arXiv:2601.02035v1 [math.DG] 5 Jan 2026

黎曼叶状结构上的次拉普拉斯算子广义曲率维数不等式

Fabrice Baudoin，Guang Yang

2026年1月6日

摘要

´我们针对一般黎曼叶状结构所关联的水平拉普拉斯算子，建立了 Bochner 理论和 Bakry-Emery 演算。我们不对度量施加丛状假设，也不要求叶具有全测地性或极小性。利用适配于水平–垂直分裂的度量联络，我们推导出水平拉普拉斯算子作用于水平梯度和垂直梯度时的显式 Bochner 公式，并给出了适用于全梯度的统一恒等式。这些公式包含叶状结构本身所固有的水平Ricci曲率、挠率和垂直平均曲率项。基于这些恒等式，我们建立了广义曲率-维数不等式，推广了次黎曼几何中的早期结果。作为应用，我们得到了水平拉普拉斯比较定理、带有显式直径界的 Bonnet–Myers 型紧致性结果、随机完备性、第一特征值估计，以及水平热半群的梯度估计和正则化估计。该框架尤其适用于接触流形和任意步数的 Carnot群。

关键词：次黎曼几何、次拉普拉斯算子、广义曲率维数不等式、黎曼叶状结构。

Fabrice Baudoin：
丹麦奥胡斯大学数学系，邮箱：fbaudoin@math.au.dk

本研究部分获丹麦独立研究基金资助（资助编号：10.46540/4283-00175B），并获 Villum研究员资助奥胡斯随机分析。F.B. 还感谢欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟地平线欧洲研究与创新计划提供的资助（RanGe项目，资助协议编号：101199772）。

Guang Yang：
中国南方科技大学数学系 邮箱：yangg7@sustech.edu.cn

1 引言

由括号生成分布的几何结构所产生的次椭圆算子，在分析学（[21, 23]）、几何学（[1]）和概率论（[27]）中发挥着核心作用。其中，与叶状结构相关的水平拉普拉斯算子构成了一种灵活的框架，可借助黎曼几何方法捕捉真正的次黎曼现象。这类水平拉普拉斯算子自然出现于多种情形中，包括接触流形、Carnot群以及具有横向对称性的次黎曼流形。

´本文旨在为一般黎曼叶状结构上的水平拉普拉斯算子建立系统的 Bochner–Bakry–Emery 理论，不要求黎曼度量为丛状，也不要求叶是全测地或极小的。去除这些经典假设会引入新的几何特征，尤其是挠率和平均曲率效应，它们从根本上改变了 Bochner恒等式和曲率-维数不等式的结构。本文的主要目标是表明，尽管复杂性有所增加，仍然可以建立一个稳健的框架，并据此推导出有意义的分析和几何结论。

1.1 几何设定

设 $(M,\ g)$ 是一个完备黎曼流形，带有一个叶状结构 $\mathcal{F}$，其切丛 TM 正交分解为水平子丛和垂直子丛

$$TM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V},$$

其中 $\mathcal{V}$ 与叶相切。与现有文献中的许多做法不同，我们不作以下假设：

- 黎曼度量是丛状的；
- 叶是全测地的或极小的。

这些假设虽然在技术上方便，却排除了许多自然的例子。特别是，步数大于二的Carnot群和一般的接触流形都不属于经典框架。在这种情况下，曲率、挠率与叶的平均曲率之间的相互作用起着至关重要的作用，必须予以明确考虑。

此处考虑的水平拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathcal{H}}$ 定义为相对于黎曼体积测度的水平梯度的散度。我们始终假设水平分布 $\mathcal{H}$ 是括号生成的。在括号生成假设以及 g完备性的条件下，该算子是局部次椭圆的、本质自伴的，并生成一个具有热核的次马尔可夫热半群（P_t）$_{t\geq 0}$ 。

1.2 经典框架之外的 Bochner 恒等式

在黎曼情形下，Ricci 曲率下界及其解析后果通常由 Bochner 恒等式和 Bakry–Emery Γ_2演算推导得出，参见专著 [3]。过去二十年来，将这一方法推广到次黎曼和叶状情形一直是广泛研究的主题，参见 [5, 9, 11, 18, 29]。早期研究主要聚焦于具有丛状度量和全测地叶的黎曼叶状结构；在这类结构中，水平拉普拉斯算子具有额外的对称性，Bochner 型公式也更接近黎曼情形中的对应公式。本研究通过为任意黎曼叶状结构的水平拉普拉斯算子给出一般的 Bochner公式和Bakry-Emery 演算，弥补了这一空白。

我们方法的一个关键要素是使用适配于分解 $TM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ 的度量联络 ∇。该联络最初由 Hladky 在 [19] 中引入，随后在叶状结构的背景下用于 [7, 6], ，它保持两个子丛不变，其挠率则编码了水平分布的不可积性以及叶的第二基本形式。Levi–Civita 联络并不适用于这一框架下的计算，而适配联络则使二阶量能够清晰地分解为水平分量和垂直分量。借助这一联络，本文的首要贡献是推导出适用于水平方向和垂直方向的显式 Bochner 公式。具体而言，对于光滑函数 f，我们将以下量表示为:

$$\Gamma_2^{\mathcal{H}}(f) := \frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{H}}|\nabla_{\mathcal{H}} f|^2 - \langle \nabla_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{H}} \Delta_{\mathcal{H}} f \rangle \quad \text{and} \quad \Gamma_2^{\mathcal{V}}(f) := \frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{H}}|\nabla_{\mathcal{V}} f|^2 - \langle \nabla_{\mathcal{V}} f, \nabla_{\mathcal{V}} \Delta_{\mathcal{H}} f \rangle$$

与联络 ∇ 相关的张量。这里， $\nabla_{\mathcal{H}}$ 是水平梯度，$\nabla_{\mathcal{V}}$ 是垂直梯度。这些公式纳入了叶的平均曲率向量场 H 、与水平分布相关的曲率张量以及联络的挠率。结合水平恒等式和垂直恒等式，我们还得到了适用于完整黎曼梯度的 Bochner 公式。

1.3 广义曲率-维数不等式

由 Bochner恒等式，我们在 Bakry–Emery 意义下建立了广义曲率-维数不等式。作为第一个应用，我们确定了一个张量量 $\mathfrak{R}$ ，它在我们的设定中发挥着 Ricci 曲率的有效作用，并控制着 $\Delta_{\mathcal{H}}$的全梯度 Bochner 公式。在对 $\mathfrak{R}$施加适当下界的条件下，我们建立了如下形式的不等式

$$\Gamma_2^{\mathcal{H}}(f) + \Gamma_2^{\mathcal{V}}(f) \geq \frac{1}{N}(\Delta_{\mathcal{H}} f)^2 + K|\nabla f|^2, \tag{1.1}$$

对于适当的常数 N 和 K。在更强的曲率界条件下，我们还证明了以下一参数曲率-维数不等式族：对于每个$\nu > 0$

$$\Gamma_2^{\mathcal{H}}(f) + \nu\Gamma_2^{\mathcal{V}}(f) \geq \frac{1}{N}(\Delta_{\mathcal{H}} f)^2 + \left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\nu}\right)|\nabla_{\mathcal{H}} f|^2 + (\rho_2 - \rho_3\nu - \rho_4\nu^2)|\nabla_{\mathcal{V}} f|^2. \tag{1.2}$$

这个广义曲率-维数不等式是对曲率-维数不等式的直接推广

$$\Gamma_2^{\mathcal{H}}(f) + \nu\Gamma_2^{\mathcal{V}}(f) \geq \frac{1}{N}(\Delta_{\mathcal{H}} f)^2 + \left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\nu}\right)|\nabla_{\mathcal{H}} f|^2 + \rho_2|\nabla_{\mathcal{V}} f|^2$$

在丛状且全测地的叶状结构框架下，于 [9] 和 [18] 中得到。它也是对 [11]中针对接触流形得到的曲率-维数不等式的推广。因此，我们的曲率-维数不等式的一个新颖之处在于，垂直梯度范数前出现了强非线性项 $-\rho_4\nu^2$，这使分析学变得复杂得多。从几何上看，除一个常数因子外， ρ_4 是李导数 $\mathcal{L}_V g_{\mathcal{H}}$、 $V \in \mathcal{V}$、 $|V| = 1$的范数的统一上界，因此量化了 g不具备丛状性质的程度。尽管如此，我们证明，这一广义曲率-维数框架仍足以有力地导出范围广泛的分析学与几何学结果。

1.4 应用

作为曲率-维数不等式的应用，我们得到：

(i) 拉普拉斯比较定理： 我们将黎曼距离的水平拉普拉斯比较定理推广到不满足丛状条件或极小叶假设的情形。去掉这些条件后，我们的结果便推广了 [10], 中相应的结果；另见 [6]和 [15]。

(ii) Bonnet–Myers型结果： 作为拉普拉斯比较定理的推论，我们证明，在正曲率条件下，流形 M 必定是紧的，且该空间的黎曼直径具有一个明确的上界。更准确地说，我们证明 **(1.1)** 在 $K > 0$ 条件下推出

$$\mathbf{diam}(M) \leq \pi\sqrt{\frac{N}{K}}.$$

(iii)随机完备性： 我们证明水平热半群 P_t 是随机完备的，即 $P_t 1 = 1$。

(iv) 第一特征值Lichnerowicz型估计： 在正曲率情形下，我们得到水平拉普拉斯算子的第一特征值的如下下界

$$\lambda_1 \geq C$$

其中 $C > 0$ 是一个显式依赖于曲率参数的常数。例如，在条件 **(1.2)** 下，可以取 $C = \frac{\rho_1\rho_2 - \kappa}{(\rho_3 + \sqrt{\rho_2\rho_4})}\left(\frac{N-1}{N}\right)\rho_2 + \kappa$。

(v) 热核梯度界： 我们为水平热半群 $(P_t)_{t\geq 0}$ 建立了 Bakry-´Emery 型估计和全局正则化估计。例如，我们得到了梯度估计

$$|\nabla P_t f|^2 + \frac{2}{N}\frac{e^{2Kt}-1}{2K}(\Delta_{\mathcal{H}} P_t f)^2 \leq e^{2Kt} P_t(|\nabla f|^2) \tag{1.3}$$

对于一致二阶生成的分布，我们还得到一个小时间下的反向 Poincar´é 不等式估计：

$$|\nabla_{\mathcal{H}} P_t f|^2 + t(\Delta_{\mathcal{H}} P_t f)^2 \leq \frac{c}{t}\left(P_t(f^2) - (P_t f)^2\right). \tag{1.4}$$

鉴于 [13, 20] 和 [16]，我们认为，在我们的框架下，热核也应当满足 Li–Yau 型梯度估计；这或许会在后续工作中加以研究。

1.5 论文结构

本文结构如下。第 2 节介绍几何框架，定义水平拉普拉斯算子和适配联络，并回顾相关热半群的基本解析性质。第 3 节推导 Bochner 公式和曲率-维数不等式。第 4 节介绍若干应用，包括拉普拉斯比较定理、特征值估计，以及水平热半群的梯度界。

记号：

- 若 M 是一个流形，则 TM 是其切丛。
- $\mathcal{L}$ 是李导数
- 若 $\mathcal{W}$ 是 M上的向量丛， $\mathfrak{X}(\mathcal{W})$表示该丛的光滑截面集合。
- 若 g是黎曼度量，我们记为 $\langle u, v\rangle = g(u, v)$、 $|u|^2 = g(u, u)$。

2 预备知识

2.1 设置与假设

在全文中，我们考虑一个光滑的连通 $n+m$ 维流形 M，其上配备了一个具有 m维叶的叶状结构 $\mathcal{F}$ 。我们假设 M 配备了完备的黎曼度量 g。对于 $x \in M$， $\mathcal{F}_x$ 表示经过 x的叶。切丛 TM 的子丛 $\mathcal{V}$ 由与叶相切的向量组成，被称为垂直方向。与$\mathcal{V}$ 正交的子丛 $\mathcal{H}$ 被称为水平方向。我们假设 $\mathcal{H}$ 是括号生成的。

在这一设定下，任意向量 $u \in T_xM$ 都可以分解为

$$u = u_{\mathcal{H}} + u_{\mathcal{V}}$$

其中， $u_{\mathcal{H}}$ （分别为 $u_{\mathcal{V}}$）表示 u 到 $\mathcal{H}_x$ （分别到 $\mathcal{V}_x$）的正交投影。
请注意，此处我们不假设度量 g 是丛状的。在本文中，我们将用 D 表示 (M, g) 上的列维-奇维塔联络。关于叶状结构理论的概述，可参阅经典文献[28] 或较新的专著 [17]。这类结构的一些例子如下。

例 2.1。（接触流形）设$(\mathbb{M}, \theta)$ 是一个 $2n+1$ 维光滑接触流形，其 ***Reeb***向量场为 ξ。 $\mathbb{M}$ 上的 ***Reeb*** 叶状结构由 ξ 的轨道给出。由 *[25],* 可知，总能找到一个黎曼度量 g 和一个定义在 $\mathbb{M}$ 上的(1,1)-张量场 J，使得对任意向量场 X, Y

$$g(X, \xi) = \theta(X), \quad J^2(X) = -X + \theta(X)\xi, \quad 2g(JX, Y) = d\theta(X, Y). \tag{2.1}$$

