arXiv:2601.02051v1 [math.AP] 5 Jan 2026

可压缩活性向列液晶 Beris-Edwards 型模型的耗散解

Kuntal Bhandari [1]、Apala Majumdar [2] 和 Šárka Nečasová [3]

摘要。我们在 Landau-de Gennes 框架下，研究三维有界区域中具有非线性黏度张量和非齐次边界数据的可压缩活性向列液晶的流体动力学。我们证明，在用于活性向列相动力学的 Beris-Edwards 型模型中，耗散解存在；这类解是满足基本方程（允许存在缺陷测度）的弱解。证明基于三级近似方案——Galerkin近似、连续性方程的经典抛物型正则化，以及产生黏性应力的势函数的凸正则化。处理非牛顿应力张量、更广泛的可容许压力势类别以及非齐次边界条件，需要采用新的技术。

目录

1. 引言 1
2. 耗散解的概念与主要结果 6
3. 先验估计 9
4. 近似解的存在性 13
5. 关于 $\delta \to 0$ 的极限 17
6. 关于 $\varepsilon \to 0$ 的极限 20
7. 最终层次：$n \to \infty$ 极限 25
8. 进一步说明 28
附录 A. 一些辅助结果 29
致谢 29
参考文献 30

1. 引言

向列液晶（向列型液晶）是部分有序材料的典型范例，兼具流动性与晶体固体的有序性 [16]。向列型液晶是各向异性复杂流体，其组成分子呈棒状或具有各向异性。棒状分子倾向于沿局部优选方向或称为向列指向矢的特定材料方向排列，因此向列型液晶具有长程取向有序，以及依赖方向的物理、光学和流变性质。长期以来，向列型液晶一直是数十亿美元规模的液晶显示器（LCD）产业以及各类电光器件和光子器件的首选工作材料。活性向列液晶是一个相对新兴且迅速发展的科学领域，与生物系统、仿生材料以及新型有生命且自主的材料相关 [35]。活性向列相通常对应由细长粒子组成的系统

日期：2026年1月6日。2020 数学主题分类。35D30，35Q35，76A15，76N06。关键词与短语。可压缩流体、非线性黏度张量、向列液晶、非齐次边界数据、耗散解、缺陷测度。[1]捷克科学院数学研究所，Žitná 25，11567 布拉格 1，捷克共和国；bhandari@math.cas.cz。[2]曼彻斯特大学数学系，曼彻斯特 M13 9PL，英国；apala.majumdar@manchester.ac.uk。[3]捷克科学院数学研究所，Žitná 25，11567 布拉格 1，捷克共和国；matus@math.cas.cz。

这些粒子会展现自发的协调集体运动；也就是说，它们本质上是非平衡系统，持续受到内部能源驱动而偏离平衡 [25]。活性系统的例子包括微生物群或细菌菌落 [15], 、微管系统 [50] 和微型游泳体 [53]。活性向列相具有诸多非凡性质，例如巨大的密度涨落 [37, 40], 、自发层流 [26, 36], 、低雷诺数湍流 [25, 53], 以及具有迷人缺陷图案的奇特时空纹理 [24, 49]，仅举数例。因此，人们对在各种情形下严格分析活性向列相的理论框架兴趣日增。本文首次对这一背景下的耗散解进行了严格分析。这是一类相对新颖的解，其适用范围比传统弱解更广，对于全面分析复杂流动的数值方法而言不可或缺。

针对向列型液晶，存在多种相互竞争的连续介质理论或宏观理论：最简单的是 Oseen-Frank 理论 [21, 44] ，它仅适用于具有单一特征向列指向矢且标量序参量为常数的单轴向列型液晶；Ericksen理论 [18] 适用于标量序参量可变的单轴向列相；而最一般、荣获诺贝尔奖的 Landau-de Gennes（LdG）理论 [16] 则能够描述具有多个指向矢和序参量的向列型液晶相，从而刻画一般的向列型液晶现象和复杂的向列型液晶缺陷 [33]。序参量衡量围绕向列指向矢的取向有序程度，而缺陷集在 Ericksen 理论中与单轴序参量的节点集相关。这是对向列型液晶缺陷的一种限制性定义，忽略了双轴性（主向列指向矢和次向列指向矢）以及缺陷集附近向第三维逃逸等重要现象。我们采用强大且最一般的向列型液晶 LdG 框架，该框架还可推广至活性向列相。在 LdG 框架中，向列型液晶态由一个宏观序参量描述，即 Q 张量序参量，它可以用介电各向异性或光学双折射数据等实验量来定义 [16, 23]。从数学上说， Q张量是一个对称、无迹的 3×3 矩阵，其特征向量表示向列指向矢，相应的特征值则定义围绕向列指向矢的序参量。 Q张量属于空间

$$S_0^3 = \left\{ Q \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid Q = Q^\top,\ \operatorname{tr}(Q) = 0 \right\}.$$

当 $Q = 0$ 时，NLC 处于各向同性相；当 Q 时，处于单轴相；当 Q 时，处于双轴相。在单轴相中， Q 张量可写为

$$Q = s\left(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbb{I}_3\right)$$

其中 $\mathbf{j}$ 是单轴向列指向矢，或对应于非简并特征值的特征向量； s 是相应的标量序参量。LdG理论是一种变分理论，LdG自由能是关于 Q和 $\nabla_x Q$的非线性非凸泛函，如下所示:

$$\mathcal{F} = \int_\Omega \left(\frac{K}{2}|\nabla_x Q|^2 + \frac{k}{4}(c - c_*)\operatorname{tr}(Q^2) - \frac{b}{3}\operatorname{tr}(Q^3) + \frac{c_*}{4}\operatorname{tr}^2(Q^2) \right). \tag{1.1}$$

这里我们采用单常数弹性能量密度， K 是正弹性常数， c_* 是各向同性-向列相变的临界浓度，而 $k > 0$ 和 $b \in \mathbb{R}$ 是材料相关常数 [12, 34]。不失一般性，我们取 $K = k = 1$。平衡构型在数学上由满足所施加边界条件的LdG理论极小化子建模。

活性向列相本质上是非平衡流体，通常可将其视为细长活性单元悬浮在周围向列流体中的体系。我们研究用于向列相动力学的可压缩 Beris-Edwards 模型的一个活性版本 [5]。Beris-Edwards理论描述 LdG Q 张量和流体速度的时间演化，这两个演化方程之间存在非线性耦合。速度的演化由纳维-斯托克斯型方程决定，其中的非线性应力源自 LdG Q 张量，因此该问题比标准流体力学问题难得多。LdG Q 张量的演化还包含 LdG序参量与速度梯度之间的耦合项，由此带来新的技术难题。Beris-Edwards 模型的活性版本包含四个模型参数：活性粒子的浓度 c、均质化流体的密度 ϱ 、流体

速度 $\mathbf{u}$，以及 LdG Q-张量序参量。遵循 [12], 我们采用以下偏微分方程组，对三维空间中的可压缩活性向列型流体进行建模。

考虑一个有界利普希茨（空间）区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 和时间区间 $(0,T)$。那么 $(\varrho,\mathbf{u}\ c,Q)$ 的时间演化由下式给出：

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}_x(\varrho \mathbf{u}) = 0, \tag{1.2}$$

$$\partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \mathrm{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_x p(\varrho) = \mathrm{div}_x \mathbb{S} + \mathrm{div}_x(\tau + \sigma), \tag{1.3}$$

$$\partial_t c + (\mathbf{u} \cdot \nabla_x)c = D_0 \Delta_x c, \tag{1.4}$$

$$\partial_t Q + (\mathbf{u} \cdot \nabla_x)Q + Q\Lambda - \Lambda Q = \Gamma H[Q,c], \tag{1.5}$$

其中 $D_0 > 0$ 是扩散常数，且 $\Lambda := \frac{1}{2}\left(\nabla_x \mathbf{u} - \nabla_x^\top \mathbf{u}\right)$ 是应变张量的反对称部分。此外，压力 $p = p(\varrho)$ 取决于流体密度，其具体性质将在后文第2.1节中给出。受 [2,第 2.1 节启发，2], 我们假设黏性应力张量 $\mathbb{S}$ 与对称速度梯度相关

$$\mathbb{D}_x \mathbf{u} = \frac{1}{2}\left(\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x^\top \mathbf{u}\right)$$

通过一种一般的隐式流变定律

$$\mathbb{S} : \mathbb{D}_x \mathbf{u} = F(\mathbb{D}_x \mathbf{u}) + F^*(\mathbb{S}), \tag{1.6}$$

对于适当的势函数 F （及其共轭函数 F^*），使得

$$F : \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}} \to [0,\infty) \text{ is a convex lower semi-continuous (l.s.c.) function with } F(0) = 0, \tag{1.7}$$

其中 $\mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}$ 是三维实对称张量空间。由于 F 是正常凸下半连续函数，其共轭函数 $F^* : \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}} \to [0,\infty)$ 也具有凸性、下半连续性和超线性，参见 [4, 命题 2。1]此外，由于函数 F具有真凸性和下半连续性，关系式 (1.6) 可根据 Fenchel–Young 不等式解释如下：

$$\mathbb{S} \in \partial F(\mathbb{D}_x \mathbf{u}) \Leftrightarrow \mathbb{D}_x \mathbf{u} \in \partial F^*(\mathbb{S}), \tag{1.8}$$

其中 ∂ 表示某个凸函数的次微分/次梯度。

在本文中，我们特别对 F作出如下假设，即

$$F(\mathbb{D}) \geq \mu_0 \left| \mathbb{D} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}[\mathbb{D}]\mathbb{I}_3 \right|^{4/3} \quad \text{for all } \mathbb{D} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}, \tag{1.9}$$

对于某个 $\mu_0 > 0$，而选取幂$_{4\ 3}$ 是针对$\mathbf{u}$的演化方程中的活性应力所特有的。此处及下文中，对于任意矩阵 $A :=(a_{ij})_{1\leq i,\ j\leq 3} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$，我们用$|A|$表示 A在域 $\mathbb{R}$上的 Frobenius 范数或 Hilbert–Schmidt 范数，即

$$|A| := \left(\sum_{1\leq i,j\leq 3} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left[\mathrm{tr}(A^\top A)\right]^{1/2}.$$

注意，对于标准的牛顿流变定律，我们有

$$\mathbb{S} = \mu \mathbb{D}_x \mathbf{u} + \lambda \mathrm{div}_x \mathbf{u} \mathbb{I}_3,$$

因此，牛顿型黏性应力张量可表示为

$$F(\mathbb{D}_x \mathbf{u}) = \frac{\mu}{2}|\mathbb{D}_x \mathbf{u}|^2 + \frac{\lambda}{2}|\mathrm{div}_x \mathbf{u}\mathbb{I}_3|^2, \quad \mu > 0,\ \lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0.$$

由此得到的模型是采用标准牛顿流变定律的向列液晶可压缩系统；例如参见 [12]。特别地，本文考虑一类更广泛的非牛顿型黏性应力张量。

应力张量 σ 在式（1.3）中具有如下形式：

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_a,$$

with

$$\sigma_r = QH[Q,c] - H[Q,c]Q,$$

and

$$\sigma_a = \sigma_* c^2 Q, \tag{1.10}$$

其中， σ_r 是向列弹性产生的应力， σ_a 是**活性应力**，用于描述活性粒子沿指向矢场施加的收缩（$\sigma_* > 0$）或伸展（$\sigma_* < 0$）应力。

在方程（1.3）和（1.5）中， $\Gamma^{-1} > 0$ 为旋转黏度，且 $H[Q, c]$ 由下式给出

$$H[Q,c] := K\Delta_x Q - \frac{k}{2}(c - c_*)Q + b\left(Q^2 - \frac{\operatorname{tr}(Q^2)}{3}\mathbb{I}_3\right) - c_* Q \operatorname{tr}(Q^2),$$

其通过LdG自由能的梯度流描述弛豫动力学，即$H_{\alpha\beta} = \frac{-\delta \mathcal{F}}{\delta Q_{\alpha\beta}}$ 其中， F 已在（1.1）中定义。

对称附加应力张量 τ 记为

$$\tau = G(Q)\mathbb{I}_3 - \nabla_x Q \odot \nabla_x Q,$$

其中

$$G(Q) = \frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2 + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(Q^2) + \frac{c_*}{4}\operatorname{tr}^2(Q^2).$$

根据这些定义，我们将系统（1.2）–（1.5）明确改写如下：

$$\partial_t \varrho + \text{散度}_x(\varrho \mathbf{u}) = 0, \tag{1.11}$$

$$\partial_t(\varrho\mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla_x p(\varrho) = \operatorname{div}_x \mathbb{S} + \operatorname{div}_x\left(G(Q)\mathbb{I}_3 - \nabla_x Q \odot \nabla_x Q\right) + \operatorname{div}_x\left(Q\Delta_x Q - \Delta_x Q Q\right) + \sigma_* \operatorname{div}_x(c^2 Q), \tag{1.12}$$

$$\partial_t c + (\mathbf{u}\cdot\nabla_x)c = D_0\Delta_x c, \tag{1.13}$$

$$\partial_t Q + (\mathbf{u}\cdot\nabla_x)Q + Q\Lambda - \Lambda Q = \Gamma H[Q,c], \tag{1.14}$$

其中

$$H[Q,c] = \Delta_x Q - \frac{1}{2}(c - c_*)Q + b\left(Q^2 - \frac{\operatorname{tr}(Q^2)}{3}\mathbb{I}_3\right) - c_* Q \operatorname{tr}(Q^2). \tag{1.15}$$

演化方程还需满足以下初始和边界条件。

初始条件。我们考虑

$$c(0) = c_0 \in L^\infty(\Omega),\ 0 < \underline{c} \le c_0 \le \overline{c} < \infty \tag{1.16}$$

$$\varrho(0) = \varrho_0 \in L^\gamma(\Omega),\ \gamma > 1,\ \varrho_0 \ge 0, \tag{1.17}$$

$$(\varrho\mathbf{u})(0) = (\varrho\mathbf{u})_0,\ (\varrho\mathbf{u})_0 = 0 \text{ if } \varrho_0 = 0,\ \frac{|(\varrho\mathbf{u})_0|^2}{\varrho_0} \in L^1(\Omega), \tag{1.18}$$

$$Q(0) = Q_0 \in H^1(\Omega),\ Q_0 \in S_0^3 \text{ a.e. in } \Omega, \tag{1.19}$$

其中 $\underline{c}$、 $\overline{c}$ 为常数。

边界条件。对于密度和流体速度，我们考虑一般的流入—流出边界条件：

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_B \quad \text{and} \quad \varrho|_{\Gamma_{\text{in}}} = \varrho_B, \tag{1.20}$$

其中

$$\Gamma_{\text{in}} = \{x \in \partial\Omega \mid \mathbf{u}_B(x)\cdot\mathbf{n}(x) < 0\},$$

$\mathbf{n}$ 表示 $\partial\Omega$的单位外法向量。因此，边界 $\partial\Omega$被分解为

$$\partial\Omega = \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}},$$

其中流入部分 Γ_{in} 如上所示，流出部分为

$$\Gamma_{\text{out}} = \{x \in \partial\Omega \mid \mathbf{u}_B(x)\cdot\mathbf{n}(x) \ge 0\}.$$

为简单起见，可以假设$\mathbf{u}_B \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$（即$\mathbf{u}_B$可在整个空间中光滑延拓），且 $\varrho_B \in \mathcal{C}^1(\partial\Omega)$，其中 $\varrho_B \ge \underline{\varrho} > 0$。

LdG Q-张量序参量的常见边界条件是齐次诺伊曼边界条件或（非）齐次狄利克雷边界条件，参见例如 [3,12,29,46,52], 及其中的参考文献。本文受 [29], 启发，施加以下非齐次狄利克雷边界条件：

$$Q|_{\partial\Omega} := Q_B \in H^{3/2}(\partial\Omega). \tag{1.21}$$

最后，我们对活性粒子浓度施加齐次诺伊曼边界条件，即

$$\nabla_x c \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } (0,T) \times \partial\Omega. \tag{1.22}$$

注意，上述边界条件（1.22）在 [12]中也有所考虑。此外，边界数据$\mathbf{u}_B$、 ϱ_B 和 Q_B 与时间无关，仅取决于 $\partial\Omega$的空间坐标。

我们简要回顾向列相动力学方面的现有研究，尽管我们的参考文献绝不全面。当活性应力为零时，偏微分方程组（1.11）–（1.14）退化为被动向列相动力学；当密度为常数时，则退化为不可压缩情形。在 [45],中，作者证明了二维和三维情形下不可压缩被动 Beris-Edwards 模型向列相动力学弱解的存在性。在 [52], 中，作者研究了耦合向列相动力学的可压缩模型，并证明了其整体弱解的存在性。在 [11], 中，作者证明了二维和三维情形下包含活性应力的活性 Beris-Edwards 模型不可压缩版本存在整体弱解。对于不可压缩单轴向列相流动的 Ericksen-Leslie 理论，也有相应的结果，见 [30]（及其中的参考文献）；关于可压缩单轴向列相流动的研究，见 [31]。我们还提及 [6, 22], 的工作，其中作者分析了不可压缩流动下的液晶-刚体相互作用模型。我们的工作建立在 [12] 的研究之上，该研究考察了向列相动力学的活性 Beris-Edwards 模型的可压缩（牛顿型）版本，即证明了在给定初始和边界条件下，有界三维区域上系统（1.11）–（1.14）存在弱解。系统（1.11）–（1.14）并非可压缩活性向列动力学的完整模型——它对浓度方程假设了各向同性扩散；在 [25] 提出的可压缩活性向列动力学完整方程组中，流动取向参数 λ 被设为零，这意味着我们处于流动翻滚区间；此外，我们忽略了被动向列相应力中的一个项。然而，在适当假设下，该系统捕捉到了活性向列动力学的基本显著特征。在 [12], 中，作者采用 Faedo-Galerkin 三步近似论证，证明了系统（ 1.11 ） –（ 1.14 ）弱解的存在性：（i）人工压力近似；（ii）人工黏性近似；以及（iii）从有限维空间到无限维空间的过渡。 Q 与 u 之间的非线性耦合应力，尤其是活性应力张量 σ_a，带来了多项技术挑战。作者引入新的技术工具来克服这些挑战，并利用浓度方程的最大值原理、应力张量 τ 的性质，以及 Q 的对称性和无迹性，从而获得适当的抵消项和适用于数学分析该系统的良好不等式。

