arXiv:2601.02034v1 [math.NT] 5 Jan 2026

GL(r, $\mathbf{F}_q[T]$) 的模形式：基本形式的 t-展开

ERNST-ULRICH GEKELER¨萨尔兰
大学 gekeler@math.uni-sb.de

Abstract. 我们给出了 GL(r, $\mathbf{F}_q[T]$) 的基本模形式前几个展开系数的封闭公式。这里秩 r 大于或等于 3，所讨论的形式包括系数形式 $g_1, \dots, g_r$ 以及艾森斯坦级数 E_{q^i-1} ($i \in \mathbf{N}$)。

0. 引言 Introduction

近年来，Drinfeld 模形式已在 $\Gamma := \mathrm{GL}(r, \mathbf{F}_q[T])$ 等群上得到引入，并在 [4] 以及作者从 [12], [13], [14], 开始的一系列论文中作了更深入的研究；另见 [17]。正如秩 $r = 2$ 的情形一样，已有大量相关文献，人们希望获得一些实例和数值数据，以便开展更深入的算术研究。关于这一情形，可参见 Bosser [5], 、Choi [6], [7], 、Lopez [18], 、Vincent [21], 、Armana [1] 的研究，以及较近的 Bandini-Valentino [2] 和 Dalal-Kumar [8] 的研究。本文旨在提供一些关于 Γ 最基本模形式的 t-展开的信息，即艾森斯坦级数 E_{q^k-1} 和系数形式 g_k，二者的权均为 $q^k - 1$，类型均为 0。

每个 Γ的模形式都有一个 t-展开

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{n \geq 0} a_n(\boldsymbol{\omega}') t^n(\boldsymbol{\omega}),$$

其中 $a_n(\boldsymbol{\omega}')$ 是秩为 $r' := r - 1$ 的弱模形式，而 $\boldsymbol{\omega}' = (\omega_2, \dots, \omega_r)$ 是 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ 的尾项；后者是 Drinfeld空间 Ω^r 中的一个点。我们能够给出 a_n 的闭合公式，当

(a) $f = E_{q^k-1}$ and $n < 3(q-1)q^{k+r-2}$, see Theorem 2.8;

(b) $f = g_k$ and $n < 3(q-1)q^{r-1}$ (Theorem 3.1);

而在不太令人满意的情况下，当

(c) $f = h$、判别式形式 $\Delta = g_r$ 的 $(q-1)$ 次方根，以及 $n \leq (q-1)(q^{2r-1} - q^r)$（定理 4.5）。

Date: 2026年1月6日。2020 *Mathematics Subject Classification.* MSC主分类11F52；次分类11G09。*Key words and phrases.*Drinfeld 模形式、艾森斯坦级数、系数形式、 t-展开。

对于 (a) 和 (b)，我们必须假设 $q > 2$；否则（与 $q > 2$ 相反，如 $\sum_{c\in\mathbb{F}_q} c \neq 0$ 对于 $q = 2$ 的情形）就会出现一些令人烦恼的额外项，从而导致较弱的误差估计。

在情形 (a) 中，在给定界限以下恰有 $k+1$ 个非零系数 a_n，满足 $n = q^k - q^i$ ($0 \leq i \leq k$)；在情形 (b) 中，在该界限以下恰有 $2k$ 个（若 $k < r$）或 $2r-1$ 个（若 $k = r$）非零 a_n，且均满足 $n \leq q^k - 1$；在情形 (c) 中，我们没有类似的描述。

对于 (a)，我们从已知的 A-展开式入手，其中涉及

$$\sum_{a\in A \text{ monic}} G_{q^k-1}(t_a)$$

定理 1.11 的内容。由于量 t_a 和 Goss 多项式 G_{q^k-1} 的结构，部分和中会发生严重的抵消

$$\sum_{a \text{ monic of degree } d} G_{q^k-1}(t_a),$$

由此可得强估计，进而得到定理 2.8。对于 (b)，我们可以尝试利用 (a) 以及 E_{q^i-1} 与 g_j之间众所周知的关系 (1.4.6)。然而，这样做结果会变得极其复杂。相反，我们利用秩为 r 的一般 Drinfeld 模 $\phi = \phi^{\boldsymbol{\omega}}$ 的表示（其中 $\boldsymbol{\omega}$ 在 Drinfeld 对称空间 Ω^r中变化），将其视为 $\phi' = \phi^{\boldsymbol{\omega}'}$上的 Tate 对象； $\phi' = \phi^{\boldsymbol{\omega}'}$是其秩为 $r' = r-1$ 的对应对象。由此得到针对 g_k的效率更高的递推公式 (3.3.6)，它更适合我们的问题。结合命题 3.4（针对 Tate 对象的一项技术性估计），便可证明非零系数的公式 (3.1.1)，即定理 3.1。

对于 (c)，情况则有所不同，即权为 $(q^r-1)/(q-1)$、类型为 1 的模形式 h。与艾森斯坦级数 E_{q^k-1} 和系数形式g_k （它们的 t-展开较为稀疏）不同，但与秩 2 的情形（见 [11]）一致， h 有“许多”非零系数。我们只估计乘积公式中次数为 ≥ 2 的首一 $a \in A$ 所作的贡献

$$h = (h')^q t \prod_{a\in A \text{ monic}} S_a(t)^{q^r-1}.$$

由此得到定理 4.5 中的误差估计，其中我们将上述乘积替换为

$$(h')^q t \prod_{a \text{ monic of degree } 1} S_a(t)^{-1}.$$

因此，我们的结果有两个方面：确定展开式的前几项，以及估计误差，也就是后续连续消失的系数串的长度。对于 (a) 和 (c)，第一项任务很容易，因为我们已经有了展开式 (1.11.1) 和 (1.12.2)，只需推导误差估计；而对于 (b)，情况则不同。定理 3.1 给出的起始系数串的闭式并非显而易见，只有在计算了若干例子后才能猜出。因此，定理 3.1 应被视为本文的主要结果。

我们始终假设秩 r 大于或等于 3，这并非严格限制。在秩为 2 的情形下，已有大量文献给出了部分远为

精确的结果，超出了本文方法所能得到的范围。同样，在秩 2 的情形下，通常会对局部参数 t 作算术归一化，其中会用到 Carlitz 模的周期 π （对应于经典的 $2\pi\imath$）。在本文的高秩情形下，也可以采用这种归一化（见 [20]），但这样做会使我们的讨论偏离主题太远，并掩盖整体图景。因此，我们决定采用（如 [4] 或 [14]中那样）t的自然几何归一化 (1.5.1)。

1. Modular forms and their expansions

（例如参见 [12], [14], [10]。）

1.1. 全文中，$\mathrm{F} = \mathrm{F}_q$ 表示含有 q 个元素、特征为 p的有限域，而 $r \geq 3$ 是自然数，即**秩**。q 和 r 均为固定值，通常在记号中省略。

$A = \mathrm{F}[T]$（分别为 $K = \mathrm{F}(T)$）是不定元 T 上的多项式环（分别为有理函数域）。此外，$K_\infty = \mathrm{F}((T^{-1}))$ 是 K在其无穷处的完备化，其完备代数闭包为 C_∞。C_∞ 上的绝对值 $|.|$归一化为满足 $|T| = q$。

$$\Omega = \Omega^r = \mathbb{P}^{r-1}(C_\infty) \smallsetminus \bigcup H(C_\infty)$$

