$$\widehat{\Phi}_\Delta^{(\delta)}(\xi) = \left(\frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi}\right)^\delta \widehat{\phi}(\xi)\ \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ and } \widehat{\Phi}_\Delta^{(\delta)}(0) = 1,$$

其中， ϕ 是一个 [16] 单变量 Meyer 尺度函数。设 $(g_{J,\,k}^{\phi})_{k\in\mathbb{Z}}$ 为一列独立同分布的 $\mathcal{N}(0,1)$ 高斯随机变量，对所有 $k\in\mathbb{Z}$ 定义为

$$g_{J,k}^{\phi} := 2^{J/2} I_1\left(\phi(2^J \bullet - k)\right),$$

高斯 FARIMA $(0,\delta,0)$ 序列 $(Z_{J\ell}^{(\delta)})_{\ell\in\mathbb{Z}}$，与 $(g_{J,k}^{\phi})_{k\in\mathbb{Z}}$ 相关，对所有$\ell\in\mathbb{Z}$，其定义为

$$Z_{J,\ell}^{(\delta)} := g_{J,\ell}^{\phi} + \sum_{p=1}^{+\infty} \gamma_p^{(\delta)} g_{J,\ell-p}^{\phi},$$

其中系数 $\gamma_p^{(\delta)} = \Gamma^{\,\delta\,\Gamma}(p+\delta)\,(p+1)\Gamma(\delta+1)$，对所有 $p\in\mathbb{N}$ 均成立。顺便提一下，$(Z_{J\ell}^{(\delta)})_{\ell\in\mathbb{Z}}$ 可以通过例如循环矩阵嵌入过程进行模拟，这是一种精确方法 [14, 32]。

我们的下一个目标是引入一个分段线性随机过程，用以逼近 Hermite 过程 Z。为此，接下来考虑无限集合

$$\mathcal{I}_J := \mathbb{N}\cap[2^{J(1-a)},+\infty),$$

并且，对任意 $m\in\mathcal{I}_J$，考虑两个有限集合

$$D_J^1[m] := \left\{k\in\mathbb{N} : 2^{J(1-a)}\le k\le m\right\}$$

and

$$\mathcal{J}_J^1[m] := \left\{\mathbf{k}\in(D_J^1[m])^q \,:\, \max_{1\le\ell,\ell'\le d}|k_\ell - k_{\ell'}|\le 2^{\varepsilon J}\right\}. \tag{87}$$

对所有 $m\in\mathcal{I}_J$，令

$$s_{m,J} := 2^{-JH}\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{J}_J^1[m]}\sigma_{J,\mathbf{k}}^{(q,H)}\int_{\mathbb{R}}\prod_{\ell=1}^{q}\Phi_{\Delta}^{(\delta)}(s-k_\ell)\,ds, \tag{88}$$

其中每个随机变量 $\sigma_{J}^{(q,H)}{}_{,\mathbf{k}}$ 定义为

$$\sigma_{J,\mathbf{k}}^{(q,H)} := \sum_{n=0}^{\lfloor q/2\rfloor}(-1)^n\sum_{P\in\mathcal{P}_n^{(q)}}\prod_{r=1}^{n}\mathbf{E}[Z_{J,\ell_{k_r}}^{(\delta)}Z_{J,\ell_{k_r'}}^{(\delta)}]\prod_{s=n+1}^{q-n}Z_{J,\ell_{k_s''}}^{(\delta)}. \tag{89}$$

注意， $\mathcal{P}_n^{(q)}$在（89）中表示由 $\{1,\dots,q\}$ 的所有划分组成的有限集合，其中包含 n个无序对和 $q-2n$ 个单元素集合，且索引 k_r、 k_r' 和 k_s''满足

$$P = \left\{\{k_1,k_1'\},\dots,\{k_n,k_n'\},\{k_{n+1}''\},\dots,\{k_{q-n}''\}\right\}.$$

注 4 *Hermite* 过程（$Z_s, s \in I$）在任意紧区间 $I \subset \mathbb{R}_+$上的样本路径，是通过将分段线性连续随机过程 $\{\widetilde{S}_J^{(q,H)}(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ 限制在 I 上进行模拟的；该过程对所有 $s \in \mathbb{R}_+$定义为

$$\widetilde{S}_J^{(q,H)}(s) = \frac{s_{m_0,J}}{|\widetilde{\lambda}_J^{(a)}|} s \mathbb{1}_{\widetilde{\lambda}_J^{(a)}}(s) + \sum_{m\in\mathcal{I}_J} \Big(2^J \left(s_{m+1,J} - s_{m,J}\right)\left(s - (m2^{-J} + 2^{-aJ})\right) + s_{m,J}\Big) \mathbb{1}_{\lambda_{m,J}^{(a)}}(s), \tag{90}$$

其中

$$m_0 := \inf \mathcal{I}_J, \quad \widetilde{\lambda}_J^{(a)} := [0, m_0 2^{-J} + 2^{-aJ}), \quad |\widetilde{\lambda}_J^{(a)}| = m_0 2^{-J} + 2^{-aJ},$$

and

$$\lambda_{m,J}^{(a)} := [m2^{-J} + 2^{-aJ}, (m+1)2^{-J} + 2^{-aJ}), \quad \textit{for all } m \in \mathcal{I}_J.$$