三元组$(\mathbb{M}, \theta, g)$ 称为接触黎曼流形。注意，水平分布 $\mathcal{H}$ 是 θ 的核；由于 θ 是接触形式，因而非退化， $\mathcal{H}$ 是括号生成的。在 ***Sasakian*** 情形下，***Reeb***叶状结构是全测地的，且度量是丛状的。

例 2.2. （***Carnot***群）另一大类同样符合我们框架的例子是 ***Carnot***群。***Carnot***群是一个连通、单连通的幂零李群 G，其李代数 $\mathfrak{g}$具有如下分层

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s, \tag{2.2}$$

并满足以下性质：

（i） $[V_1, V_j] = V_{j+1}$ 对每个 $1 \leq j < s$,
（ii） $[V_1, V_s] = \{0\}$。

整数 s 称为 ***Carnot***群的步，而 V_1 称为水平层（或第一层）。在 $\mathfrak{g}$ 上取任意一个使分解 （2.2）正交的内积，即对于 $i \neq j$， $V_i \perp V_j$。该内积唯一确定一个左不变黎曼度量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 在 G上。我们可以将切丛 TG 正交分解为

$$TG = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$$

其中， $\mathcal{H}$ 是左不变子丛，它在单位元处给出 V_1 ； $\mathcal{V}$ 是左不变子丛，它在单位元处给出 $\oplus_{i \geq 2} V_i$ 。由于 $[\mathcal{V}, \mathcal{V}] \subset \mathcal{V}$， $\mathcal{V}$ 是 G上的叶状结构 $\mathcal{F}$ 的垂直丛。注意， $\mathcal{H}$ 是括号生成的。

2.2 水平拉普拉斯算子与热核

水平拉普拉斯算子。 函数 f 的黎曼梯度记为∇f ，水平梯度记为 $\nabla_{\mathcal{H}} f$：它就是将 ∇f投影到 $\mathcal{H}$上的结果。类似地， $\nabla_{\mathcal{V}}$ 表示垂直梯度。水平拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathcal{H}}$ 是对称 $L^2(M,\ \mu)$-闭双线性型的生成元:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(f,g) = -\int_{\mathbb{M}} \langle \nabla_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{H}} g \rangle_{\mathcal{H}}\, d\mu, \quad f,g \in C_0^{\infty}(M),$$

其中， μ 表示 M 上的黎曼体积测度， $C_0^{\infty}(M)$表示 M上的光滑紧支集函数空间。

引理2.3。 如果 X_1、 $\cdots$、 X_n 是水平向量场的局部正交归一标架，则局部有

$$\Delta_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \sum_{i=1}^{n} (D_{X_i} X_i)_{\mathcal{H}} - \mathrm{H}. \tag{2.3}$$

其中H是叶的平均曲率向量场。

证明。 如果 f、 $g \in C_0^{\infty}(M)$的支集足够小，则有

$$\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(f,g) = -\int_{\mathbb{M}} \sum_{i=1}^{n} (X_i f)(X_i g)\, d\mu.$$

因此，局部有

$$\Delta_{\mathcal{H}} = -\sum_{i=1}^{n} X_i^* X_i,$$

其中， X_i^* 是 $L^2(M,\mu)$中的 X_i 的形式伴随算子。现在令(Z_ℓ) $1 \le \ell \le m$ 为局部垂直正交标架。由于 μ是黎曼体积测度，容易验证

$$X_i^* = -X_i + \sum_{j=1}^{n} \left\langle D_{X_j} X_j, X_i \right\rangle + \sum_{\ell=1}^{m} \left\langle D_{Z_\ell} Z_\ell, X_i \right\rangle.$$

因此，我们有

$$\Delta_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \sum_{i=1}^{n} (D_{X_i} X_i)_{\mathcal{H}} - \sum_{\ell=1}^{m} (D_{Z_\ell} Z_\ell)_{\mathcal{H}}.$$

由于叶的平均曲率向量场由第二基本形式 $\mathrm{II}(U,V) = (D_U V)_{\mathcal{H}}, U, V \in \mathcal{V}$的迹给出，因此我们有

$$\mathrm{H} = \sum_{\ell=1}^{m} (D_{Z_\ell} Z_\ell)_{\mathcal{H}}.$$

结论由此得出。 □

热核。 $\mathcal{H}$ 具有括号生成性质这一假设意味着水平拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathcal{H}}$ 是局部次椭圆的，而关于 g 的完备性假设意味着$\Delta_{\mathcal{H}}$ 在 $C_0^\infty(M)$上还是本质自伴的，因此热核的构造是经典的，例如参见 [5]）。该自伴扩张仍记作$\Delta_{\mathcal{H}}$。若 $\Delta_{\mathcal{H}} = -\int_0^{+\infty} \lambda dE_\lambda$ 表示 $\Delta_{\mathcal{H}}$ 在 $L^2(M, \mu)$中的谱分解，则根据定义，热半群 $(P_t)_{t\geq 0}$ 由 $P_t = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dE_\lambda$给出。它是作用于 $L^2(M, \mu)$上的一参数有界算子族。由于二次型 $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ 的闭包是狄利克雷型，$(P_t)_{t\geq 0}$ 是一个次马尔可夫半群：它将非负函数映射为非负函数，并满足

$$P_t 1 \leq 1.$$

次马尔可夫性质和 Riesz-Thorin 插值经典地允许我们在 $L^p(M, \mu)$ 中构造半群 $(P_t)_{t\geq 0}$，并且对于 $f \in L^p(M, \mu)$，有

$$\|P_t f\|_{L^p(M,\mu)} \leq \|f\|_{L^p(M,\mu)}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

由于 $\Delta_{\mathcal{H}}$ 的亚椭圆性，存在一个光滑函数 $p(t, x, y)$， $t \in (0, +\infty)$ $x, y \in M$，使得对于每个 $f \in L^p(M, \mu)$， $1 \leq p \leq \infty$ 且 $x \in \mathbb{M}$，

$$P_t f(x) = \int_M p(t, x, y) f(y) d\mu(y).$$

函数 $p(t, x, y)$ 称为与 $(P_t)_{t\geq 0}$ 相关的水平热核。它还满足：

(i)（对称性） $p(t, x, y) = p(t, y, x)$;

(ii) (Chapman-Kolmogorov relation) $p(t + s, x, y) = \int_M p(t, x, z)p(s, z, y)d\mu(z)$.

此外，对于 $f \in L^p(M, \mu)$， $1 < p < \infty$，函数

$$u(t, x) = P_t f(x), \quad t \geq 0, x \in M.$$

是柯西问题的唯一解

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{\mathcal{H}} u, \quad u(0, x) = f(x).$$

2.3 基本联络

列维-奇维塔联络 D 通常不适合用于研究叶状结构，因为水平丛和垂直丛可能并非 D-平行。存在一种更自然的联络∇，能够保持叶状结构，见 [7], [6], [19]。

命题 **命题 2.4** ([19]). 存在唯一的度量联络 ∇ 定义在 M 上，使得：

- $\mathcal{H}$和 $\mathcal{V}$是 ∇-平行的，即对于每个 $X \in \mathcal{X}(\mathcal{H})$ $Y \in \mathcal{X}(TM)$ $Z \in \mathcal{X}(\mathcal{V})$,

$$\nabla_Y X \in \mathcal{X}(\mathcal{H}), \quad \nabla_Y Z \in \mathcal{X}(\mathcal{V}). \tag{2.4}$$

- 挠率 挠率$^\nabla$ 满足 ∇ 挠率$^\nabla(\mathcal{H},\mathcal{H}) \subset \mathcal{V}$以及 挠率$^\nabla(\mathcal{V},\mathcal{V}) \subset \mathcal{H}$。
- 对于任意 $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{H})$, $V, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{V})$,

$$\langle \mathrm{Tor}^\nabla(X,Z), Y\rangle = \langle \mathrm{Tor}^\nabla(Y,Z), X\rangle, \qquad \langle \mathrm{Tor}^\nabla(Z,X), V\rangle = \langle \mathrm{Tor}^\nabla(V,X), Z\rangle. \tag{2.5}$$

注 2.5。 </style}联络 在更一般的情况下定义，并且在切丛可正交分解为 的黎曼流形背景下，由上述性质唯一刻画；不需要可积性 。可积性实际上等价于 挠率$^\nabla(\mathcal{V},\mathcal{V}) = 0$, 参见公式 (2.8)。

联络 ∇ 可通过引入一个 (2,1) 型张量 C ，由以下公式表示为列维-奇维塔联络 D 的形式:

$$\langle C_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{X_\mathcal{V}} g)(Y_\mathcal{H}, Z_\mathcal{H}) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{X_\mathcal{H}} g)(Y_\mathcal{V}, Z_\mathcal{V}). \tag{2.6}$$

注意，以下性质成立:

$$C_\mathcal{V}\mathcal{V} = 0, \qquad C_\mathcal{V}\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}, \qquad C_\mathcal{H}\mathcal{H} = 0, \qquad C_\mathcal{H}\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}. \tag{2.7}$$

随后，联络 ∇ 可通过列维-奇维塔联络表示为

$$\nabla_X Y = \begin{cases} (D_X Y)_\mathcal{H}, & X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}), \\ [X,Y]_\mathcal{H} + C_X Y, & X \in \mathfrak{X}(\mathcal{V}),\ Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}), \\ [X,Y]_\mathcal{V} + C_X Y, & X \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}),\ Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{V}), \\ (D_X Y)_\mathcal{V}, & X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{V}). \end{cases}$$

其挠率由下式给出

$$\mathrm{Tor}^\nabla(X,Y) = \begin{cases} -[X,Y]_\mathcal{V} & X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}), \\ C_X Y - C_Y X & X \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}), Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{V}), \\ 0 & X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{V}). \end{cases} \tag{2.8}$$

对于 $Z \in \mathfrak{X}(TM)$，存在唯一的斜对称自同态 J_Z: $T_xM \to T_xM$使得对任意向量场 X 和 Y,

$$\langle J_Z X, Y\rangle = \left\langle Z, \mathrm{Tor}^\nabla(X,Y)\right\rangle. \tag{2.9}$$

采用这一记号，可以很容易验证，Levi-Civita 联络 D 与联络 ∇ 之间的关系由下式给出

$$\nabla_X Y = D_X Y + \frac{1}{2}\mathrm{Tor}^\nabla(X,Y) - \frac{1}{2}J_X Y - \frac{1}{2}J_Y X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(TM). \tag{2.10}$$

注记 2.6. 从挠率公式可以看出:

- 度量 g 是丛状的，即 $\mathcal{L}_Z g(X,X) = 0$ 对于 $Z \in \mathcal{X}(\mathcal{V})$ $X \in \mathcal{X}(\mathcal{H})$ 当且仅当 $T(\mathcal{H},\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$;

- 叶是全测地的，即 $D_U V \in \mathcal{X}(\mathcal{V})$ 对于 $U,V \in \mathcal{X}(\mathcal{V})$ 当且仅当$\mathcal{L}_X g(Z,Z) = 0$ 对于 $Z \in \mathcal{X}(\mathcal{V})$ $X \in \mathcal{X}(\mathcal{H})$ 当且仅当 $T(\mathcal{H},\mathcal{V}) \subset \mathcal{H}$。

例 2.7 (接触流形**)**。 设(M,θ,g) 是例 *2.1* 中的接触黎曼流形。在这种情况下，可以验证

$$\nabla_X Y = D_X Y + \theta(X)JY - \theta(Y)D_X\xi + [(D_X\theta)Y]\xi.$$

因此， ∇ 与 *[26]*中引入的 *Tanno*联络一致。

例 2.8 (Carnot群**)**。 考虑例 *2.2* 中 *Carnot*群上的叶状结构。对于左不变向量场 X，记ad_X 为映射$\mathrm{ad}_X(Y) = [X,Y]$，并记ad^* 为其伴随算子。由 *Koszul*公式可知，对于左不变向量场

$$\nabla_X Y = \begin{cases} 0, & X,Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}), \\ 0, & X \in \mathfrak{X}(\mathcal{V}),\ Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}), \\ \frac{1}{2}\mathrm{ad}_X Y, & X \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}),\ Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{V}), \\ -\frac{1}{2}\mathrm{ad}_X Y - \frac{1}{2}\mathrm{ad}_Y^* X - \frac{1}{2}\mathrm{ad}_X^* Y, & X,Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{V}). \end{cases}$$

$\circ$联络的水平拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathcal{H}}$ ∇ 定义为 ∇-Hessian 在水平方向上的迹。因此，在局部水平正交标架X_i 下可表示为

$$\overset{\circ}{\Delta}_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{X_i}\nabla_{X_i} - \nabla_{X_i X_i}.$$

注意，根据引理2.3以及 ∇的定义，我们因此有

$$\Delta_{\mathcal{H}} = \overset{\circ}{\Delta}_{\mathcal{H}} - \mathrm{H}. \tag{2.11}$$

3 Bochner公式与曲率-维数不等式

本节的首要目标是证明水平拉普拉斯算子的 Bochner 型公式。第一个公式针对水平方向，第二个则针对垂直方向。关键在于将这些量表示为

$$\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{H}}|\nabla_{\mathcal{H}} f|^2 - \langle \nabla_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{H}}\Delta_{\mathcal{H}} f\rangle$$

and

$$\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{H}}|\nabla_{\mathcal{V}} f|^2 - \langle \nabla_{\mathcal{V}} f, \nabla_{\mathcal{V}}\Delta_{\mathcal{H}} f\rangle$$