（其中 H 遍历定义在 K_∞上的超平面）连同其刚性解析空间结构称为 Drinfeld 对称空间。齐次坐标（$\omega_1 : \omega_2 : \ldots : \omega_r$）归一化为满足 $\omega_r = 1$，因此

$$\Omega = \{\boldsymbol{\omega} \in C_\infty^r \mid \omega_1, \ldots, \omega_r \ K_\infty\text{-linearly independent and } \omega_r = 1\}.$$

1.2. 群 $\Gamma := \mathrm{GL}(r, A)$ 通过分式线性变换作用于 Ω 上

$$\gamma\boldsymbol{\omega} = \mathrm{aut}(\gamma, \boldsymbol{\omega})^{-1}\gamma \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_r \end{pmatrix}, \tag{1.2.1}$$

其中右端是矩阵乘积，并且

$$\mathrm{aut}(\gamma, \boldsymbol{\omega}) := \sum_{1 \leq i \leq r} \gamma_{r,i}\omega_i. \tag{1.2.2}$$

Ω 上的全纯函数 f 称为权为 **weight** $k \in \mathbb{Z}$、类型为 **type** $m \in \mathbb{Z}/(q-1)$ 的**弱模形式**（或**弱模**），如果

$$f(\gamma\boldsymbol{\omega}) = \mathrm{aut}(\gamma, \boldsymbol{\omega})^k (\det\gamma)^{-m} f(\boldsymbol{\omega}) \tag{1.2.3}$$

对 $\gamma \in \Gamma$ 和 $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$ 成立。

1.3. A中的一个 C_∞ 格是一个有限生成的（因此是某个秩为 ρ 的自由） A子模 Λ，它是离散的，即 Λ与每个球的交集至多包含有限多个点。因此，$\Lambda = \bigoplus_{1 \leq i \leq \rho} A\omega_i$ 具有 ρ K_∞线性无关的元素 ω_i。对于每个格 Λ，我们关联

- 其**指数函数**

$$e^\Lambda(z) = z\prod_{\lambda\in\Lambda}{}'(1 - z/\lambda)$$

（撇号乘积 $\prod'$（相应地，求和 $\sum'$）取遍指标集中的非零元素）。它处处收敛，并有幂级数展开

$$e^\Lambda(z) = \sum_{i\geq 0}\alpha_i(\Lambda)z^{q^i}; \tag{1.3.1}$$

- 该**艾森斯坦级数**

$$E_k(\Lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda}{}'\lambda^{-k}$$

（$k > 0$ 和 $k \equiv 0$（模 $q-1$））；否则它为零）；

- 该 **Drinfeld 模** $\phi^\Lambda = C_\infty/\Lambda$ 的秩为 ρ。

后者是一种特殊的 A-模结构，由 a 次算子多项式ϕ_a^Λ 对每个 $0 \neq a \in A$ 给出，使得下图中的正合行构成交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda & \longrightarrow & C_\infty & \xrightarrow{e^\Lambda} & C_\infty & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow a & & \downarrow \phi_a^\Lambda & & \\ 0 & \longrightarrow & \Lambda & \longrightarrow & C_\infty & \xrightarrow{e^\Lambda} & C_\infty & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{1.3.2}$$

ϕ^Λ 已由具有以下形式的 ϕ_T^Λ 唯一确定

$$\phi_T^\Lambda(X) = TX + g_1(\Lambda)X^q + \cdots + g_\rho(\Lambda)X^{q^\rho}. \tag{1.3.3}$$

对 ϕ_T^Λ 的唯一限制是其**判别式**

$$\Delta(\phi^\Lambda) := \Delta(\Lambda) := g_\rho(\Lambda)$$

非零。

1.4. 令 $C_\infty\{\{\tau\}\}$ 为非交换变量 τ 上的形式幂级数环，其交换规则为

$$\tau c = c^q\tau \qquad \text{for } c \in C_\infty, \tag{1.4.1}$$

其多项式子环为 $C_\infty\{\tau\}$。那么 $C_\infty\{\{\tau\}\}$ 可通过 $\tau^n \rightsquigarrow z^{q^n}$ 与形如 $\sum c_n z^{q^n}$ 的 F-线性幂级数环相对应，其中后者的乘积由插入给出。映射

$$\phi^\Lambda\colon a \longmapsto \phi_a^\Lambda \tag{1.4.2}$$

是从 A 到 $C_\infty\{\tau\}$ 的 F-代数同态，因此我们可以写成

$$e^\Lambda(z) = \sum\alpha_i z^{q^i} = \sum\alpha_i\tau^i, \qquad \text{where } \alpha_i = \alpha_i(\Lambda). \tag{1.4.3}$$

定义级数 $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ 为 $\beta_i = -E_{q^i-1}(\Lambda)$（其中 $E_0(\Lambda) = -1$，因此 $\beta_0 = 1$），并将 $\log^\Lambda \in C_\infty\{\{\tau\}\}$ 定义为

$$\log^\Lambda = \sum\beta_i\tau^i. \tag{1.4.4}$$

Then

$$e^{\Lambda}\cdot\log^{\Lambda}=\log^{\Lambda}\cdot e^{\Lambda}=1 \quad \text{in} \quad C_\infty\{\{\tau\}\}, \tag{1.4.5}$$

也就是说，这两个级数互为逆。方程

$$\phi_T^{\Lambda}\cdot e^{\Lambda}=e^{\Lambda}\cdot T$$

由 (1.3.2) 得

$$\log^{\Lambda}\cdot\phi_T^{\Lambda}=T\cdot\log^{\Lambda}. \tag{1.4.6}$$

比较 (1.4.5) 中的系数，得到

$$\sum_{i+j=k}\alpha_i\beta_j^{q^i}=\sum_{i+j=k}\beta_i\alpha_j^{q^i}=\begin{cases}1, & \text{if } k=0,\\ 0, & \text{if } k>0.\end{cases} \tag{1.4.7}$$

类似地，由 (1.4.6) 得，

$$\sum_{i+j=k}\beta_i g_j^{q^i}=T\beta_k \qquad (k\geq 0), \tag{1.4.8}$$

其中 $g_0=T$，所有 α_i、β_j、g_k 都依赖于 Λ。这些公式可以递归地从三个级数 (α_i)、(β_j)、(g_k) 中的任意一个计算出另外两个。例如，

$$g_k=-\sum_{1\leq j<k}\beta_{k-j}g_j^{q^{k-j}}-[k]\beta_k=\sum_{1\leq j<k}E_{q^{k-j}-1}q_j^{q^{k-j}}+[k]E_{q^k-1}, \tag{1.4.9}$$