注意到

$$\widetilde{S}_J^{(q,H)}\big(m2^{-J} + 2^{-aJ}\big) = s_{m,J}, \quad \textit{for every } m \in \mathcal{I}_J. \tag{91}$$

该模拟过程的有效性由 *[4,* 定理*212]*保证。该定理指出，~对于任意紧区间 $I \subset \mathbb{R}_+$，存在一个几乎必然有限的随机变量 C（取决于 I），使得几乎必然地，对每个 $J \in \mathbb{N}$，都有

$$\|Z - \widetilde{S}_J^{(q,H)}\|_{I,\infty} \le \widetilde{C} J^{\frac{q}{2}} 2^{-J(H-\frac{1}{2})}, \tag{92}$$

其中，$\|\cdot\|_{I,\infty}$ 表示 I上的一致范数。

注 5 令 $t \in \mathbb{R}_+$，当 $s \in [0,t]$时，在(90) 中定义的和 $\widetilde{S}_J^{(q,H)}(s)$ 可改写为

$$\widetilde{S}_J^{(q,H)}(s) = \frac{s_{m_0,J}}{|\widetilde{\lambda}_J^{(a)}|} s \mathbb{1}_{\widetilde{\lambda}_J^{(a)}}(s) + \sum_{m=m_0}^{m_t} \Big(2^J \left(s_{m+1,J} - s_{m,J}\right)\left(s - (m2^{-J} + 2^{-aJ})\right) + s_{m,J}\Big) \mathbb{1}_{\lambda_{m,J}^{(a)}}(s), \tag{93}$$

其中

$$m_t = \max\{m \in \mathcal{I}_J : m2^{-J} + 2^{-aJ} \le t\}. \tag{94}$$

注意，当集合 $\{m \in \mathcal{I}_J : m2^{-J} + 2^{-aJ} \le t\}$ 为空时，按照惯例，$\sum_{m=m_0}^{m_t} \cdots = 0$。

定义 1 对于每个固定的 $J \in \mathbb{N}$，分段线性连续随机过程 $X_J = \{X_J(t)\}_{t\in[0,1]}$对所有满足 $\{m \in \mathcal{I}_J\colon\ m2^{-J} + 2^{-aJ} \le t\} \ne \emptyset$ 的 $t \in [0,1]$ 定义为

$$\begin{aligned} X_J(t) = {} & h(0) s_{m_0,J} + h(m_t 2^{-J} + 2^{-aJ}) \Big(2^J \left(s_{m_t+1,J} - s_{m_t,J}\right)\left(t - (m_t 2^{-J} + 2^{-aJ})\right)\Big) \\ & + \sum_{k=m_0}^{m_t-1} h(k2^{-J} + 2^{-aJ}) \left(s_{k+1,J} - s_{k,J}\right), \end{aligned} \tag{95}$$

其中 m_t 如注 *5* 所述，并约定若 $m_t = m_0$，则 $\sum_{k=m_0}^{m_t-1} \cdots = 0$。此外，当 $\{m \in \mathcal{I}_J : m2^{-J} + 2^{-aJ} \le t\} = \emptyset$ 时， $X_J(t)$ 定义为

$$X_J(t) = h(0)\frac{s_{m_0,J}}{|\widetilde{\lambda}_J^{(a)}|}t. \tag{96}$$

下面的命题表明，当函数 h 的 H¨ölder 正则性阶数 $\alpha \in (0,1]$ 足够大，使得

$$\alpha + H > 3/2,$$

那么，过程序列 $(X_J)_{J\in\mathbb{N}}$ 几乎必然在区间 $[0,1]$, 上以一致范数收敛到过程 X，同时还给出了收敛速率的估计。

命题 5 设 X 和 X_J 分别由 *(84)* 和定义 *1* 给出。对于任意小的 $\varepsilon > 0$，存在一个正的有限随机变量 C，使得几乎必然地，对所有 $J \in \mathbb{N}$,

$$\|X - X_J\|_{[0,1],\infty} \le C2^{-J(\alpha+H-3/2-\varepsilon)}. \tag{97}$$

我们的下一个目标是证明命题 5 成立。为此，我们需要引入如下定义的过程序列 $(X_J)_{J\in\mathbb{N}}$：$\widetilde{}$

$\widetilde{}$**定义 2** 对每个固定的 $J \in \mathbb{N}$，连续随机过程 $\{X_J(t)\}_{t\in[0,1]}$ 对所有满足 $\{m \in \mathcal{I}_J : m2^{-J} + 2^{-aJ} \le t\} \neq \emptyset$的 $t \in [0,1]$ 定义为

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_J(t) = h(0)Z(m_0 2^{-J} + 2^{-aJ}) + h(m_t 2^{-J} + 2^{-aJ})\Big(Z(t) - Z(m_t 2^{-J} + 2^{-aJ})\Big)\\ + \sum_{k=m_0}^{m_t-1} h(k2^{-J} + 2^{-aJ})\Big(Z\big((k+1)2^{-J} + 2^{-aJ}\big) - Z\big(k2^{-J} + 2^{-aJ}\big),\end{aligned} \tag{98}$$