我们的工作与 [12] 中的工作有三点重要区别。我们证明了方程组(1.11)–(1.14)所描述的活性向列相动力学可压缩模型存在耗散解，其中LdG Q-张量和流速满足非齐次边界数据，密度满足流入边界条件。 [1] 针对一般不可压缩流体模型引入了耗散解，将其作为比标准弱解更广泛的一类广义解。 [8]研究了可压缩欧拉方程的耗散解。对于耗散解，黏性应力张量 $\mathbb{S}$ 被有效黏性应力$\mathbb{S}_{\text{eff}} := \mathbb{S} - \mathfrak{R}$所取代，其中 $\mathfrak{R}$ 称为雷诺应力。如果雷诺应力 $\mathfrak{R} = 0$ ，耗散解便退化为经典弱解，因此可以将 $\mathfrak{R}$ 视为动量方程中的误差项。相应地，这会在能量不等式中产生另一误差项 $\mathfrak{E}$，称为能量耗散效应。耗散解在应用分析领域引起了广泛关注。例如， [2] 严格研究了可压缩黏性流体的耗散解，其压力定律为 $p(\varrho) = a\varrho^\gamma$ ，其中 $\gamma > 1$ （见本文(2.1)式）。 [4] 分析了具有线性压力定律的类似结果（绝热常数为 $\gamma = 1$的等熵情形）。 [41], 中，作者讨论了具有库仑摩擦定律边界条件的可压缩纳维–斯托克斯系统的耗散解存在性。

我们首次成功将 [1] 中的方法推广到活性向列动力学。这一方法具有一些显而易见的优势。对于满足压力定律 $p(\varrho) = a\varrho^\gamma$ 且绝热常数为 $\gamma > 1$的可压缩流体，无法证明标准弱解的存在性；为此我们需要条件 $\gamma > \frac{3}{2}$ 。然而，在研究可压缩流体的**耗散解**时，可以允许压力定律中包含 $\gamma > 1$ 。 [12]研究了牛顿型黏性应力，而我们允许采用更一般的流变定律和黏性应力张量，

原则上可以是非牛顿型的。事实上，如果消除活性应力并专注于可压缩被动向列动力学，则可以放宽条件（1.9）（进一步详情见第8 节）。在我们的表述中，我们还允许更一般的边界数据，即所谓的密度流入边界条件，以及速度$\mathbf{u}$和 Q-张量参数的非齐次边界数据。流入/流出边界条件在许多现实应用中都十分重要。事实上，对于动脉中的血流、管道中的流动、风洞和涡轮机中的流动而言，这是一种自然的设定；例如参见 [28, 32, 38] 及其中的参考文献。对于正压情形下的可压缩流，具有一般流入/流出边界条件的全局时间弱解的存在性已在 [10, 13]中得到分析。我们还参见 [27, 42]，其中考虑了此类边界条件，但对边界和边界数据施加了若干限制。关于满足边界条件（1.20）的可压缩Navier-Stokes系统的强解，我们引用 [39] 及其中的一些参考文献。最后，在 [51], 中，作者对带有流入型边界条件的不可压缩流固耦合问题进行了数值研究。因此，这些边界条件显著拓展了我们研究的潜在实际应用价值。

论文结构。 本文其余部分的结构如下。在第 2 节中，我们定义耗散解的概念，并陈述主要存在性结果。第 3 节专门讨论先验估计，这些估计对于推导本文模型中的能量不等式至关重要。其余各节致力于证明可压缩系统（1.11）–（1.14）的耗散解存在性，证明过程包括若干逼近格式和极限过程。更确切地说，在第 4 节中，我们证明与该系统相关的近似解的存在性。第 5、6 和 7 节讨论相对于逼近参数的若干极限过程。最后，我们在第 8 节中总结并给出一些备注，同时在附录 A 中给出一些辅助结果。

2. 耗散解的概念与主要结果

我们根据 Feireisl 等人 的工作，引入 耗散解 的概念。 [2],这类解在分布意义下满足该系统，但在 $\Re$ 动量平衡（1.12）中包含一个额外的“湍流”项，我们称之为“雷诺应力”。

全文中， C 表示一个与时间T 或任何底层近似参数无关的通用正数，但可能依赖于给定数据和模型参数。如有需要，我们将说明常数对某些量的具体依赖关系。用 $\mathcal{C}_{\rm weak}([0,T];\ X)$表示在巴拿赫空间 X. 中关于弱拓扑连续的函数所构成的空间。我们还采用以下记号——对于任意两个矩阵$A,\ B\in\mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$A:B=\sum_{1\le i,j\le 3}A_{ij}B_{ij},\quad \nabla_x A\odot\nabla_x B=(\partial_i A:\partial_j B)_{1\le i,j\le 3}.$$

$A,\ B$ 在 $L^2(\mathcal{O})$中的内积（其中 $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^3$为任意开集）定义为

$$\int_{\mathcal{O}}A:B=\int_{\mathcal{O}}\mathrm{tr}(AB).$$

最后，用 $\mathcal{M}^+(\Omega)$表示Ω上所有正博orel测度构成的集合；若记号为$\mathcal{M}^+(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})$，则这些测度为张量值测度。

2.1. 压力–密度状态方程。对于正压可压缩流，最常用的（等熵）压力–密度关系为：

$$p(\varrho)=a\varrho^\gamma,\ a>0,\ \gamma>1\ \text{with associated pressure potential}\ P(\varrho)=\frac{a}{\gamma-1}\varrho^\gamma. \tag{2.1}$$

但是，在本文中，我们选择了更一般的压力–密度状态方程，如 [2]中所述；具体而言，

$$\begin{cases} p\in\mathcal{C}[0,\infty)\cap\mathcal{C}^2(0,\infty),\ p(0)=0,\ p'(\varrho)>0\ \text{for}\ \varrho>0,\\ \text{the pressure potential}\ P\ \text{determined by}\ P'(\varrho)\varrho-P(\varrho)=p(\varrho)\ \text{satisfies}\ P(0)=0,\\ \text{and}\ P-\underline{a}p,\ \overline{a}p-P\ \text{are convex functions for certain constants}\ \underline{a}>0,\ \overline{a}>0. \end{cases} \tag{2.2}$$

在这种情况下，满足（ P ）的势函数2.2具有与（2.1）类似的强制性。具体而言，可以证明

$$P(\varrho) \geq \tilde{a}\varrho^{\gamma} \text{ for certain } \tilde{a} > 0, \ \gamma > 1 \text{ and all } \varrho \geq 1. \tag{2.3}$$

事实上，由于 $ap - P$ 是一个凸函数，而 P 是严格凸的，可以得到

$$p''(\varrho) \geq \frac{P''(\varrho)}{\overline{a}} = \frac{p'(\varrho)}{\overline{a}\varrho}, \quad \forall \varrho > 0,$$

因此，压力是凸的，参见 [2, 第 2.1 节。1]我们还要指出，由于其 $\mathcal{C}^2(0,\infty)$-正则性，压力在 $(0,\infty)$ 中是局部 Lipschitz 连续的。

最后请注意，在处理耗散解时，我们可以考虑 $\gamma \in (1, \frac{3}{2}]$ 的情形。然而，对于可压缩流体弱解的通常概念，压力定律（ $\gamma > \frac{3}{2}$ 2.1）的自然限制是；关于正压和非正压可压缩流体，例如可参阅书籍 [20, 43] ；关于可压缩活性向列液晶，可参阅 [12]。

2.2. **连续性方程——质量守恒**。密度 $\varrho \geq 0$ 几乎处处成立于 $(0,T) \times \Omega$ 中，

$$\varrho \in \mathcal{C}_{\text{weak}}([0,T]; L^{\gamma}(\Omega)) \cap L^{\gamma}(0,T; L^{\gamma}(\partial\Omega; |\mathbf{u}_B \cdot \mathbf{n}| \, \mathrm{d}S_x)),$$

动量满足

$$\varrho\mathbf{u} \in L^{\infty}(0,T; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega; \mathbb{R}^3)),$$

并且以下积分恒等式成立

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varrho(\tau)\phi(\tau) \, \mathrm{d}x + \int_0^{\tau} \int_{\Gamma_{\text{out}}} \phi\varrho\mathbf{u}_B \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S_x \mathrm{d}t + \int_0^{\tau} \int_{\Gamma_{\text{in}}} \phi\varrho_B\mathbf{u}_B \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S_x \mathrm{d}t \\ = \int_{\Omega} \varrho_0\phi(0,\cdot) + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \left[\varrho\partial_t\phi + \varrho\mathbf{u} \cdot \nabla_x\phi\right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.4}$$

对于一个 ny $\tau \in [0,T]$ 和 $\phi \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \Omega)$，其中 $\varrho(0, \cdot) = \varrho_0$ 在 Ω 中，并且 $\varrho_B \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$，$\mathbf{u}_B \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$.

2.3. **动量平衡**。回顾一下，$\mathcal{M}^+(\Omega; \mathbb{R}^{3\times3}_{\text{sym}})$ 表示 $\overline{\Omega}$ 上所有半正定张量值测度的集合。存在

$$\mathbb{S} \in L^1((0,T) \times \Omega; \mathbb{R}^{3\times3}_{\text{sym}}), \quad \mathfrak{R} \in L^{\infty}(0,T; \mathcal{M}^+(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^{3\times3}_{\text{sym}}))$$

使得积分恒等式

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\varrho\mathbf{u})(\tau) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\tau) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \left[\varrho\mathbf{u} \cdot \partial_t\boldsymbol{\varphi} + \varrho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla_x\boldsymbol{\varphi} + p(\varrho)\mathrm{div}_x\boldsymbol{\varphi} - \mathbb{S} : \nabla_x\boldsymbol{\varphi}\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \nabla_x\boldsymbol{\varphi} : \, \mathrm{d}\mathfrak{R}(t) \, \mathrm{d}t - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \left[G(Q)\mathbb{I}_3 - \nabla_x Q \odot \nabla_x Q\right] : \nabla_x\boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \left[Q\Delta_x Q - \Delta_x QQ + \sigma_* c^2 Q\right] : \nabla_x\boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_{\Omega} (\varrho\mathbf{u})_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}(0) \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.5}$$

对任意 $\tau \in [0,T]$ 以及任意测试函数 $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^1_c([0,T] \times \Omega; \mathbb{R}^3)$，均成立，其中 $(\varrho\mathbf{u})(0, \cdot) = (\varrho\mathbf{u})_0$ 在 Ω 中。

2.4. **活性粒子浓度**。以下积分恒等式成立

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c(\tau)\psi(\tau) \, \mathrm{d}x - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} c\partial_t\psi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla_x)c\psi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ = \int_{\Omega} c_0\psi(0) \, \mathrm{d}x - D_0 \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \nabla_x c \cdot \nabla_x\psi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.6}$$

对任意 $\tau \in [0,T]$ 以及任意测试函数 $\psi \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \Omega)$，其中 $c(0, \cdot) = c_0$ 在 Ω 中。

2.5. **向列相张量序参量**。向列相张量序参量 Q满足

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Q(\tau) : \Psi(\tau) \, \mathrm{d}x - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} Q : \partial_t\Psi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla_x)Q : \Psi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} [Q\Lambda - \Lambda Q] : \Psi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{\Omega} Q_0 : \Psi(0) \, \mathrm{d}x - \Gamma \int_0^{\tau} \int_{\Omega} H[Q,c] : \Psi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.7}$$

对于任意 $\tau \in [0,T]$ 以及任意测试函数 $\Psi \in \mathcal{C}^1_c([0,T] \times \Omega; \mathbb{R}^{3\times3})$，满足 $Q(0, \cdot) = Q_0$ 在 Ω 中。此外，还有 $Q \in S^3_0$。

2.6. 能量不等式与缺陷相容条件。 我们考虑扩展数据$\mathbf{u}_B \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3;\ \mathbb{R}^3)$以及$\mathbf{u} - \mathbf{u}_B \in L^{4/3}(0,\ T;\ W^{1,\ 4/3}_{0}(\Omega;\ \mathbb{R}^3))$。我们还引入能量缺陷测度

$$\mathfrak{E} \in L^\infty(0,T;\mathcal{M}^+(\overline{\Omega})). \tag{2.8}$$

能量不等式写作

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_B|^2 + P(\varrho) + \frac{1}{2}|c|^2 + \frac{1}{2}|Q|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2 + \frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \mathfrak{E}\,\mathrm{d}x \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega [F(\mathbb{D}_x\mathbf{u}) + F^*(\mathbb{S})]\,\mathrm{d}x + \frac{D_0}{2}\int_\Omega |\nabla_x c|^2\,\mathrm{d}x + \frac{\Gamma}{4}\int_\Omega |\Delta_x Q|^2\,\mathrm{d}x + \frac{c_*^2\Gamma}{2}\int_\Omega |Q|^6\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} P(\varrho)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x + \int_{\Gamma_{\mathrm{in}}} P(\varrho_B)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x \\
\le& C\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|c|^2 + \frac{1}{2}|Q|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2 + \frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbb{S}:\nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x \\
&- \int_\Omega [\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + p(\varrho)\mathbb{I}_3]:\nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \varrho\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}_B\cdot\nabla_x\mathbf{u}_B)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla_x\mathbf{u}_B :\,\mathrm{d}\mathfrak{R} \\
&- \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}|Q_B|^2 + \frac{c_*}{4}\operatorname{tr}^2(Q_B^2)\right)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x + 2c_*\Gamma\int_{\partial\Omega}|Q_B|^2Q_B : \nabla_x Q_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x + C,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

对于某个常数 $C>0$，该常数至多依赖于给定的初始和边界数据（关于在先验层面上对足够正则解推导能量不等式，见第3 节）。

最后，我们对能量缺陷 $\mathfrak{E}$与雷诺应力$\mathfrak{R}$施加如下兼容性条件

$$\underline{d}\mathfrak{E} \le \operatorname{tr}[\mathfrak{R}] \le \overline{d}\mathfrak{E} \tag{2.10}$$

对于某些常数$0 < d \le \bar{d}$。关于该条件为何会出现在我们的分析中，见第7.2 节。

定义2.1（耗散解）。 设$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个有界 *Lipschitz* 域。则，（ϱ，$\mathbf{u}$ c，Q）称为系统（1.11）–（1.14）满足给定初始和边界条件的耗散解，如果：

- $\varrho \ge 0$ *a.e. in* $(0,T)\times\Omega$, *and*

$$\varrho \in \mathcal{C}_{\mathrm{weak}}([0,T];L^\gamma(\Omega)) \cap L^\gamma(0,T;L^\gamma(\partial\Omega;|\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}|\,\mathrm{d}S_x)),\ \gamma>1.$$

$$\mathbf{u} \in L^{4/3}(0,T;W^{1,4/3}(\Omega;\mathbb{R}^3)),\ (\mathbf{u}-\mathbf{u}_B) \in L^{4/3}(0,T;W^{1,4/3}_0(\Omega;\mathbb{R}^3)),$$

$$\varrho\mathbf{u} \in \mathcal{C}_{\mathrm{weak}}([0,T];L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega;\mathbb{R}^3)).$$

- $c>0$, $c \in L^\infty((0,T)\times\Omega)\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$, *and* $Q \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))\cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$, $Q \in S^3_0$ *a.e. in* $(0,T)\times\Omega$.
- *There exist*

$$\mathbb{S} \in L^1((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}),\ \mathfrak{R} \in L^\infty(0,T;\mathcal{M}^+(\overline{\Omega};\mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}})),\ \mathfrak{E} \in L^\infty(0,T;\mathcal{M}^+(\overline{\Omega})),$$

such that the relations (2.4)–(2.7) *are satisfied for any* $0\le\tau\le T$, *and the energy inequality* (2.9) *holds.*

接下来，我们陈述本文的主要结果。

定理 *2.2*（耗散解的整体存在性）。设 $T>0$ 和 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是一个有界 *Lipschitz* 域。假设 $p=p(\varrho)$ 由 *(2.2)* 给出，且 $F=F(\mathbb{D}_x\mathbf{u})$ 由 *(1.7)–(1.9)* 给出。则可压缩活性向列液晶系统 *(1.11)–(1.14)*，在初始条件 *(1.16)–(1.19)* 和边界条件 *(1.20)–(1.22)* 下，至少存在一个定义*2.1*意义下的耗散解。

证明思路。证明基于一个三级近似方案。

(i) 人工黏性 $\varepsilon\nabla_x\varrho$ 对于 $\varepsilon>0$：我们将此项添加到连续性方程（1.11）中，从而产生抛物型正则化效应。因此，我们需要在动量方程（1.12）中添加项 $\varepsilon\nabla_x\varrho\cdot\nabla_x\mathbf{u}$。(ii) 通过 F 对凸势函数 F_δ 进行正则化，适用于 $\delta>0$：见（4.2）。(iii) 有限维近似（n层）：动量方程（1.12）必须通过 Galerkin近似求解。

随后，在获得固定 δ、ε、n 下的近似解后，我们针对上述参数取极限。首先，我们分析关于 $\delta\to0$ 的极限行为，随后对 $\varepsilon\to0$ 取极限。最后，我们针对 $n\to\infty$ 取极限，以证明我们的可压缩活性向列液晶模型存在耗散解。