与联络 ∇相关的张量所构成的表达式。这些公式推广了 [9]中针对具有横向对称性的次黎曼流形以及 [11]中针对接触流形所得的公式。

我们将使用以下记号。首先，回顾一下，H 表示平均曲率向量场，我们对 $U, V \in \mathcal{X}(TM)$ 定义

$$\nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(U,V) = \frac{1}{2}\left\langle \nabla_U \mathrm{H}, V\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \nabla_V \mathrm{H}, U\right\rangle .$$

对于光滑函数 f 和 $U, V \in \mathcal{X}(TM)$，我们定义

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}^{\nabla,\mathrm{sym}} f(U,V) &= \frac{1}{2}(\mathrm{Hess}^{\nabla} f(U,V) + \mathrm{Hess}^{\nabla} f(V,U)) \\ &= \frac{1}{2}\left(UV + VU - \nabla_U V - \nabla_V U\right) f\end{aligned}$$

and

$$\mathrm{Hess}^{\nabla,\mathrm{sym}}_{\mathcal{H}} f(U,V) = \mathrm{Hess}^{\nabla,\mathrm{sym}}_{\mathcal{H}} f(U_{\mathcal{H}}, V_{\mathcal{H}}).$$

对于以下记号，下面的 X_i 是水平向量的任意局部正交标架，而 U, V 是 $\mathcal{X}(TM)$ 中的任意向量。

- 联络 ∇ 的水平Ricci曲率定义为如下 (2,0) 张量

$$\mathrm{Ric}^{\nabla}_{\mathcal{H}}(U,V) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \mathrm{Riem}^{\nabla}(U,X_i)X_i, V\right\rangle$$

- 挠率的水平散度定义为一个 (1，1) 张量

$$\delta^{\nabla}_{\mathcal{H}} \mathrm{Tor}^{\nabla}(U) = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{X_i} \mathrm{Tor}^{\nabla}(X_i, U).$$

- $$(\mathrm{Tor}^{\nabla}(U), \mathrm{Tor}^{\nabla}(V))_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(U,X_i), \mathrm{Tor}^{\nabla}(V,X_i)\right\rangle$$

- $$\tau(U,V) = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(X_i, \mathrm{Tor}^{\nabla}(X_i,U)), V\rangle$$

- $$\iota(U) = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(U,X_i), X_i\rangle$$

- $$(J_U, J_V)_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{n} \left\langle J_U X_i, J_V X_i\right\rangle_{\mathcal{H}} .$$

3.1 水平拉普拉斯算子的水平与垂直 Bochner 公式

使用上述引入的记号，Bochner公式可写如下 .

定理 3.1。 设 $f \in C^\infty(M)$ 以及 $X_1, \cdots, X_n$ 为水平向量场的局部正交归一标架。我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{H}}|\nabla_{\mathcal{H}} f|^2 =& \langle \nabla_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{H}}\Delta_{\mathcal{H}} f\rangle + 2\sum_i \langle \nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{V}} f, \mathrm{Tor}^\nabla(\nabla_{\mathcal{H}} f, X_i)\rangle + |\mathrm{Hess}^{\nabla,\mathrm{sym}}_{\mathcal{H}} f|^2 \\ & - \langle \nabla_{\mathcal{V}} f, \delta_{\mathcal{H}}\mathrm{Tor}^\nabla(\nabla_{\mathcal{H}} f)\rangle + \mathrm{Ric}^\nabla_{\mathcal{H}}(\nabla_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{H}} f) - (\mathrm{Tor}^\nabla(\nabla_{\mathcal{H}} f), \mathrm{Tor}^\nabla(\nabla_{\mathcal{V}} f))_{\mathcal{H}} \\ & + \frac{1}{4}(J_{\nabla_{\mathcal{V}} f}, J_{\nabla_{\mathcal{V}} f})_{\mathcal{H}} + \nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(\nabla_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{H}} f) + \left\langle \mathrm{Tor}^\nabla(\mathrm{H}, \nabla_{\mathcal{H}} f), \nabla f\right\rangle - \tau(\nabla_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{H}} f)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{H}}|\nabla_{\mathcal{V}} f|^2 =& \langle \nabla_{\mathcal{V}} f, \nabla_{\mathcal{V}}\Delta_{\mathcal{H}} f\rangle + 2\sum_i \langle \nabla_{X_i}\nabla f, \mathrm{Tor}^\nabla(\nabla_{\mathcal{V}} f, X_i)\rangle + \mid \nabla_{\mathcal{H}}\nabla_{\mathcal{V}} f \mid^2 \\ & - \langle \nabla f, \delta_{\mathcal{H}}\mathrm{Tor}^\nabla(\nabla_{\mathcal{V}} f)\rangle - (\mathrm{Tor}^\nabla(\nabla_{\mathcal{V}} f), \mathrm{Tor}^\nabla(\nabla_{\mathcal{V}} f))_{\mathcal{H}} + \mathrm{Ric}^\nabla_{\mathcal{H}}(\nabla_{\mathcal{V}} f, \nabla_{\mathcal{H}} f) \\ & + 2\nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(\nabla_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{V}} f) + \left\langle \mathrm{Tor}^\nabla(\mathrm{H}, \nabla_{\mathcal{V}} f), \nabla f\right\rangle - \tau(\nabla_{\mathcal{V}} f, \nabla_{\mathcal{H}} f).\end{aligned}$$

证明相当冗长，部分灵感来自 [19]。我们从四个预备引理开始。下文中， f 是 $C^\infty(M)$中的一个固定函数。第一个引理对联络 ∇的水平 Hessian 的 Hilbert–Schmidt 范数进行对称化。

引理 3.2。

$$|\nabla_{\mathcal{H}}\nabla_{\mathcal{H}} f|^2 = |\mathrm{Hess}^{\nabla,\mathrm{sym}}_{\mathcal{H}} f|^2 + \frac{1}{4}(J_{\nabla_{\mathcal{V}} f}, J_{\nabla_{\mathcal{V}} f})_{\mathcal{H}}$$

证明。 若 $X_1, \cdots, X_n$ 是局部水平正交标架，则

$$\begin{aligned}|\nabla_{\mathcal{H}}\nabla_{\mathcal{H}} f|^2 &= \sum_{i=1}^n |\nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{H}} f|^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{H}} f, X_j\rangle^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{1}{2}\langle \nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{H}} f, X_j\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{H}} f, X_j\rangle\right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{1}{2}\langle \nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{H}} f, X_j\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla_{X_j}\nabla_{\mathcal{H}} f, X_i\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathrm{Tor}^\nabla(X_j, X_i), \nabla f\rangle\right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\langle \nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{H}} f, X_j\rangle + \langle \nabla_{X_j}\nabla_{\mathcal{H}} f, X_i\rangle}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n \langle \mathrm{Tor}^\nabla(X_j, X_i), \nabla f\rangle^2.\end{aligned}$$

注意，由于挠率张量的反对称性，混合项为零。由于 $\mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathcal{H},\mathcal{H}) \subset \mathcal{V}$，因此我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}\langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(X_j,X_i),\nabla f\rangle^2 &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(X_j,X_i),\nabla_{\mathcal{V}} f\rangle^2\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle X_i, J_{\nabla_{\mathcal{V}} f}X_j\rangle^2\\ &= \sum_{j=1}^{n}|J_{\nabla_{\mathcal{V}} f}X_j|^2_{\mathcal{H}}\\ &= (J_{\nabla_{\mathcal{V}} f}, J_{\nabla_{\mathcal{V}} f})_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

□

第二个引理讨论与联络∇相关的Ricci型交换恒等式。

引理3.3。 若 $X_1,\cdots,X_n$ 是局部水平正交标架，则

$$\sum_{i=1}^{n}\langle[\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}} f}\nabla_{X_i}-\nabla_{\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}} f}X_i}]\nabla f,X_i\rangle = \langle\nabla_{\mathcal{H}} f,\nabla_{\mathcal{H}}\mathring{\Delta}_{\mathcal{H}} f\rangle$$

and

$$\sum_{i=1}^{n}\langle[\nabla_{\nabla_{\mathcal{V}} f}\nabla_{X_i}-\nabla_{\nabla_{\nabla_{\mathcal{V}} f}X_i}]\nabla f,X_i\rangle = \langle\nabla_{\mathcal{V}} f,\nabla_{\mathcal{V}}\mathring{\Delta}_{\mathcal{H}} f\rangle.$$

证明。 我们有

$$\begin{aligned}\mathring{\Delta}_{\mathcal{H}} f &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Hess}^{\nabla} f(X_i,X_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{X_i}\nabla f,X_i\rangle.\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{\mathcal{H}} f,\nabla_{\mathcal{H}}\mathring{\Delta}_{\mathcal{H}} f\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n}(X_j\langle\nabla_{X_i}\nabla f,X_i\rangle)X_j f\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}(\langle\nabla_{X_j}\nabla_{X_i}\nabla f,X_i\rangle+\langle\nabla_{X_i}\nabla f,\nabla_{X_j}X_i\rangle)X_j f\\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}} f}\nabla_{X_i}\nabla f,X_i\rangle+\sum_{i,j=1}^{n}\langle\nabla_{X_i}\nabla f,\nabla_{X_j}X_i\rangle)X_j f\end{aligned}$$

利用 $\langle \nabla_{X_j} X_i, X_k \rangle = -\langle \nabla_{X_j} X_k, X_i \rangle$，我们现在计算

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{X_i} \nabla f, \nabla_{X_j} X_i \rangle X_j f &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \langle \nabla_{X_i} \nabla f, X_k \rangle \langle \nabla_{X_j} X_i, X_k \rangle X_j f \\
&= -\sum_{i,j,k=1}^{n} \langle \nabla_{X_i} \nabla f, X_k \rangle \langle \nabla_{X_j} X_k, X_i \rangle X_j f \\
&= -\sum_{j,k=1}^{n} \langle \nabla_{\nabla_{X_j} X_k} \nabla f, X_k \rangle X_j f \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \langle \nabla_{\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}} f} X_k} \nabla f, X_k \rangle.
\end{aligned}$$

我们得出

$$\sum_{i=1}^{n} \langle [\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}} f} \nabla_{X_i} - \nabla_{\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}} f} X_i}] \nabla f, X_i \rangle = \langle \nabla_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{H}} \mathring{\Delta}_{\mathcal{H}} f \rangle.$$

第二个计算的过程几乎相同。首先有

$$\langle \nabla_{\mathcal{V}} f, \nabla_{\mathcal{V}} \mathring{\Delta}_{\mathcal{H}} f \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\nabla_{\mathcal{V}} f} \nabla_{X_i} \nabla f, X_i \rangle + \langle \nabla_{X_i} \nabla f, \nabla_{\nabla_{\mathcal{V}} f} X_i \rangle.$$

然后

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{X_i} \nabla f, \nabla_{\nabla_{\mathcal{V}} f} X_i \rangle &= \sum_{i,k,m=1}^{n} \langle \nabla_{X_i} \nabla f, X_k \rangle \langle \nabla_{Z_m} X_i, X_k \rangle Z_m f \\
&= -\sum_{i,k,m=1}^{n} \langle \nabla_{X_i} \nabla f, X_k \rangle \langle \nabla_{Z_m} X_k, X_i \rangle Z_m f \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \langle \nabla_{\nabla_{\nabla_{\mathcal{V}} f} X_k} \nabla f, X_k \rangle.
\end{aligned}$$

□

在证明的其余部分，定义

$$u_1 = \frac{1}{2} |\nabla_{\mathcal{H}} f|^2, \; u_2 = \frac{1}{2} |\nabla_{\mathcal{V}} f|^2.$$

引理 3.4。我们有

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{H}} u_1 &= \nabla_{\nabla_{\mathcal{H}} f} (\nabla_{\mathcal{H}} f) + (J_{\nabla f} \nabla_{\mathcal{H}} f)_{\mathcal{H}}, \\
\nabla_{\mathcal{H}} u_2 &= \nabla_{\nabla_{\mathcal{V}} f} (\nabla_{\mathcal{H}} f) + (J_{\nabla f} \nabla_{\mathcal{V}} f)_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

证明。 由于 ∇ 是度量联络，对于任意 $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{H})$，我们有，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}X\langle\nabla_{\mathcal{H}}f,\nabla_{\mathcal{H}}f\rangle &= \langle\nabla_X\nabla_{\mathcal{H}}f,\nabla_{\mathcal{H}}f\rangle = \langle\nabla_X\nabla f,\nabla_{\mathcal{H}}f\rangle\\ &= \mathrm{Hess}^{\nabla}f(X,\nabla_{\mathcal{H}}f) = \mathrm{Hess}^{\nabla}f(\nabla_{\mathcal{H}}f,X) - \langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(X,\nabla_{\mathcal{H}}f),\nabla f\rangle\\ &= \langle\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}}f}\nabla f,X\rangle + \langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{H}}f,X),\nabla f\rangle\\ &= \langle\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}}f}\nabla_{\mathcal{H}}f,X\rangle + \langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{H}}f,X),\nabla f\rangle\end{aligned}$$

现在回顾 J 张量的定义

$$\langle J_Z X,Y\rangle = \langle Z,\mathrm{Tor}^{\nabla}(X,Y)\rangle.$$

因此我们得到

$$\langle\nabla_{\mathcal{H}}u_1,X\rangle = \frac{1}{2}X\langle\nabla_{\mathcal{H}}f,\nabla_{\mathcal{H}}f\rangle = \langle\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}}f}\nabla_{\mathcal{H}}f,X\rangle + \langle(J_{\nabla f}\nabla_{\mathcal{H}}f)_{\mathcal{H}},X\rangle$$