其中， m_t 与注 *5* 中相同，并约定若 $m_t = m_0$，则 $\sum_{k=m_0}^{m_t-1} \cdots = 0$。此外，当 $\{m \in \mathcal{I}_J : m2^{-J} + 2^{-aJ} \le t\} = \emptyset$ 时，$\widetilde{X}_J$ （ t ）定义为

$$\widetilde{X}_J(t) = h(0)Z(t). \tag{99}$$

命题 5 的证明： 命题 5 可由三角不等式以及以下两个引理直接推出。

■

引理 7 对于任意小的 $\varepsilon > 0$，存在一个正的有限随机变量 C'，使得几乎必然地，对所有 $J \in \mathbb{N}$,

$$\|X - \widetilde{X}_J\|_{[0,1],\infty} \le C'2^{-J(\alpha+H-1-\varepsilon)}. \tag{100}$$

引理 8 对于任意小的 $\varepsilon > 0$，存在一个正的有限随机变量 C''，使得几乎必然地，对所有 $J \in \mathbb{N}$,

$$\|X_J - \widetilde{X}_J\|_{[0,1],\infty} \leq C'' 2^{-J(\alpha+H-3/2-\varepsilon)}. \tag{101}$$

引理 7 的证明： 鉴于假设 (A)，以及 Z 的样本路径几乎必然是区间 $[0,1]$, 上的 $(H-\varepsilon)$-H¨older 连续函数这一事实，根据杨-洛夫不等式（见 [18] 的第 1.3 节），可知存在一个有限的正随机量 C_1，其仅依赖于 α、H 和 ε，使得几乎必然地，对所有满足 $t_1 \leq t_2$ 的 t_1, $t_2 \in [0,1]$,

$$\Big| \int_{t_1}^{t_2} h(s)dZ(s) - h(t_1)\big(Z(t_2) - Z(t_1)\big) \Big| \leq C_1 (t_2 - t_1)^{\alpha+H-\varepsilon}. \tag{102}$$

从现在起，$t \in [0,1]$ 任意且固定。在下文中，我们研究以下三种情况：第一种情况，集合 $\{m \in \mathcal{I}_J : m2^{-J} + 2^{-aJ} \leq t\}$ 为空；第二种情况，它仅包含 m_0；第三种情况，它包含 m_0 及其他元素。在第一种情况下，利用 (84)、(99)、等式 $Z(0) = 0$、(102)、不等式 $t < m_0 2^{-J} + 2^{-aJ}$、不等式 $m_0 \leq 2^{J(1-a)} + 1$ 以及不等式 $a(\alpha + H - \varepsilon) > \alpha + H - 1 - \varepsilon$，可得几乎必然地,

$$\big|X(t) - \widetilde{X}_J(t)\big| \leq C_1\, t^{\alpha+H-\varepsilon} \leq C_1 \big(m_0 2^{-J} + 2^{-aJ}\big)^{\alpha+H-\varepsilon} \leq 9C_1 2^{-a(\alpha+H-\varepsilon)J} \leq 9C_1 2^{-(\alpha+H-1-\varepsilon)J}. \tag{103}$$

在第二种情形下，由 (84)、(98)、等式 $Z(0) = 0$、(102)、三角不等式、(103) 中的第三个和第四个不等式，以及不等式 $t \geq (m_0 + 1)2^{-J} + 2^{-aJ}$ 可得

$$\begin{aligned}
\big|X(t) - \widetilde{X}_J(t)\big| &\leq \left| \int_0^{m_0 2^{-J} + 2^{-aJ}} h(s)dZ(s) - h(0)Z(m_0 2^{-J} + 2^{-aJ}) \right| \\
&\quad + \left| \int_{m_0 2^{-J} + 2^{-aJ}}^{t} h(s)dZ(s) - h(m_0 2^{-J} + 2^{-aJ})\Big(Z(t) - Z(m_0 2^{-J} + 2^{-aJ})\Big) \right| \\
&\leq C_1 \big(m_0 2^{-J} + 2^{-aJ}\big)^{\alpha+H-\varepsilon} + C_1 \big(t - m_0 2^{-J} - 2^{-aJ}\big)^{\alpha+H-\varepsilon} \\
&\leq 9C_1 2^{-a(\alpha+H-\varepsilon)J} + C_1 2^{-(\alpha+H-\varepsilon)J} \leq 10 C_1 2^{-(\alpha+H-1-\varepsilon)J}.
\end{aligned} \tag{104}$$

在第三种情形下，可以由 (84)、(98)、等式 $Z(0) = 0$、(102)、三角不等式、(103) 中的第三个和第四个不等式，以及不等式 $t \geq (m_t + 1)2^{-J} +$ 推导出