3. 先验估计

本节旨在给出先验估计，从而为我们的可压缩系统导出恰当的能量不等式。形式上，将方程（1.12）乘以 $\mathbf{u}-\mathbf{u}_B$，将（1.13）乘以 c，并将（1.14）乘以 $-(\Delta_xQ-Q-c_*Q\mathrm{tr}(Q^2))$，然后相加，得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_B|^2+P(\varrho)+\frac{1}{2}|c|^2+\frac{1}{2}|Q|^2+\frac{1}{2}|\nabla_xQ|^2+\frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x\\
&+\int_\Omega\left[F(\mathbb{D}_x\mathbf{u})+F^*(\mathbb{S})\right]\mathrm{d}x+D_0\int_\Omega|\nabla_xc|^2\,\mathrm{d}x+\Gamma\int_\Omega|\Delta_xQ|^2\,\mathrm{d}x+c_*^2\Gamma\int_\Omega|Q|^6\,\mathrm{d}x\\
&+\int_{\Gamma_{\mathrm{out}}}P(\varrho)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x+\int_{\Gamma_{\mathrm{in}}}P(\varrho_B)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x\\
=&-\int_\Omega[\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}+p(\varrho)\mathbb{I}_3]:\nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\varrho\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}_B\cdot\nabla_x\mathbf{u}_B)\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\mathbb{S}:\nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x\\
&-\int_\Omega G(Q)\mathbb{I}_3:\nabla_x\mathbf{u}\,\mathrm{d}x+\int_\Omega G(Q)\mathbb{I}_3:\nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\mathrm{div}_x(\nabla_xQ\odot\nabla_xQ)\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x\\
&+\int_\Omega\mathrm{div}_x(\nabla_xQ\odot\nabla_xQ)\cdot\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\mathrm{div}_x(Q\Delta_xQ-\Delta_xQQ)\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x\\
&-\int_\Omega\mathrm{div}_x(Q\Delta_xQ-\Delta_xQQ)\cdot\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x-\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla_xc)\,c\,\mathrm{d}x\\
&+\int_\Omega(Q\Lambda-\Lambda Q):\Delta_xQ\,\mathrm{d}x-\int_\Omega(Q\Lambda-\Lambda Q):(Q+c_*Q|Q|^2)\,\mathrm{d}x\\
&+\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla_xQ):\Delta_xQ\,\mathrm{d}x-\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla_xQ):(Q+c_*Q|Q|^2)\,\mathrm{d}x\\
&+\Gamma\int_\Omega\frac{c-c_*}{2}Q:\left(\Delta_xQ-Q-c_*Q|Q|^2\right)\mathrm{d}x-b\int_\Omega\left(Q^2-\frac{|Q|^2}{3}\mathbb{I}_3\right):\left(\Delta_xQ-Q-c_*Q|Q|^2\right)\mathrm{d}x\\
&+\Gamma\int_\Omega\Delta_xQQ\,\mathrm{d}x+2c_*\Gamma\int_\Omega Q|Q|^2:\Delta_xQ\,\mathrm{d}x-c_*\int_\Omega|Q|^4\,\mathrm{d}x\\
&-\sigma_*\int_\Omega c^2Q:\nabla_x\mathbf{u}\,\mathrm{d}x+\sigma_*\int_\Omega c^2Q:\nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x\\
&=\sum_{j=1}^{21}I_j.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

我们首先计算

$$I_8+I_9+I_{11}.$$

利用 $\mathbf{u}|_{\partial\Omega}=\mathbf{u}_B$ 以及引理 A.1，我们推得

$$
\begin{aligned}
&I_8+I_9+I_{11}\\
=&\int_\Omega\mathrm{div}_x(Q\Delta_xQ-\Delta_xQQ)\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\mathrm{div}_x(Q\Delta_xQ-\Delta_xQQ)\cdot\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x+\int_\Omega(Q\Lambda-\Lambda Q):\Delta_xQ\,\mathrm{d}x\\
=&\int_\Omega(Q\Delta_xQ-\Delta_xQQ):\nabla_x^\top\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

接下来，我们计算如下：

$$
\begin{aligned}
&I_6+I_7+I_{13}+I_{14}\\
&=-\int_\Omega \mathrm{div}_x(\nabla_x Q\odot\nabla_x Q)\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}x+\int_\Omega \mathrm{div}_x(\nabla_x Q\odot\nabla_x Q)\cdot\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla_x Q):\Delta_x Q\,\mathrm{d}x-\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla_x Q):(Q+c_*Q|Q|^2)\,\mathrm{d}x\\
&=-\int_\Omega \partial_j\partial_i Q^{kl}\partial_j Q^{kl}u_i\,\mathrm{d}x-\int_\Omega \partial_i Q^{kl}\partial_j^2 Q^{kl}u_i\,\mathrm{d}x+\int_\Omega \mathrm{div}_x(\nabla_x Q\odot\nabla_x Q)\cdot\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_\Omega u_i\partial_i Q^{kl}\Delta_x Q^{kl}\,\mathrm{d}x-\int_\Omega u_i\partial_i Q^{kl}(Q^{kl}+c_*Q^{kl}|Q|^2)\,\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_i|\partial_j Q^{kl}|^2u_i\,\mathrm{d}x-\int_\Omega u_i\partial_i\left(\frac{1}{2}|Q|^2+\frac{c_*}{4}\,\mathrm{tr}^2(Q^2)\right)\mathrm{d}x\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_i|\partial_j Q^{kl}|^2u_{B,i}\,\mathrm{d}x+\int_\Omega \partial_i Q^{kl}\partial_j^2 Q^{kl}u_{B,i}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2+\frac{1}{2}|Q|^2+\frac{c_*}{4}\,\mathrm{tr}^2(Q^2)\right)\mathrm{div}_x\mathbf{u}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla_x Q|^2\mathrm{div}_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_\Omega(\mathbf{u}_B\cdot\nabla_x Q):\Delta_x Q\,\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}|Q_B|^2+\frac{c_*}{4}\,\mathrm{tr}^2(Q_B^2)\right)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x.
\end{aligned}\tag{3.3}
$$

But

$$
I_4=-\int_\Omega G(Q)\mathbb{I}_3:\nabla_x\mathbf{u}\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2+\frac{1}{2}|Q|^2+\frac{c_*}{4}\,\mathrm{tr}^2(Q^2)\right)\mathrm{div}_x\mathbf{u}\,\mathrm{d}x,
$$

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
&I_4+I_6+I_7+I_{13}+I_{14}\\
&=-\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla_x Q|^2\mathrm{div}_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x+\int_\Omega(\mathbf{u}_B\cdot\nabla_x Q):\Delta_x Q\,\mathrm{d}x\\
&\quad-\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}|Q_B|^2+\frac{c_*}{4}\,\mathrm{tr}^2(Q_B^2)\right)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x.
\end{aligned}\tag{3.4}
$$

接下来，注意到

$$
\begin{aligned}
I_{12}&=-\int_\Omega(Q\Lambda-\Lambda Q):(Q+c_*Q|Q|^2)\,\mathrm{d}x\\
&=-\int_\Omega(Q\Lambda+\Lambda Q):(Q+c_*Q|Q|^2)\,\mathrm{d}x+2\int_\Omega\Lambda Q:(Q+c_*Q|Q|^2)\,\mathrm{d}x=0,
\end{aligned}\tag{3.5}
$$

其中我们用到了 Q 是对称矩阵且 Λ 是反对称矩阵这一事实。

我们进一步得到

$$
I_{10}=-\int_\Omega(\mathbf{u}\cdot\nabla_x c)c\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_\Omega\mathbf{u}\cdot\nabla_x|c|^2=\frac{1}{2}\int_\Omega|c|^2\mathrm{div}_x\mathbf{u}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|c|^2\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x.
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
|I_{10}|&\le\frac{1}{2}\int_\Omega|c|^2\mathrm{div}_x\mathbf{u}\,\mathrm{d}x+C\|\mathbf{u}_B\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\|c\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\\
&\le\frac{1}{2}\int_\Omega|c|^2\mathrm{div}_x\mathbf{u}\,\mathrm{d}x+\frac{D_0}{2}\|\nabla_x c\|^2_{L^2(\Omega)}+C(D_0,\mathbf{u}_B)\|c\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}\tag{3.6}
$$

其中我们用到了引理 A.2中给出的迹不等式。

现在，我们得到以下估计。首先，注意到 $c \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$，这是由浓度方程 c 的最大值原理以及 $c_0 \in L^\infty(\Omega)$ 的选取所得到的。我们有

$$|I_{15}| = \left|\Gamma \int_\Omega \frac{(c-c_*)}{2} Q : \left(\Delta_x Q - Q - c_* Q|Q|^2\right) \mathrm{d}x\right| \le \frac{\Gamma}{6}\|\Delta_x Q\|_{L^2}^2 + C\|Q\|_{L^2}^2 + C\|Q\|_{L^4}^4, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}|I_{16}| &= \left|b\int_\Omega \left(Q^2 - \frac{|Q|^2}{3}\mathbb{I}_3\right) : \left(\Delta_x Q - Q - c_* Q|Q|^2\right) \mathrm{d}x\right| \\ &\le \frac{\Gamma}{6}\|\Delta_x Q\|_{L^2}^2 + C\|Q\|_{L^4}^4 + C\left|\int_\Omega \mathrm{tr}(Q^3)\,\mathrm{d}x\right| + Cc_*\left|\int_\Omega \mathrm{tr}(Q^3)|Q|^2\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \frac{\Gamma}{6}\|\Delta_x Q\|_{L^2}^2 + C\|Q\|_{L^4}^4 + \frac{c_*^2\Gamma}{2}\|Q\|_{L^6}^6 + C\|Q\|_{L^2}^2, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$|I_{17}| = \left|\Gamma\int_\Omega \Delta_x Q Q\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{\Gamma}{6}\int_\Omega |\Delta_x Q|^2\,\mathrm{d}x + C\|Q\|_{L^2}^2. \tag{3.9}$$

我们还得到

$$\begin{aligned} I_{18} &= 2c_*\Gamma\int_\Omega Q|Q|^2 : \Delta_x Q\,\mathrm{d}x = 2c_*\Gamma\int_\Omega \partial_j^2 Q^{kl} Q^{kl}|Q|^2\,\mathrm{d}x \\ &= -2c_*\Gamma\int_\Omega |\partial_j Q^{kl}|^2|Q|^2\,\mathrm{d}x - 2c_*\Gamma\int_\Omega \partial_j Q^{kl}Q^{kl}\partial_j(\mathrm{tr}(Q^2)) + 2c_*\Gamma\int_{\partial\Omega}|Q_B|^2 Q_B : \nabla_x Q_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x \\ &= -2c_*\Gamma\int_\Omega |\nabla_x Q|^2|Q|^2\,\mathrm{d}x - 2c_*\Gamma\int_\Omega \partial_j Q^{kl}Q^{kl}\partial_j(\mathrm{tr}(Q^2)) + 2c_*\Gamma\int_{\partial\Omega}|Q_B|^2 Q_B : \nabla_x Q_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x \\ &= \underbrace{-2c_*\Gamma\int_\Omega |\nabla_x Q|^2|Q|^2\,\mathrm{d}x - c_*\Gamma\int_\Omega |\nabla_x(\mathrm{tr}(Q^2))|^2\,\mathrm{d}x}_{I_{18}^1} + \underbrace{2c_*\Gamma\int_{\partial\Omega}|Q_B|^2 Q_B : \nabla_x Q_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x}_{I_{18}^2}. \end{aligned}$$

注意到

$$I_{18}^1 \le 0, \tag{3.10}$$

且边界项 I_{18}^2 有界：

$$|I_{18}^2| \le C\left(\|Q_B\|_{L^6(\partial\Omega)}^6 + \|\nabla_x Q_B\|_{L^2(\partial\Omega)}^2\right), \tag{3.11}$$

因为 $Q_B \in H^{3/2}(\partial\Omega)$。

结合估计式（3.2）–（3.10），能量不等式（3.1）可化为

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_B|^2 + P(\varrho) + \frac{1}{2}|c|^2 + \frac{1}{2}|Q|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2 + \frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x \\ &+ \int_\Omega \left[F(\mathbb{D}_x\mathbf{u}) + F^*(\mathbb{S})\right]\mathrm{d}x + \frac{D_0}{2}\int_\Omega |\nabla_x c|^2\,\mathrm{d}x + \frac{\Gamma}{2}\int_\Omega |\Delta_x Q|^2\,\mathrm{d}x + \frac{c_*^2\Gamma}{2}\int_\Omega |Q|^6\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} P(\varrho)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x + \int_{\Gamma_{\mathrm{in}}} P(\varrho_B)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x \\ \le &-\int_\Omega [\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + p(\varrho)\mathbb{I}_3] : \nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \varrho\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}_B\cdot\nabla_x\mathbf{u}_B)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbb{S} : \nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_\Omega G(Q)\mathbb{I}_3 : \nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla_x Q|^2\mathrm{div}_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\mathbf{u}_B\cdot\nabla_x Q) : \Delta_x Q\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega |c|^2\mathrm{div}_x\mathbf{u}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (Q\Delta_x Q - \Delta_x Q Q) : \nabla_x^\top\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x \\ &- \sigma_*\int_\Omega c^2 Q : \nabla_x\mathbf{u}\,\mathrm{d}x + \sigma_*\int_\Omega c^2 Q : \nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x \\ &- \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}|Q_B|^2 + \frac{c_*}{4}\mathrm{tr}^2(Q_B^2)\right)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x + 2c_*\Gamma\int_{\partial\Omega}|Q_B|^2 Q_B : \nabla_x Q_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x \\ &+ C\left(\|c\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|Q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|Q\|_{L^4(\Omega)}^4\right), \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中常数 $C>0$ 至多取决于系统参数和给定数据。

还需要进行一些进一步的计算，才能完成（3.12）中能量不等式的推导。

（i）我们从以下内容开始：

$$\int_\Omega |G(Q)||\nabla_x \mathbf{u}_B| \le C\|\nabla_x \mathbf{u}_B\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \left(|\nabla_x Q|^2 + |Q|^2 + |Q|^4\right) \mathrm{d}x, \tag{3.13}$$

and

$$\frac{1}{2}\left|\int_\Omega |\nabla_x Q|^2 \mathrm{div}_x \mathbf{u}_B \,\mathrm{d}x\right| \le C\|\mathrm{div}_x \mathbf{u}_B\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla_x Q|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{3.14}$$

（ii）此外，我们计算

$$\int_\Omega |(\mathbf{u}_B \cdot \nabla_x Q) : \Delta_x Q| \le \frac{\Gamma}{8}\int_\Omega |\Delta_x Q|^2 + C(\Gamma)\|\mathbf{u}_B\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla_x Q|^2, \tag{3.15}$$

and

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (Q\Delta_x Q - \Delta_x Q Q) : \nabla_x^\top \mathbf{u}_B\right| &\le 2\|\nabla_x \mathbf{u}_B\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |Q||\Delta_x Q| \\ &\le \frac{\Gamma}{8}\|\Delta_x Q\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\mathbf{u}_B,\Gamma)\|Q\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

（iii）利用引理 L^q 中给出的无迹 Korn 不等式的 A.3 版本以及凸性（1.7）–（1.9，可得

$$\|\nabla_x \mathbf{u}\|^{4/3}_{L^{4/3}(\Omega)} \le \kappa_0 \left\|\mathbb{D}_x \mathbf{u} - \frac{1}{3}\mathrm{div}_x \mathbf{u}\mathbb{I}_3\right\|^{4/3}_{L^{4/3}(\Omega)} + C(\mathbf{u}_B) \tag{3.17}$$

$$\le \kappa_1 \int_\Omega [F(\mathbb{D}_x \mathbf{u}) + F^*(\mathbb{S})] \,\mathrm{d}x + C(\mathbf{u}_B), \tag{3.18}$$

其中正的常数 κ_0、 κ_1满足上述条件。注意，在不等式（3.17）中，存在一个额外的常数项 $C(\mathbf{u}_B)$，它依赖于$\mathbf{u}_B$ （与 Korn 不等式（A.2）不同）；这是因为我们对速度$\mathbf{u}$考虑了非齐次 Dirichlet 数据。

由此，我们计算如下：

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}\int_\Omega |c|^2 \mathrm{div}_x \mathbf{u}\,\mathrm{d}x\right| &\le C\|\nabla_x \mathbf{u}\|_{L^{4/3}(\Omega)}\|c\|^2_{L^8(\Omega)} \\ &\le \frac{1}{4\kappa_1}\|\nabla_x \mathbf{u}\|^{4/3}_{L^{4/3}(\Omega)} + C(\kappa_1)\|c\|^8_{L^8(\Omega)} \\ &\le \frac{1}{4}\int_\Omega [F(\mathbb{D}_x \mathbf{u}) + F^*(\mathbb{S})] \,\mathrm{d}x + C(\mathbf{u}_B,\kappa_1)(1+\|c\|^8_{L^\infty(\Omega)}),\end{aligned} \tag{3.19}$$

其中我们使用了不等式（3.18）以及以下事实： $c \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$。（iv）根据 Cauchy-Schwarz 不等式和（3.18），我们现在估计如下：

$$\begin{aligned}\sigma_*\left|\int_\Omega c^2 Q : \nabla_x \mathbf{u}\right| \le \sigma_*\|c\|^2_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |Q||\nabla_x \mathbf{u}| &\le \frac{1}{4\kappa_1}\|\nabla_x \mathbf{u}\|^{4/3}_{L^{4/3}(\Omega)} + C(\sigma_*,\kappa_1)\|Q\|^4_{L^4(\Omega)} \\ &\le \frac{1}{4}\int_\Omega [F(\mathbb{D}_x \mathbf{u}) + F^*(\mathbb{S})] \,\mathrm{d}x + C(\mathbf{u}_B,\sigma_*,\kappa_1)(1+\|Q\|^4_{L^4(\Omega)}).\end{aligned} \tag{3.20}$$

此外，我们可以看到

$$\sigma_*\left|\int_\Omega c^2 Q : \nabla_x \mathbf{u}_B\right| \le \sigma_*\|c\|^2_{L^\infty(\Omega)}\left(\|Q\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_x \mathbf{u}_B\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{3.21}$$

最后，将估计式（3.13）–（3.21）代入（3.12），得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_B|^2+P(\varrho)+\frac{1}{2}|c|^2+\frac{1}{2}|Q|^2+\frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2+\frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega\left[F(\mathbb{D}_x\mathbf{u})+F^*(\mathbb{S})\right]\mathrm{d}x+\frac{D_0}{2}\int_\Omega|\nabla_x c|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\Gamma}{4}\int_\Omega|\Delta_x Q|^2\,\mathrm{d}x+\frac{c_*^2\Gamma}{2}\int_\Omega|Q|^6\,\mathrm{d}x\\
&+\int_{\Gamma_{\mathrm{out}}}P(\varrho)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x+\int_{\Gamma_{\mathrm{in}}}P(\varrho_B)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x\\
\le& C\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|c|^2+\frac{1}{2}|Q|^2+\frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2+\frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x+\int_\Omega\mathbb{S}:\nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x\\
&-\int_\Omega\left[\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}+p(\varrho)\mathbb{I}_3\right]:\nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\varrho\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}_B\cdot\nabla_x\mathbf{u}_B)\,\mathrm{d}x\\
&-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}|Q_B|^2+\frac{c_*}{4}\operatorname{tr}^2(Q_B^2)\right)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x+2c_*\Gamma\int_{\partial\Omega}|Q_B|^2Q_B:\nabla_x Q_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x+C,
\end{aligned}\tag{3.22}$$

其中， $C>0$ 是一个取决于给定数据和系统参数的常数。

其余各节将用于证明定理2.2，这是我们的主要结果 .