其中 $[k]$ 是 $T^{q^k}-T\in A$ 和 $E_\ell=E_\ell(\Lambda)$ 的简写。

1.5. 对于 $\boldsymbol{\omega}\in\Omega$，令 $\Lambda_{\boldsymbol{\omega}}$ 为格 $\sum_{1\leq i\leq r}A\omega_i$。我们进一步令 $\boldsymbol{\omega}'=(\omega_2,\ \ldots\ldots,\ \omega_r)\in\Omega'=\Omega^{r-1}$，并且 $\Lambda'=\Lambda_{\boldsymbol{\omega}'}=\sum_{2\leq i\leq r}A\omega_i$。考虑 Ω 上的函数:

$$t(\boldsymbol{\omega})=(e^{\Lambda'}(\omega_1))^{-1}. \tag{1.5.1}$$

它在 Ω 上定义良好、全纯且处处不为零，并满足

$$t(\widetilde{\boldsymbol{\omega}})=t(\boldsymbol{\omega}) \quad \text{if} \quad \widetilde{\boldsymbol{\omega}}=(\omega_1+\lambda',\omega_2,\ldots,\omega_r) \quad \text{for} \quad \lambda'\in\Lambda'. \tag{1.5.2}$$

若 f 是弱模形式，则 (1.2.3) 表明 f 满足相同的规则 $f(\widetilde{\boldsymbol{\omega}})=f(\boldsymbol{\omega})$，此外，$f$ 还有一个洛朗展开

$$f(\boldsymbol{\omega})=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(\boldsymbol{\omega}')t^n(\boldsymbol{\omega}) \tag{1.5.3}$$

当 t 的值充分小时，其中系数 a_n 仅取决于 $\boldsymbol{\omega}'$。

1.5.4. 现在，若系数 $a_n(\boldsymbol{\omega}')$ 对于 $n<0$ 恒为零，则称 f 为**模**；若甚至 $a_n(\boldsymbol{\omega}')\equiv 0$ 对于 $n\geq 0$，则称其为**尖点形式**。

注 1.6： (i) 假设 f 的权为 k，类型为 m。那么系数函数 a_n 实际上是权为 $k-n$、类型为 m的弱模函数，参见例如 [4]。

(ii) 若 $a_n\neq 0$，则 $n\equiv k+m$ （模 $q-1$）。

(iii) 弱模形式 f 满足边界条件“$a_n\equiv 0$ if $n<0$”而实际上是模形式，当且仅当“f 在 Γ的典范基本域$\mathbf{F}$ 上有界”，参见 [14], ，但我们不会用到这一事实。

1.7. 将格 $\Lambda_{\boldsymbol{\omega}}$ 与 $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$联系起来后，我们将把 $\alpha_i = \alpha_i(\Lambda_{\boldsymbol{\omega}}) = \alpha_i(\boldsymbol{\omega})$以及同样的 β_i、 g_i、 E_k 视为Ω上的函数。那么 α_i、 β_i、 g_i 实际上是权为 $q^i - 1$的模形式，而 E_k 是权为 k的模形式，它们的类型均为零。

定义 $M_{k,\ m}$ 为权为 k 、类型为 m的模形式的 C_∞-向量空间，并且

$$\mathbf{M} := \bigoplus_{\substack{k\in\mathbb{N}_0 \\ m\in\mathbb{Z}/(q-1)}} M_{k,m} \tag{1.7.1}$$

定义为模形式的分次双代数 C_∞，其子代数为

$$\mathbf{M}_0 := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0} M_{k,0} \tag{1.7.2}$$

由类型为 0 的形式组成。于是:

定理 1.8 ([12], [4])**:**

(i) $\mathbf{M}_0$ 是代数独立形式 g_1，...， g_r 上的多项式环 $C_\infty[g_1, \dots, g_r]$；(ii) $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0[h]$，其中 $h \in M_{(q^r-1)/(q-1),1}$ 是判别式 $\Delta = g_r$ 的 $(q-1)$ 次方根。

注记 1.9： (i) 各个 $M_{k,m}$ 作为 Ω 上的函数是线性独立的；因此它们的和实际上是直和。

(ii) 我们选择 h 的归一化，使得 $h^{q-1} = (-1)^{r-1}\Delta$。这使得公式 (1.12.2) 可用于 h。

(iii) 根据 (1.4.8) 和 (1.4.9) 的结果，我们也可以写成

$$\mathbf{M}_0 = C_\infty[\alpha_1, \dots, \alpha_r] = C_\infty[\beta_1, \dots, \beta_r] = C_\infty[E_{q-1}, \dots, E_{q^r-1}].$$

1.10. 给定 $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$，我们令 $\phi^{\boldsymbol{\omega}}$ 为与格 $\Lambda_{\boldsymbol{\omega}}$ 相关联的秩为 r 的 Drinfeld A-模，即 $\phi^{\boldsymbol{\omega}} = \phi^{\Lambda_{\boldsymbol{\omega}}}$。类似地，按照 1.5 中的写法，$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \boldsymbol{\omega}')$ 是秩为 $r' = r - 1$ 的 $\phi^{\boldsymbol{\omega}'} = \phi^{\Lambda_{\boldsymbol{\omega}'}}$。一般而言，对于与 $\phi^{\boldsymbol{\omega}'}$ 相关的对象，例如类型为 α_i、 β_i、 g_i、... 的函数，我们在其上加撇号 α_i'、 β_i'、 g_i'、...，以便与和 $\phi^{\boldsymbol{\omega}}$ 相关的“相同”对象区分开来。

对于次数为 d 、首项系数为 $\mathrm{sgn}(a) \in \mathbf{F}^*$ 的 $0 \neq a \in A$，其算子多项式 $\phi_a^{\boldsymbol{\omega}'}(X)$（见 (1.3.3)）具有如下形式

$$\phi_a^{\boldsymbol{\omega}'}(X) = aX + {}_a\ell_1'(\boldsymbol{\omega}')X^q + {}_a\ell_2'(\boldsymbol{\omega}')X^{q^2} + \cdots + {}_a\ell_{(r-1)d}'(\boldsymbol{\omega}')X^{q^{(r-1)d}}, \tag{1.10.1}$$

其末项系数为

$${}_a\ell_{(r-1)d}'(\boldsymbol{\omega}') = \mathrm{sgn}(a)\Delta'(\boldsymbol{\omega}')^e =: \Delta_a'(\boldsymbol{\omega}') \neq 0, \tag{1.10.2}$$

其中指数 e 为 $(q^{(r-1)d} - 1)/(q^{r-1} - 1)$。定义

$$\begin{aligned} S_a(X) &:= \Delta_a'(\boldsymbol{\omega}')^{-1} X^{q^{(r-1)d}} \phi_a^{\boldsymbol{\omega}'}(X^{-1}) \\ &= 1 + \frac{{}_a\ell_{(r-1)d-1}'}{\Delta_a'} X^{q^{(r-1)d} - q^{(r-1)d-1}} + \cdots + \frac{a}{\Delta_a'} X^{q^{(r-1)d}-1}. \end{aligned} \tag{1.10.3}$$