2^{-aJ} 以及不等式 $m_t < 2^J$，可得

$$\begin{aligned}
\big|X(t)-\widetilde{X}_J(t)\big| \le{}& \Big|\int_0^{m_0 2^{-J}+2^{-aJ}} h(s)dZ(s) - h(0)Z(m_0 2^{-J}+2^{-aJ})\Big| \\
&+\Big|\int_{m_t 2^{-J}+2^{-aJ}}^{t} h(s)dZ(s) - h(m_t 2^{-J}+2^{-aJ})\Big(Z(t)-Z(m_t 2^{-J}+2^{-aJ})\Big)\Big| \\
&+\sum_{k=m_0}^{m_t-1}\Big|\int_{k2^{-J}+2^{-aJ}}^{(k+1)2^{-J}+2^{-aJ}} h(s)dZ(s) \\
&\qquad - h(k2^{-J}+2^{-aJ})\Big(Z\big((k+1)2^{-J}+2^{-aJ}\big)-Z\big(k2^{-J}+2^{-aJ}\big)\Big)\Big| \\
\le{}& C_1\big(m_0 2^{-J}+2^{-aJ}\big)^{\alpha+H-\varepsilon} + C_1\big(t-m_t 2^{-J}-2^{-aJ}\big)^{\alpha+H-\varepsilon} + (m_t-m_0)C_1 2^{-(\alpha+H-\varepsilon)J} \\
\le{}& 9C_1 2^{-a(\alpha+H-\varepsilon)J} + C_1 2^{-(\alpha+H-\varepsilon)J} + C_1 2^{-(\alpha+H-1-\varepsilon)J} \le 11C_1 2^{-a(\alpha+H-\varepsilon)J}. \qquad (105)
\end{aligned}$$

最后，令 $C' = 11C_1$ 并将 (103) 至 (105) 合并起来，即可得到 (100)。 ■

引理 8 的证明： 在整个证明过程中，$J \in \mathbb{N}$ 和 $t \in [0,1]$ 均为任意固定值。接下来，我们考察以下三种情况：第一种情况，集合 $\{m \in \mathcal{I}_J\colon\ m2^{-J}+2^{-aJ} \le t\}$为空；第二种情况，该集合仅包含 m_0；第三种情况，该集合包含 m_0 及其他元素。在第一种情况下，由 (99)、(96)、注 5 和 (92) 可得

$$\big|X_J(t)-\widetilde{X}_J(t)\big| = |h(0)|\big|\widetilde{S}_J^{(q,H)}(t)-Z(t)\big| \le \|h\|_{[0,1],\infty}\widetilde{C}J^{\frac{q}{2}}2^{-J(H-\frac{1}{2})}. \qquad (106)$$

在第二种情况下，由 (98)、(95)、三角不等式、(91)、(93) 和 (92) 可得

$$\begin{aligned}
\big|X_J(t)-\widetilde{X}_J(t)\big| &\le |h(0)|\big|\widetilde{S}_J^{(q,H)}\big(m_0 2^{-J}+2^{-aJ}\big)-Z\big(m_0 2^{-J}+2^{-aJ}\big)\big| \\
&\quad+\big|h\big(m_0 2^{-J}+2^{-aJ}\big)\big|\Big|\Big(\widetilde{S}_J^{(q,H)}(t)-\widetilde{S}_J^{(q,H)}\big(m_0 2^{-J}+2^{-aJ}\big)\Big)-\Big(Z(t)-Z\big(m_0 2^{-J}+2^{-aJ}\big)\Big)\Big| \\
&\le 2\|h\|_{[0,1],\infty}\big|\widetilde{S}_J^{(q,H)}\big(m_0 2^{-J}+2^{-aJ}\big)-Z\big(m_0 2^{-J}+2^{-aJ}\big)\big| + \|h\|_{[0,1],\infty}\big|\widetilde{S}_J^{(q,H)}(t)-Z(t)\big| \\
&\le 3\|h\|_{[0,1],\infty}\widetilde{C}J^{\frac{q}{2}}2^{-J(H-\frac{1}{2})}. \qquad (107)
\end{aligned}$$

在第三　在 d 情形下，由(98)、(95)、三角不等式、(91)、(93)和(92)可得　t

$$\begin{aligned}
\big|X_J(t)-\widetilde{X}_J(t)\big| &\le |h(0)|\big|\widetilde{S}_J^{(q,H)}\big(m_0 2^{-J}+2^{-aJ}\big)-Z\big(m_0 2^{-J}+2^{-aJ}\big)\big| \\
&\quad+\big|h\big(m_t 2^{-J}+2^{-aJ}\big)\big|\Big|\Big(\widetilde{S}_J^{(q,H)}(t)-\widetilde{S}_J^{(q,H)}\big(m_t 2^{-J}+2^{-aJ}\big)\Big)-\Big(Z(t)-Z\big(m_t 2^{-J}+2^{-aJ}\big)\Big)\Big| \\
&\quad+\Big|\sum_{k=m_0}^{m_t-1} h\big(k2^{-J}+2^{-aJ}\big)\big(\delta_{J,k+1}-\delta_{J,k}\big)\Big| \\
&\le 3\|h\|_{[0,1],\infty}\widetilde{C}J^{\frac{q}{2}}2^{-J(H-\frac{1}{2})} + \Big|\sum_{k=m_0}^{m_t-1} h\big(k2^{-J}+2^{-aJ}\big)\big(\delta_{J,k+1}-\delta_{J,k}\big)\Big|, \qquad (108)
\end{aligned}$$

其中

$$\delta_{J,k} = \widetilde{S}_J^{(q,H)}\big(k2^{-J} + 2^{-aJ}\big) - Z\big(k2^{-J} + 2^{-aJ}\big), \quad \text{for all } k \in \{m_0, \dots, m_t\}. \tag{109}$$