4. 近似解的存在性

首先，我们考虑满足 $\varrho_0\equiv 0\,\mathrm{in}\mathbb{R}^3\setminus\Omega$ 的 $\mathbf{u}_B\in\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$、 $\varrho_B\in\mathcal{C}^1(\partial\Omega)$ 和 $\varrho_0\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$。我们还选取 $c_0\in\mathcal{C}_c^1(\Omega)$、 $Q_0\in\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ 和 $Q_B\in\mathcal{C}^1(\partial\Omega)$。

考虑有限维空间序列 $X_n\subset L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$

$$X_n=\left\{\mathbf{w}_i\;\middle|\;\mathbf{w}_i\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega;R^d),\ i=1,\dots,n\right\}.\tag{4.1}$$

不失一般性，我们可以假设$\mathbf{w}_i$ 在 L^2 中关于标准标量积构成正交归一组。

其次，我们需要对凸势函数进行正则化 F（由（1.9）给出），使其连续可微。可以通过与一族定义在 $\{\xi_\delta\}_{\delta>0}$ 中的$\mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}$正则化核作卷积来实现，更确切地说

$$F_\delta(\mathbb{D})=\int_{R^{3\times3}_{\mathrm{sym}}}\xi_\delta(\mathbb{D}-\mathbb{Z})F(\mathbb{Z})\,\mathrm{d}\mathbb{Z}-\int_{R^{3\times3}_{\mathrm{sym}}}\xi_\delta(\mathbb{Z})F(\mathbb{Z})\,\mathrm{d}\mathbb{Z},\quad\forall\,\mathbb{D}\in\mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}.\tag{4.2}$$

容易验证， F_δ 是凸的、非负的、无穷次可微的，且 $F_\delta(0)=0$。此外，可以证明 F_δ 满足

$$F_\delta(\mathbb{D})\ge\mu_1\left|\mathbb{D}-\frac{1}{d}\mathrm{tr}[\mathbb{D}]\mathbb{I}\right|^{4/3}-\mu_2,\quad\forall\,\mathbb{D}\in\mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}},\tag{4.3}$$

其中正数常数 μ_1 和 μ_2 与 $\delta\to0$无关；详细证明可参见，例如 [4, 命题 4。2]。

4.1. 连续性方程的人工黏性近似。 在连续性方程中，我们采用抛物型正则化效应，即考虑

$$\partial_t\varrho+\mathrm{div}_x(\varrho\mathbf{u})=\varepsilon\Delta_x\varrho\ \text{ in }(0,T)\times\Omega,\ \varepsilon>0,\tag{4.4}$$

并配以边界条件

$$\varepsilon\nabla_x\varrho\cdot\mathbf{n}+(\varrho_B-\varrho)[\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}]^-=0\ \text{ in }(0,T)\times\partial\Omega,\tag{4.5}$$

和初始条件

$$\varrho(0,\cdot)=\varrho_0\ \text{ in }\Omega.\tag{4.6}$$

此处， $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{u}_B$，其中 $\mathbf{v}\in\mathcal{C}([0,T];X_n)$，特别是 $\mathbf{u}|_{\partial\Omega}=\mathbf{u}_B$。注意，对于给定的 $\mathbf{v}$， ϱ_B,$\mathbf{u}_B$，这是一个关于未知量 ϱ 的线性问题。

由于 Ω 仅为利普希茨区域，我们采用弱形式：

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega \varrho\varphi\right]_{t=0}^{t=\tau} &= \int_0^\tau \int_\Omega [\varrho\partial_t\varphi + \varrho\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi - \varepsilon\nabla_x\varrho\cdot\nabla_x\varphi]\mathrm{d}t \\ &\quad - \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \varphi\varrho\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \varphi(\varrho-\varrho_B)[\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}]^-\,\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{4.7}$$

对于任意 $0\le\tau\le T$ 以及任意测试函数

$$\varphi\in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)),\ \partial_t\varphi\in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

满足 $\varrho(0,\cdot)=\varrho_0$ 属于 Ω。

我们回顾一下关于问题（4.4）–（4.6）的一些重要结果。

引理 4.1 (Crippa 等人 [14, 引理 3.2])。 设 $\Omega\subset R^3$ 是一个有界 *Lipschitz* 域。给定$\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{u}_B$，$\mathbf{v}\in\mathcal{C}([0,T];\ X_n)$，初边值问题(4.4)–(4.6) 存在一个弱解$\varrho$，其意义见(4.7)，且在类

$$\varrho\in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))\cap\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega)).$$

上述空间中的范数仅由数据 ϱ_0、ϱ_B、$\mathbf{u}_B$ 控制，并且

$$\sup_{t\in(0,T)}\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{X_n}.$$

引理 4.2 (最大值原理；Crippa 等人的引理 3 [14,。4])。 在引理*4.1*的假设下，解 ϱ 满足

$$\|\varrho\|_{L^\infty((0,\ \tau)\times\Omega)}\le\text{最大}\left\{\|\varrho_0\|_{L^\infty(\Omega)}\ \|\varrho_B\|_{L^\infty((0,\ T)\times\Gamma_{in})}\ \|\mathbf{u}_B\|_{L^\infty((0,\ T)\times\partial\Omega)}\right\}\exp\left(\tau\|\operatorname{div}_x\mathbf{u}\|_{L^\infty((0,\ \tau)\times\Omega)}\right).$$

接下来，我们报告 Abbatiello 等人的另一项结果。 [2, 引理 33]。

引理 4.3 (重整化)。 在引理 *4.2*的条件下，设 $B\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$、$\chi\in W^{1,\ \infty}(0,\ T)$，且 $r=\varrho-\chi$。

那么，重整化方程的（积分形式）

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega B(r)\right]_{t=0}^{t=\tau} &= -\int_0^\tau\int_\Omega \operatorname{div}(r\mathbf{u})B'(r)\,\mathrm{d}t - \varepsilon\int_0^\tau\int_\Omega|\nabla_x r|^2B''(r)\,\mathrm{d}t \\ &\quad - \int_\Omega\Big(\partial_t\chi+\chi\operatorname{div}_x\mathbf{u}\Big)B'(r) \\ &\quad + \int_0^\tau\int_{\partial\Omega}B'(r)((r+\chi)-\varrho_B)[\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}]^-\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

对任意 $0\le\tau\le T$ 均成立。

利用引理4.3，我们可得 ϱ 严格为正，条件是 ϱ_B，ϱ_0 也具有相同性质。事实上，我们有以下结果。

Cor推论 4.4 (Abbatiello 等人 [2,推论 3。4])。 在引理 *4.1*的假设下，我们有 *ve*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t,x}\varrho(t,x)\ge\min\left\{\min_\Omega\varrho_0,\ \min_{\Gamma_{\text{in}}}\varrho_B\right\}\exp\left(-T\|\operatorname{div}_x\mathbf{u}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\right).$$

4.2. **动量平衡的Galerkin近似**。 我们首先定义

$$\mathcal{N}_M=\left\{\mathbf{v}:\mathbf{v}\in\mathcal{C}([0,T];\mathcal{C}^2_c(\Omega;\mathbb{R}^3)),\ \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{C}([0,T];\mathcal{C}^2_c(\Omega;\mathbb{R}^3))}\le M\right\}, \tag{4.8}$$

对某个适当的常数 M。然后，我们写出以下结果。

引理 4.5。 对于每个 $\mathbf{v}\in\mathcal{C}([0,T];\ \mathcal{C}^2_c(\Omega\ \mathbb{R}^3))$ 满足 $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{u}_B$，以下初边值问题存在唯一解：

$$\begin{cases}\partial_t c+(\mathbf{u}\cdot\nabla_x)c=D_0\Delta_x c,\\ \partial_t Q+(\mathbf{u}\cdot\nabla_x)Q+Q\Lambda-\Lambda Q=\Gamma H[Q,c],\\ Q|_{t=0}=Q_0\in H^1(\Omega),\quad Q|_{\partial\Omega}=Q_B\in H^{3/2}(\partial\Omega),\\ c|_{t=0}=c_0\in H^1(\Omega),\quad \nabla_x c\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0,\end{cases} \tag{4.9}$$

满足 $0<\underline{c}\le c_0\le \bar{c}<\infty$，其中 $Q\in L^\infty(0,T;\,H^1(\Omega))\cap L^2(0,T;\,H^2(\Omega))$，$c\in L^\infty(0,T;\,H^1(\Omega))\cap L^2(0,T;\,H^2(\Omega))$，且 $0<c\le c\le \bar{c}\le\infty$。此外，上述映射 $u\mapsto (c[u],Q[u])$ 从 $\mathcal{N}_M$ 连续映射到 $\left(L^\infty(0,T;\,H^1(\Omega))\cap L^2(0,T;\,H^2(\Omega))\right)\times\left(L^\infty(0,T;\,H^1(\Omega))\cap L^2(0,T;\,H^2(\Omega))\right)$，且 $Q[u]\in S_0^3$ 在 $(0,T)\times\Omega$ 上几乎处处成立。

上述引理的证明是标准的；可以采用与 [12, 引理 32]中详细说明的过程类似的方法。

现在，我们的思路是寻找一个近似速度场

$$\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{u}_B,\quad \mathbf{v}\in\mathcal{C}([0,T];X_n).$$

于是，近似动量平衡方程可写为

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varrho\mathbf{u}(\tau)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\tau)\,\mathrm{d}x=&\int_0^\tau\int_\Omega\left[\varrho\mathbf{u}\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi}+\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}:\nabla_x\boldsymbol{\varphi}+p(\varrho)\mathrm{div}_x\boldsymbol{\varphi}-\partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}):\nabla_x\boldsymbol{\varphi}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&-\int_0^\tau\int_\Omega\left[G(Q)\mathbb{I}_3-\nabla_xQ\odot\nabla_xQ\right]:\nabla_x\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&-\int_0^\tau\int_\Omega\left[Q\Delta_xQ-\Delta_xQQ+\sigma_*c^2Q\right]:\nabla_x\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&-\varepsilon\int_0^\tau\int_\Omega\nabla_x\varrho\cdot\nabla_x\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_\Omega\varrho_0\mathbf{u}_0\cdot\varphi(0)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{4.10}$$

对任意 $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{C}^1([0,T];\,X_n)$，满足初始条件

$$(\varrho\mathbf{u})(0,\cdot)=\varrho_0\mathbf{u}_0,\ \mathbf{u}_0=\mathbf{v}_0+\mathbf{u}_B,\ \mathbf{v}_0\in X_n.\tag{4.11}$$

对于固定参数 $n,\delta>0,\varepsilon>0$，第一层近似是问题 (4.4)–(4.6)、(4.9) 以及 Galerkin近似 (4.10) 的解 $(\varrho,\mathbf{u}\ c,Q)$。这一层近似解的存在性可用与 [10], 相同的方法证明，另见 [12]。具体而言，对于给定的 $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{u}_B$、$\mathbf{v}\in\mathcal{C}([0,T];\,X_n)$，我们从方程 (4.4)–(4.6)、(4.9) 中确定唯一解 $\varrho=\varrho[\mathbf{u}]$，$c=c[\mathbf{u}]$,$Q=Q[\mathbf{u}]$。然后将它们代入 (4.10)，得到唯一解 $\mathbf{u}=\mathbf{u}[\varrho,c,Q]$。为此，我们定义一个映射

$$\mathcal{T}:\mathbf{v}\in\mathcal{C}([0,T];X_n)\mapsto\mathbf{u}[\varrho,c,Q]-\mathbf{u}_B\in\mathcal{C}([0,T];X_n),$$

以及第一级近似解 $\varrho=\varrho_{\delta,\varepsilon,n}$、$\mathbf{u}=\mathbf{u}_{\delta,\varepsilon,n}$、$c=c_{\delta,\varepsilon,n}$ 和 $Q=Q_{\delta,\varepsilon,n}$ 均通过不动点论证，经由映射 $\mathcal{T}$ 得到。关于该过程的更多细节，请参阅 [10]（另见 [41]）。

最后，近似能量不等式为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_B|^2+P(\varrho)+\frac{1}{2}|c|^2+\frac{1}{2}|Q|^2+\frac{1}{2}|\nabla_xQ|^2+\frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x\\&+\frac{1}{2}\int_\Omega\partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}):\mathbb{D}_x\mathbf{u}\,\mathrm{d}x+\frac{D_0}{2}\int_\Omega|\nabla_xc|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\Gamma}{4}\int_\Omega|\Delta_xQ|^2\,\mathrm{d}x+\frac{c_*^2\Gamma}{2}\int_\Omega|Q|^6\,\mathrm{d}x\\&+\int_{\Gamma_{\mathrm{out}}}P(\varrho)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x+\int_{\Gamma_{\mathrm{in}}}P(\varrho_B)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x\\&-\int_{\Gamma_{\mathrm{in}}}\left[P(\varrho_B)-P'(\varrho)(\varrho_B-\varrho)-P(\varrho)\right]\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x+\varepsilon\int_\Omega P''(\varrho)|\nabla_x\varrho|^2\,\mathrm{d}x\\\le&C\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|c|^2+\frac{1}{2}|Q|^2+\frac{1}{2}|\nabla_xQ|^2+\frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x+\int_\Omega\partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}):\nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x\\&-\int_\Omega\left[\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}+p(\varrho)\mathbb{I}_3\right]:\nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\varrho\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}_B\cdot\nabla_x\mathbf{u}_B)\,\mathrm{d}x\\&-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}|Q_B|^2+\frac{c_*}{4}\,\mathrm{tr}^2(Q_B^2)\right)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x+2c_*\Gamma\int_{\partial\Omega}|Q_B|^2Q_B:\nabla_xQ_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x+C,\end{aligned}\tag{4.12}$$

其中，常数 $C>0$ 可以依赖于 $\mathbf{u}_B$、Q_B、Γ 和 D_0，但与 δ、ε 和 n 无关。

我们通过估计（4.12）右侧的以下各项来得出上述能量不等式。首先，我们计算

$$\left|\int_\Omega p(\varrho)\mathbb{I}_3 : \nabla_x \mathbf{u}_B \,\mathrm{d}x\right| \leq C(\gamma-1)\|\nabla_x \mathbf{u}_B\|_{L^\infty(\Omega)} P(\varrho), \tag{4.13}$$

$$\int_\Omega \varrho \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}_B\cdot\nabla_x \mathbf{u}_B)\,\mathrm{d}x \leq C(\varrho_0,\mathbf{u}_B)\left(1+\int_\Omega \varrho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_B|^2\,\mathrm{d}x\right), \tag{4.14}$$

and

$$\left|\int_\Omega \varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} : \nabla_x \mathbf{u}_B \,\mathrm{d}x\right| \leq C\|\nabla_x \mathbf{u}_B\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\int_\Omega \varrho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_B|^2 + C(\varrho_0,\mathbf{u}_B)\right). \tag{4.15}$$

我们还发现

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}) : \nabla_x \mathbf{u}_B \,\mathrm{d}x\right| &\leq C\int_\Omega \sqrt{\partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}) : \mathbb{D}_x\mathbf{u}}\,|\nabla_x \mathbf{u}_B|\,\mathrm{d}x\\ &\leq \frac{1}{4}\int_\Omega \partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}) : \mathbb{D}_x\mathbf{u}\,\mathrm{d}x + C\|\nabla_x \mathbf{u}_B\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

然后，将估计式（4.13）–（4.16）代入（4.12）并合并后，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_B|^2 + P(\varrho) + \frac{1}{2}|c|^2 + \frac{1}{2}|Q|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2 + \frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x\\ &+\frac{1}{4}\int_\Omega \partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}) : \mathbb{D}_x\mathbf{u}\,\mathrm{d}x + \frac{D_0}{2}\int_\Omega |\nabla_x c|^2\,\mathrm{d}x + \frac{\Gamma}{4}\int_\Omega |\Delta_x Q|^2\,\mathrm{d}x + \frac{c_*^2\Gamma}{2}\int_\Omega |Q|^6\,\mathrm{d}x\\ &+\int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} P(\varrho)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x + \varepsilon\int_\Omega P''(\varrho)|\nabla_x\varrho|^2\,\mathrm{d}x\\ &-\int_{\Gamma_{\mathrm{in}}}\left[P(\varrho_B) - P'(\varrho)(\varrho_B-\varrho) - P(\varrho)\right]\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x\\ \leq& C\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_B|^2 + P(\varrho) + \frac{1}{2}|c|^2 + \frac{1}{2}|Q|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2 + \frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x\\ &-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}|Q_B|^2 + \frac{c_*}{4}\,\mathrm{tr}^2(Q_B^2)\right)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x - \int_{\Gamma_{\mathrm{in}}} P(\varrho_B)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x\\ &+2c_*\Gamma\int_{\partial\Omega}|Q_B|^2 Q_B : \nabla_x Q_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x + C,\end{aligned} \tag{4.17}$$