由于这对每个 $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{H})$ 都成立，因此可得

$$\nabla_{\mathcal{H}}u_1 = \nabla_{\nabla_{\mathcal{H}}f}\nabla_{\mathcal{H}}f + (J_{\nabla f}\nabla_{\mathcal{H}}f)_{\mathcal{H}}.$$

同样，对于任意 $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{H})$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}X\langle\nabla_{\mathcal{V}}f,\nabla_{\mathcal{V}}f\rangle &= \langle\nabla_X\nabla_{\mathcal{V}}f,\nabla_{\mathcal{V}}f\rangle = \langle\nabla_X\nabla f,\nabla_{\mathcal{V}}f\rangle\\ &= \mathrm{Hess}^{\nabla}f(X,\nabla_{\mathcal{V}}f) = \mathrm{Hess}^{\nabla}f(\nabla_{\mathcal{V}}f,X) - \langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(X,\nabla_{\mathcal{V}}f),\nabla f\rangle\\ &= \langle\nabla_{\nabla_{\mathcal{V}}f}\nabla f,X\rangle + \langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{V}}f,X),\nabla f\rangle\\ &= \langle\nabla_{\nabla_{\mathcal{V}}f}\nabla f,X\rangle + \langle J_{\nabla f}\nabla_{\mathcal{V}}f,X\rangle.\end{aligned}$$

□

下一个引理讨论平均曲率向量的贡献。

引理 3.5。

$$\frac{1}{2}\mathrm{H}|\nabla_{\mathcal{H}}f|^2 - \langle\nabla_{\mathcal{H}}f,\nabla_{\mathcal{H}}\mathrm{H}f\rangle = -\nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(\nabla_{\mathcal{H}}f,\nabla_{\mathcal{H}}f) - \left\langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathrm{H},\nabla_{\mathcal{H}}f),\nabla f\right\rangle$$

and

$$\frac{1}{2}\mathrm{H}|\nabla_{\mathcal{V}}f|^2 - \langle\nabla_{\mathcal{V}}f,\nabla_{\mathcal{V}}\mathrm{H}f\rangle = -2\nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(\nabla_{\mathcal{V}}f,\nabla_{\mathcal{H}}f) - \left\langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathrm{H},\nabla_{\mathcal{V}}f),\nabla f\right\rangle.$$

证明。 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为局部水平正交标架， $Z_1,\cdots,Z_m$ 为局部垂直正交标架。由于 H 是水平的，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{H}|\nabla_{\mathcal{H}}f|^2-\langle\nabla_{\mathcal{H}}f,\nabla_{\mathcal{H}}\mathrm{H}f\rangle\\
=&\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{H}X_if)(X_if)-\sum_{i=1}^{n}(X_i\mathrm{H}f)(X_if)\\
=&\sum_{i=1}^{n}([\mathrm{H},X_i]f)(X_if)\\
=&\sum_{i,j=1}^{n}\langle[\mathrm{H},X_i],X_j\rangle(X_jf)(X_if)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m}\langle[\mathrm{H},X_i],Z_\ell\rangle(Z_\ell f)(X_if)\\
=&-\sum_{i,j=1}^{n}\langle\nabla_{X_i}\mathrm{H},X_j\rangle(X_jf)(X_if)+\sum_{i,j=1}^{n}\langle\nabla_{\mathrm{H}}X_i,X_j\rangle(X_jf)(X_if)\\
&-\left\langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathrm{H},\nabla_{\mathcal{H}}f),\nabla_{\mathcal{H}}f\right\rangle-\left\langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathrm{H},\nabla_{\mathcal{H}}f),\nabla_{\mathcal{V}}f\right\rangle
\end{aligned}$$

由于 $\langle\nabla_{\mathrm{H}}X_i,X_j\rangle=-\langle\nabla_{\mathrm{H}}X_j,X_i\rangle$，我们可以写成

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{H}|\nabla_{\mathcal{H}}f|^2-\langle\nabla_{\mathcal{H}}f,\nabla_{\mathcal{H}}\mathrm{H}f\rangle\\
=&-\sum_{i,j=1}^{n}\langle\nabla_{X_i}\mathrm{H},X_j\rangle(X_jf)(X_if)-\left\langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathrm{H},\nabla_{\mathcal{H}}f),\nabla_{\mathcal{H}}f\right\rangle-\left\langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathrm{H},\nabla_{\mathcal{H}}f),\nabla_{\mathcal{V}}f\right\rangle\\
=&-\nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(\nabla_{\mathcal{H}}f,\nabla_{\mathcal{H}}f)-\left\langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathrm{H},\nabla_{\mathcal{H}}f),\nabla f\right\rangle.
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}\mathrm{H}|\nabla_{\mathcal{V}}f|^2-\langle\nabla_{\mathcal{V}}f,\nabla_{\mathcal{V}}\mathrm{H}f\rangle$ 的计算遵循相同的模式：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{H}|\nabla_{\mathcal{V}}f|^2-\langle\nabla_{\mathcal{V}}f,\nabla_{\mathcal{V}}\mathrm{H}f\rangle\\
=&\sum_{\ell=1}^{m}([\mathrm{H},Z_\ell]f)(Z_\ell f)\\
=&\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\langle[\mathrm{H},Z_\ell],X_j\rangle(Z_\ell f)(X_jf)+\sum_{k,\ell=1}^{m}\langle[\mathrm{H},Z_\ell],Z_k\rangle(Z_\ell f)(Z_kf)\\
=&-\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\langle\nabla_{Z_\ell}\mathrm{H},X_j\rangle(X_jf)(Z_\ell f)-\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left\langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathrm{H},Z_\ell),X_j\right\rangle(X_jf)(Z_\ell f)\\
&-\left\langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathrm{H},\nabla_{\mathcal{V}}f),\nabla_{\mathcal{V}}f\right\rangle-\nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(\nabla_{\mathcal{V}}f,\nabla_{\mathcal{V}}f)
\end{aligned}$$

最后请注意，由于 H 是水平的，$\left\langle\nabla_{X_j}\mathrm{H}\ Z_\ell\right\rangle=\nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(\nabla_{\mathcal{V}}f,\ \nabla_{\mathcal{V}}f)=0$。我们得出结-

出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathrm{H}|\nabla_{\mathcal{V}}f|^2-\langle\nabla_{\mathcal{V}}f,\nabla_{\mathcal{V}}\mathrm{H}f\rangle\\=&-2\nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(\nabla_{\mathcal{V}}f,\nabla_{\mathcal{H}}f)-\left\langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathrm{H},\nabla_{\mathcal{V}}f),\nabla f\right\rangle.\end{aligned}$$

□

现在我们可以开始证明定理 3.1。

定理 *3.1* 的证明。 代入引理 3.4 中的结果，我们得到，对于每个 $X\in\mathfrak{X}(\mathcal{H})$,

$$\begin{aligned}&\langle\nabla_X\nabla_{\mathcal{H}}u_1,X\rangle\\=&\langle\nabla_X\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}}f}\nabla_{\mathcal{H}}f,X\rangle+\langle\nabla_X(J_{\nabla f}\nabla_{\mathcal{H}}f)_{\mathcal{H}},X\rangle\\=&\langle\nabla_X\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}}f}\nabla f,X\rangle+\langle\nabla_X(J_{\nabla f}\nabla_{\mathcal{H}}f),X\rangle\\=&\langle\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}}f}\nabla_X\nabla f,X\rangle+\langle\mathrm{Riem}^{\nabla}(X,\nabla_{\mathcal{H}}f)\nabla f,X\rangle+\langle\nabla_{[X,\nabla_{\mathcal{H}}f]}\nabla f,X\rangle+\langle\nabla_X(J_{\nabla f}\nabla_{\mathcal{H}}f),X\rangle\\=&\langle\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}}f}\nabla_X\nabla f,X\rangle+\langle\mathrm{Riem}^{\nabla}(X,\nabla_{\mathcal{H}}f)\nabla_{\mathcal{H}}f,X\rangle+\langle\nabla_{\nabla_X\nabla_{\mathcal{H}}f-\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}}f}X-\mathrm{Tor}^{\nabla}(X,\nabla_{\mathcal{H}}f)}\nabla f,X\rangle\\&+\langle\nabla_X(J_{\nabla f}\nabla_{\mathcal{H}}f),X\rangle\\=&\langle[\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}}f}\nabla_X-\nabla_{\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}}f}X}]\nabla f,X\rangle+\langle\mathrm{Riem}^{\nabla}(X,\nabla_{\mathcal{H}}f)\nabla_{\mathcal{H}}f,X\rangle+\langle\nabla_{\nabla_X\nabla_{\mathcal{H}}f-\mathrm{Tor}^{\nabla}(X,\nabla_{\mathcal{H}}f)}\nabla f,X\rangle\\&+\langle\nabla_X(J_{\nabla f}\nabla_{\mathcal{H}}f),X\rangle.\end{aligned}$$

回忆一下，对于所有 $A,\ B\in\mathfrak{X}(TM)$,

$$\langle\nabla_A\nabla f,B\rangle=\langle\nabla_B\nabla f,A\rangle+\langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(B,A),\nabla f\rangle.$$

Thus

$$\begin{aligned}&\langle\nabla_{\nabla_X\nabla_{\mathcal{H}}f}\nabla f,X\rangle-\langle\nabla_{\mathrm{Tor}^{\nabla}(X,\nabla_{\mathcal{H}}f)}\nabla f,X\rangle\\=&\langle\nabla_X\nabla f,\nabla_X\nabla_{\mathcal{H}}f\rangle+\langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(X,\nabla_X\nabla_{\mathcal{H}}f),\nabla f\rangle\\&-\langle\nabla_X\nabla f,\mathrm{Tor}^{\nabla}(X,\nabla_{\mathcal{H}}f)\rangle-\langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(X,\mathrm{Tor}^{\nabla}(X,\nabla_{\mathcal{H}}f)),\nabla f\rangle.\end{aligned}$$

此外，由于 ∇ 是度量相容的，我们有

$$\begin{aligned}&\langle\nabla_X(J_{\nabla f}\nabla_{\mathcal{H}}f),X\rangle\\=&X\langle J_{\nabla f}\nabla_{\mathcal{H}}f,X\rangle-\langle J_{\nabla f}\nabla_{\mathcal{H}}f,\nabla_XX\rangle\\=&X\langle\nabla f,\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{H}}f,X)\rangle-\langle\nabla f,\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{H}}f,\nabla_XX)\rangle\\=&\langle\nabla_X\nabla f,\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{H}}f,X)\rangle+\langle\nabla f,\nabla_X(\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{H}}f,X))\rangle-\langle\nabla f,\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{H}}f,\nabla_XX)\rangle\\=&\langle\nabla_X\nabla f,\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{H}}f,X)\rangle+\langle\nabla f,(\nabla_X\mathrm{Tor}^{\nabla})(\nabla_{\mathcal{H}}f,X)\rangle+\langle\nabla f,\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_X\nabla_{\mathcal{H}}f,X)\rangle.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\langle\nabla_{\nabla_X\nabla_{\mathcal{H}}f-\mathrm{Tor}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{H}}f)}\nabla f,X\rangle\ +\langle\nabla_X(J_{\nabla f}\nabla_{\mathcal{H}}f),X\rangle\\
=&\langle\nabla_X\nabla f,\nabla_X\nabla_{\mathcal{H}}f\rangle+2\langle\nabla_X\nabla f,\mathrm{Tor}^\nabla(\nabla_{\mathcal{H}}f,X)\rangle+\langle\nabla f,(\nabla_X\mathrm{Tor}^\nabla)(\nabla_{\mathcal{H}}f,X)\rangle\\
&-\langle\mathrm{Tor}^\nabla(X,\mathrm{Tor}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{H}}f)),\nabla f\rangle\\
=&|\nabla_X\nabla_{\mathcal{H}}f|^2+2\langle\nabla_X\nabla_{\mathcal{V}}f,\mathrm{Tor}^\nabla(\nabla_{\mathcal{H}}f,X)\rangle+\langle\nabla_{\mathcal{V}}f,(\nabla_X\mathrm{Tor}^\nabla)(\nabla_{\mathcal{H}}f,X)\rangle\\
&-\langle\mathrm{Tor}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{V}}f),\mathrm{Tor}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{H}}f)\rangle-\langle\mathrm{Tor}^\nabla(X,\mathrm{Tor}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{H}}f)),\nabla_{\mathcal{H}}f\rangle.
\end{aligned}$$

在最后一行中，我们用到了联络 ∇ 的挠率满足 $U,\ V\in\mathfrak{X}(\mathcal{V})$ 和 $X,\ Y\in\mathfrak{X}(\mathcal{H})$ 这一事实

$$\langle\mathrm{Tor}^\nabla(U,X),V\rangle=\langle\mathrm{Tor}^\nabla(V,X),U\rangle,\qquad \mathrm{Tor}^\nabla(X,Y)\in\mathcal{X}(\mathcal{V}).$$