此外，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=m_0}^{m_t-1} h\big(k2^{-J} + 2^{-aJ}\big)\big(\delta_{J,k+1} - \delta_{J,k}\big) \\
&= \sum_{k=m_0+1}^{m_t} h\big((k-1)2^{-J} + 2^{-aJ}\big)\delta_{J,k} - \sum_{k=m_0}^{m_t-1} h\big(k2^{-J} + 2^{-aJ}\big)\delta_{J,k} \\
&= h\big((m_t-1)2^{-J} + 2^{-aJ}\big)\delta_{J,m_t} - h\big(m_0 2^{-J} + 2^{-aJ}\big)\delta_{J,m_0} \\
&\qquad - \sum_{k=m_0+1}^{m_t-1} \Big(h\big(k2^{-J} + 2^{-aJ}\big) - h\big((k-1)2^{-J} + 2^{-aJ}\big)\Big)\delta_{J,k}.
\end{aligned}$$

因此，由三角不等式、(109)、(92)、 h的 α-H¨older 连续性以及不等式$m_t < 2^J$ 可得

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{k=m_0}^{m_t-1} h\big(k2^{-J} + 2^{-aJ}\big)\big(\delta_{J,k+1} - \delta_{J,k}\big)\Big| \le 2\|h\|_{[0,1],\infty}\widetilde{C}J^{\frac{q}{2}}2^{-J(H-\frac{1}{2})} \qquad (110)\\
&+ \widetilde{C}J^{\frac{q}{2}}2^{-J(H-\frac{1}{2})}\sum_{k=m_0+1}^{m_t-1}\Big|h\big(k2^{-J} + 2^{-aJ}\big) - h\big((k-1)2^{-J} + 2^{-aJ}\big)\Big| \le C_1 2^{-J(\alpha+H-3/2-\varepsilon)},
\end{aligned}$$

其中， C_1 是一个正的有限随机变量，且不依赖于 J 和 t。最后，综合 (106)、(107)、(108) 和 (110)，即可得到 (101) ■

本文对阶数为 $q = 1$，2，3 的 Hermite 过程进行了实验。注意，在这些情况下，表达式 (89) 可化为更易处理的形式

$$\sigma_{J,\mathbf{k}}^{(q,H)} := \begin{cases} Z_{J,k}^{(\delta)} & \text{if } q = 1 \\ Z_{J,k_1}^{(\delta)} Z_{J,k_2}^{(\delta)} - \mathbb{E}[Z_{J,k_1}^{(\delta)} Z_{J,k_2}^{(\delta)}] & \text{if } q = 2 \\ Z_{J,k_1}^{(\delta)} Z_{J,k_2}^{(\delta)} Z_{J,k_3}^{(\delta)} - \mathbb{E}[Z_{J,k_1}^{(\delta)} Z_{J,k_2}^{(\delta)}] Z_{J,k_3}^{(\delta)} & \text{if } q = 3 \\ -\mathbb{E}[Z_{J,k_1}^{(\delta)} Z_{J,k_3}^{(\delta)}] Z_{J,k_2}^{(\delta)} - \mathbb{E}[Z_{J,k_2}^{(\delta)} Z_{J,k_3}^{(\delta)}] Z_{J,k_1}^{(\delta)} & \end{cases}$$

文献 [4]给出了这些过程的显式模拟算法。请注意，最后这篇论文和文献 [17] 还针对 Hermite 过程赫斯特参数的多种估计量进行了数值实验。具体而言，研究了基于文献 [5] 中定义的修正二次变差的估计量，以及基于文献 [17] 中定义的修正小波变差的估计量。这两种估计量均采用了与本文所探讨方法类似的方法构造。在赫斯特参数估计中，人们发现，分辨率越高，估计量的表现越好。因此，

我们在下文进行的数值实验采用尺度 $J = 18$，这是在近似质量与生成大量模拟样本所需的计算时间之间的良好折中。因此，为了避免使用需要考虑比单次模拟所生成数据更多数据的估计量，我们提议采用 $N = 17$。

实验展示了针对分数布朗运动（分数布朗运动）、Rosenblatt过程（RP）以及 3 阶 Hermite 过程（HP）所得的各种估计结果，这些过程均采用预先设定的赫斯特参数进行模拟：0.6、0.7、0.8 和 0.9。在每种情况下，我们使用 $a = 0.99$ 和 $\varepsilon = 10^{-3}$模拟了 100 条轨道。记号 m 和 s分别表示估计值的均值及其标准差。对于 $q > 1$ 阶埃尔米特分布， $p \neq 2$ 阶矩并未被明确知晓。因此，在下面的表格中，我们仅考虑 $p = 2$ 的情况。

首先，我们使用恒等函数 $h(s) = s$ 进行实验；对于该函数，式（68）中极限的期望值为$_{1\ 3}$。选择 $\gamma = 0.8$ 时得到的积分波动率估计结果列于表 1，而在表 2 中，我们使用 $\gamma = 0.95$。我们观察到，总体而言，当赫斯特指数 H 较大时，估计更加准确。这当然可以由公式（97）解释，因为该公式表明， H 越大，随机积分（65）由过程（95）进行的近似就越精确。我们还注意到，平均而言，使用 $\gamma = 0.8$ 和 $\gamma = 0.95$ 定义的估计量性能相近，但使用 $\gamma = 0.95$ 得到的估计值的标准差小于使用 $\gamma = 0.8$得到的估计值。这或许可以根据定义（66）加以解释。 γ 越大，该和式中的项就越多，因此估计量能够利用更多可用数据。基于这一原因，在其余实验中我们选择 $\gamma = 0.95$ 。