其中常数 $C>0$ 与 δ、ε 和 n无关。

注记 4.6. 注意，在能量不等式(4.17)左端的项 $\int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} P(\varrho)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S_x$ 为正号，因为$\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\geq 0$ 在 Γ_{out} 中。

另一方面，由于$\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n} < 0$ 在 Γ_{in} 且 $P(\varrho)$具有凸性，因此有$[P(\varrho_B) - P'(\varrho)(\varrho_B-\varrho) - P(\varrho)]\geq 0$，在(4.17)左端对应的项非负。这些事实保证了近似能量不等式(4.17)成立。

由此得到以下命题。

命题 4.7 (近似系统的解)。 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是一个有界 *Lipschitz* 域。假设 $p=p(\varrho)$ 如 (2.2) 所示，且正则化势 F_δ 满足 (4.2)–(4.3)。令数据属于以下类别

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}_B\in\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3),\ \varrho_0\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)\ \textit{such that}\ \varrho_0\equiv 0\ \textit{in}\ \mathbb{R}^3\setminus\Omega,\ \varrho_B\in\mathcal{C}^1(\partial\Omega),\ \varrho_0,\varrho_B\geq 0,\\ &\mathbf{u}_0=\mathbf{v}_0+\mathbf{u}_B,\ \mathbf{v}_0\in X_n,\ c_0\in\mathcal{C}_c^1(\Omega),\ Q_0\in\mathcal{C}_c^1(\Omega),\ Q_B\in\mathcal{C}^1(\partial\Omega).\end{aligned}$$

那么，对于每个固定的 $\delta>0$，$\varepsilon>0$和 $n>0$，都存在近似问题$(\varrho,\ \mathbf{u}\ c,\ Q)$ ((4.4)–(4.6)、(4.9) 和(4.10)的一个解。此外，近似能量不等式(4.17) 成立。

5. 关于 $\delta \to 0$ 的极限

本节中，我们令势函数正则化的 $\delta \to 0$ 极限为 F_δ。首先，我们对（4.17）应用格朗沃尔引理，从而得到以下估计：

$$\begin{aligned}
&\left[\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_B|^2 + P(\varrho) + \frac{1}{2}|c|^2 + \frac{1}{2}|Q|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2 + \frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x\right]_0^\tau \\
&+ \int_0^\tau \left(\frac{D_0}{2}\|\nabla_x c\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\Gamma}{4}\|\Delta_x Q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c_*^2\Gamma}{2}\|Q\|_{L^6(\Omega)}^6\right)\mathrm{d}t \\
&+ \frac{1}{4}\int_0^\tau \int_\Omega \partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}) : \mathbb{D}_x\mathbf{u}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_{\Gamma_{\text{out}}} P(\varrho)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}t \\
&- \int_0^\tau \int_{\Gamma_{\text{in}}} \left[P(\varrho_B) - P'(\varrho)(\varrho_B-\varrho) - P(\varrho)\right]\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}t + \varepsilon\int_0^\tau\int_\Omega P''(\varrho)|\nabla_x\varrho|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\le C,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

对于几乎处处的 $\tau \in [0,T]$，其中 $C>0$ 是一个取决于给定数据和参数、但与 δ、ε 和 n 无关的常数。

由（5.1）和关系式（4.3），我们推得速度梯度无迹部分的一致有界性。事实上，有

$$\left\|\mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta - \frac{1}{3}\mathrm{div}_x\mathbf{u}_\delta\mathbb{I}_3\right\|_{L^{4/3}(0,T;L^{4/3}(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3}))}^{4/3} \lesssim \int_0^T\int_\Omega \partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta) : \mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le C,$$

关于 $\delta\to0$ 一致地成立。于是，可以使用引理 A.3 给出的无迹 Korn 不等式，从而得到

$$\|\nabla_x\mathbf{u}_\delta\|_{L^{4/3}(0,T;L^{4/3}(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3}))} \le C.$$

结合标准庞加莱不等式，我们进一步得到

$$\|\mathbf{u}_\delta\|_{L^{4/3}(0,T;W^{1,4/3}(\Omega;\mathbb{R}^3))} \le C. \tag{5.2}$$

由于我们处于有限维空间 X_n 中，所有范数都等价，因此有

$$\|\mathbf{u}_\delta\|_{L^\infty(0,T;X_n)} + \|\nabla_x\mathbf{u}_\delta\|_{L^\infty(0,T;X_n)} \le \|\mathbf{u}_\delta\|_{L^{4/3}(0,T;W^{1,4/3}(\Omega;\mathbb{R}^3))} \le C. \tag{5.3}$$

对于密度 ϱ_δ，根据引理 4.2 和推论 4.4，我们有以下一致有界性：

$$0 < \underline{\varrho} \le \varrho_\delta(t,x) \le \overline{\varrho} \quad \forall (t,x)\in[0,T]\times\overline{\Omega}. \tag{5.4}$$

此外，由（5.1），可得

$$\|\varrho_\delta|\mathbf{u}_\delta|^2\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|\varrho_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^\gamma(\Omega))} \le C. \tag{5.5}$$

此时，由于近似连续性方程具有抛物效应，我们可以获得关于密度 ϱ_δ的更多信息。更确切地说，若初始密度 ϱ_0足够光滑，则可得到以下估计（同时考虑一致有界性（5.3））

$$\|\varrho_\delta\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|\partial_t\varrho_\delta\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} \le C, \tag{5.6}$$

由此可得（必要时取子列）

$$\begin{cases}
\varrho_\delta \to \varrho \text{ weakly in } L^2(0,T;H^2(\Omega)), \\
\partial_t\varrho_\delta \to \varrho \text{ weakly in } L^2((0,T)\times\Omega).
\end{cases} \tag{5.7}$$

因此，由 Aubin-Lions 引理可得

$$\varrho_\delta \to \varrho \text{ strongly in } L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{5.8}$$

上述结果（5.8）进一步给出了压力项及其势函数的收敛性，即有

$$p(\varrho_\delta)\to p(\varrho) \quad\text{and}\quad P(\varrho_\delta)\to P(\varrho) \quad \text{strongly in } L^r((0,T)\times\Omega) \tag{5.9}$$

对某个 $r > 1$。

接下来，根据能量不等式（5.1），还可以得到

$$\begin{aligned}&\|c_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|c_\delta\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\\&+ \|Q_\delta\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|Q_\delta\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|Q_\delta\|_{L^6((0,T)\times\Omega)} \le C.\end{aligned} \tag{5.10}$$

进而，我们有

$$c_\delta \to c \text{ weakly in } L^2(0,T;H^1(\Omega)) \text{ and } Q_\delta \to Q \text{ weakly in } L^2(0,T;H^2(\Omega)). \tag{5.11}$$

进一步地，可以得到 $\partial_t c_\delta$和 $\partial_t Q_\delta$至少在空间 $L^1(0,T;\ H^{-1}(\Omega))$和 $L^r(0,T;\ L^q(\Omega))$ 中具有一致有界性，其中 $r, q > 1$（通过进行类似的分析即可得到，我们将在第 6 节中加以说明）。因此，利用 Aubin-Lions 引理可得

$$c_\delta \to c \text{ strongly in } L^2((0,T)\times\Omega) \text{ and } Q_\delta \to Q \text{ strongly in } L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{5.12}$$

在得到关于 ϱ_δ、c_δ、Q_δ的所有一致有界性之后，可以按照 [41,第 5] 节中的步骤，对 $\mathbf{u}_\delta$ 的时间导数进行如下估计：

$$\|\partial_t \mathbf{u}_\delta\|_{L^2(0,T;X_n)} \le C,$$

其中 $C > 0$ 在 δ中是一致的。结合这一有界性以及（5.3），可得到如下强收敛结果：

$$\mathbf{u}_\delta \to \mathbf{u} \text{ strongly in } \mathcal{C}([0,T];X_n), \tag{5.13}$$

得益于 Aubin-Lions 引理。

Fi最后，我们需要证明近似的 m $\partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta)$ 项的收敛性 o-men量方程（4.10），下面我们将对其进行分析。

–(u_δ)的极限。首先，注意到

$$F_\delta(\mathbb{D}) \le G(\mathbb{D}) := \sup_{\delta\in[0,1]} F_\delta(\mathbb{D}).$$

由于函数 F_δ 是真凸的，因此 G在 $\mathbb{R}^{3\times3}_{\text{sym}}$ 上也是真凸的；此外，其共轭函数G^* 是超线性的，并且

$$G^*(\mathbb{D}) \le F_\delta^*(\mathbb{D}) \quad \forall \mathbb{D} \in \mathbb{R}^{3\times3}_{\text{sym}},\ \delta \in [0,1]. \tag{5.14}$$

然后，利用光滑函数 F_δ的次梯度与共轭函数之间的关系（1.6）–（1.8），我们写出

$$\int_0^T \int_\Omega \partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta) : \mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega \left[F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta) + F^*(\partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta))\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

利用能量估计（5.1）和（5.14），我们推得

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega G^*(\partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &\le \int_0^T \int_\Omega F_\delta^*(\partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&\le \int_0^T \int_\Omega \partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta) : \mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le C,\end{aligned}$$

对于某个常数 $C > 0$，该常数与 δ 无关。

接着，由于 G^*的超线性，可以应用德拉瓦莱-普桑判别准则来证明等度可积性（见引理 A.4），从而推得存在函数 $\mathbb{S} \in L^1((0,T)\times\Omega;\ \mathbb{R}^{3\times3}_{\text{sym}})$ 使得

$$\partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta) \to \mathbb{S} \text{ weakly in } L^1((0,T)\times\Omega). \tag{5.15}$$

现在需要将 $\mathbb{S}$ 与 F 在 $\mathbb{D}_x\mathbf{u}$ 处的次梯度（即 $\partial F(\mathbb{D}_x\mathbf{u})$）对应起来，其中 $\mathbf{u}$ 是式（5.13）中给出的极限函数。我们遵循 [54, 第 3 节1]中的论证来实现这一目标。注意，$\partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta)$ 构成经典梯度（因为按照构造它是光滑的

（4.2）），而且特别是 F_δ 在 $\mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta$处的一个次梯度。因此，对于所有非负函数$\phi \in \mathcal{D}$（（0，$T$）$\times\Omega$）以及所有矩阵 $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}$，都有

$$\int_0^T \int_\Omega \Big[F_\delta(\mathbb{D}) - \partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta) : (\mathbb{D} - \mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta) - F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta)\Big]\phi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geq 0. \tag{5.16}$$

此外，根据正则化势4.2的定义（ F_δ），我们知道

$$F_\delta(\cdot) \to F(\cdot) \ \text{ in } \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}). \tag{5.17}$$

结合利用（ $\mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta$ 5.3）得到的一致收敛以及弱收敛（5.15），我们便可在不等式（5.16）的右端取极限。事实上，由于 $\phi \in \mathcal{D}((0,T)\times\Omega)$的任意性，可得

$$F(\mathbb{D}) - \mathbb{S} : (\mathbb{D} - \mathbb{D}_x\mathbf{u}) - F(\mathbb{D}_x\mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall\, \mathbb{D} \in \mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}, \tag{5.18}$$

这就是 $\mathbb{S} \in \partial F(\mathbb{D}_x\mathbf{u})$的所需判据。特别地，以下关系成立 ：

$$\mathbb{S} \in \partial F(\mathbb{D}_x\mathbf{u}) \Leftrightarrow \mathbb{D}_x\mathbf{u} \in \partial F^*(\mathbb{S}) \Leftrightarrow \mathbb{S} : \mathbb{D}_x\mathbf{u} = F(\mathbb{D}_x\mathbf{u}) + F^*(\mathbb{S}). \tag{5.19}$$

利用上述收敛结果，现在我们可以关于 $\delta \to 0$ 取极限，从而得到极限函数(ϱ， $\mathbf{u}$ c， Q)和 $\mathbb{S}$所满足的弱形式。

5.1. **连续性方程、浓度方程和张量参数方程中的极限**。取 $\delta \to 0$ 极限后，由于本层次得到的收敛结果，连续性方程、活性粒子方程以及向列相张量序参量方程分别具有与（4.7）、（2.6）和（2.7）类似的形式。我们不再重复这些方程。

5.2. **动量平衡中的极限**。 根据上述关于$\delta \to 0$的所有极限，动量方程（4.10）现在可写为

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varrho\mathbf{u}(\tau)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\tau)\,\mathrm{d}x = &\int_0^\tau \int_\Omega \left[\varrho\mathbf{u}\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi} + \varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} : \nabla_x\boldsymbol{\varphi} + p(\varrho)\mathrm{div}_x\boldsymbol{\varphi} - \mathbb{S} : \nabla_x\boldsymbol{\varphi}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&- \int_0^\tau \int_\Omega \left[G(Q)\mathbb{I}_3 - \nabla_x Q \odot \nabla_x Q\right] : \nabla_x\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&- \int_0^\tau \int_\Omega \left[Q\Delta_x Q - \Delta_x Q Q + \sigma_* c^2 Q\right] : \nabla_x\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&- \varepsilon\int_0^\tau \int_\Omega \nabla_x\varrho\cdot\nabla_x\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega \varrho_0\mathbf{u}_0\cdot\varphi(0)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

对任意 $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^1([0,T];\, X_n)$，满足初始条件

$$(\varrho\mathbf{u})(0,\cdot) = \varrho_0\mathbf{u}_0,\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_B,\ \mathbf{v}_0 \in X_n.$$

5.3. **极限能量不等式**。 最后，极限系统（当$\delta \to 0$时）的能量不等式为

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_B|^2 + P(\varrho) + \frac{1}{2}|c|^2 + \frac{1}{2}|Q|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2 + \frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega \left[F(\mathbb{D}_x\mathbf{u}) + F^*(\mathbb{S})\right]\mathrm{d}x + \frac{D_0}{2}\int_\Omega |\nabla_x c|^2\,\mathrm{d}x + \frac{\Gamma}{4}\int_\Omega |\Delta_x Q|^2\,\mathrm{d}x + \frac{c_*^2\Gamma}{2}\int_\Omega |Q|^6\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} P(\varrho)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x + \int_{\Gamma_{\mathrm{in}}} P(\varrho_B)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x \\
&- \int_{\Gamma_{\mathrm{in}}} \left[P(\varrho_B) - P'(\varrho)(\varrho_B - \varrho) - P(\varrho)\right]\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x + \varepsilon\int_\Omega P''(\varrho)|\nabla_x\varrho|^2\,\mathrm{d}x \\
\leq & C\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|c|^2 + \frac{1}{2}|Q|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2 + \frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbb{S} : \nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x \\
&- \int_\Omega \left[\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + p(\varrho)\mathbb{I}_3\right] : \nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \varrho\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}_B\cdot\nabla_x\mathbf{u}_B)\,\mathrm{d}x \\
&- \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}|Q_B|^2 + \frac{c_*}{4}\,\mathrm{tr}^2(Q_B^2)\right)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x + 2c_*\Gamma\int_{\partial\Omega}|Q_B|^2 Q_B : \nabla_x Q_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x + C,
\end{aligned} \tag{5.21}$$

其中该常数与 ε 或 n 无关。

因此，能量估计为（如前所述，应用格朗沃尔引理后）

$$\begin{aligned}
&\left[\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_B|^2 + P(\varrho) + \frac{1}{2}|c|^2 + \frac{1}{2}|Q|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2 + \frac{c_*}{4}|Q|^4\right) \mathrm{d}x\right]_0^\tau \\
&+ \int_0^\tau \left(\frac{D_0}{2}\|\nabla_x c\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\Gamma}{4}\|\Delta_x Q\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{c_*^2\Gamma}{2}\|Q\|^6_{L^6(\Omega)}\right) \mathrm{d}t \\
&+ \frac{1}{4}\int_0^\tau \int_\Omega [F(\mathbb{D}_x\mathbf{u}) + F^*(\mathbb{S})] \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_{\Gamma_{\text{out}}} P(\varrho)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}t \\
&- \int_0^\tau \int_{\Gamma_{\text{in}}} [P(\varrho_B) - P'(\varrho)(\varrho_B-\varrho) - P(\varrho)]\,\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}t + \varepsilon\int_0^\tau\int_\Omega P''(\varrho)|\nabla_x\varrho|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\le C
\end{aligned} \tag{5.22}$$

对几乎处处的 $\tau\in[0,T]$，其中常数 $C>0$ 与 ε 和 n 无关。

结合上述估计和结果，我们陈述如下命题。

命题*5.1.* 假设命题 *4.7* 中的假设成立。设 $(\varrho_\delta, \mathbf{u}_\delta, c_\delta, Q_\delta)_{\delta>0}$ 是给定 $\varepsilon>0$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 时近似问题 *(4.4)–(4.6)*、*(4.9)* 和 *(4.10)* 的解序列。那么，存在一些函数 $(\varrho, \mathbf{u}\ c, Q)$，使得以下收敛结果成立：

$$\begin{aligned}
&\varrho_\delta \to \varrho \ \textit{ strongly in } \ L^2(0,T;H^1(\Omega)), \quad \mathbf{u}_\delta\to\mathbf{u} \ \textit{ strongly in } \ \mathcal{C}([0,T];X_n),\\
&c_\delta \to c \ \textit{ weakly in } \ L^2(0,T;H^1(\Omega)), \quad c_\delta\to c \ \textit{ strongly in } \ L^2((0,T)\times\Omega),\\
&Q_\delta\to Q \ \textit{ weakly in } \ L^2(0,T;H^2(\Omega)), \quad Q_\delta\to Q \ \textit{ strongly in } \ L^2(0,T;H^1(\Omega)).
\end{aligned}$$