将所有结果合并，得到

$$\begin{aligned}
\langle\nabla_X\nabla_{\mathcal{H}}u_1,X\rangle=&\langle[\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}}f}\nabla_X-\nabla_{\nabla_{\nabla_{\mathcal{H}}f}X}]\nabla f,X\rangle+|\nabla_X\nabla_{\mathcal{H}}f|^2+\langle\mathrm{Riem}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{H}}f)\nabla_{\mathcal{H}}f,X\rangle\\
&+2\langle\nabla_X\nabla_{\mathcal{V}}f,\mathrm{Tor}^\nabla(\nabla_{\mathcal{H}}f,X)\rangle+\langle\nabla_{\mathcal{V}}f,(\nabla_X\mathrm{Tor}^\nabla)(\nabla_{\mathcal{H}}f,X)\rangle\\
&-\langle\mathrm{Tor}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{V}}f),\mathrm{Tor}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{H}}f)\rangle-\langle\mathrm{Tor}^\nabla(X,\mathrm{Tor}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{H}}f)),\nabla_{\mathcal{H}}f\rangle.
\end{aligned}$$

最后，令 X 遍历一个水平标架，求和后利用引理 3.5、3.2 和 3.3，即得所需结果。

现在我们来讨论垂直方向上的第二个 Bochner 公式。计算过程与前面的类似，因此这里只展示主要步骤。与前一种情形类似，我们有

$$\begin{aligned}
&\langle\nabla_X\nabla_{\mathcal{H}}u_2,X\rangle\\
=&\langle[\nabla_{\nabla_{\mathcal{V}}f}\nabla_X-\nabla_{\nabla_{\nabla_{\mathcal{V}}f}X}](\nabla f),X\rangle+\langle\mathrm{Riem}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{V}}f)\nabla_{\mathcal{H}}f,X\rangle+\langle\nabla_{\nabla_X\nabla_{\mathcal{V}}f-\mathrm{Tor}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{V}}f)}(\nabla f),X\rangle\\
&+\langle\nabla_X(J_{\nabla f}\nabla_{\mathcal{V}}f)_{\mathcal{H}},X\rangle.
\end{aligned}$$

那么，与之前一样，我们有

$$\begin{aligned}
&\langle\nabla_{\nabla_X\nabla_{\mathcal{V}}f-\mathrm{Tor}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{V}}f)}\nabla f,X\rangle\ +\langle\nabla_X(J_{\nabla_{\mathcal{V}}f}\nabla_{\mathcal{V}}f),X\rangle\\
=&|\nabla_X\nabla_{\mathcal{V}}f|^2+2\langle\nabla_X\nabla f,\mathrm{Tor}^\nabla(\nabla_{\mathcal{V}}f,X)\rangle+\langle\nabla f,(\nabla_X\mathrm{Tor}^\nabla)(\nabla_{\mathcal{V}}f,X)\rangle\\
&-\langle\mathrm{Tor}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{V}}f),\mathrm{Tor}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{V}}f)\rangle-\langle\mathrm{Tor}^\nabla(X,\mathrm{Tor}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{V}}f)),\nabla_{\mathcal{H}}f\rangle.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
\langle\nabla_X\nabla_{\mathcal{H}}u_2,X\rangle=&\langle[\nabla_{\nabla_{\mathcal{V}}f}\nabla_X-\nabla_{\nabla_{\nabla_{\mathcal{V}}f}X}]\nabla f,X\rangle+|\nabla_X\nabla_{\mathcal{V}}f|^2+2\langle\nabla_X\nabla f,\mathrm{Tor}^\nabla(\nabla_{\mathcal{V}}f,X)\rangle\\
&+\langle\nabla f,(\nabla_X\mathrm{Tor}^\nabla)(\nabla_{\mathcal{V}}f,X)\rangle-\langle\mathrm{Tor}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{V}}f),\mathrm{Tor}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{V}}f)\rangle\\
&-\langle\mathrm{Tor}^\nabla(X,\mathrm{Tor}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{V}}f)),\nabla_{\mathcal{H}}f\rangle+\langle\mathrm{Riem}^\nabla(X,\nabla_{\mathcal{V}}f)\nabla_{\mathcal{H}}f,X\rangle
\end{aligned}$$

对局部水平正交标架求和后，结论由引理 3.5 和引理 3.3 得出。

□

3.2 全梯度的水平拉普拉斯算子的 Bochner 公式

将水平和垂直 Bochner 公式相加，可得到一个涉及全梯度的公式。为使表述更简洁，我们引入以下张量：对于U， $V \in \mathcal{X}(TM)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(U,V) :=& -\langle U, \delta_{\mathcal{H}}\mathrm{Tor}^{\nabla}(V)\rangle - 2(\mathrm{Tor}^{\nabla}(U), \mathrm{Tor}^{\nabla}(V_{\mathcal{V}}))_{\mathcal{H}} - (\mathrm{Tor}^{\nabla}(U), \mathrm{Tor}^{\nabla}(V_{\mathcal{H}}))_{\mathcal{H}} \\ &- \tau(U, V_{\mathcal{H}}) + \mathrm{Ric}^{\nabla}_{\mathcal{H}}(U, V_{\mathcal{H}}) + \nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(U,V) + \left\langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathrm{H}, U), V\right\rangle . \end{aligned} \tag{3.1}$$

注意，如果度量是丛状的且叶是极小的，那么 $\mathfrak{R}$ 与近期在 [6]中引入的张量一致。特别地，在任意 Carnot群中， $\mathfrak{R}$ 是一个对称张量。一般而言， $\mathfrak{R}$并不对称。

推论3.6。 令 $f \in C^{\infty}(M)$ 和 $X_1, \cdots, X_n$ 为水平向量场的局部正交归一标架。我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{H}}|\nabla f|^2 =& \langle \nabla f, \nabla \Delta_{\mathcal{H}} f\rangle + \sum_{i,j=1}^{n}\left(\mathrm{Hess}^{\nabla,\mathrm{sym}} f(X_i, X_j) + \langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{V}} f, X_i), X_j\rangle\right)^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{n} |\nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{V}} f - \mathrm{Tor}^{\nabla}(X_i, \nabla f)_{\mathcal{V}}|^2 + \mathfrak{R}(\nabla f, \nabla f)\end{aligned}$$

证明。B 将水平与垂直博赫纳公式相加，容易验证

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{H}}|\nabla f|^2 =& \langle \nabla f, \nabla \Delta_{\mathcal{H}} f\rangle + 2\sum_i \langle \nabla_{X_i}\nabla f, \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla f, X_i)\rangle + |\mathrm{Hess}^{\nabla,\mathrm{sym}}_{\mathcal{H}} f|^2 \\ &- \langle \nabla f, \delta_{\mathcal{H}}\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla f)\rangle + \mathrm{Ric}^{\nabla}_{\mathcal{H}}(\nabla f, \nabla_{\mathcal{H}} f) + \mid \nabla_{\mathcal{H}}\nabla_{\mathcal{V}} f \mid^2 \\ &- (\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla f), \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{V}} f))_{\mathcal{H}} + \frac{1}{4}(J_{\nabla_{\mathcal{V}} f}, J_{\nabla_{\mathcal{V}} f})_{\mathcal{H}} - \tau(\nabla f, \nabla_{\mathcal{H}} f) \\ &+ \nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(\nabla f, \nabla f) + \left\langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathrm{H}, \nabla f), \nabla f\right\rangle .\end{aligned}$$

我们进行配方，得到

$$\begin{aligned}&\mid \nabla_{\mathcal{H}}\nabla_{\mathcal{V}} f \mid^2 + 2\sum_i \langle \nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{V}} f, \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla f, X_i)\rangle \\ =& \sum_{i=1}^{n} \mid \nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{V}} f + \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla f, X_i) \mid^2 - \mid \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla f, X_i) \mid^2_{\mathcal{V}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&|\mathrm{Hess}^{\nabla,\mathrm{sym}}_{\mathcal{H}} f|^2 + 2\sum_i \langle \nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{H}} f, \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla f, X_i)\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\langle \nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{H}} f, X_j\rangle + \langle \nabla_{X_j}\nabla_{\mathcal{H}} f, X_i\rangle}{2} \right)^2 + 2\langle \nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{H}} f, X_j\rangle \langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla f, X_i), X_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\langle \nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{H}} f, X_j\rangle + \langle \nabla_{X_j}\nabla_{\mathcal{H}} f, X_i\rangle}{2} \right)^2 + 2\frac{\langle \nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{H}} f, X_j\rangle + \langle \nabla_{X_j}\nabla_{\mathcal{H}} f, X_i\rangle}{2} \langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla f, X_i), X_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left(\mathrm{Hess}^{\nabla,\mathrm{sym}} f(X_i, X_j) + \langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{V}} f, X_i), X_j\rangle \right)^2 - \sum_{i=1}^n |\ \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla f, X_i)\ |^2_{\mathcal{H}}
\end{aligned}
$$

因此，根据 $\mathfrak{R}$ 张量的定义即可得出结论。 □

由此可得我们的第一个曲率维数估计：

推论 3.7。设 $f \in C^\infty(M)$。那么，

$$\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{H}}|\nabla f|^2 - \langle \nabla f, \nabla \Delta_{\mathcal{H}} f\rangle \geq \frac{1}{n}(\Delta_{\mathcal{H}} f + \iota(\nabla_{\mathcal{V}} f))^2 + \mathfrak{R}(\nabla f, \nabla f).$$

证明。 这由下界可得

$$\sum_{i,j=1}^n \left(\mathrm{Hess}^{\nabla,\mathrm{sym}} f(X_i, X_j) + \langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{V}} f, X_i), X_j\rangle \right)^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n \mathrm{Hess}^{\nabla,\mathrm{sym}} f(X_i, X_i) + \langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{V}} f, X_i), X_i\rangle \right)^2.$$

□

3.3 曲率维数不等式

´关于 Bakry-Emery 演算，我们引入以下记号：对于 f， $g \in C^\infty(M)$，定义

$$\Gamma_2^{\mathcal{H}}(f,g) = \frac{1}{2}\left(\Delta_{\mathcal{H}}\langle \nabla_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{H}} g\rangle - \langle \nabla_{\mathcal{H}}\Delta_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{H}} g\rangle - \langle \nabla_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{H}}\Delta_{\mathcal{H}} g\rangle\right)$$

and

$$\Gamma_2^{\mathcal{V}}(f,g) = \frac{1}{2}\left(\Delta_{\mathcal{H}}\langle \nabla_{\mathcal{V}} f, \nabla_{\mathcal{V}} g\rangle - \langle \nabla_{\mathcal{V}}\Delta_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{V}} g\rangle - \langle \nabla_{\mathcal{V}} f, \nabla_{\mathcal{V}}\Delta_{\mathcal{H}} g\rangle\right).$$

我们得到的第一个估计相当一般，可由推论 3.7 和不等式轻易推出

$$(a+b)^2 \geq \frac{\lambda}{1+\lambda}a^2 - \lambda b^2.$$

命题 3.8。 设 $\lambda \geq 0$。假设存在常数 $K \in \mathbb{R}$，使得对于每个 $X \in \mathcal{X}(TM)$

$$\mathfrak{R}(X,X) - \lambda\iota(X)^2 \geq K|X|^2.$$

那么，对于每个 $f \in C^\infty(M)$

$$\Gamma_2^{\mathcal{H}}(f,f) + \Gamma_2^{\mathcal{V}}(f,f) \geq \frac{\lambda}{n(1+\lambda)}(\Delta_{\mathcal{H}} f)^2 + K|\nabla f|^2.$$

备注 3.9. 如果 $\iota = 0$*s*（如接下来由 *[11]* 得出的接触流形情形）且$\mathfrak{R}(X,X) \geq K|X|^2$，那么可以取 $\lambda = +\infty$ 使得

$$\Gamma_2^{\mathcal{H}}(f,f) + \Gamma_2^{\mathcal{V}}(f,f) \geq \frac{1}{n}(\Delta_{\mathcal{H}} f)^2 + K|\nabla f|^2.$$

第二个曲率维数估计需要更多条件，但能导出更多结果。例如，当流形 M 是紧致的，或是叶状结构左不变或右不变的李群时，这些条件便得到满足。

定理 3.10. 假设存在一个常数 $C \geq 0$ ，使得

$$\max\left\{|\mathrm{Tor}^{\nabla}|, |\delta_{\mathcal{H}}\mathrm{Tor}^{\nabla}|, |\mathrm{H}|, |\nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}|, |\mathrm{Ric}_{\mathcal{H}}|\right\} \leq C.$$

那么，存在常数 $\rho_1 \in \mathbb{R}$、 $\rho_2 \geq 0$、 $\rho_3 \geq 0$、 $\rho_4 \geq 0$、 $\kappa \geq 0$ 和 $N \geq n$，它们都取决于常数 C，使得对于任意 $f \in C^\infty$（M）和 $\nu > 0$

$$\Gamma_2^{\mathcal{H}}(f,f) + \nu\Gamma_2^{\mathcal{V}}(f,f) \geq \frac{1}{N}(\Delta_{\mathcal{H}} f)^2 + \left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\nu}\right)|\nabla_{\mathcal{H}} f|^2 + (\rho_2 - \rho_3\nu - \rho_4\nu^2)|\nabla_{\mathcal{V}} f|^2. \quad (3.2)$$

此外：

- 若度量是丛状的，则可以取 $\rho_4 = 0$;
- 若水平分布 $\mathcal{H}$ 是一致二阶生成的，即存在常数 $K > 0$ ，使得对于任意局部水平正交标架X_i 以及任意 $U \in \mathcal{X}$（$\mathcal{V}$），