（我们省略对 $\boldsymbol{\omega}'$ 的引用，指 $S_a(X)$ 及其系数 ${}_a{}^{\ell'_i}_{\Delta'_a}$。）令 $\mathcal{O}' = \mathcal{O}(\Omega')$ 为 $\Omega' = \Omega^{r-1}$ 上的全纯函数环。当 $\phi' = \phi^{\boldsymbol{\omega}'}$ 在 Ω' 上遍历且 $\boldsymbol{\omega}'$ 时，$S_a(X) \in \mathcal{O}'[X]$ 是一个系数取自 $\mathcal{O}'$ 的多项式。若 $a \in \mathrm{F}^*$，则$S_a(X) = 1$；若 $a = T + c$ 满足 $c \in \mathrm{F}$，则

$$S_a(X) = 1 + \frac{g'_{r-1}}{\Delta'} X^{q^{r-1}-q^{r-2}} + \cdots + \frac{g'_1}{\Delta'} X^{q^{r-1}-q} + \frac{T+c}{\Delta'} X^{q^{r-1}-1}. \tag{1.10.4}$$

沿用前文的记号，令 t_a 为函数

$$t_a(\boldsymbol{\omega}) = t(a\omega_1, \boldsymbol{\omega}') = (\Delta'_a)^{-1} t^{q^{(r-1)d}} / S_a(t), \tag{1.10.5}$$

其中，右端视为一个以 t 为变量、系数属于 $\mathcal{O}'$ 的幂级数。

借助 S_a 和 t_a，我们可以描述一些模形式的 t-展开，如下所示。

定理 1.11 ([10], [16])**：** 特殊艾森斯坦级数 E_{q^k-1} 的 t-展开为

$$E_{q^k-1}(\boldsymbol{\omega}) = E'_{q^k-1}(\boldsymbol{\omega}') - \sum_{a \in A \ monic} G_{q^k-1}(t_a), \tag{1.11.1}$$

其中 $G_{q^k-1}(X)$是多项式

$$G_{q^k-1}(X) = \sum_{0 \le i < k} \beta'_i X^{q^k - q^i} \tag{1.11.2}$$

其中 $\beta'_i = \beta'_i(\boldsymbol{\omega}') = -E'_{q^i-1}(\boldsymbol{\omega}')$。当 $|t|$ 足够小时，该级数收敛，并且关于 $\boldsymbol{\omega}'$ 局部一致收敛。

定理 1.12 ([9], [3], [16])**：** 判别式形式 $\Delta = g_r$ 有一个乘积展开

$$\Delta(\boldsymbol{\omega}) = -\Delta'(\boldsymbol{\omega}')^q t^{q-1} \prod_{a \in A \ monic} S_a(t)^{(q^r-1)(q-1)}. \tag{1.12.1}$$

因此，函数 h （满足条件 $h^{q-1} = (-1)^{r-1}\Delta$）可以选取为使得

$$h(\boldsymbol{\omega}) = h'(\boldsymbol{\omega}')^q t \prod_{a \ monic} S_a(t)^{q^r-1}. \tag{1.12.2}$$

我们将利用这些结果来确定 a_n 的前几个系数

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{n \ge 0} a_n(\boldsymbol{\omega}') t^n(\boldsymbol{\omega})$$

对于 $f \in \{g_1, \dots, g_r, h, E_{q-1}, E_{q^2-1}, \dots\}$。

2. The special Eisenstein series E_{q^k-1}

2.1. 多项式或幂级数 $P(X)$ 的**支撑**supp(P) 是指标集合 $n \in \mathbf{N}_0$，其中 P 的 n 次系数非零。P 的消失阶，简称**阶**，为 $o(P) := \min \mathrm{supp}(P)$。如果 $o(P) \ge n$，我们记作 $P(X) = o(X^n)$。例如，

$$o(G_{q^k-1}) = q^k - q^{k-1} \tag{2.1.1}$$

（只要 $\beta'_{k-1} \ne 0$，参见（1.11.2）。）

F-向量空间的一个 **仿射线性** 映射是一个线性映射与一个常值映射之和。对我们而言，关键性质是以下显然的观察：设 $f\colon V \to W$ 是一个 F-向量空间的仿射线性映射，且 $0 < \dim V < \infty$。那么

$$\sum_{v\in V} f(v) = 0 \tag{2.1.2}$$

除非是在 $q = 2$ and $\dim V = 1$ 的情况下。

2.2. 与 1.10 中一样，我们令 $a \in A$ 为一个首一（即 $\mathrm{sgn}(a) = 1$）的次数为 $d \geq 1$ 的元素。那么

$$o(S_a(X) - 1) = q^{(r-1)d} - q^{(r-1)d-1} \tag{2.2.1}$$

and

$$o(t_a) = q^{(r-1)d}, \tag{2.2.2}$$

t_a 被视为关于 t 的幂级数。（我们使用了如下事实：系数函数 ${}_a\ell'_i(\boldsymbol{\omega}')$ 中没有一个恒等于零，参见例如 [13]。）

写成

$$a = \sum_{0\leq i\leq d} c_i T^i \quad \text{with} \quad c_i \in \mathbb{F}, c_d = 1. \tag{2.2.3}$$

As

$$\phi_a^{\boldsymbol{\omega}'} = \sum c_i \phi_{T^i}^{\boldsymbol{\omega}'} \quad \text{and} \quad \phi_{T^i}^{\boldsymbol{\omega}'} = \phi_T^{\boldsymbol{\omega}'} \circ \phi_T^{\boldsymbol{\omega}'} \circ \cdots \circ \phi_T^{\boldsymbol{\omega}'}$$

（依次插入的 i 因子，$\phi_1^{\boldsymbol{\omega}'}(X) = X$），$\phi_a^{\boldsymbol{\omega}'}(X)$ 的系数是（c_0，.....，c_{d-1}）的仿射线性函数，而倒数多项式 $S_a(X)$ 的系数也同样如此（见（1.10.3））。这里我们利用了由（1.10.2）可得，

$$\Delta'_{(d)} := \Delta'_a = \Delta'^{(q^{(r-1)d}-1)/(q^{r-1}-1))} \tag{2.2.4}$$

只取决于 a 的次数 d。

2.3. 为了通过定理 1.11 控制艾森斯坦级数 E_{q^k-1}，我们必须计算表达式

$$\sum_{a\in A \text{ monic}} t_a^{q^k - q^i} = \Big(\sum_a t_a^{q^{k-i}-1}\Big)^{q^i}.$$

因此我们定义

$$\Theta(j,d) := \sum_{\substack{a\in A \text{ monic} \\ \deg a = d}} t_a^{q^j-1} \qquad (j,d \geq 1), \tag{2.3.1}$$

一个以 t 为变量、系数属于 $\mathcal{O}'$ 的幂级数。我们的目标是对阶 $o(\Theta(j,\ d))$ 获得良好的下界估计。根据 t_a 的定义（1.10.5）和（2.2.4），

$$o(\Theta(j,d)) = q^{(r-1)d}(q^j - 1) + o(\Sigma(j,d)), \tag{2.3.2}$$

其中

$$\Sigma(j,d) := \sum_{\substack{a \text{ monic} \\ \deg a = d}} S_a^{1-q^j} \in \mathcal{O}'[[t]]. \tag{2.3.3}$$

2.4. 我们将通过以下方案计算 $\Sigma(j,d)$

$$\Sigma(j,d)=\sum_a S_a^{1-q^j}=\sum_a \frac{S_a}{S_a^{q^j}}=\sum_a S_a(1-(S_a^{q^j}-1)+(S_a^{q^j}-1)^2-\cdots). \tag{2.4.1}$$