此外，存在函数 $\mathbb{S}\in L^1((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times3}_{\text{sym}})$，使得

$$\partial F_\delta(\mathbb{D}_x\mathbf{u}_\delta)\to\mathbb{S} \ \textit{ weakly in } \ L^1((0,T)\times\Omega),$$

其中 $\mathbb{S}$ 满足

$$\mathbb{S}:\mathbb{D}_x\mathbf{u} = F(\mathbb{D}_x\mathbf{u}) + F^*(\mathbb{S}),$$

并且 F 由(1.9)给出。

此外，$(\varrho、\ \mathbf{u}\ c, Q, \mathbb{S})$ 满足本节给出的弱形式。

因此，我们得到了 ε-层解。事实上，命题5.1 中得到的解序列可以重新记为$(\varrho_\varepsilon,\mathbf{u}_\varepsilon, c_\varepsilon, Q_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$以及$(\mathbb{S}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$。我们将在下一节讨论它们。

6. Limit with respect to $\varepsilon\to0$

本节致力于研究 $\varepsilon\to0$ 黏性近似中的极限（4.4）。这比前一步更为复杂，因为近似密度关于空间变量的紧性会丧失。对于固定的 $n>0$，我们收集与 ε无关的必要估计。

与第5 节类似（如我们得到（5.2）所示），有

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^{4/3}(0,T;W^{1,4/3}(\Omega;\mathbb{R}^3))}\le C, \tag{6.1}$$

由能量估计（5.22）可知。由于 n仍然固定，我们有

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^{4/3}(0,T;X_n)}\le\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^{4/3}(0,T;W^{1,4/3}(\Omega;\mathbb{R}^3))}\le C. \tag{6.2}$$

This 由引理 4.2和推论 4.4可得以下关于密度的一致有界性 ty ϱ_ε:

$$0<\underline{\varrho}\le\varrho_\varepsilon(t,x)\le\overline{\varrho}\quad\forall(t,x)\in[0,T]\times\overline{\Omega}. \tag{6.3}$$

能量估计（5.22）进一步给出

$$\|\varrho_\varepsilon|\mathbf{u}_\varepsilon|^2\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|\varrho_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^\gamma(\Omega))}\le C. \tag{6.4}$$

此外，由（5.22）、上界和下界（6.3）以及（6.2），我们推得

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in[0,T]}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\tau)\|_{W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\le C. \tag{6.5}$$

注意，在此阶段， ϱ_ε 在 $\partial\Omega$上具有定义良好的迹。因此，以 ϱ_ε 测试方程（4.4），并利用界（6.1）–（6.3），可得

$$\varepsilon \int_0^T \int_\Omega |\nabla_x \varrho_\varepsilon|^2 \mathrm{d}t \le C, \tag{6.6}$$

其中 C 与 ε 无关。

鉴于之前得到的一致有界性，可以假设

$$\begin{cases} \varrho_\varepsilon \to \varrho \text{ weakly-(*) in } L^\infty((0,T)\times\Omega) \text{ and} \\ \varrho_\varepsilon \to \varrho \text{ weakly in } \mathcal{C}_{\text{weak}}([0,T]; L^r(\Omega)) \text{ for any } 1 < r < \infty, \end{cases} \tag{6.7}$$

必要时可取适当子列。第二个收敛性由时间导数的弱有界性推出 $\partial_t \varrho_\varepsilon$，该弱有界性由方程（4.7）得到。我们还有

$$\varrho_\varepsilon \to \varrho \text{ weakly-(*) in } L^\infty((0,T)\times\partial\Omega;\, \mathrm{d}S_x). \tag{6.8}$$

此外，极限密度具有与（6.3）中相同的上界和下界。

接下来，由一致估计（6.5），我们有

$$\mathbf{u}_\varepsilon \to \mathbf{u} \text{ weakly-(*) in } L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^3)), \tag{6.9}$$

and

$$\varrho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \to \mathbf{m} \text{ weakly-(*) in } L^\infty((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^3)). \tag{6.10}$$

然后，利用阿尔泽拉-阿斯科利定理，可以证明

$$\mathbf{m} = \varrho \mathbf{u} \text{ a.e. in } (0,T)\times\Omega. \tag{6.11}$$

此外，由一致能量估计（5.22），并对 c_ε 的方程应用最大值原理，可得

$$\begin{cases} \|c_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} + \|c_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \le C, \\ \|Q_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|Q_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \le C, \end{cases} \tag{6.12}$$

其中， $C>0$ 与 ε无关。因此，我们有

$$c_\varepsilon \to c \text{ weakly in } L^2(0,T;H^1(\Omega)) \text{ and } Q_\varepsilon \to Q \text{ weakly in } L^2(0,T;H^2(\Omega)). \tag{6.13}$$

我们仍需求出各项 $\partial_t c_\varepsilon$ 和 $\partial_t Q_\varepsilon$的一致有界性。为推导前者，回顾方程（1.13），可得

$$\int_0^T \langle \partial_t c_\varepsilon, \phi\rangle_{H^{-1},H_0^1}\,\mathrm{d}t = -\int_0^T \langle (\mathbf{u}_\varepsilon\cdot\nabla_x)c_\varepsilon, \phi\rangle_{H^{-1},H_0^1}\,\mathrm{d}t + D_0\int_0^T \langle \Delta_x c_\varepsilon, \phi\rangle_{H^{-1},H_0^1}\,\mathrm{d}t,$$

对所有满足$\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}=1$.的 $\phi\in H_0^1(\Omega)$，我们计算得

$$\begin{aligned} &-\langle (\mathbf{u}_\varepsilon\cdot\nabla_x)c_\varepsilon, \phi\rangle_{H^{-1},H_0^1} + D_0\langle \Delta_x c_\varepsilon, \phi\rangle_{H^{-1},H_0^1} \\ &= -\int_\Omega (\mathbf{u}_\varepsilon\cdot\nabla_x)c_\varepsilon\,\phi\,\mathrm{d}x - D_0\int_\Omega \nabla_x c_\varepsilon\cdot\nabla_x\phi\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega c_\varepsilon \operatorname{div}_x(\mathbf{u}_\varepsilon\phi)\,\mathrm{d}x - D_0\int_\Omega \nabla_x c_\varepsilon\cdot\nabla_x\phi\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \left|\langle \partial_t c_\varepsilon, \phi\rangle_{H^{-1},H_0^1}\right| &\le \|c_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\|\nabla_x\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^{4/3}(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}\|\phi\|_{L^4(\Omega)} + \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^{12/5}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\|\nabla_x\phi\|_{L^{12/7}(\Omega)}\right) \\ &\quad + D_0\|\nabla_x c_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla_x\phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C\|c_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{W^{1,4/3}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} + D_0\|c_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

得益于紧嵌入 $W^{1,\,4/3}(\Omega) \hookrightarrow L^{12/5}(\Omega)$ 以及 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$（回顾一下，我们处于空间维数 3 的情形）。

因此，我们有

$$\begin{aligned} \|\partial_t c_\varepsilon\|_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\le C\|c_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^{4/3}(0,T;W^{1,4/3}(\Omega;\mathbb{R}^3)} + D_0\|c_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\ &\le C, \end{aligned} \tag{6.14}$$

利用一致有界性（6.1）和（6.12）。

现在我们将为该量找到适当的估计 $\partial_t Q_\varepsilon$。回顾 Q_ε 的方程（1.14），可得以下界：

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{u}_\varepsilon\cdot\nabla_x)Q_\varepsilon\|_{L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega))} &\le \left(\int_0^T \|\mathbf{u}_\varepsilon\|^{4/3}_{L^{12/5}(\Omega;\mathbb{R}^3)}\|\nabla_x Q_\varepsilon\|^{4/3}_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t\right)^{3/4}\\ &\le C\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^{4/3}(0,T;W^{1,4/3}(\Omega;\mathbb{R}^3))}\|\nabla_x Q_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\\ &\le C,\end{aligned}\tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}\|Q_\varepsilon\Lambda_\varepsilon-\Lambda_\varepsilon Q_\varepsilon\|_{L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega))} &\le 2\left(\int_0^T \|\nabla_x\mathbf{u}_\varepsilon\|^{4/3}_{L^{4/3}(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})}\|Q_\varepsilon\|^{4/3}_{L^6(\Omega)}\right)^{3/4}\\ &\le C\|Q_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^{4/3}(0,T;W^{1,4/3}(\Omega;\mathbb{R}^3))}\\ &\le C,\end{aligned}\tag{6.16}$$

利用关系式 $\Lambda_\varepsilon=\frac{1}{2}(\nabla_x\mathbf{u}_\varepsilon-\nabla_x^\top\mathbf{u}_\varepsilon)$。最后，我们将为.....找到一个合适的界

$$\|\Gamma H[Q_\varepsilon,c_\varepsilon]\|_{L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega))}.$$

为此，我们先回顾 $H[Q,c]$ 由（1.15）给出的表达式：

$$H[Q,c]=\Delta_x Q-\frac{1}{2}(c-c_*)Q+b\left(Q^2-\frac{\operatorname{tr}(Q^2)}{3}\mathbb{I}_3\right)-c_*Q\operatorname{tr}(Q^2),\quad c_*\text{ is constant.}$$

利用上述关系，我们计算得（$\Gamma>0$ 为常数）

$$\begin{aligned}&\|\Gamma H[Q_\varepsilon,c_\varepsilon]\|_{L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega))}\\ &\le C\left(\int_0^T\|\Delta_x Q_\varepsilon\|^{4/3}_{L^{12/11}(\Omega)}\right)^{3/4}+C\|c_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\left(\int_0^T\|Q_\varepsilon\|^{4/3}_{L^{12/11}(\Omega)}\right)^{3/4}\\ &\quad+C\left(\int_0^T\|Q_\varepsilon\|^{8/3}_{L^{24/11}(\Omega)}\right)^{3/4}+C\left(\int_0^T\|Q_\varepsilon\|^{4}_{L^{36/11}(\Omega)}\right)^{3/4}\\ &\le C\|\Delta_x Q_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}+C\|Q_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+C\|Q_\varepsilon\|^3_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))}\\ &\le C,\end{aligned}\tag{6.17}$$

根据估计式（6.12）。

因此，综合估计（6.15）–（6.17），可得

$$\|\partial_t Q_\varepsilon\|_{L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega))}\le C,\tag{6.18}$$

其中 $C>0$ 与 ε无关。

接下来，利用一致估计（6.12）、（6.14）、（6.18）以及 Aubin-Lions 引理，可得到以下强收敛结果：

$$c_\varepsilon\to c\text{ strongly in }L^2((0,T)\times\Omega)\quad\text{and}\quad Q_\varepsilon\to Q\text{ strongly in }L^2(0,T;H^1(\Omega)).\tag{6.19}$$

6.1. **连续性方程中的极限**。考虑到一致有界性（6.6）以及极限（6.7）–（6.11），我们可以在近似连续性方程（$\varepsilon\to0$ 4.7）中取极限，从而得到

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega\varrho\varphi\right]_{t=0}^{t=\tau}&=\int_0^\tau\int_\Omega[\varrho\partial_t\varphi+\varrho\mathbf{u}\cdot\nabla_x\varphi]\mathrm{d}t\\ &\quad-\int_0^\tau\int_{\Gamma_{\text{out}}}\varphi\varrho\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t-\int_0^\tau\int_{\Gamma_{\text{in}}}\varphi\varrho_B\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{6.20}$$

对任意 $\varphi\in\mathcal{C}^1([0,T]\times\overline{\Omega})$，这就是带有初始条件（1.11）和边界条件（1.17）的连续性方程弱形式（1.20）。特别地，有

$$\partial_t\varrho+\operatorname{div}_x(\varrho\mathbf{u})=0\ \text{ in }\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega),\tag{6.21}$$

随后，连续性方程也满足 DiPerna 和 Lions 引入的重整化解意义下的条件 [17]。

6.2. **动量方程中的极限**。对于近似动量方程（5.20）中的极限过程，我们首先注意到，能量估计（5.22）、F^* 的超线性（因为 F是一个真凸函数）以及用于等度可积性的德拉瓦莱-普桑判据，蕴含存在 $\mathbb{S} \in L^1((0,T)\times\Omega;\ \mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}})$，使得

$$\mathbb{S}_\varepsilon \to \mathbb{S} \text{ weakly in } L^1((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}).$$

此外，为了在压力和压强势中取极限，我们需要密度强 L^p收敛。这可以通过对引理4.3中的重整化方程进行处理来实现。对此，可以沿用文献 [41, 节7]中的相同步骤，从而得到

$$\varrho_\varepsilon \to \varrho \ \text{ strongly in } L^p((0,T)\times\Omega),\ \ 1\le p<\infty. \tag{6.22}$$

特别地，由于压力对密度的连续依赖性，我们可以直接得到

$$p(\varrho_\varepsilon)\to p(\varrho) \ \text{ and } \ P(\varrho_\varepsilon)\to P(\varrho) \ \text{ strongly in } L^p((0,T)\times\Omega),\ \ 1\le p<\infty. \tag{6.23}$$

接下来，为了处理对流项 $\varrho_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon\otimes\mathbf{u}_\varepsilon$ 和边界项的极限过程，我们需要证明速度场强收敛。为此，利用动量方程中关于 ε 得到的所有一致有界性，可得

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\int_\Omega \partial_t(\varrho_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon)\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| &= \Bigg|\int_0^T\int_\Omega [\varrho_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon\otimes\mathbf{u}_\varepsilon:\nabla_x\boldsymbol{\varphi}+p(\varrho_\varepsilon)\mathrm{div}_x\boldsymbol{\varphi}-\mathbb{S}_\varepsilon:\nabla_x\boldsymbol{\varphi}]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\quad-\int_0^T\int_\Omega [G(Q_\varepsilon)\mathbb{I}_3-\nabla_xQ_\varepsilon\odot\nabla_xQ_\varepsilon]:\nabla_x\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\quad-\int_0^T\int_\Omega \left[Q_\varepsilon\Delta_xQ_\varepsilon-\Delta_xQ_\varepsilon Q_\varepsilon+\sigma_*c_\varepsilon^2Q_\varepsilon\right]:\nabla_x\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &\quad-\varepsilon\int_0^T\int_\Omega \nabla_x\varrho_\varepsilon\cdot\nabla_x\mathbf{u}_\varepsilon\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Bigg|\\ &\le C\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(0,T;X_n)}\end{aligned}$$

对于一个任意测试函数 $\boldsymbol{\varphi}\in L^\infty(0,\ T;\ X_n)$，其中 $C>0$与 ε无关。因此，我们有 e

$$\|\partial_t(\varrho_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon)\|_{(L^\infty(0,T;X_n))'}\le C,$$

并且等价地，

$$\|\partial_t(\varrho_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon)\|_{L^1(0,T;X_n')}\le C.$$

于是可以应用 Aubin-Lions 引理，确保

$$\varrho_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon\to\varrho\mathbf{u} \ \text{ strongly in } \ L^2(0,T;X_n'). \tag{6.24}$$

由结果（6.24）以及 $\mathbf{u}_\varepsilon$ 在（6.9）中的收敛性，我们还可以得出

$$\|\sqrt{\varrho_\varepsilon}\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}\to\|\sqrt{\varrho}\mathbf{u}\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}.$$

但根据（6.4），我们有

$$\sqrt{\varrho_\varepsilon}\mathbf{u}_\varepsilon\to\sqrt{\varrho}\mathbf{u} \ \text{ weakly in } \ L^2((0,T)\times\Omega),$$

这给出了更好的收敛结果，即

$$\sqrt{\varrho_\varepsilon}\mathbf{u}_\varepsilon\to\sqrt{\varrho}\mathbf{u} \ \text{ strongly in } \ L^2((0,T)\times\Omega).$$

那么，由密度的强收敛（6.22）、ϱ_ε 在（6.3）中的下界，以及有限维空间 X_n中范数的等价性，我们推得

$$\mathbf{u}_\varepsilon\to\mathbf{u} \ \text{ strongly in } \ L^p(0,T;X_n),\ \ 1\le p<\infty. \tag{6.25}$$

综合所有收敛结果，现在我们可以在动量方程（ $\varepsilon \to 0$ （5.20）中取极限，得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varrho\mathbf{u}(\tau)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\tau)\,\mathrm{d}x = \int_0^\tau\int_\Omega \left[\varrho\mathbf{u}\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi} + \varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} : \nabla_x\boldsymbol{\varphi} + p(\varrho)\mathrm{div}_x\boldsymbol{\varphi} - \mathbb{S} : \nabla_x\boldsymbol{\varphi}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ - \int_0^\tau\int_\Omega \left[G(Q)\mathbb{I}_3 - \nabla_x Q\odot\nabla_x Q\right] : \nabla_x\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ - \int_0^\tau\int_\Omega \left[Q\Delta_x Q - \Delta_x Q Q + \sigma_* c^2 Q\right] : \nabla_x\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ + \int_\Omega \varrho_0\mathbf{u}_0\cdot\varphi(0)\,\mathrm{d}x, \qquad (6.26)\end{aligned}$$

对于任意 $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{C}^1([0,T];\, X_n)$，满足初始条件

$$(\varrho\mathbf{u})(0,\cdot) = \varrho_0\mathbf{u}_0,\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_B,\ \mathbf{v}_0\in X_n.$$

6.3. **浓度与向列相序参量方程的极限**。 回顾量 c_ε 和 Q_ε 在 (6.13) 和 (6.19) 中的收敛；利用这些极限以及 $\mathbf{u}_\epsilon$ 在 (6.25) 中的强收敛，我们得到活性粒子浓度方程以及 Q张量参数方程的以下极限弱形式：

$$\begin{aligned}\int_\Omega c(\tau)\psi(\tau)\,\mathrm{d}x - \int_0^\tau\int_\Omega c\partial_t\psi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^\tau\int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla_x)c\psi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ = \int_\Omega c_0\psi(0)\,\mathrm{d}x - D_0\int_0^\tau\int_\Omega \nabla_x c\cdot\nabla_x\psi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad (6.27)\end{aligned}$$