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle [X_i, X_j], U\rangle^2 \geq K|U|^2,$$

那么可以取 $\rho_2 > 0$。

证明。 令 $\nu > 0$ ，并且在此证明中，对于函数 $f \in C^\infty$(*M*)，记

$$\nabla^\nu f = \nabla_{\mathcal{H}} f + \nu\nabla_{\mathcal{V}} f.$$

结合水平与垂直博赫纳公式，我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma_2^{\mathcal{H}}(f,f) + \nu\Gamma^{\mathcal{V}}(f,f) =& 2\sum_i \langle \nabla_{X_i}\nabla f, \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla^\nu f, X_i)\rangle + |\mathrm{Hess}_{\mathcal{H}}^{\nabla,\mathrm{sym}} f|^2 \\ &- \langle \nabla f, \delta_{\mathcal{H}}\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla^\nu f)\rangle + \mathrm{Ric}_{\mathcal{H}}^{\nabla}(\nabla^\nu f, \nabla_{\mathcal{H}} f) + \nu \mid \nabla_{\mathcal{H}}\nabla_{\mathcal{V}} f \mid^2 \\ &- (\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla^\nu f), \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{V}} f))_{\mathcal{H}} + \frac{1}{4}(J_{\nabla_{\mathcal{V}} f}, J_{\nabla_{\mathcal{V}} f})_{\mathcal{H}} - \tau(\nabla^\nu f, \nabla_{\mathcal{H}} f) \\ &+ \nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(\nabla_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{H}} f) + 2\nu\nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(\nabla_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{V}} f) + \left\langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathrm{H}, \nabla^\nu f), \nabla f\right\rangle.\end{aligned}$$

与之前一样，我们现在通过配方得到

$$\begin{aligned}&\nu \mid \nabla_{\mathcal{H}}\nabla_{\mathcal{V}}f \mid^2 +2\sum_i\langle\nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{V}}f,\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla^{\nu}f,X_i)\rangle\\ =&\sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{\nu}\nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{V}}f+\frac{1}{\sqrt{\nu}}\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla^{\nu}f,X_i)_{\mathcal{V}}\right|^2-\frac{1}{\nu}\mid\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla^{\nu}f,X_i)\mid^2_{\mathcal{V}}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&|\mathrm{Hess}^{\nabla,\mathrm{sym}}_{\mathcal{H}}f|^2+2\nu\sum_i\langle\nabla_{X_i}\nabla_{\mathcal{H}}f,\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{V}}f,X_i)\rangle\\ =&\sum_{i,j=1}^{n}\left(\mathrm{Hess}^{\nabla,\mathrm{sym}}f(X_i,X_j)+\nu\langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{V}}f,X_i),X_j\rangle\right)^2-\nu^2\sum_{i=1}^{n}\mid\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{V}}f,X_i)\mid^2_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\Gamma_2^{\mathcal{H}}(f,f)+\nu\Gamma_2^{\mathcal{V}}(f,f)\geq&\frac{1}{n}(\Delta_{\mathcal{H}}f+\nu\,\iota(\nabla_{\mathcal{V}}f))^2-\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{n}\mid\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla^{\nu}f,X_i)\mid^2_{\mathcal{V}}-\nu^2\sum_{i=1}^{n}\mid\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{V}}f,X_i)\mid^2_{\mathcal{H}}\\ &-\langle\nabla f,\delta_{\mathcal{H}}\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla^{\nu}f)\rangle+\mathrm{Ric}^{\nabla}_{\mathcal{H}}(\nabla^{\nu}f,\nabla_{\mathcal{H}}f)\\ &-(\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla^{\nu}f),\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{V}}f))_{\mathcal{H}}+\frac{1}{4}(J_{\nabla_{\mathcal{V}}f},J_{\nabla_{\mathcal{V}}f})_{\mathcal{H}}-\tau(\nabla^{\nu}f,\nabla_{\mathcal{H}}f)\\ &+\nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(\nabla_{\mathcal{H}}f,\nabla_{\mathcal{H}}f)+2\nu\nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(\nabla_{\mathcal{H}}f,\nabla_{\mathcal{V}}f)\\ &+\left\langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathrm{H},\nabla^{\nu}f),\nabla f\right\rangle.\end{aligned}$$

于是，利用我们的假设以及多次使用初等不等式

$$(a+b)^2\geq\frac{\lambda}{1+\lambda}a^2-\lambda b^2,\qquad ab\geq-\frac{1}{2\lambda}a^2-\frac{\lambda}{2}b^2$$

我们推得 (3.2)。
现在，假设度量是丛状的。在这种情况下，根据注记 2.6，$\mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathcal{H},\ \mathcal{V})\subset\mathcal{V}$。因此，有

$$\sum_{i=1}^{n}\mid\mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla f,X_i)\mid^2_{\mathcal{H}}=0$$

并且我们可以选取 $\rho_4=0$。
最后，假设存在常数 $K>0$，使得对于每个局部水平正交标架 X_i 以及每个 $U\in\mathcal{X}$（$\mathcal{V}$），

$$\sum_{i,j=1}^{n}\langle[X_i,X_j],U\rangle^2\geq K|U|^2.$$

在这种情况下，有

$$\begin{aligned} K|U|^2 &\le \sum_{i,j=1}^{n} \langle [X_i, X_j], U\rangle^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(X_i, X_j), U\right\rangle^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle X_i, J_U X_j\rangle^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} |J_U X_j|^2 = (J_U, J_U)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

这意味着

$$(J_{\nabla_{\mathcal{V}} f}, J_{\nabla_{\mathcal{V}} f})_{\mathcal{H}} \ge K\Gamma^{\mathcal{V}}(f, f).$$

由于 $K > 0$，我们因此看到，(3.2) 中的 ρ_2 可以取为正数。 □

从证明中可以清楚看出，参数 N, κ, ρ_i 并非唯一。然而，若曲率-维数不等式 (3.2) 成立，则若干张量约束也成立。

推论 3.11。 假设存在常数 $\rho_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $\kappa \ge 0$，使得(3.2) 成立。那么，对每个 $U \in \mathcal{X}(\mathcal{H})$

$$\begin{cases} \mathrm{Ric}^{\nabla}_{\mathcal{H}}(U, U) + \nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(U, U) \ge \rho_1 |U|^2 \\ (\mathrm{Tor}^{\nabla}(U), \mathrm{Tor}^{\nabla}(U))_{\mathcal{H}} \le \kappa |U|^2 \end{cases}$$

并且对每个 $V \in \mathcal{X}(\mathcal{V})$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(J_V, J_V)_{\mathcal{H}} \ge \rho_2 |V|^2 \\ \sum_{i=1}^{n} |\ \mathrm{Tor}^{\nabla}(V, X_i)\ |^2_{\mathcal{V}} + \langle V, \delta_{\mathcal{H}} \mathrm{Tor}^{\nabla}(V)\rangle + (\mathrm{Tor}^{\nabla}(V), \mathrm{Tor}^{\nabla}(V))_{\mathcal{H}} + \left\langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathrm{H}, V), V\right\rangle \le \rho_3 |V|^2 \\ \sum_{i=1}^{n} |\ \mathrm{Tor}^{\nabla}(V, X_i)\ |^2_{\mathcal{H}} \le \rho_4 |V|^2, \end{cases}$$

其中， X_i 构成任意的水平正交标架。

证明。 假设对于每个 $f \in C^\infty(M)$ 和 $\nu > 0$, (3.2) 都成立。令 $x \in M$ and $u \in \mathcal{H}_x$, $v \in \mathcal{V}_x$。设 X_i 是 x 附近的局部水平正交标架。可以找到一个函数$f \in C^\infty(M)$，使得在 x

$$\begin{cases} \nabla_{\mathcal{H}} f = u \\ \nabla_{\mathcal{V}} f = v \\ \sqrt{\nu} \nabla_{X_i} \nabla_{\mathcal{V}} f + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla^{\nu} f, X_i)_{\mathcal{V}} = 0 \\ \mathrm{Hess}^{\nabla, \mathrm{sym}} f(X_i, X_j) + \nu \langle \mathrm{Tor}^{\nabla}(\nabla_{\mathcal{V}} f, X_i), X_j\rangle = 0 \end{cases}$$

在 x 处将 (3.2) 应用于这样的函数 f，可得 $v=0$

$$-\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{n}\mid \mathrm{Tor}^{\nabla}(u,X_i)\mid_{\mathcal{V}}^{2}+\mathrm{Ric}_{\mathcal{H}}^{\nabla}(u,u)+\nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}(u,u)\geq\left(\rho_1-\frac{\kappa}{\nu}\right)|u|^2$$

对于 $u=0$

$$\begin{aligned}&-\nu\sum_{i=1}^{n}\mid \mathrm{Tor}^{\nabla}(v,X_i)\mid_{\mathcal{V}}^{2}-\nu^2\sum_{i=1}^{n}\mid \mathrm{Tor}^{\nabla}(v,X_i)\mid_{\mathcal{H}}^{2}-\nu\langle v,\delta_{\mathcal{H}}\mathrm{Tor}^{\nabla}(v)\rangle\\&-\nu(\mathrm{Tor}^{\nabla}(v),\mathrm{Tor}^{\nabla}(v))_{\mathcal{H}}+\frac{1}{4}(J_v,J_v)_{\mathcal{H}}+\nu\left\langle\mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathrm{H},v),v\right\rangle\\\geq&(\rho_2-\rho_3\nu-\rho_4\nu^2)|v|^2,\end{aligned}$$

由于这对每个 $\nu>0$ 都成立，我们很容易得出结论。 □

4 应用

现在我们转向论文的第二部分，重点关注 Bochner 恒等式在几何分析中的应用。

4.1 水平拉普拉斯比较定理

曲率维数估计的第一个应用，是将 [6] 中证明的水平拉普拉斯比较定理推广到我们的设定中。更准确地说，下面的结果从 [6] 的假设中去除了度量的丛状条件和叶的极小性。

定理 4.1。 设 $\lambda>0$。假设存在常数 $K\in\mathbb{R}$，使得对于每个$X\in\mathcal{X}(TM)$

$$\mathfrak{R}(X,X)-\lambda\iota(X)^2\geq K|X|^2.$$

令 $p\in M$，并记 $r_p(x)=d(p,\ x)$。那么，对于不在 p 的割迹上的 $x\neq p$，

$$\Delta_{\mathcal{H}}r_p(x)\leq\begin{cases}\sqrt{NK}\cot\left(\sqrt{\frac{K}{N}}r_p(x)\right) & if\ K>0,\\ \dfrac{N}{r_p(x)} & if\ K=0,\\ \sqrt{N|K|}\coth\left(\sqrt{\frac{|K|}{N}}r_p(x)\right) & if\ K<0,\end{cases}$$

其中 $N=\frac{n}{(1+\lambda)\ \lambda}$。

证明。设 $p \in M$ 和 $x \neq p$ 不在 p的割迹上。设 $\gamma : [0, r_p(x)] \to M$ 是从 p 到 x的唯一按长度参数化的测地线。记 $\phi(t) = \Delta_{\mathcal{H}} r_p(\gamma(t))$。于是有

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \left\langle \gamma'(t), \nabla \Delta_{\mathcal{H}} r_p(\gamma(t)) \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla r_p(\gamma(t)), \nabla \Delta_{\mathcal{H}} r_p(\gamma(t)) \right\rangle .\end{aligned}$$

由命题 3.8 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{H}} |\nabla r_p|^2(\gamma(t)) - \langle \nabla r_p(\gamma(t)), \nabla \Delta_{\mathcal{H}} r_p(\gamma(t)) \rangle \\ \geq &\frac{\lambda}{n(1+\lambda)} (\Delta_{\mathcal{H}} r_p(\gamma(t)))^2 + K |\nabla r_p(\gamma(t))|^2.\end{aligned}$$

由于 $|\nabla r_p| = 1$，我们推得

$$-\phi'(t) \geq \frac{\lambda}{n(1+\lambda)} \phi(t)^2 + K.$$

记

$$G(t) = \begin{cases} \sin\left(\sqrt{\frac{K}{N}} r_p(x)\right) & \text{if } K > 0, \\ t & \text{if } K = 0, \\ \sinh\left(\sqrt{\frac{|K|}{N}} r_p(x)\right) & \text{if } K < 0. \end{cases}$$

我们使用初等不等式

$$\frac{\lambda}{n(1+\lambda)} \phi(t)^2 \geq 2 \frac{G'(t)}{G(t)} \phi(t) - \frac{n(1+\lambda)}{\lambda} \frac{G'(t)^2}{G(t)^2},$$

由此得到

$$-\phi'(t) \geq 2 \frac{G'(t)}{G(t)} \phi(t) - \frac{n(1+\lambda)}{\lambda} \frac{G'(t)^2}{G(t)^2} + K.$$

两边乘以 $G(t)^2$，并从 0 到 $r_p(x)$ 积分，可得

$$-\int_0^{r_p(x)} \phi'(t) G(t)^2 + 2G'(t) G(t) \phi(t) dt \geq \int_0^{r_p(x)} -\frac{n(1+\lambda)}{\lambda} G'(t)^2 + K G(t)^2 dt.$$