表3展示了在 $h(s) = s^3$情况下对积分波动率的估计，其中期望值为$\frac{1}{7} \approx 0.142$；表4则讨论期望值为 $\frac{e^2-1}{2} \approx 3.194$的 $h(s) = e^s$ 情况。我们再次看到，该估计量表现相当不错。（92）中得到的收敛速率无疑解释了为什么 q 较小时，估计表现似乎更好。

命题 5指出，只要 $\alpha + H > 3/2$，随机过程序列（$\{X_J（t）\}_{t\in[0,1]}$）$_J$ 几乎必然一致收敛于由（65）定义的过程 $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ 。这验证了只要 $\alpha + H > 3/2$，便可使用过程 $\{X_J（t）\}_{t\in[0,1]}$ 模拟数据的方法。为了考察这一假设的严格程度，我们估计了 $h（x）= \sqrt{x}$情况下的积分波动率。表5中的估计准确度似乎表明，即使假设 $\alpha+H > 3/2$ 不成立，我们的模拟方法仍然有效。要对此作出正式证明，还需要对命题 5中的收敛性进行更深入的分析。另一个值得探究的研究方向是，能否针对形式如（65）的随机积分开发其他相关的模拟程序。一种有前景的方法是将 [3] 中得到的小波型展开拓展到这一情境，并按照与 [4]相同的思路加以利用。

		0.6	0.7	0.8	0.9
1	m	0.295	0.291	0.298	0.307
	s	0.024	0.025	0.024	0.023
2	m	0.374	0.370	0.331	0.344
	s	0.065	0.075	0.071	0.070
3	m	0.392	0.388	0.347	0.343
	s	0.159	0.212	0.161	0.053

表 1: h（s）$= s$ 的积分波动率估计，其中 $J = 18$、 $N = 17$ 和 $\gamma = 0$ .8

		0.6	0.7	0.8	0.9
1	m	0.291	0.290	0.296	0.306
	s	0.003	0.003	0.005	0.013
2	m	0.386	0.364	0.345	0.351
	s	0.017	0.018	0.026	0.034
3	m	0.412	0.383	0.350	0.346
	s	0.049	0.051	0.046	0.026

表2: 使用 $J = 18$、 $N = 17$ 和 $\gamma = 0.95$ 对 $h(s) = s$ 进行积分波动率估计

		0.6	0.7	0.8	0.9
1	m	0.125	0.124	0.127	0.131
	s	0.002	0.002	0.003	0.008
2	m	0.166	0.155	0.147	0.147
	s	0.011	0.012	0.019	0.021
3	m	0.174	0.164	0.148	0.147
	s	0.032	0.033	0.031	0.017

表3: 使用 $J = 18$、 $N = 17$ 和 $\gamma = 0.95$ 对 $h(s) = s^3$ 进行积分波动率估计

		0.6	0.7	0.8	0.9
1	m	2.983	2.803	2.926	3.268
	s	0.032	0.027	0.038	0.093
2	m	3.696	3.501	3.323	3.397
	s	0.135	0.140	0.172	0.242
3	m	3.974	3.682	3.394	3.335
	s	0.355	0.346	0.317	0.173

表4: 使用 $J = 18$、 $N = 17$ 和 $\gamma = 0.95$ 对 $h(s) = \exp(s)$ 进行积分波动率估计

		0.6	0.7	0.8	0.9
1	m	0.437	0.436	0.472	0.459
	s	0.005	0.004	0.006	0.015
2	m	0.578	0.547	0.519	0.531
	s	0.020	0.023	0.027	0.040
3	m	0.622	0.575	0.530	0.521
	s	0.057	0.058	0.052	0.029

表5：I　　$h(s) = \sqrt{s}$ 的积分波动率估计，其中 $J = 18$、 $N = 17$ 和 $\gamma = 0.95$

致谢

A. Ayache 感谢 CDP C2EMPI、法国政府在 France-2030 计划下、里尔大学、里尔大学卓越计划以及里尔欧洲都会区通过资助和支持 R-CDP-24-004-C2EMPI 项目所提供的部分支持。此外，他还获得了澳大利亚研究理事会探索项目资助计划的部分支持（项目编号 DP220101680）。

L. Loosveldt 感谢 FRNS研究信贷资助 J.0136.26“NOISE”提供的支持。

C. Tudor 感谢 ANR项目SDAIM 22-CE40-0015、MATHAMSUD资助 24-MATH-04 SDE-EXPLORE，以及罗马尼亚研究、创新与数字化部提供的支持，资助编号为 CF-194-PNRR-III-C9-2023。