根据 (2.2.1)

$$S_a^{q^j}(t)=1+o(t^{q^{(r-1)d+j}-q^{(r-1)d+j-1}}),$$

$S_a(t)$、$S_a^{q^j}(t)-1$ 和 $(S_a^{q^j}-1)^2$ 的支撑集两两不相交。因此

$$\operatorname{supp}(S_a^{1-q^j})=\operatorname{supp}(S_a)\cup\operatorname{supp}(S_a^{q^j}-1)\cup R \tag{2.4.2}$$

其中 $R\subset\mathbb{N}$ 是某个子集，且 $\min(R)=2(q^{(r-1)d+j}-q^{(r-1)d+j-1})$。同样，这种描述只取决于 a 的次数，而不取决于 a 本身。对于 $n\in\mathbb{N}_0$，令 $\kappa_{n,j}(a)$ 为 $S_a^{1-q^j}$ 的 n-系数。由 (2.2.3) 和 (2.4.2) 可知，该映射

$$(c_0,\dots,c_{d-1})\longmapsto\kappa_{n,j}\Big(\sum_{0\le i<d}c_iT^i+T^d\Big) \tag{2.4.3}$$

当 $n\in\operatorname{supp}(S_a)\cup\operatorname{supp}(S_a^{q^j}-1)$ 时，实际上是仿射线性的。考察 (2.1.2)，得到我们的第一个结果。

命题 2.5： 假设 $q>2$ 或 $d>1$。那么 $\sum_{a\ monic,\ 次数\,a=d}\kappa_{n,\,j}(a)$ 在 $n<2(q^{(r-1)d+j}-q^{(r-1)d+j-1})$ 处消失。因此 $o(\Sigma(j,d))\ge 2(q^{(r-1)d+j}-q^{(r-1)d+j-1})$。若 $q=2$ 且 $d=1$，

$$\Sigma(j,1)=S_T^{1-q^j}+S_{T+1}^{1-q^j}=\Delta'^{-1}t^{2^{r-1}-1}+\Delta'^{-2^j}t^{2^{r+j-1}-2^j}+o(t^{2^{r+j-1}}),$$

其中 $\Delta'\in\mathcal{O}'$ 是秩为 $r-1$ 的判别式形式。

证明。第一部分由 (2.4.3)、(2.4.2) 和 (2.1.2) 得出，第二部分显而易见。□

注 2.6： 容易验证，只要 $\ell\le q$，各个 $\operatorname{supp}((S_a^{q^j}-1)^\ell)$ 就两两不相交，因此

$$\operatorname{supp}(S_a^{1-q^j})=\operatorname{supp}(S_a)\ \dot\bigcup_{1\le\ell\le q}\ \operatorname{supp}((S_a^{q^j-1})^\ell)\cup R'$$

带有某个余项 $R'\subset\mathbb{N}$。对于 $n\in\operatorname{supp}((S_a^{q^j}-1)^\ell)$，(2.4.3) 中的函数 $(c_0,\dots,c_{d-1})\mapsto\kappa_{n,\,j}(\sum c_iT^i+T^d)$ 对某个满足 $0\le m\le\ell$ 的 m 是 m-多项式。这里，fm-多项式表示 $f(v)=\sum_{0\le i\le m}f_i(v)$，其中对于 $c\in\mathrm{F}$，$f_i(cv)=c^if(v)$。

在对 q 的大小作出假设时，可以证明 $\sum_{v\in V}f(v)$ 为零。例如，对于二次齐次映射，若存在 $c\in\mathrm{F}^*$ 使得 $c^2\ne1$，即 $q>3$，则可保证 $\sum_{v\in V}f_2(v)=0$。因此，对 q 的大小作出假设后，可以改进命题 2.5 中的界。

推论 2.7： *(2.3.1)* 的量 $\Theta(j,d)$ 满足 $\Theta(j,d)=o(t^N)$，其中当 $(q,d)\ne(2,1)$ 时，$N=3q^{(r-1)d+j}-2q^{(r-1)d+j-1}-q^{(r-1)d}$；当 $(q,d)=(2,1)$ 时，$N=2^{r+j-1}-1$。

证明。2.5 + (2.3.2)。□

现在我们可以如下描述特殊艾森斯坦级数的 t-展开。

定理 2.8： 我们有

$$E_{q^k-1}(\boldsymbol{\omega}) = E'_{q^k-1}(\boldsymbol{\omega}') - G_{q^k-1}(t) + o(t^N) = \sum_{0\le i\le k} E'_{q^i-1}(\boldsymbol{\omega}')t^{q^k-q^i} + o(t^N) \tag{2.8.1}$$

其中 $N = 3(q-1)q^{k+r-2}$ 当 $q > 2$ 时，以及 $N = 2^{k-1}(2^r-1)$ 当 $q = 2$时。

证明。 在（1.11.1）中省去满足 $\deg a > 0$ 的项 $G_{q^k-1}(t_a)$，会导致误差

$$o\Big(\sum_{\substack{a \text{ monic}\\ \deg a=1}} t_a^{q^k-q^{k-1}}\Big) = o(t^{q^{k-1}\cdot o(\Theta(1,1))}).$$

根据推论 2.7，指数 N 的结果如上所述。 □

2.9. 关于非特殊艾森斯坦级数 E_k的展开式，可以得出什么结论，其中 $0 < k \equiv 0$ (模 $q-1$)? 同样，也有类似于（1.11.1）的展开式

$$E_k(\boldsymbol{\omega}) = E'_k(\boldsymbol{\omega}') - G_k(t) - \sum_{\substack{a \text{ monic}\\ \deg a\ge 1}} G_k(t_a) \tag{2.9.1}$$

对于次数为 k 的首一多项式 $G_k(X) \in \mathcal{O}'[X]$，参见 [15]。但是，对于不是特殊形式 $k = q^j - 1$ 的 k， G_k 表现得无规律，其阶 $\nu(k) := o(G_k(X))$ 不会随 k 增长，而 G_{q^k-1} 则是如此。至少，

$$\nu = \nu(k) \ge \max(2, q-1),$$

因此我们得到粗略估计

$$o\Big(\sum_{\substack{a \text{ monic}\\ \deg a=d}} t_a^{\nu}\Big) = \nu q^{(r-1)d} + o\Big(\sum_a S_a^{-\nu}\Big)$$

with

$$\begin{aligned} o\Big(\sum_a S_a^{-\nu}\Big) &\ge o(S_a^{-\nu}) && \text{(one fixed monic } a \text{ of degree } d)\\ &\ge o(S_a)\\ &= q^{(r-1)d} - q^{(r-1)d-1}. \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} o\Big(\sum_{\substack{a \text{ monic}\\ \deg a=d}} t_a^{\nu}\Big) &= (\nu+1)q^{(r-1)d} - q^{(r-1)d-1}\\ &= q^{(r-1)d+1} - q^{(r-1)d-1} \end{aligned}$$

最后

$$E_k(\boldsymbol{\omega}) = E'_k(\boldsymbol{\omega}') - G_k(t) + o(t^N) \tag{2.9.2}$$