现在，通过在黎曼指数坐标中进行局部计算，显然可得 $\lim_{t \to 0} \phi(t) G(t)^2 = 0$，因此有

$$-G(r_p(x))^2 \phi(r_p(x)) \geq \int_0^{r_p(x)} -\frac{n(1+\lambda)}{\lambda} G'(t)^2 + K G(t)^2 dt$$

计算该积分后，证明即告完成。 □

根据 [6] ，我们可以从拉普拉斯比较定理中推导出几个有趣的结果。这些结果的证明几乎完全相同，因此我们仅陈述结果而不予证明。

推论 4.2 (Bonnet-Myers 型定理)。 设 $\lambda > 0$。假设存在一个常数 $K > 0$，使得对任意 $X \in \mathcal{X}(TM)$

$$\mathfrak{R}(X,X) - \lambda\iota(X)^2 \geq K|X|^2$$

则 M 是紧的，并且

$$\mathbf{diam}(M) \leq \pi\sqrt{\frac{n(1+\lambda)}{\lambda K}}.$$

推论 4.3。 设 $\lambda > 0$。假设存在一个常数 $K \geq 0$ ，使得对任意$X \in \mathcal{X}(TM)$

$$\mathfrak{R}(X,X) - \lambda\iota(X)^2 \geq K|X|^2.$$

则热半群 P_t 是随机完备的，即对任意 $x \in M$ 和$t \geq 0$

$$P_t 1(x) = 1.$$

此外，存在常数 c_1、 c_2、 $c_3 > 0$，使得对任意 $x \in M$和 $t > 0$

$$p_t(x,x) \geq \begin{cases} \frac{c_1}{\mu(B(x,c_2\sqrt{t}))}, \ \textit{if } K = 0, \\ \frac{c_1}{\mu\left(B\left(x, c_2\left(\frac{e^{c_3\sqrt{|K|}t}-1}{\sqrt{|K|}}\right)^{1/2}\right)\right)}, \ \textit{if } K < 0. \end{cases}$$

这里， $B(x,\ r)$ 表示以 x 为中心、半径为 r 的球，其中距离取黎曼距离。

4.2 第一特征值估计

曲率-维数不等式还给出了水平拉普拉斯算子的第一特征值估计。

命题 4.4. 假设 M 是紧的，并且存在一个常数 $K > 0$ ，使得对于每个 $X \in \mathcal{X}(TM)$

$$\mathfrak{R}(X,X) \geq K|X|^2.$$

那么，水平拉普拉斯算子的第一特征值 λ_1 满足

$$\lambda_1 \geq K.$$

证明。 令 $f \in C^\infty(M)$。对 Bochner 公式积分可得

$$\int_M \frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{H}}|\nabla f|^2 d\mu \geq \int_M \langle \nabla f, \nabla\Delta_{\mathcal{H}} f\rangle d\mu + \int_M |\mathrm{Hess}^{\nabla,\mathrm{sym}}(\nabla_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{H}} f)|^2 d\mu + \int_M \mathfrak{R}(\nabla f, \nabla f) d\mu.$$

现在，令 f 为 $-\Delta_{\mathcal{H}}$ 的特征函数，其特征值为 λ_1。上述不等式的左侧为零。因此，

$$0 \geq -\lambda_1 \int_M |\nabla f|^2 d\mu + \int_M |\mathrm{Hess}^{\nabla,\mathrm{sym}}(\nabla_{\mathcal{H}} f, \nabla_{\mathcal{H}} f)|^2 d\mu + \int_M \mathfrak{R}(\nabla f, \nabla f) d\mu.$$

根据我们对 $\mathfrak{R}$ 的假设，我们有

$$\mathfrak{R}(\nabla f, \nabla f) \geq K |\nabla f|^2.$$

我们推得

$$0 \geq -\lambda_1 \int_M |\nabla f|^2 d\mu + K \int_M |\nabla f|^2 d\mu.$$

我们的结果立即得出。 □

通过这一参数化的曲率-维数不等式族，或许可以得到关于第一特征值的更好估计。

命题 4.5。 假设估计 (3.2) 成立，并且

$$\rho_1 \rho_2 > \kappa(\rho_3 + \sqrt{\rho_2 \rho_4}).$$

那么 M 是紧的，且水平拉普拉斯算子的第一特征值 λ_1 满足

$$\lambda_1 \geq \frac{\rho_1 \rho_2 - \kappa(\rho_3 + \sqrt{\rho_2 \rho_4})}{\left(\frac{N-1}{N}\right) \rho_2 + \kappa}.$$

证明。 假设 (3.2) 对 $\rho_1 \rho_2 > \kappa(\rho_3 + \sqrt{\rho_2 \rho_4})$ 成立。于是有

$$\rho_2 - \rho_3 \frac{\kappa}{\rho_1} - \rho_4 \frac{\kappa^2}{\rho_1^2} > 0.$$

因此存在 $\nu > 0$ 使得

$$\rho_1 - \frac{\kappa}{\nu} > 0, \qquad \rho_2 - \rho_3 \nu - \rho_4 \nu^2 > 0.$$

这意味着存在 $\nu > 0$、$N \geq n$ 和 $K > 0$，使得对于每个 $f \in C^\infty(M)$

$$\Gamma_2^{\mathcal{H}}(f, f) + \nu \Gamma_2^{\mathcal{V}}(f, f) \geq \frac{1}{N} (\Delta_{\mathcal{H}} f)^2 + K(\Gamma(f, f) + \nu \Gamma^{\mathcal{V}}(f, f)).$$

利用 与黎曼度量相关的距离的定理 4.1 的证明

$$g^\nu(X, Y) = g(X_{\mathcal{H}}, Y_{\mathcal{H}}) + \frac{1}{\nu} g(X_{\mathcal{V}}, Y_{\mathcal{V}})$$

我们由此推导出该度量的拉普拉斯比较定理。由于 $K > 0$，存在一个 Bonnet–Myers 型定理，因此 M 是紧致的。

现在，对于一个非常数的 $f \in C^{\infty}(M)$，使得 $\Delta_{\mathcal{H}} f = -\lambda f$，对该不等式积分

$$\Gamma_2^{\mathcal{H}}(f,f) + \nu\Gamma_2^{\mathcal{V}}(f,f) \geq \frac{1}{N}(\Delta_{\mathcal{H}} f)^2 + \left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\nu}\right)|\nabla_{\mathcal{H}} f|^2 + (\rho_2 - \rho_3\nu - \rho_4\nu^2)|\nabla_{\mathcal{V}} f|^2$$

得到

$$\begin{aligned}&\lambda^2 \int_M f^2 d\mu + \nu\lambda \int_M |\nabla_{\mathcal{V}} f|^2 d\mu \\ \geq &\frac{1}{N}\lambda^2 \int_M f^2 d\mu + \lambda\left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\nu}\right)\int_M f^2 d\mu + (\rho_2 - \rho_3\nu - \rho_4\nu^2)\int_M |\nabla_{\mathcal{V}} f|^2 d\mu.\end{aligned}$$

现在我们选择 $\nu = \frac{\rho_2}{\rho_3 + \lambda + \sqrt{\rho_2\rho_4}}$ 于是有

$$\rho_2 - (\rho_3 + \lambda)\nu - \rho_4\nu^2 \geq 0.$$

采用这一选择 ν 后，我们得到

$$\lambda^2 \int_M f^2 d\mu \geq \frac{1}{N}\lambda^2 \int_M f^2 d\mu + \lambda\left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\nu}\right)\int_M f^2 d\mu.$$

这给出

$$\lambda \geq \frac{N}{N-1}\left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\nu}\right)$$

结论很容易得出。 □

注 4.6. 在丛状且全测地的情形下，有 $\rho_3 = \rho_4 = 0$。此时估计变为

$$\lambda_1 \geq \frac{\rho_1\rho_2}{\left(\frac{N-1}{N}\right)\rho_2 + \kappa}$$

而已知根据 *[5]*，精确估计为

$$\lambda_1 \geq \frac{\rho_1\rho_2}{\left(\frac{N-1}{N}\right)\rho_2 + 3\kappa}.$$

有关更多特征值估计，另请参阅 *[12]* 。

4.3 热核梯度界

秉承著名的 Li-Yau 工作的精神， [22]Bochner公式可用于推导热核的梯度界´。得益于 Bakry-Emery 演算，这类梯度界在泛函不等式中有广泛的应用，见 [4]。

´4.3.1 Bakry-Emery 型估计

定理 4.7。 设 $\lambda > 0$。假设存在一个常数 $K \in \mathbb{R}$，使得对每个$X \in \mathcal{X}(TM)$

$$\mathfrak{R}(X,X) - \lambda\iota(X)^2 \geq K|X|^2.$$

于是，对任意 $f \in C_0^\infty(M)$</style}，

$$|\nabla P_t f|^2 + \frac{2}{N}\frac{e^{2Kt}-1}{2K}(\Delta_{\mathcal{H}} P_t f)^2 \leq e^{2Kt} P_t(|\nabla f|^2)$$

其中 $N = \frac{n}{(1+\lambda)\,\lambda}$。当 $K = 0$ 时，我们将 $\frac{e^{2Kt}-1}{2K}$ 理解为 t。

证明。 利用拉普拉斯比较定理 4.1 和 Greene-Wu 逼近定理，存在一个定义在 M 上的光滑函数 $W \geq 1$，使得对某个常数 $C > 0$

$$\Delta_{\mathcal{H}} W \leq CW, \qquad |\nabla W| \leq CW^2$$

并且对任意 $r \geq 1$， $\{W \leq r\}$ 都是紧的。因此，利用 [29, 引理 5.2 的证明。2]中所用的经典截断论证，我们可以假设 M 是紧的。在本证明中，对于 f， $g \in C^\infty(M)$，我们定义

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(f,g) &= \langle \nabla f, \nabla g\rangle \\ \mathcal{T}_2(f,g) &= \frac{1}{2}(\Delta_{\mathcal{H}}\mathcal{T}(f,g) - \mathcal{T}(f,\Delta_{\mathcal{H}} g) - \mathcal{T}(\Delta_{\mathcal{H}} f, g))\end{aligned}$$

令 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 为由 $\Delta_{\mathcal{H}}$生成的半群。于是，对于 $f \in C^\infty(M$ $)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}P_s\mathcal{T}(P_{t-s}f, P_{t-s}f) &= P_s\left[\Delta_{\mathcal{H}}\mathcal{T}(P_{t-s}f, P_{t-s}f) - 2\mathcal{T}(P_{t-s}f, \Delta_{\mathcal{H}} P_{t-s}f)\right] \\ &= 2P_s\mathcal{T}_2(P_{t-s}f, P_{t-s}f).\end{aligned}$$

另一方面，命题 3.8 表明

$$\mathcal{T}_2(P_{t-s}f, P_{t-s}f) \geq \frac{1}{N}(\Delta_{\mathcal{H}} P_{t-s}f)^2 + K\mathcal{T}(P_{t-s}f, P_{t-s}f).$$

将上述不等式代回可得

$$\frac{d}{ds}P_s\mathcal{T}(P_{t-s}f, P_{t-s}f) \geq \frac{2}{N}P_s((\Delta_{\mathcal{H}} P_{t-s}f)^2) + 2KP_s\mathcal{T}(P_{t-s}f, P_{t-s}f).$$

因此，记

$$\phi(s) = e^{-2Ks}P_s\mathcal{T}(P_{t-s}f, P_{t-s}f)$$

我们得到

$$e^{2Ks}\phi'(s) \geq \frac{2}{N}P_s((\Delta_{\mathcal{H}} P_{t-s}f)^2) \geq \frac{2}{N}(\Delta_{\mathcal{H}} P_t f)^2.$$

从 0 积分到 t，可得

$$\mathcal{T}(P_t f, P_t f) + \frac{2}{N}\frac{e^{2Kt}-1}{2K}(\Delta_{\mathcal{H}} P_t f)^2 \leq e^{2Kt}P_t\mathcal{T}(f,f).$$

证明完毕。 □

4.3.2 全局正则化估计

定理 4.8。 假设存在常数 $C \geq 0$，使得

$$\max\left\{|\mathrm{Tor}^{\nabla}|, |\delta_{\mathcal{H}}\mathrm{Tor}^{\nabla}|, |\mathrm{H}|, |\nabla^{\mathrm{sym}}\mathrm{H}|, |\mathrm{Ric}_{\mathcal{H}}|\right\} \leq C$$

进一步假设水平分布 $\mathcal{H}$ 是一致二阶生成的，如定理 *3.10* 所述。那么存在常数 c_1、c_2、$c_3 > 0$ 和 $t_0 > 0$，使得对于每个 $f \in C_0^\infty(M)$ 以及 $0 < t < t_0$

$$|\nabla_{\mathcal{H}} P_t f|^2 \leq \frac{c_1}{t}\left(P_t(f^2) - (P_t f)^2\right)$$
$$|\nabla_{\mathcal{V}} P_t f|^2 \leq \frac{c_2}{t^2}\left(P_t(f^2) - (P_t f)^2\right)$$
$$(\Delta_{\mathcal{H}} P_t f)^2 \leq \frac{c_3}{t^2}\left(P_t(f^2) - (P_t f)^2\right).$$