6 附录：多重随机积分与 Malliavin 导数

本节将介绍 Wiener 空间分析中的基本工具。我们将重点讨论多重随机积分的一些基本事实。关于该主题的完整综述，请参见 [22] 或 [20]。

设 $\mathcal{H}$ 为一个实可分无限维 Hilbert 空间，其相应的内积为 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{H}}$，且 $(B(\varphi)\ \varphi\in\mathcal{H})$ 是概率空间 $(\Omega\ \mathfrak{F},\ \mathbb{P})$ 上的等正态高斯过程，它是一个由随机变量构成的中心高斯族，满足$\mathbf{E}\left(B(\varphi)B(\psi)\right)\ =\langle\varphi,\ \psi\rangle_{\mathcal{H}}$对任意 $\varphi,\ \psi\in\mathcal{H}$均成立。记 $I_q(q\geq 1)$ 为关于 B 的第 q 阶多重随机积分。它是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}^{\odot q}$（对称张量积）与 Wiener 混沌之间的等距映射；前者配备缩放范数 $\sqrt{q!}\,\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{\otimes q}}$，后者为第 q 阶 Wiener 混沌，其定义为随机变量 $H_q(B(\varphi))$ 的闭线性张成，其中$\varphi\in\mathcal{H},\ \ \|\varphi\|_{\mathcal{H}}=1$，而 H_q 是由下式定义的 $q\geq 1$ 次 Hermite多项式：

$$H_q(x)=\frac{(-1)^q}{q!}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right),\ x\in\mathbb{R}. \tag{111}$$

对于 $q=0$,

$$\mathcal{H}_0=\mathbb{R}\text{ and }I_0(x)=x\text{ for every }x\in\mathbb{R}. \tag{112}$$

多重积分的等距性质可写为：对于 $p,\ \ q\geq 0$、 $f\in\mathcal{H}^{\otimes p}$ 和 $g\in\mathcal{H}^{\otimes q}$

$$\mathbf{E}\Big(I_p(f)I_q(g)\Big)=\begin{cases}q!\langle\tilde{f},\tilde{g}\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes q}} & \text{if } p=q,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{113}$$

其中， $\tilde{f}$表示 f的对称化。当 $\mathcal{H}=L^2(T)$，且 T是$\mathbb{R}$的一个区间时，我们有如下乘积公式：对于 $p,\ \ q\geq 0$、 $f\in\mathcal{H}^{\odot p}$ 和 $g\in\mathcal{H}^{\odot q}$,

$$I_p(f)I_q(g) \;=\; \sum_{r=0}^{p\wedge q} r!\binom{q}{r}\binom{p}{r} I_{p+q-2r}\left(f\otimes_r g\right), \tag{114}$$

其中，对于 $r=0$，……，$p\wedge q$，收缩 $f\otimes_r g$是 $L^2(T^{p+q-2r})$中的函数，定义为

$$(f\otimes_r g)(t_1,...,t_{p+q-2r}) = \int_{T^r} f(u_1,...,u_r,t_1,...,t_{p-r})g(u_1,...,u_r,t_{p-r+1},...,t_{p+q-2r})du_1...du_r. \tag{115}$$

多重随机积分的有限和具有一个有用的性质，即超收缩性。也就是说，对于任意固定实数 $p\geq 2$，存在一个通用的有限确定常数 C_p，使得对于任何形式为 $F=\sum_{k=0}^{n} I_k(f_k)$ 的随机变量 F，其中 $f_k\in\mathcal{H}^{\otimes k}$，以下不等式成立：

$$\mathbf{E}|F|^p \leq C_p\left(\mathbf{E}F^2\right)^{\frac{p}{2}}. \tag{116}$$

我们将 D 记作 Malliavin 导数算子，它按以下方式作用于形式为 $F=g(B(\varphi_1)\ldots,B(\varphi_n))$ 的柱状随机变量，其中 $n\geq 1$，$g\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是一个具有紧支集的光滑函数，且 $\varphi_i\in\mathcal{H}$：

$$DF=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}(B(\varphi_1),\ldots,B(\varphi_n))\varphi_i.$$

算子 D 是可闭的，并且可以扩展到 $\mathbb{D}^{1,2}$；后者表示柱状随机变量集合关于范数$\|\cdot\|_{1,2}$ 的闭包，该范数定义为

$$\|F\|_{1,2}^2 := \mathbf{E}|F|^2+\mathbf{E}\|DF\|_{\mathcal{H}}^2.$$

若 $F=I_p(f)$，其中 $f\in\mathcal{H}^{\odot p}$ 满足 $\mathcal{H}=L^2(T)$，且 $p\geq 1$，则

$$D_*F = pI_{p-1}\left(f(\cdot,*)\right),$$

其中“$\cdot$”表示 $p-1$ 变量。

Ornstein-Uhlenbeck 算子的伪逆（$-L$）$^{-1}$ 定义如下：对于$F=I_p$（f），其中 $f\in\mathcal{H}^{\odot p}$ 且 $p\geq 1$，有

$$(-L)^{-1}F=\frac{1}{p}I_p(f).$$

最后请注意，在我们的工作中，我们有 $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$，而等距正态过程（$B(\varphi)$ $\varphi\in\mathcal{H}$）的作用则由与布朗运动（$B(y)$ $y\in\mathbb{R}$）相关的 $L^2(\mathbb{R})$ 上通常的维纳积分承担。