对于任意 $\tau\in[0,T]$ 以及任意测试函数 $\psi\in\mathcal{C}^1([0,T]\times\Omega)$，其中 $c(0,\cdot) = c_0$属于 Ω，并且

$$\begin{aligned}\int_\Omega Q(\tau) : \Psi(\tau)\,\mathrm{d}x - \int_0^\tau\int_\Omega Q : \partial_t\Psi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^\tau\int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla_x)Q : \Psi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ + \int_0^\tau\int_\Omega [Q\Lambda - \Lambda Q] : \Psi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega Q_0 : \Psi(0)\,\mathrm{d}x - \Gamma\int_0^\tau\int_\Omega H[Q,c] : \Psi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad (6.28)\end{aligned}$$

对于任意 $\tau\in[0,T]$ 以及任意测试函数 $\Psi\in\mathcal{C}_c^1([0,T]\times\Omega;\,\mathbb{R}^{3\times3})$，其中 $Q(0,\cdot) = Q_0$属于 Ω。此外，有 $Q\in S^3_{0}$。

6.4. **极限能量不等式**。 最后，取 $\varepsilon\to0$ 能量不等式（5.21）中的极限，极限能量不等式化简为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_B|^2 + P(\varrho) + \frac{1}{2}|c|^2 + \frac{1}{2}|Q|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2 + \frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega \left[F(\mathbb{D}_x\mathbf{u}) + F^*(\mathbb{S})\right]\mathrm{d}x + \frac{D_0}{2}\int_\Omega|\nabla_x c|^2\,\mathrm{d}x + \frac{\Gamma}{4}\int_\Omega|\Delta_x Q|^2\,\mathrm{d}x + \frac{c_*^2\Gamma}{2}\int_\Omega|Q|^6\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} P(\varrho)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x + \int_{\Gamma_{\mathrm{in}}} P(\varrho_B)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x \\ \le& C\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|c|^2 + \frac{1}{2}|Q|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2 + \frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbb{S} : \nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x \\ &- \int_\Omega\left[\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + p(\varrho)\mathbb{I}_3\right] : \nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \varrho\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}_B\cdot\nabla_x\mathbf{u}_B)\,\mathrm{d}x \\ &- \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}|Q_B|^2 + \frac{c_*}{4}\,\mathrm{tr}^2(Q_B^2)\right)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x + 2c_*\Gamma\int_{\partial\Omega}|Q_B|^2 Q_B : \nabla_x Q_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x + C, \qquad (6.29)\end{aligned}$$

其中常数 $C>0$ 关于 n 是一致的。

在（6.29）中，可以应用格朗沃尔引理进一步推导出

$$\begin{aligned}&\left[\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_B|^2+P(\varrho)+\frac{1}{2}|c|^2+\frac{1}{2}|Q|^2+\frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2+\frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x\right]_0^\tau\\&+\int_0^\tau\left(\frac{D_0}{2}\|\nabla_x c\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\Gamma}{4}\|\Delta_x Q\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{c_*^2\Gamma}{2}\|Q\|_{L^6(\Omega)}^6\right)\mathrm{d}t\\&+\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_\Omega\left[F(\mathbb{D}_x\mathbf{u})+F^*(\mathbb{S})\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^\tau\int_{\Gamma_{\mathrm{out}}}P(\varrho)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}t\\&\leq C\end{aligned}\tag{6.30}$$

对几乎处处的 $\tau\in[0,T]$，其中常数 $C>0$ 与 n 无关。

结合上述结果，我们陈述以下命题。

命题 6.1. 假设命题 4.7 中的假设成立，并令 $(\varrho_\varepsilon,\ \mathbf{u}_\varepsilon,\ c_\varepsilon,\ Q_\varepsilon,\ \mathbb{S}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$为第 5 节中针对给定的 $n\in\mathbb{N}$ 所得到的函数序列。那么，存在一些函数$(\varrho,\ \mathbf{u}\ c,\ Q,\ \mathbb{S})$ 使得以下收敛结果成立：

$$\begin{aligned}&\varrho_\varepsilon\to\varrho\ \textit{strongly in}\ L^p((0,T)\times\Omega),\ 1\leq p<\infty,\quad\varrho_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon\to\varrho\mathbf{u}\ \textit{strongly in}\ L^2(0,T;X_n'),\\&\varepsilon\nabla_x\varrho_\varepsilon\to0\ \textit{weakly in}\ L^2((0,T)\times\Omega),\quad\varrho_\varepsilon\to\varrho\ \textit{weakly-}(*)\ \textit{in}\ L^\infty((0,T)\times\partial\Omega;\partial S_x),\\&\mathbf{u}_\varepsilon\to\mathbf{u}\ \textit{strongly in}\ L^p((0,T;X_n),\ 1\leq p<\infty,\quad\mathbb{S}_\varepsilon\to\mathbb{S}\ \textit{weakly in}\ L^1((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}),\\&c_\varepsilon\to c\ \textit{weakly in}\ L^2(0,T;H^1(\Omega)),\quad c_\varepsilon\to c\ \textit{strongly in}\ L^2((0,T)\times\Omega),\\&Q_\varepsilon\to Q\ \textit{weakly in}\ L^2(0,T;H^2(\Omega)),\quad Q_\varepsilon\to Q\ \textit{strongly in}\ L^2(0,T;H^1(\Omega)).\end{aligned}$$

此外，$(\varrho,\ \mathbf{u}\ c,\ Q,\ \mathbb{S})$ 满足本节给出的弱形式。

这里，我们总结 n 阶解。命题 6.1 给出的极限函数序列可记为 $(\varrho_n,\ \mathbf{u}_n,\ c_n,\ Q_n,\ \mathbb{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$。在下一节中，我们将对其取 $n\to\infty$ 极限。

7. Final level: the $n\to\infty$ limit

最后一步，我们令 $n\to\infty$ 极限，即取 Galerkin近似。为此，我们考虑满足以下条件的正则序列（如 Galerkin 层级所要求）$\varrho_{0,n}$, $(\varrho\mathbf{u})_{0,n}$, $c_{0,n}$, $Q_{0,n}$ 和$Q_{B,n}$

$$\begin{aligned}\varrho_{0,n}\to\varrho_0\ \text{in}\ L^\gamma(\Omega),\quad\frac{|(\varrho\mathbf{u})_{0,n}|^2}{\varrho_{0,n}}\to\frac{|(\varrho\mathbf{u})_0|^2}{\varrho_0}\ \text{in}\ L^1(\Omega),\\c_{0,n}\to c_0\ \text{in}\ L^\infty(\Omega),\quad Q_{0,n}\to Q_0\ \text{in}\ \text{in}\ H^1(\Omega),\\Q_{B,n}\to Q_B\ \text{in}\ \text{in}\ H^{3/2}(\partial\Omega).\end{aligned}$$

于是，由于能量估计（6.30），我们有

$$\|\sqrt{\varrho_n}\mathbf{u}_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|P(\varrho_n)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}+\|\mathbf{u}_n\|_{L^{4/3}(0,T;W^{1,4/3}(\Omega;\mathbb{R}^3))}\leq C,\tag{7.1}$$

关于一致。利用上述估计和层级上的连续性方程（6.21），必要时取一个子列，可以推出

$$\begin{cases}\varrho_n\to\varrho\ \text{ in }\ \mathcal{C}_{\mathrm{weak}}([0,T];L^\gamma(\Omega)),\\\varrho_n|_{\Gamma_{\mathrm{out}}}\to\varrho\ \text{ weakly-}(*)\text{ in }\ L^\infty(0,T;L^\gamma(\Gamma_{\mathrm{out}};|\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}|\,\mathrm{d}S_x),\\\mathbf{u}_n\to\mathbf{u}\ \text{ weakly in }\ L^{4/3}(0,T;W^{1,4/3}(\Omega;\mathbb{R}^3)),\\\varrho_n\mathbf{u}_n\to\mathbf{m}\ \text{ weakly-}(*)\text{ in }\ L^\infty(0,T;L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega;\mathbb{R}^3)).\end{cases}\tag{7.2}$$

我们需要证明

$$\mathbf{m}=\varrho\mathbf{u}\ \text{ a.e. in }(0,T)\times\Omega.\tag{7.3}$$

为此，我们写出如下版本的散度-旋度引理，其证明可见 [2, 引理 8。1]。

引理 7.1。设 $T>0$ 和 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为有界区域。假设

$r_n\to r$ 在 $L^p((0,T)\times\Omega)$ 中弱收敛，$\mathbf{v}_n\to\mathbf{v}$ 在 $L^q(0,T;L^q(\Omega;\mathbb{R}^3))$ $p>1$，$q>1$ 中弱收敛，并且

$$r_n\mathbf{v}_n\to\mathbf{w}\ \textit{weakly in}\ L^r(0,T;L^r(\Omega;\mathbb{R}^3)),\ r>1.$$

此外，令

$$\partial_t r_n+\mathrm{div}_x(r_n\mathbf{v}_n)=0\quad \textit{in}\ \mathcal{D}'((0,T)\times\Omega),$$

and

$$\|\nabla_x\mathbf{v}_n\|_{L^1(0,T;L^1(\Omega;\mathbb{R}^3))}\leq C,$$

对于某个与 n 无关的常数 $C>0$。那么，有

$$\mathbf{w}=r\mathbf{v}\quad a.e.\ \textit{in}\ (0,T)\times\Omega.$$

将引理 7.1 直接应用于

$$r_n=\varrho_n,\ \mathbf{v}_n=\mathbf{u}_n,\quad\text{and}\quad p=\gamma,\ q=\frac{4}{3},\ r=\frac{2\gamma}{\gamma+1}$$

可得（7.3）。

7.1. **连续性方程中的极限**。收敛结果（7.2）和（7.3）使我们能够在连续性方程（6.20）中关于 $n\to\infty$ 取极限。因此有

$$\partial_t\varrho+\mathrm{div}_x(\varrho\mathbf{u})=0\ \text{ in }\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega).$$

7.2. **动量方程中的极限**。为了在动量平衡（6.26）中取极限，根据能量估计（6.30）和一致有界性（7.1），可知存在

$$\mathbb{S}\in L^1((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}),\quad \overline{p(\varrho)},\ \overline{P(\varrho)},\ \overline{\varrho|\mathbf{u}|^2}\in L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\overline{\Omega})),$$

$$\overline{\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}}\in L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^{3\times3})),$$

使得

$$\begin{cases}\mathbb{S}_n\to\mathbb{S}\ \text{ weakly in }\ L^1((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}}),\\ p(\varrho_n)\to\overline{p(\varrho)}\ \text{ weakly-(*) in }\ L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\overline{\Omega})),\\ P(\varrho_n)\to\overline{P(\varrho)}\ \text{ weakly-(*) in }\ L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\overline{\Omega})),\\ \varrho_n|\mathbf{u}_n|^2\to\overline{\varrho|\mathbf{u}|^2}\ \text{ weakly-(*) in }\ L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\overline{\Omega})),\\ \varrho_n\mathbf{u}_n\otimes\mathbf{u}_n\to\overline{\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}}\ \text{ weakly-(*) in }\ L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^{3\times3})).\end{cases}\tag{7.4}$$

注意，我们尚不能确定上述收敛（7.4）中的极限函数。为此，我们引入误差项 $\mathfrak{R}$，$\mathfrak{E}$，

$$\mathfrak{R}:=\left[\overline{\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}}+\overline{p(\varrho)}\mathbb{I}_3\right]-\left[\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}-p(\varrho)\mathbb{I}_3\right]\in L^\infty(0,T;\mathcal{M}^+(\overline{\Omega};\mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}})),\tag{7.5}$$

$$\mathfrak{E}:=\left[\frac{1}{2}\overline{\varrho|\mathbf{u}|^2}+\overline{P(\varrho)}\right]-\left[\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2+P(\varrho)\right]\in L^\infty(0,T;\mathcal{M}^+(\overline{\Omega})),\tag{7.6}$$

其中，ϱ 和$\mathbf{u}$ 是（7.2）中得到的极限。由函数 $P-ap$ 和$ap-P$在（2.2）中的凸性假设可知

$$\underline{a}\left(\overline{p(\varrho)}-p(\varrho)\right)\leq\overline{P(\varrho)}-P(\varrho)\quad\text{and}\quad\overline{P(\varrho)}-P(\varrho)\leq\overline{a}\left(\overline{p(\varrho)}-p(\varrho)\right).$$

对于（7.5）、（7.6）中定义的误差项，这意味着存在常数 $0<\underline{d}\leq\overline{d}<\infty$使得

$$\underline{d}\mathfrak{E}\leq\mathrm{tr}\,[\mathfrak{R}]\leq\overline{d}\mathfrak{E}.\tag{7.7}$$

最后，按照活性粒子浓度的强收敛（6.19）和 Q-张量参数的强收敛所采用的类似步骤，可以证明

$$c_n\to c\ \text{ strongly in }L^2((0,T)\times\Omega)\quad\text{and}\quad Q_n\to Q\ \text{ strongly in }L^2(0,T;H^1(\Omega)),\tag{7.8}$$

在 $n\to\infty$ 极限中。

汇总上述收敛结果，并引入由（7.5）–（7.6）给出的误差项后，我们现在可以关于 n 将极限传递到动量平衡（6.26）中。这得出

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varrho\mathbf{u}(\tau)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\tau)\,\mathrm{d}x = &\int_0^\tau\int_\Omega \left[\varrho\mathbf{u}\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi}+\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}:\nabla_x\boldsymbol{\varphi}+p(\varrho)\mathrm{div}_x\boldsymbol{\varphi}-\mathbb{S}:\nabla_x\boldsymbol{\varphi}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &-\int_0^\tau\int_\Omega\left[G(Q)\mathbb{I}_3-\nabla_xQ\odot\nabla_xQ\right]:\nabla_x\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &-\int_0^\tau\int_\Omega\left[Q\Delta_xQ-\Delta_xQQ+\sigma_*c^2Q\right]:\nabla_x\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &-\int_0^\tau\int_\Omega\nabla_x\boldsymbol{\varphi}:\mathrm{d}\mathfrak{R}(t)+\int_\Omega(\varrho\mathbf{u})_0\cdot\varphi(0)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{7.9}$$

对于任意测试函数 $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{C}^1([0,T];X_N)$，对于任意 $N\in\mathbb{N}$，均可任意选取。

接下来需要证明，弱形式（7.9）对一般测试函数 $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{C}_c^1([0,T]\times\Omega)$ 成立。事实上，根据（X_n 4.1）中引入的，对于任意 $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{C}_c^1([0,T]\times\Omega)$，均可找到一个序列 $\{\boldsymbol{\varphi}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ 使得

$$\boldsymbol{\varphi}_N\to\boldsymbol{\varphi}\ \text{ in }\ W^{1,\infty}((0,T)\times\Omega)\ \text{ as }\ N\to\infty.$$

因此，我们可以将动量平衡（7.9）的适用范围扩展到任意测试函数 $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{C}_c^1([0,T]\times\Omega)$。

7.3. **浓度方程和张量参数方程中的极限。** 汇总这一层次所需的全部收敛结果后，我们可以在活性粒子浓度方程（6.27）以及 Q-张量参数方程（6.28）中关于 $n\to\infty$取极限。极限形式与前一层次的（6.27）和（6.28）形式相同；为简洁起见，此处略去细节。

7.4. **极限能量不等式。** 能量不等式化简为如下形式（6.29），在$n\to\infty$ 极限下：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\overline{\varrho|\mathbf{u}|^2}-\varrho\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_B+\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}_B|^2+\overline{P(\varrho)}+\frac{1}{2}|c|^2+\frac{1}{2}|Q|^2+\frac{1}{2}|\nabla_xQ|^2+\frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x\\ &+\frac{1}{2}\int_\Omega\left[F(\mathbb{D}_x\mathbf{u})+F^*(\mathbb{S})\right]\mathrm{d}x+\frac{D_0}{2}\int_\Omega|\nabla_xc|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\Gamma}{4}\int_\Omega|\Delta_xQ|^2\,\mathrm{d}x+\frac{c_*^2\Gamma}{2}\int_\Omega|Q|^6\,\mathrm{d}x\\ &+\int_{\Gamma_{\mathrm{out}}}P(\varrho)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x+\int_{\Gamma_{\mathrm{in}}}P(\varrho_B)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x\\ \le&C\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|c|^2+\frac{1}{2}|Q|^2+\frac{1}{2}|\nabla_xQ|^2+\frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x+\int_\Omega\mathbb{S}:\nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x\\ &-\int_\Omega\left[\overline{\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}}+\overline{p(\varrho)}\mathbb{I}_3\right]:\nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\varrho\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}_B\cdot\nabla_x\mathbf{u}_B)\,\mathrm{d}x\\ &-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}|Q_B|^2+\frac{c_*}{4}\mathrm{tr}^2(Q_B^2)\right)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x+2c_*\Gamma\int_{\partial\Omega}|Q_B|^2Q_B:\nabla_xQ_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x+C,\end{aligned}\tag{7.10}$$