证明。 由定理 3.10，存在常数 $\rho_i \in \mathbb{R}$、$i = 1,2,3,4$、$\kappa \geq 0$ 和 $N \geq n$，使得对于每个 $f \in C^\infty$（M）以及 $\nu > 0$

$$\Gamma_2^{\mathcal{H}}(f,f) + \nu\Gamma_2^{\mathcal{V}}(f,f) \geq \frac{1}{N}(\Delta_{\mathcal{H}} f)^2 + \left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\nu}\right)|\nabla_{\mathcal{H}} f|^2 + (\rho_2 - \rho_3\nu - \rho_4\nu^2)|\nabla_{\mathcal{V}} f|^2.$$

此外，根据一致二阶生成条件，我们可以假设 $\rho_2 > 0$。不失一般性，我们还可以假设 $\rho_1 \leq 0, \rho_3 \geq 0, \rho_4 \geq 0$。因此，当 $\nu > 0$ 足够小时：

$$\Gamma_2^{\mathcal{H}}(f,f) + \nu\Gamma_2^{\mathcal{V}}(f,f) \geq \frac{1}{N}(\Delta_{\mathcal{H}} f)^2 + \left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\nu}\right)|\nabla_{\mathcal{H}} f|^2 + \tilde{\rho}_2|\nabla_{\mathcal{V}} f|^2 \tag{4.1}$$

其中 $\tilde{\rho}_2 > 0$。
与使用截断论证证明定理 4.7 时一样，我们可以假设 M 是紧的。令 $t > 0$ 足够小。对于 $f \in C^\infty$（M），考虑函数

$$\phi(s) = (t-s)P_s(|\nabla_{\mathcal{H}} P_{t-s} f|^2) + \tilde{\rho}_2(t-s)^2 P_s(|\nabla_{\mathcal{V}} P_{t-s} f|^2).$$

我们可以看到

$$\begin{aligned}\phi'(s) =& -P_s(|\nabla_{\mathcal{H}} P_{t-s} f|^2) - 2\tilde{\rho}_2(t-s)P_s(|\nabla_{\mathcal{V}} P_{t-s} f|^2) \\ &+ 2(t-s)P_s(\Gamma_2^{\mathcal{H}}(P_{t-s}f, P_{t-s}f)) + 2\tilde{\rho}_2(t-s)^2 P_s(\Gamma_2^{\mathcal{V}}(P_{t-s}f, P_{t-s}f)).\end{aligned}$$

因此，利用 (4.1) 和 $\nu = \tilde{\rho}_2(t-s)$，可得

$$\begin{aligned}\phi'(s) &\geq -P_s(|\nabla_{\mathcal{H}} P_{t-s} f|^2) - 2\tilde{\rho}_2(t-s)P_s(|\nabla_{\mathcal{V}} P_{t-s} f|^2) \\ &\quad + 2(t-s)P_s\left(\frac{1}{N}(\Delta_{\mathcal{H}} P_{t-s} f)^2 + \left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\tilde{\rho}_2(t-s)}\right)|\nabla_{\mathcal{H}} P_{t-s} f|^2 + \tilde{\rho}_2|\nabla_{\mathcal{V}} P_{t-s} f|^2\right) \\ &\geq \frac{2(t-s)}{N}P_s\left((\Delta_{\mathcal{H}} P_{t-s} f)^2\right) + \left(2\rho_1(t-s) - \frac{2\kappa}{\tilde{\rho}_2} - 1\right)P_s(|\nabla_{\mathcal{H}} P_{t-s} f|^2) \\ &\geq \frac{2(t-s)}{N}(\Delta_{\mathcal{H}} P_t f)^2 + \left(2\rho_1 t - \frac{2\kappa}{\tilde{\rho}_2} - 1\right)P_s(|\nabla_{\mathcal{H}} P_{t-s} f|^2).\end{aligned}$$

从 0 积分到 t，可得

$$\phi(t)-\phi(0)\geq\frac{t^2}{N}(\Delta_{\mathcal{H}}P_tf)^2+\left(2\rho_1t-\frac{2\kappa}{\tilde{\rho}_2}-1\right)\int_0^t P_s(|\nabla_{\mathcal{H}}P_{t-s}f|^2)ds.$$

然而，我们很容易看出

$$\int_0^t P_s(|\nabla_{\mathcal{H}}P_{t-s}f|^2)ds=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{ds}P_s((P_{t-s}f)^2)ds=\frac{1}{2}\left(P_t(f^2)-(P_tf)^2\right).$$

因此我们得出结论

$$t|\nabla_{\mathcal{H}}P_tf|^2+\rho_2t^2|\nabla_{\mathcal{V}}P_tf|^2+\frac{t^2}{N}(\Delta_{\mathcal{H}}P_tf)^2\leq\frac{1}{2}\left(-2\rho_1t+\frac{2\kappa}{\tilde{\rho}_2}+1\right)\left(P_t(f^2)-(P_tf)^2\right).$$

结论几乎立即可得。 □

值得注意的是，该估计

$$|\nabla_{\mathcal{H}}P_tf|^2\leq\frac{C}{t}\left(P_t(f^2)-(P_tf)^2\right)$$

´立即推出所谓的弱 Bakry-Emery 估计

$$\|\nabla_{\mathcal{H}}P_tf\|_{L^\infty}\leq\frac{C}{\sqrt{t}}\|f\|_{L^\infty}$$

该估计结合热核的高斯估计，直接推出 Riesz 变换的有界性（见 [8]）以及等周不等式和 Sobolev 不等式（见 [2]）。有关这一正则化性质的进一步讨论，另见 [24] 。O

另一方面 ，该估计

$$(\Delta_{\mathcal{H}}P_tf)^2\leq\frac{c}{t^2}\left(P_t(f^2)-(P_tf)^2\right)$$

与二阶 Riesz 变换的关系更密切，参见 [14]。

5 超越叶状情形

事实上，采用相同的方法和计算，我们的结果可以扩展到叶状情形之外。考虑一个完备黎曼流形（M， g），其切丛具有一个正交分解

$$TM=\mathcal{H}\oplus\mathcal{V},$$

其中 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{V}$ 是光滑子丛，且 $\mathcal{H}$ 是括号生成的。适配联络 ∇ 在此情形下仍有良好定义（见注 2.5）。与叶状情形的唯一区别在于，不再必然满足

$$\mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathcal{V},\mathcal{V})=0,$$

而仅满足较弱的条件 $\mathrm{Tor}^{\nabla}(\mathcal{V},\ \mathcal{V}) \subset \mathcal{H}$。
水平拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathcal{H}}$ 仍定义为水平狄利克雷型的生成元

$$\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(f,f) = -\int_M |\nabla_{\mathcal{H}} f|^2 \, d\mu,$$

并具有如下局部分解

$$\Delta_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \sum_{i=1}^{n} (D_{X_i} X_i)_{\mathcal{H}} - \sum_{\ell=1}^{m} (D_{Z_\ell} Z_\ell)_{\mathcal{H}},$$

其中，$(X_i)_{1\le i\le n}$ 和 $(Z_\ell)_{1\le \ell\le m}$ 分别是 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{V}$的局部正交归一标架。一个显著的区别是，向量场

$$\mathrm{H} = \sum_{\ell=1}^{m} (D_{Z_\ell} Z_\ell)_{\mathcal{H}}$$

不再能被解释为叶的平均曲率向量场，因为 $\mathcal{V}$ 并未假设为可积的。尽管如此，H 仍可通过联络 ∇获得自然的几何解释。事实上，利用 (2.10)，不难验证

$$\mathrm{H} = \sum_{\ell=1}^{m} J_{Z_\ell} Z_\ell.$$

除这一修改外，第3节和第4节中的所有结果均仍然成立，计算过程也无需任何改动。例如，这一稍具一般性的框架非常适合研究四元数接触流形背景下的曲率-维数不等式。我们选择在叶状结构的框架下呈现结果，因为在这一成熟框架中，各种假设和张量量（如丛状条件、全测地性以及叶的平均曲率）的几何解释更加清晰。

参考文献

[1] Andrei Agrachev、Davide Barilari 和 Ugo Boscain。《次黎曼几何导论：全面介绍》。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，2019年。[2] P. Alonso-Ruiz、F. Baudoin、L. Chen、N. Shanmugalingam 和 J. Wang。狄利克雷空间上的热半群与 Besov 类 II：有界变差函数与高斯热核估计。《变分法与偏微分方程》，59：103，2020年。[3] Dominique Bakry、Ivan Gentil 和 Michel Ledoux。《马尔可夫扩散算子的分析与几何》，《数学科学基础》丛书第348卷。《数学科学基础》丛书。施普林格，尚贝里，2014年。

[4] Dominique Bakry、Ivan Gentil 和 Michel Ledoux。《马尔可夫扩散算子的分析与几何》，《数学科学基础》丛书第348卷。施普林格国际出版公司，尚贝里，2014年。[5] Fabrice Baudoin。全测地黎曼叶状结构上的次拉普拉斯算子与亚椭圆算子。载于《次黎曼流形上的几何、分析与动力学》第1卷，欧洲数学会数学讲义系列，第259–321页。欧洲数学会，苏黎世，2016年。[6] Fabrice Baudoin。具有极小叶的黎曼叶状结构上的次拉普拉斯算子比较定理及其应用。《arXiv预印本》，第arXiv:2509.13276页，2025年9月。[7] Fabrice Baudoin。横向负曲率叶状结构的拓扑与底谱。《全球分析与几何年刊》，68(1)：16，2025年。[8] Fabrice Baudoin 和 Nicola Garofalo。关于某些次椭圆算子的 Riesz 变换有界性的一则注记。《国际数学研究通讯》，2013(2)：398–421，2012年1月。[9] Fabrice Baudoin 和 Nicola Garofalo。具有横向对称性的次黎曼流形上的曲率-维数不等式与里奇曲率下界。《欧洲数学会杂志》，19(1)：151–219，2017年。[10] Fabrice Baudoin、Erlend Grong、Kazumasa Kuwada 和 Anton Thalmaier。全测地黎曼叶状结构上的次拉普拉斯算子比较定理。《变分学与偏微分方程》，58(4)：论文编号130，38页，2019年。[11] Fabrice Baudoin 和 Jing Wang。接触流形上的曲率-维数不等式与次椭圆热核梯度界。《势分析》，40(2)：163–193，2014年。[12] Stine Marie Berge 和 Erlend Grong。次拉普拉斯算子谱隙的利希nerowicz估计。《美国数学会会刊》，147(12)：5153–5166，2019年。[13] Huai Dong Cao 和丘成桐。向量场平方和的梯度估计、哈纳克不等式与热核估计。《数学杂志》，211(3)：485–504，1992年。[14] Jun Cao、Li-Juan Cheng 和 Anton Thalmaier。完备黎曼流形上的海森热核估计与 Calder´on-Zygmund 不等式。《arXiv预印本》，第arXiv:2108.13058页，2021年8月。[15] Tian Chong、Yuxin Dong、Yibin Ren 和 Wei Zhang。从完备非紧伪厄米流形到正则球的伪调和映射。《几何分析杂志》，30(4)：3512–3541，2020年。

[16] Yuxin Dong、Yibin Ren 和 Biqiang Zhao. 完备非紧伪厄米流形上的 CR热方程梯度估计. 《数学分析及其应用杂志》, 552(1):论文编号 129730, 31 页, 2025.[17] Detlef Gromoll 和 Gerard Walschap. 度量叶状结构与曲率, 《数学进展》第 268 卷. Birkh¨auser Verlag, 巴塞尔, 2009.[18]Erlend Grong 和 Anton Thalmaier. 由黎曼叶状结构得到的次黎曼流形上的曲率-维数不等式：第一部分. 《数学杂志》, 282(1- 2):99–130, 2016.[19] Robert K. Hladky. 次黎曼几何中的联络与曲率. 《休斯敦数学杂志》, 38(4):1107–1134, 2012.[20] Stefan Ivanov 和 Alexander Petkov. 四元数接触几何中热方程的李-丘次梯度估计与 Perelman 型熵公式. *arXiv* 电子预印本, 页码 arXiv:2405.14845, 2024 年 5 月.[21] David Jerison 和 Antonio S´anchez-Calle. 次椭圆二阶微分算子. 收录于 Carlos A. Berenstein 编, 《style id='21'>《复分析 III》, 《数学讲义》第 1277 卷。施普林格, 1987.[22] Peter Li 和 丘成桐. 关于 Schr¨odinger 算子的抛物型核。《数学学报》, 156:153–201, 1986.[23] Alexander Nagel、Elias M. Stein 和 Stephen Wainger. 向量场定义的球与度量 I：基本性质. 《数学学报》, 155:103–147, 1985.[24] Nicol`o De Ponti 和 Giorgio Stefani. Lipschitz 平滑热半群的性质. 《势分析》, 63:1441–1469, 2025.[25] Shigeo Sasaki. 关于具有某些与近接触结构密切相关结构的可微流形 I. 东北数学杂志（第二辑）, 12:459–476, 1960.[26] Shukichi Tanno. 接触黎曼流形上的变分问题. 《美国数学会会刊》, 314(1):349–379, 1989.[27] Anton Thalmaier. 次椭圆扩散的几何. 收录于《次黎曼流形上的几何、分析与动力学》第二卷. EMS出版社, 2016.[28]Philippe Tondeur. 黎曼流形上的叶状结构. Universitext丛书. 施普林格出版社, 纽约.[29] Feng-Yu Wang. 黎曼流形上扩散过程的分析学, 统计科学与应用概率高级丛书第 18 卷. 世界科学出版社有限公司, 哈肯萨克，新泽西州, 2014.