参考文献

[1] P. Abry 和 V. Pipiras（2006）：*Rosenblatt*过程的小波分析。《信号处理》86, 2326-2339.. 130（8），4593–4607。[2] A. Ayache（2020）：*Hermite* 过程局部振荡的下界。Stochastic Process. Appl. 130（8），4593–4607。[3] A. Ayache、J. Hamonier 和 L. Loosveldt（2025）：广义*Hermite*过程的小波型展开及其收敛速率。《构造逼近》61（3），535-601。[4] A. Ayache、J. Hamonier 和 L. Loosveldt（2025）：广义*Hermite*过程的数值模拟。已投稿。[5] A. Ayache 和 C. A. Tudor（2024）：*Hermite* 过程修正二次变差的渐近正态性。Bernoulli 30（2），1154–1176。[6] J.-M. Bardet 和 C.A. Tudor（2010）：*Rosenblatt*过程的小波分析：混沌展开与自相似参数估计。《随机过程及其应用》120（12），2331–2362。[7] O. Barndorff-Nielsen、J.M. Corcuera 和 M. Podolskij（2009）：具有平稳增量的高斯过程的幂变差。Stochastic Process. Appl. 119，1845-1865。[8] O. Barndorff-Nielsen、S. Graversen、J. Jacod、M. Podolskij 和 N. Shephard（2006）：连续半鞅实现幂变差和双幂变差的中心极限定理。载于《从随机微积分到数理金融：Shiryaev纪念文集》，33–68。Springer，柏林。4[9] O. Barndorff-Nielsen、N. Shephard（2002）：实现波动率的计量经济分析及其在随机波动率模型估计中的应用。《皇家统计学会杂志B辑》64，253–280。[10] S. Bourguin、Ch-Ph. Diez 和 C.A. Tudor（2021）：含混沌元素的大型相关*Wishart*矩阵的极限行为。Bernoulli 27（2），1077-1102。[11] A. Chronopoulou、C.A. Tudor 和 F. Viens（2011）：非高斯*Hermite*过程的自相似参数估计与再生性质。《随机分析通讯》5（1），161-185。[12] M. Clausel、F. Roueff、M. S. Taqqu 和 C. A. Tudor（2014）：高斯过程*Hermite*多项式的长记忆参数小波估计。《ESAIM概率与统计》18：42–76。[13] J. M. Corcuera、D. Nualart 和 J. Woerner（2006）：某些积分分数过程的幂变差。Bernoulli 12（4），713-735。

[14] Davies, R. B. 和 Harte, D. S. (1987)：赫斯特效应检验。Biometrika 74, 95-101。[15] J. Jacod (2019)：高频环境下的波动率估计：简要综述。Decis. Econ. Finance 42 (2019), no. 2, 351–385。[16] P.G. Lemari´e-Rieusset 和 Y. Meyer (1986)：小波与希尔伯特基。 Revista Matem´atica Iberoamericana 2, 1-18。[17] L. Loosveldt 和 C. A. Tudor (2025)：*Hermite* 过程的修正小波变差。 Electron. J. Stat. 19 (1), 2411-2455。[18] T. J. Lyons、M. Caruana 和 T. L´evy。粗糙路径驱动的微分方程，数学讲义第 1908 卷。Springer。编者：J. Picard (2007)。[19] Y. Meyer、F. Sellan 和 M.S. Taqqu (1999)：小波、广义白噪声与分数阶积分：分数布朗运动的综合构造 J. Fourier Anal. Appl 5 (5), 465-494。[20] I. Nourdin 和 G. Peccati (2012)：基于 Malliavin 演算的正态近似：从 Stein 方法到普适性。剑桥大学出版社。[21] I. Nourdin 和 T. T. Diu Tran (2019)：*Hermite* 过程驱动的 *Vasicek* 型模型的统计推断。 Stochastic Process. Appl. 129 (10), 3774-3791。[22] D. Nualart (2006)：Malliavin 演算及相关主题。第二版。Springer。[23] V. Pipiras (2004)：*Rosenblatt*过程的小波型展开 Journal of Fourier Analysis and Applications 10 , 599-634。[24] V. Pipiras (2005)：分数布朗运动的基于小波的模拟再探。Applied and Computational Harmonic Analysis 19, 49-60., 247-262。[25] G. Peccati 和 C. A. Tudor (2004)：向量值多重随机积分的高斯极限。*S´*概率研讨班´ **XXXIV**，247-262。[26] V. Pipiras 和 M. Taqqu (2017)：长程依赖与自相似性。剑桥统计与概率数学丛书。剑桥大学出版社。[27] M. Podolskij 和 M. Vetter (2009)：微观结构噪声与跳跃同时存在时的波动率泛函估计。 Bernoulli 15(3), 2009, 634–658。[28]T. T. Diu Tran (2018)：*Hermite* 过程驱动的长记忆移动平均过程的二次泛函非中心极限定理。 Stoch. Dyn. 18 (4), 1850028, 18 pp。[29]C. A. Tudor (2023)：非高斯自相似随机过程。SpringerBriefs Probab. Math. Stat. Springer，查姆。

[30] C.A.Tudor 和 F. Viens (2008)：通过 *Malliavin* 演算得到的变差与估计量。Ann. Probab. 37 (6), 2093-2134。[31] A. S. Ustunel 和 M. Zakai (1989)：关于 *Wiener* 空间上的独立性与条件化。 Ann. Probab., 4, 1441-1453。[32] Wood, A.T.A. 和 Chan, G. (1994)：平稳高斯过程的模拟$[0,1]^d$。 Journal of Computational and Graphical Statistics, 3, 409-432。[33] L.C. Young (1936)：一种 *H¨older* 型不等式，与 *Stieltjes* 积分有关。Acta Math., 67 (1), 251–282。