其中 $N = q^r - q^{r-2}$。对于满足 N 且使 $G_k(X)$ 可访问的这类 k， 该公式是有意义的。

3. The coefficient forms g_k

我们的目标是证明以下关于形式 g_k ($1 \le k \le r$) 的 t-展开起始项的公式。和之前一样， $g_i' = g_i'(\boldsymbol{\omega}')$ 是秩为 $r' = r-1$ 时相应的系数形式。

定理 3.1： 作为关于 t 的幂级数，我们有

$$g_k = g_k' - {g_{k-1}'}^q t^{q-1} + g_{k-1}' t^{q^k - q^{k-1}} - {g_{k-2}'}^q t^{q^k - q^{k-1} + q - 1} + g_{k-2}' t^{q^k - q^{k-2}} - \\ \cdots - {g_1'}^q t^{q^k - q^2 + q - 1} + g_1' t^{q^k - q} - [1] t^{q^k - 1} + o(t^N)$$

其中 $N = 3(q-1)\, q^{r-1}$ 若 $q > 2$， $N = 3 \cdot 2^{r-1} - 1$ 若 $q = 2$，以及 $[1] = T^q - T$。其闭式为：

$$g_k = g_k' + \sum_{1 \le i \le k-1} \left(g_i' t^{q^k - q^i} - {g_i'}^q t^{q^k - q^{i+1} + q - 1} \right) - [1] t^{q^k - 1} + o(t^N). \tag{3.1.1}$$

注意，(3.1.1) 给出的中间项是按 t 阶逆序排列的。

推论 3.2： g_k 中 t^n 的系数（先验上是权为 $q^k - 1 - n$、类型为 0、关于 $\boldsymbol{\omega}'$ 的弱模形式）实际上是关于 $n < N$ 的模形式（并且在 $q^k - 1 < n < N$ 时为零）。

定理 3.1 的一种可能方法是使用 (1.4.8)，它根据 g_i 、 $i < k$ 和 $E_{q^j - 1}$递归确定 g_k ，再结合我们对 $E_{q^i - 1}$展开式的了解。然而，下文所采用的策略更为简便，而且能得出更强的结果。

3.3. 回忆一下， $\mathcal{O}'$ 是定义在……上的全纯函数环

$$\Omega' = \Omega^{r-1} = \{\boldsymbol{\omega}' = (\omega_2, \ldots, \omega_r) \in C_\infty^{r-1} \mid \omega_i \ K_\infty\text{-linearly independent}, \omega_r = 1\}.$$

照例，我们将 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \boldsymbol{\omega}')$ 记作 $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$。我们将泛 Drinfeld 模$\phi = \phi^{\boldsymbol{\omega}}$ （其中 $\boldsymbol{\omega}$ 在 Ω 中变化）视为环上的 Tate 对象（例如，秩为二的情形见 [19], 和 [10] ）

$$\mathcal{R} := \mathcal{O}'((t)) \tag{3.3.1}$$

中关于 $\mathcal{O}'$ 的 t 形式洛朗级数，并赋予其 t-进拓扑。也就是说，将 ϕ 的系数替换为各自的 t展开式。令 $\phi' = \phi^{\boldsymbol{\omega}'}$为基扩张至 $\mathcal{R}$的秩为 $r-1$ 的泛 Drinfeld 模，并令

$$L := \langle t^{-1} \rangle \tag{3.3.2}$$

是由 t^{-1} 通过 ϕ' 生成的 A格，即，

$$L = \{\phi_a'(t^{-1}) \mid a \in A\}.$$

令 $a \in A$ 的次数为 d。对于固定的 $\boldsymbol{\omega}$ （因此 $\boldsymbol{\omega}$ 也会变化），

$$\begin{aligned} \phi_a'(t^{-1}) &= \phi_a'(e^{\Lambda'_{\boldsymbol{\omega}'}}(\omega_1)) \\ &= e^{\Lambda'_{\boldsymbol{\omega}'}}(a\omega_1) = t_a^{-1}(\boldsymbol{\omega}) = \Delta'_{(d)}(\boldsymbol{\omega}') t(\boldsymbol{\omega})^{-q^{(r-1)d}}(\boldsymbol{\omega}) S_a(t(\boldsymbol{\omega})). \end{aligned}$$

因此， $\phi'_a(t^{-1})$ 在 $\mathcal{R}$ 中是“大的”，并且随 d 增长； L 是 1.3 意义下的格。与 1.4 中一样，我们定义函数

$$e^L : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}, \qquad z \longmapsto z \prod_{\lambda \in L}{}' (1 - z/\lambda) \tag{3.3.3}$$

其中该乘积处处收敛，并定义了一个 F-线性函数。我们拥有与 1.3 和 1.4 中类似的性质；特别地，

- $e^L(z) = \sum_{i \geq 0} \alpha_i(L) z^{q^i} = \sum_{i \geq 0} \alpha_i(L) \tau^i \in \mathcal{R}\{\{\tau\}\}$;
- there is a formal inverse $\log^L = \sum_{i \geq 0} \beta_i(L) \tau^i$ of e^L in $\mathcal{R}\{\{\tau\}\}$;
- $\beta_i(L) = -E_{q^i-1}(L)$ with $E_{q^i-1}(L) = \sum_{\lambda \in L}{}' \lambda'^{1-q^i}$ if $i > 0$ and $E_0(L) = -1$,

因此，对于当前数据，关系式 (1.4.7) 仍然成立。我们不再使用图 (1.3.2)，而是对每个 $0 \neq a \in A$ 都有如下带正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{e^L} & \mathcal{R} \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi'_a} & & \downarrow{\scriptstyle \phi'_a} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_a} \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{e^L} & \mathcal{R}. \end{array} \tag{3.3.4}$$

也就是说， e^L 是从 Drinfeld 模 ϕ' 到 ϕ的“解析同态”。由 $\phi_T \circ e^L = e^L \circ \phi'_T$，我们得到

$$\log^L \circ \phi_T = \phi'_T \circ \log^L, \tag{3.3.5}$$

作为 (1.4.6) 的替代。比较系数并分离出项 g_k ，得到递推公式（与 (1.4.9) 类似）：

$$g_k = \sum_{1 \leq i \leq k} E_{q^i-1}(L) q^{q^i}_{k-i} - \sum_{0 \leq i \leq k} g'_i E^{q^i}_{q^{k-i}-1}(L) \qquad (k \geq 1) \tag{3.3.6}$$

ϕ_T 的系数 g_k （当然， g'_i 是 ϕ'_T 的系数）。我们对定理 3.1 的证明将基于 (3.3.6) 和下面的结果。

命题 3.4： 在环 $\mathcal{R}$ 中，我们有

$$E_{q^i-1}(L) = -t^{q^i-1} + o(t^N) \tag{3.4.1}$$

with

$$N = \begin{cases} 3q^{r+i-1} - (2q^{i-1}+1)q^{r-1}, & \text{if } q > 2, \\ 2^{r+i} - 2^{r-1} - 1, & \text{if } q = 2. \end{cases} \tag{3.4.2}$$