其中，常数 $C>0$ 与 δ、ε 和 n无关。

利用误差项 $\mathfrak{R}$和 $\mathfrak{E}$ （定义见式7.5）–（7.6），现在可以将式（7.10）改写如下：

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}-\mathbf{u}_B|^2+P(\varrho)+\mathfrak{E}+\frac{1}{2}|c|^2+\frac{1}{2}|Q|^2+\frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2+\frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega [F(\mathbb{D}_x\mathbf{u})+F^*(\mathbb{S})]\,\mathrm{d}x+\frac{D_0}{2}\int_\Omega|\nabla_x c|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\Gamma}{4}\int_\Omega|\Delta_x Q|^2\,\mathrm{d}x+\frac{c_*^2\Gamma}{2}\int_\Omega|Q|^6\,\mathrm{d}x\\
&+\int_{\Gamma_{\mathrm{out}}}P(\varrho)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x+\int_{\Gamma_{\mathrm{in}}}P(\varrho_B)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x\\
\le& C\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|c|^2+\frac{1}{2}|Q|^2+\frac{1}{2}|\nabla_x Q|^2+\frac{c_*}{4}|Q|^4\right)\mathrm{d}x+\int_\Omega(\mathbb{S}-\mathfrak{R}):\nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x\\
&-\int_\Omega[\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}+p(\varrho)\mathbb{I}_3]:\nabla_x\mathbf{u}_B\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\varrho\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}_B\cdot\nabla_x\mathbf{u}_B)\,\mathrm{d}x\\
&-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}|Q_B|^2+\frac{c_*}{4}\operatorname{tr}^2(Q_B^2)\right)\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x+2c_*\Gamma\int_{\partial\Omega}|Q_B|^2Q_B:\nabla_x Q_B\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S_x+C,\quad(7.11)
\end{aligned}$$

其中，相关流动的有效黏性应力可定义为

$$\mathbb{S}_{\mathrm{eff}}:=\mathbb{S}-\mathfrak{R},$$

而 $\mathfrak{R}$ 为雷诺应力。

这基本上完成了耗散解的整体存在性（根据定义2.1），即定理2.2的证明。

8. 进一步说明

本文证明了可压缩活性向列相动力学中耗散解的存在性，其中黏性应力张量满足关于某个凸势函数的隐式流变定律（1.6） F。这对活性向列相动力学的理论基础具有重要推进意义，因为要评估这些现象学非平衡模型的有效性和稳健性，必须理解从耗散解到弱解，再到强解的过程。请注意，在 [2], 中，作者采用势函数 F，它满足

$$F(\mathbb{D})\ge\mu_0\left|\mathbb{D}-\frac{1}{3}\operatorname{tr}[\mathbb{D}]\mathbb{I}_3\right|^q\quad\text{for all }\mathbb{D}\in\mathbb{R}^{3\times3}_{\mathrm{sym}},\quad q>1,\tag{8.1}$$

对某些 $\mu_0>0$。在本文中，为克服活性粒子浓度带来的困难，我们将自身的研究限制在 $q=\frac{4}{3}$。事实上，动量方程（ $\sigma_*\mathrm{div}_x(c^2Q)$中有一项1.12，它源于活性应力；为了在能量不等式中估计该项，我们需要对 $q=\frac{4}{3}$ 施加限制（见（3.20））。然而，在满足 $\sigma_*=0$的被动向列相动力学情形下，可以采用更一般的凸势函数 F （换言之，黏性应力张量 $\mathbb{S}$）来满足（8.1），其中任意 $q>1$均可。我们的方法也不同于 [12], 中关于三维可压缩活性向列相弱解的研究；这种差异源于边界条件的选择不同，而最终的 $n\to\infty$ 极限则依赖于耗散解框架下完全不同的修正雷诺应力和能量项概念。

从数值角度来看，耗散解十分重要。特别是，这类解足够宽泛，能够容纳有限体积法、有限体积-有限元混合法和有限差分法等数值格式的一致性与稳定性。例如，请参阅 [19, 第 7 章。6] 其中讨论了可压缩纳维-斯托克斯框架下近似（耗散）解的收敛性研究。有关可压缩流体数值格式的更多内容，请参阅 [19, 第 8– 14]章。

我们关于活性向列相动力学耗散解的工作有若干推广方向，例如推广到一般压力势函数、适用于广泛复杂流体的一般流变定律，以及一般边界条件，如针对 Q 的混合边界条件和针对 $\mathbf{u}$ 的物理相关边界条件，其中有些可能超出传统弱形式的适用范围。耗散解可为研究这些问题的适定性，以及相关数值格式的精度和收敛性，提供稳健的分析与数值框架，

最终推动活性向列相在再生医学、组织工程、药物递送等新兴应用领域的发展。每个问题的新物理特性都带来了诸多技术挑战，但我们的基础性工作有望在一定程度上推广向列相动力学中耗散解的概念，并为未来面向更大规模应用的活性向列相研究奠定基础。

附录 A. 一些辅助结果

在本节中，我们给出一些辅助结果，这些结果在本文中被广泛用于求得第 3 节中的适当先验估计。首先，我们给出以下结果，摘自 [11, 引理 A.1]。

引理 A.1. 设 Q 和 Q' 是两个 3×3 对称矩阵，并设 $\Lambda' = \frac{1}{2}(\nabla_x U - \nabla_x^\top U)$ 对于某个 $U \in W^{1,q}_0(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 对于某个 $q>1$。那么，

$$\int_\Omega (\Lambda' Q' - Q'\Lambda')\Delta_x Q \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathrm{div}_x(Q'\Delta_x Q - \Delta_x Q Q')\cdot U \,\mathrm{d}x. \tag{A.1}$$

N接下来，我们写出众所周知的迹不等式，例如可在 [9, 定理中找到 m 1.6.6].

引理 A.2 (迹定理)。 设区域 Ω 具有 *Lipschitz* 边界，且 $1\le p\le\infty$。那么，存在一个常数 $C>0$（可能依赖于 Ω），使得

$$\|v\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C\|v\|^{1-1/p}_{L^p(\Omega)}\|v\|^{1/p}_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v\in W^{1,p}(\Omega).$$

我们定义空间

$$E^q_0(\Omega;\mathbb{R}^d) := \left\{ \mathbf{v}\in L^q(\Omega;\mathbb{R}^d) \mid \mathbb{D}_x\mathbf{v} - \frac{1}{d}\mathrm{tr}[\mathbb{D}_x\mathbf{v}]\mathbb{I}_3 \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d}),\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega}=0 \right\},\quad 1<q<\infty.$$

注意，$E^q_0(\Omega;\mathbb{R}^d)$ 是一个赋范巴拿赫空间，其范数为

$$\|\mathbf{v}\|_{E^q_0(\Omega;\mathbb{R}^d)} := \|\mathbf{v}\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \left\| \mathbb{D}_x\mathbf{v} - \frac{1}{d}\mathrm{tr}[\mathbb{D}_x\mathbf{v}]\mathbb{I}_3 \right\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d})}.$$

现在，我们陈述以下无迹 Korn 不等式的一个版本（见 [7,式 (1.2)], ，其证明可见 [48], ；更一般的结果见 [7, 定理 3.1]）：

引理 A.3 (无迹 Korn 不等式)。 设 $d\ge 3$ 且 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 是一个有界开域。那么，存在一个常数 $\kappa>0$，使得我们有以下不等式

$$\|\nabla_x\mathbf{v}\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d})} \le \kappa \left\| \mathbb{D}_x\mathbf{v} - \frac{1}{d}\mathrm{tr}[\mathbb{D}_x\mathbf{v}]\mathbb{I}_3 \right\|_{L^q(\Omega;\mathbb{R}^{d\times d})} \tag{A.2}$$

对任意 $\mathbf{v}\in E^q_0(\Omega;\mathbb{R}^d)$。

最后，我们回顾一下 [47,第 6 章引理 6.4]中的德拉瓦莱-普桑判别准则，该准则用于等度可积性。

引理 A.4 (德拉瓦莱-普桑判别准则)。 设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 对于 $d\ge 1$ 有界。序列$\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 在 $L^1(\Omega)$ 中序列弱相对紧，当且仅当

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\int_\Omega \psi(|f_j|)\,\mathrm{d}x < \infty,$$

存在某个连续函数 $\psi:\ [0,\infty)\to\mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\psi(s)}{s} = \infty.$$

Acknowledgments

Š.N. 和 K.B. 获得了 Š. Nečasová 的 Praemium Academiae 资助。CAS 数学研究所由 RVO:67985840 资助。谨此致谢。A.M. 获得斯特拉斯克莱德大学新教授基金、洪堡基金会以及 Leverhulme 研究项目资助 RPG-2021-401 的支持。

参考文献

[1] A. Abbatiello 和 E. Feireisl. 关于描述不可压缩黏性流体方程的一类广义解. Ann. Mat. Pura Appl. (4), 199(3):1183–1195, 2020. [2] A. Abbatiello, E. Feireisl, 和 A. Novotný. 可压缩黏性流体模型的广义解. Discrete Contin. Dyn. Syst., 41(1):1–28, 2021. [3] H. Abels, G. Dolzmann, 和 Y. Liu. 具有齐次狄利克雷边界条件的向列液晶 Beris-Edwards 模型强解. Adv. Differential Equations, 21(1-2):109–152, 2016. [4] D. Basarić. 具有线性压力的一般可压缩黏性流体模型的耗散解（及弱解）的存在性. J. Math. Fluid Mech., 24(2):Paper No. 56, 22, 2022. [5] A. N. Beris 和 B. J. Edwards. 流动系统热力学：含内部微观结构. Number 36. Oxford University Press, 1994. [6] T. Binz, F. Brandt, M. Hieber, 和 A. Roy. 液晶与刚体的相互作用. Trans. Amer. Math. Soc., 377(11):8049–8090, 2024. [7] D. Breit, A. Cianchi, 和 L. Diening. Orlicz空间中的无迹Korn不等式. SIAM J. Math. Anal., 49(4):2496–2526, 2017. [8] D. Breit, E. Feireisl, 和 M. Hofmanová. 等熵Euler系统的解半流. Arch. Ration. Mech. Anal., 235(1):167–194, 2020. [9] S. C. Brenner 和 L. R. Scott. 有限元方法的数学理论，应用数学教材第 15 卷. Springer, New York, 第三版, 2008.[10] T. Chang, B. J. Jin, 和 A. Novotný. 具有一般流入-流出边界数据的可压缩Navier-Stokes系统. SIAM J. Math. Anal., 51(2):1238–1278, 2019. [11] G.-Q. G. Chen, A. Majumdar, D. Wang, 和 R. Zhang. 活性液晶解的整体存在性与正则性. J. Differential Equations, 263(1):202–239, 2017. [12] G.-Q. G. Chen, A. Majumdar, D. Wang, 和 R. Zhang. 可压缩活性液晶系统的整体弱解. SIAM J. Math. Anal., 50(4):3632–3675, 2018. [13] H. J. Choe, A. Novotný, 和 M. Yang. 具有硬球压力定律及一般流入-流出边界条件的可压缩Navier-Stokes系统. J. Differential Equations, 266(6):3066–3099, 2019. [14] G. Crippa, C. Donadello, 和 L. V. Spinolo. 关于具有粗糙系数的连续性方程初边值问题的注记. 载于《双曲问题：理论、数值与应用》，AIMS 应用数学丛书第 8 卷，第 957–966 页. Am. Inst. Math. Sci. (AIMS), Springfield, MO, 2014. [15] N. C. Darnton, L. Turner, S. Rojevsky, 和 H. C. Berg. 细菌群游的动力学. Biophysical journal, 98(10):2082–2090, 2010. [16] P.-G. De Gennes 和 J. Prost. 液晶物理学. Number 83. Oxford university press, 1993. [17] R. J. DiPerna 和 P.-L. Lions. 常微分方程、输运理论与Sobolev空间. Invent. Math., 98(3):511–547, 1989. [18] J. L. Ericksen. 液晶的守恒律. Transactions of the Society of Rheology, 5(1):23–34, 1961. [19] E. Feireisl, M. Lukáčová-Medviďová, H. Mizerová, 和 B. She. 可压缩流体流动的数值分析，MS&A 建模、仿真与应用第 20 卷. Springer, Cham, 2021. [20] E. Feireisl 和 A. Novotný. 黏性流体热力学中的奇异极限. 数学流体力学进展. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.[21] F. C. Frank. 液晶理论. Discussions of the Faraday Society, 25:19–28, 1958. [22] Z. Geng, A. Roy, 和 A. Zarnescu. 向列液晶-胶体相互作用模型弱解的整体存在性. SIAM J. Math. Anal., 56(4):4324–4355, 2024. [23] H. Gimperlein, R. R. Maity, A. Majumdar, 和 M. Oberguggenberger. 向列液晶 Landau-de Gennes理论中的贝叶斯参数识别. Proc. A., 481(2324):Paper No. 20250355, 29, 2025. [24] F. Ginelli, F. Peruani, M. Bär, 和 H. Chaté. 自推进杆的大尺度集体性质. Physical review letters, 104(18):184502, 2010. [25] L. Giomi, L. Mahadevan, B. Chakraborty, 和 M. F. Hagan. 活性向列悬浮液中的带状结构、兴奋性与混沌. Nonlinearity, 25(8):2245–2269, 2012. [26] L. Giomi, M. C. Marchetti, 和 T. B. Liverpool. 活性极性薄膜中的复杂自发流动与浓度带状结构. Physical review letters, 101(19):198101, 2008. [27] V. Girinon. 有界三维区域内具有非齐次边界条件的Navier-Stokes方程. J. Math. Fluid Mech., 13(3):309–339, 2011. [28] E. Gudiño, C. M. Oishi, 和 A. Sequeira. 非牛顿血流模型对动脉壁药物沉积的影响. J. Non-Newton. Fluid Mech., 274: 104206, [19 pp.], 2019. [29] F. Guillén-González 和 M. Á. Rodríguez-Bellido. 与液晶相关的初边值 Q-张量问题的弱解. Nonlinear Anal., 112:84–104, 2015. [30] M. Hieber 和 J. Prüss. 具有一般Leslie应力的Ericksen-Leslie方程的动力学 I: 不可压缩各向同性情形. Math. Ann., 369(3-4):977–996, 2017. [31] M. Hieber 和 J. Prüss. 具有一般Leslie应力的 Ericksen-Leslie方程的动力学 II：可压缩各向同性情形. Arch. Ration. Mech. Anal., 233(3):1441–1468, 2019. [32] M. Kaewbumrung, S. Orankitjaroen, P. Boonkrong, B. Nuntadilok, 和 B. Wiwatanapataphee. 狭窄冠状动脉中分散颗粒-血液流动的数值模拟. Int. J. Differ. Equ., pages Art. ID 2593425, 16, 2018.[33] F. Lin 和 C. Liu. 液晶的静态与动态理论. J. Partial Differential Equations, 14(4):289– 330, 2001.

[34] A. Majumdar. Landau-de Gennes理论中向列液晶的平衡序参量。《欧洲应用数学杂志》，21(2):181–203，2010年。[35] A. Majumdar、M. C. Marchetti 和 E. G. Virga. 活性液晶展望。《英国皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》，372 20130373, 11 2014 2029( ): .[36] D. Marenduzzo、E. Orlandini、M. E. Cates 和 J. M. Yeomans. 活性液晶的稳态流体动力学不稳定性：混合格子玻尔兹曼模拟。《物理评论E：统计、非线性与软物质物理》，76(3):031921，2007年。[37] S. Mishra、A. Baskaran 和 M. C. Marchetti. 自驱动粒子的涨落与图案形成。《物理评论E：统计、非线性与软物质物理》，81(6):061916，2010年。[38] H. Mohammadi 和 F. Bahramian. 狭窄冠状动脉模拟中的边界条件。《心血管工程》，9(3):83–91，2009年。[39] P. B. Mucha 和 W. Zajączkowski. 可压缩黏性流体方程Dirichlet问题的局部时间存在性。《波兰数学年刊》，78(3):227–239，2002年。[40] V. Narayan、S. Ramaswamy 和 N. Menon. 群集颗粒向列体中持久存在的巨数涨落。《科学》，317(5834):105–108，2007年。[41] Š. Nečasová、J. Ogorzały 和 J. Scherz. 满足库仑摩擦定律边界条件的一般可压缩黏性流体模型的耗散解。《数学分析与应用杂志》，541 128693, 28, 2025 2( ):论文编号 .[42] S. Novo. 具有流入-流出边界条件的可压缩Navier–Stokes模型。《数学流体力学杂志》，7(4):485–514，2005年。[43] A. Novotný 和 I. Straškraba.《可压缩流数学理论导论》，牛津数学及其应用讲座丛书第27卷。牛津大学出版社，牛津，2004年。[44] C. W. Oseen. 液晶理论。《法拉第学会汇刊》，29(140):883–899，1933年。[45] M. Paicu 和 A. Zarnescu. 完全耦合的纳维-斯托克斯与 Q-张量系统的整体存在性与正则性。《SIAM数学分析杂志》，43(5):2009–2049，2011年。[46] M. Paicu 和 A. Zarnescu. 耦合纳维-斯托克斯与 Q-张量系统的能量耗散与正则性。《理性力学与分析文档》，203(1):45–67，2012年。[47] P. Pedregal.《参数化测度与变分原理》，非线性微分方程及其应用进展第30卷。Birkhäuser出版社，巴塞尔，1997年。[48] Ju. G. Rešetnjak. 有限维核的某些微分算子的估计。《西伯利亚数学杂志》，11:414–428，1970年。[49] D. Saintillan 和 M. J. Shelley. 活性粒子悬浮液中的不稳定性与图案形成：动理学理论与连续体模拟。《物理评论快报》，100(17):178103，2008年。[50] T. Sanchez、D. T. N. Chen、S. J. DeCamp、M. Heymann 和 Z. Dogic. 层级组装活性物质中的自发运动。《自然》，491(7424):431–434，2012年。[51] J. Valášek、P. Sváček 和 J. Horáček. 管道流固耦合问题中适当的入口边界条件。《应用数学》，64(2):225–251，2019年。[52] D. Wang、X. Xu 和 C. Yu. 耦合可压缩纳维-斯托克斯与 Q-张量系统的整体弱解。《数学科学通讯》，13(1):49–82，2015年。[53] H. H. Wensink、J. Dunkel、S. Heidenreich、K. Drescher、R. E. Goldstein、H. Löwen 和 J. M. Yeomans. 生命流体中的介观尺度湍流。《美国国家科学院院刊》，109 14313, 2012 36 14308( ): – .[54] J. Woźnicki. 密度依赖非牛顿不可压缩流体的Mv-强唯一性，2021年。