证明。

$$\begin{aligned} E_{q^i-1}(L) &= \sum_{\lambda \in \Lambda}{}' \lambda^{1-q^i} \\ &= \sum_{a}{}' \phi'_a(t^{-1})^{1-q^i} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{d\in\mathbb{N}_0}\sum_{\substack{a \text{ monic}\\ \deg a=d}} \phi'_a(t^{-1})^{1-q^i}\\
&= -\sum_{d\in\mathbb{N}_0} t^{-q^{(r-1)d}(1-q^i)}{\Delta'_{(d)}}^{1-q^i}\sum_{\substack{a \text{ monic}\\ \deg a=d}} S_a(t)^{1-q^i}\\
&= -t^{q^i-1} - \sum_{d\in\mathbb{N}} {\Delta'_{(d)}}^{1-q^i} t^{q^{(r-1)d}(q^i-1)}\Sigma(i,d)\\
&= -t^{q^i-1} + o(t^N)
\end{aligned}
$$

由推论 2.7 得。 □

定理 *3.1* 的证明。 (3.3.6) 和 (3.4.1) 得出

$$
\begin{aligned}
g_1 &= E_{q-1}(L)T^q - TE_{q-1}(L) - g'_1E_0^q(L)\\
&= [1]E_{q-1}(L) + g'_1 = g'_1 - [1]t^{q-1} + o(t^N)
\end{aligned}
$$

符合断言。（顺便一提，考虑到 $g_1 = [1]E_{q-1}$，这与定理 2.8 关于 E_{q-1} 的结果一致；对于 $q = 2$ 而言，其误差项更小。）注意，命题 3.4 中出现的所有误差项 $o(t^{N'})$ 都满足 $N' \geq N = 3(q-1)q^{r-1}$ 分别为 $3\cdot 2^{r-1}-1$。因此，我们令“≡”表示 $\mathcal{R}$ 中模 t^N 的同余。假设对于 k'，(3.1.1) 在 $1 \leq k' < k$ 下成立。由命题 3.4 和 (3.3.6),

$$
g_k \equiv -\sum_{1\leq i\leq k} t^{q^i-1}g_{k-i}^{q^i} + \sum_{0\leq i\leq k} g'_i t^{q^k-q^i}.
$$

根据归纳假设，后者同余于

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0\leq i\leq k} g'_i t^{q^k-q^i} - t^{q^k-1}T^{q^k}\\
&\quad -\sum_{1\leq i<k} t^{q^i-1}\Big\{g'_{k-i} + \sum_{1\leq j\leq k-i}\big(g'_j t^{q^{k-i}-q^j} - g'_j t^{q^{k-i}-q^{j+1}+q-1}\big) - [1]t^{q^{k-i}-1}\Big\}^{q^i}.
\end{aligned}
$$

经过冗长但直接的计算（此处略去；其中出现了若干裂项求和，从而将双重求和化简为简单求和），这个表达式最终等于 g_k 的公式 (3.3.1)。□

4. The h-function

4.1. 我们对 h-函数导出类似的结果

$$
h = h'^q t \prod_{a\in A \text{ monic}} S_a(t)^{q^r-1}. \tag{4.1.1}
$$

对于 $d \in \mathbb{N}$，令

$$
\Pi(d)(X) := \prod_{\substack{a \text{ monic}\\ \deg a=d}} S_a(X). \tag{4.1.2}
$$

出于排版上的考虑，我们使用 $s := r-1 =$ 秩的 ϕ'，而不是 r。对于次数为 1 的 $a = T + c$ ($c \in \mathrm{F}$),

$$
\phi'_a(X) = aX + g'_1X^q + \cdots + g'_{s-1}X^{q^{s-1}} + \Delta'X^{q^s}, \tag{4.1.3}
$$

其中只有 X 的系数 a 依赖于 a。因此

$$S_a(X) = 1 + \frac{g_{s-1}}{\Delta'} X^{q^s - q^{s-1}} + \cdots + \frac{g_1'}{\Delta} X^{q^s - q} + \frac{a}{\Delta'} X^{q^s - 1} = S_T(X) + cW \tag{4.1.4}$$

其中 $W = \Delta'^{-1} X^{q^s-1}$。根据规则

$$\prod_{c \in \mathbb{F}} (x + cy) = x^q - xy^{q-1} \tag{4.1.5}$$

我们得到

$$\Pi(1) = S_T^q - S_T W^{q-1}, \tag{4.1.6}$$

其开头为

$$\Pi(1) = 1 - \Delta'^{1-q} X^{(q-1)(q^s-1)} + \text{higher terms.} \tag{4.1.7}$$

4.2. 接下来，我们处理 $\Pi(2)$。对于 $a = T^2 + c_1 T + c_0$,

$$S_a(X) = 1 + m_1 X^{q^{2s} - q^{2s-1}} + \cdots + m_{s-1} X^{q^{2s} - q} + \frac{a}{\Delta'} X^{q^{2s}-1} \tag{4.2.1}$$

$X^{q^{2s}-n}$ 的系数为 $m_n = \frac{a^{\ell'_{2s-n}}}{\Delta'^{(2)}}$，其中

- $\Delta'_{(2)} = (\Delta')^{q^{2s}+1}$ 与 a无关;
- $m_0 = 1$、 m_1、...、 m_{s-1}与 a无关;
- m_s，...， m_{2s-1}关于 c_1呈仿射线性关系，但与 c_0无关。

写作 $S_a(X) = Z_0(c_1) + c_0 W_0$，其中 $Z_0(c_1) = S_{T^2+c_1T}$、 $w_0 = (\Delta'_{(2)})^{-1} X^{q^{2s}-1}$，对于固定的 c_1，我们得到:

$$S(c_1) := \prod_{c_0 \in \mathbb{F}} S_{T^2+c_1T+c_0}(X) = Z_0(c_1)^q - Z_0(c_1) W_0^{q-1}. \tag{4.2.2}$$

我们重复这一论证，并写成 $S(c_1) = Z_1 + c_1 W_1$，其中 Z_1和 W_1与 c_1无关。仔细观察可见

$$\begin{aligned} o(Z_1 - 1) = o(S(c_1) - 1) &= (q-1) \cdot o(W_0) = (q-1)(q^{2s} - 1); \\ o(W_1) &= q^{2s+1} - q^{s+1}, \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

因为只有系数 m_s、 m_{s+1}、... 对 W_1有贡献。现在

$$\Pi(2) = \prod_{c_1 \in \mathbb{F}} S(c_1) = Z_1^q - Z_1 W_1^{q-1},$$

so

$o(\Pi(2)-1) \geq \min\{q \cdot o(Z_1 - 1), (q-1) \cdot o(W_1)\} = (q-1) \cdot o(W_1) = (q-1)q(q^{2s} - q^s)$,

事实上，由于 min 的两个论证不同，因此两者相等。于是我们证明了:

命题 4.3: 乘积 $\Pi(2) = \prod_{a \text{ monic, 次数 } a=2} S_a(X)$ 满足

$$o(\Pi(2) - 1) = (q-1)q(q^{2s} - q^s) = (q-1)(q^{2r-1} - q^r).$$

备注 4.4： 显然，对于 $d \geq 3$，$o(\Pi(d)-1)$ 要大得多；每个因子 $S_a(X)$ 都满足 $o(S_a-1) = q^{(r-1)d} - q^{(r-1)d-1}$，而过程 4.2 的第一步就已经给出

$$o\Big(\prod_{c_0} S_a(X) - 1\Big) = (q-1)(q^{(r-1)d}-1)$$

对于所有满足 c_{d-1}，……，c_1 固定的 $a = T^d + c_{d-1}T^{d-1} + \cdots + c_1 T + c_0$ 取乘积。因此，这样的 $\Pi(d)$ 不会对完整乘积 $\prod_{a\ 首一} S_a(X)$ 的前 $\approx q^{3r-3}$ 个系数产生贡献。

定理 *4.5*：*</style}*作为关于 t 的幂级数的 h-函数满足

$$h = h'^q t \Pi(1)^{-1} + o(t^N),$$

其中 $N = (q-1)(q^{2r-1} - q^r) + 1$，且 $\Pi(1) = \Pi(1)(t)$ </style}是由$(1)(t) = S_T(t)^q - S_T(t)W(t)^{q-1}$定义的多项式，

$$S_T(t) = 1 + \frac{g'_{r-2}}{\Delta'} t^{q^{r-1}-q^{r-2}} + \frac{g'_{r-3}}{\Delta'} t^{q^{r-1}-q^{r-3}} + \cdots + \frac{g'_1}{\Delta'} t^{q^{r-1}-q} + \frac{T}{\Delta'} t^{q^{r-1}-1},$$

$$W(t) = \Delta'^{-1} t^{q^{r-1}-1}.$$

$\Pi(1)$ 可通过 $\Pi(1)(t)^{-1} = 1 - U + U^2 - \ldots$ 将其反演为幂级数，其中$U = \Pi(1)(t) - 1$。

证明。我们将 (4.1.1) 中的乘积 $\prod_{a\ 首一} S_a(t)^{q^r-1}$ 替换为 $\prod_{a\ 首一,\deg a=1} S_a(t)^{-1} = \Pi(1)(t)^{-1}$。由命题 4.3 和注 4.4，误差为 $o(t^N)$，其中 $N = q^r \cdot o(\Pi(1) - 1) + 1$，如所述，因为 $o(\Pi(d) - 1) + 1 \geq N$ 对于 $d \geq 2$成立。□

注意，由 (4.1.7)，h 的展开式起始为

$$h = h'^q t\big(1 + (\Delta')^{1-q} t^{(q^{r-1}-1)(q-1)} + \text{higher terms}\big). \tag{4.5.1}$$

读者可以验证，对于 $k = r$，定理 4.5 与定理 3.1 相容，其中 $g_r = \Delta = (-1)^{r-1} h^{q-1}$。

References

[1] C´ecile Armana, *Coefficients of Drinfeld modular forms and Hecke operators*, 《数论杂志》**131** (2011), 第 8 期, 1435–1460, DOI 10.1016/j.jnt.2011.02.011.[2] Andrea Bandini 和 Maria Valentino, *Poincaré coefficients and slopes of Drinfeld modular forms* **19** 2023 10, 2523 2553, 10 1142 1793042123501245 , 《国际数论杂志》( ), 第 – 期, DOI . /s .[3] Dirk Basson, *A product formula for the higher rank Drinfeld discriminant function*, 《数论杂志》**178** (2017), 190–200, DOI 10.1016/j.jnt.2017.02.010.[4] Dirk Basson、Florian Breuer 和 Richard Pink, *Drinfeld modular forms of arbitrary rank*, 《美国数学会回忆录》**304** (2024), 第 1531 期, viii+79, DOI 10.1090/memo/1531.[5] Vincent Bosser, *Congruence properties of the coefficients of the Drinfeld modular invariant*, 《数学手稿》**109** (2002), 第 3 期, 289–307, DOI 10.1007/s00229-002-0299-3.[6] SoYoung Choi, *Linear relations and congruences for the coefficients of Drinfeld modular forms* **165** 2008 93 101, 10 1007 11856 008 1005 2 , 《以色列数学杂志》( ), –, DOI . /s - - - .[7] SoYoung Choi 和 Bo Hae Im, *The series of certain weakly holomorphic Drinfeld modular forms* **144** 2014 3 4, 503 515, 10 1007 00229 014 0660 3 , 《数学手稿》( ), 第 - 期, –, DOI . /s - - - .[8] Tarun Dalal 和 Narasimha Kumar, *The structure of Drinfeld modular forms of level $\Gamma_0(T)$ and applications*, 《代数杂志》**619** (2023), 778–798, DOI 10.1016/j.jalgebra.2022.11.027.[9] Ernst-Ulrich Gekeler, *A product expansion for the discriminant function of Drinfeld modules of rank two* **21** 1985 2, 135 140, 10 1016 0022 314 85 90046 , 《数论杂志》( ), 第 – 期, DOI . / - X( ) - 0.

[10] , *On the coefficients of Drinfel′d modular forms* **93** 1988 3, , 667 700, 10 1007 01410204
《数学发明》( ), 第 – 期, DOI . /BF .[11] ,
Growth order and congruences of coefficients of the Drinfeld discriminant function, 《数论杂志》77 (1999), 第 2 期, 314–325, DOI 10.1006/jnth.1999.2387。[12] ,
On Drinfeld modular forms of higher rank, 《波尔多数论杂志》29 (2017), 第 3 期, 875–902, DOI 10.5802/jtnb.1005。[13] , *On Drinfeld modular forms of higher rank II*, 《数论杂志》232 (2022), 4–32, DOI 10.1016/j.jnt.2018.11.011。[14] ,
On Drinfeld modular forms of higher rank IV: Modular forms with level, 《数论杂志》232 (2022), 33–74, DOI 10.1016/j.jnt.2019.04.019。[15] , *Goss polynomials, q-adic expansions, and Sheats compositions*, 《数论杂志》240 (2022), 196–253, DOI 10.1016/j.jnt.2022.01.008。另见《数论杂志》246 (2023) 328-331 的勘误。[16] ,
On Drinfeld modular forms of higher rank VII: Expansions at the boundary, 《数论杂志》269 (2025), 260–340, DOI 10.1016/j.jnt.2024.09.015。[17] ,
Modular forms for r q[T]: Hecke operators and growth of expansion coeffi- GL(, F , . *cients* 2025 2511 01712 arXiv: . .[18] Bartolom´e L´opez,
A non-standard Fourier expansion for the Drinfeld discriminant function, 《巴塞尔数学档案》95 (2010), 第 2 期, 143–150, DOI 10.1007/s00013-010-0148-7。[19] Mihran Papikian, *Drinfeld modules*, 数学研究生教材, 第 296 卷, Springer, Cham, 2023。[20] Yusuke Sugiyama,
The integrality and reduction of Drinfeld modular forms of arbitrary rank, 《数论杂志》188 (2018), 371–391, DOI 10.1016/j.jnt.2018.01.017。[21] Christelle Vincent, *Drinfeld modular forms modulo ℘*, 《美国数学会会刊》138 (2010), 第 12 期, 4217–4229, DOI 10.1090/S0002-9939-2010-10459-8。

FR 6.1 Mathematik, Universität des Saarlandes, Postfach 15 11 50 D-66041 Saarbrücken
Email address: gekeler@math.uni-sb.de