arXiv:2601.02059v1 [math.GT] 5 Jan 2026

填充测地流的视界边界与刚性

MEENAKSHY JYOTHIS 和 DÍDAC MARTÍNEZ-GRANADO

摘要。我们在闭双曲曲面上的射影填充测地流空间上赋予一种自然的非对称度量，该度量将 Thurston 在 Teichmüller 空间上的非对称度量加以推广，同时也推广了源自 Hitchin 表示的类似度量。更一般地，我们证明，这种度量可以推广到曲面群和测地流之外，并涵盖与 Gromov 双曲群的 Anosov 表示相关的度量。我们将赋有此度量的射影填充流空间的视界函数紧化识别为射影测地流空间。由此，我们得到一个刚性结果：亏格不同的闭曲面所关联的射影填充测地流度量空间并不等距。

1. 引言

设 S 为一亏格至少为二的闭可定向曲面。Teichmüller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 是 S 上标记双曲结构的同伦类空间。Thurston 非对称距离d_{Th} [Thu98] 是 $\mathcal{T}(S)$ 上的标准度量结构之一，用于衡量两个双曲曲面之间的最大曲线长度比。我们将瑟斯顿度量从有限维的 $\mathcal{T}(S)$ 推广到两个更大的无限维空间： S 上的射影填充测地流空间 $\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S)$，以及度量势空间 $\mathcal{H}_{\Gamma}^{++}$ ；后者对任意非初等 Gromov 双曲群都可以定义 Γ [CT25, CRS24]。这些空间涵盖了 S 上超出双曲度量范畴的许多类几何结构。当 $\Gamma = \pi_1(S)$ 时，我们有如下包含链:

$$\mathcal{T}(S) \subset \mathbb{PC}_{\text{fill}}(S) \subset \mathcal{H}_{\Gamma}^{++}.$$

Thurston 度量 d_{Th} 在 $\mathcal{T}(S)$ 上，是将扩展度量 d 限制到 $\mathbb{PC}_{\text{fill}}$ 上得到的；而后者本身又是将定义在 $\mathcal{H}_{\Gamma}^{++}$ 上的度量限制后得到的。由于 $\mathcal{H}_{\Gamma}^{++}$ 是为一般的非初等 Gromov 双曲群 Γ 定义的，扩展度量 d 也会在那些并非天然与曲面相关的几何结构空间上诱导出度量，例如双曲群的立方化和*Anosov* 表示。不过，本文相当一部分内容聚焦于 $\Gamma = \pi_1(S)$ 的情形，并研究定义在 $\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S)$ 上的扩展 Thurston 度量。

曲面 S 上的测地流空间 $\mathcal{C}(S)$ 最初由 Bonahon 定义为一个无限维锥，其元素是 S [的测地线空间上的正测度 Bon86]。测地流空间为研究与 S 相关的各种具有几何意义的对象提供了一个统一的框架。例如，它包含 S [上闭曲线的自由同伦类 Bon86，命题 4.4],; S [的 Teichmüller 空间 Bon88，定理 12], ; S 上带标记平坦结构的模空间 [DLR10，定理 1], ; 以及 S [上的负曲率黎曼度量 Ota90，定理 1]。此外，闭曲线之间的几何交数可扩展为流空间上的交形式 i: $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ 。

$\mathcal{C}(S)$的锥的内部是填充测地流 $\mathcal{C}_{\text{fill}}(S)$空间。已知 $\mathcal{T}(S)$嵌入到 $\mathcal{C}_{\text{fill}}(S)$中，也嵌入到其射影化 $\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S)$ [Bon88]中。对于任意 $x, y \in \mathbb{PC}_{\text{fill}}(S)$，扩展 Thurston 度量 d 在 $\mathbb{PC}_{\text{fill}}$ 上的定义如下:

$$d(x,y) \coloneqq \log\left(\sup_{\boldsymbol{c}\in \text{cc}} \frac{i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})} \cdot \frac{h(\boldsymbol{y})}{h(\boldsymbol{x})}\right). \tag{1}$$

这里， $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别是流空间中 x 和 y 的代表元。函数 $h\colon \mathcal{C}_{\text{fill}}(S) \to \mathbb{R}$是流熵，用于衡量闭曲线相对于给定填充流的交数的指数增长。第 1.3 节对该度量进行了更详细的阐述。

我们证明，对于两个不同的闭曲面 S 和 S'，度量空间 $(\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S)\ d)$ 与 $(\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S')\ d)$ 不可能等距。为证明这一刚性结果，我们研究度量空间 $(\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S)\ d)$ 的地平线函数紧化。Gromov 引入的这种紧化，以一种反映度量空间底层度量结构 [Gro81] 的方式，编码了该空间的渐近信息。我们证明，在我们的情形下，它与射影测地流空间 $\mathbb{PC}(S)$ 同胚；后者是通过将 $\mathcal{C}(S)$ 按正实数缩放得到的紧空间。

接下来，我们将更详细地概述这些结果。

1.1. 射影填充流的几何。 过去几十年来，测地流已成为低维几何和动力系统中的重要工具。它们在曲线计数结果和高阶 Teichmüller 理论——研究秩一凸余紧表示的高阶类比——中发挥了关键作用（例如参见 [RS19, ES22, BCLS18, MZ19, BIPP21, BIPP24]）。它们还被用于构造与曲面相关的若干带标记模结构的拓扑紧化。这包括 Teichmüller 空间的 Thurston 紧化 [Bon88，定理 18], Duchin–Leininger–Rafi 奇异欧几里得结构空间紧化 [DLR10，定理 5], ，以及近期高阶 Teichmüller 理论类比的紧化 [MOT24, OT21, OT23]。所有这些紧化都是通过将相关空间嵌入射影流空间 $\mathbb{PC}(S)$ 而构造的。

射影填充流的空间 $\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S)$ 是 $\mathbb{PC}(S)$ 的一个开、稠密且局部紧子空间。准确地说，它是锥 $\mathcal{C}(S)$ 内部的射影化；也就是说，当且仅当一个测地流与每个非零测地流的交数都严格为正时，该测地流才是填充流 [BIPP21，定理 1.3]。我们研究赋予扩展 Thurston 度量 d （定义见式 (3)）的 $\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S)$。

1.1.1. 视函数紧化与视函数边界。 我们的第一个结果刻画了射影填充测地流的视函数紧化。视函数紧化是一种度量空间的拓扑紧化，它与底层度量相容。例如，度量空间的等距映射可延拓为其视函数紧化上的同胚。视函数紧化已应用于研究弱双曲群上随机游走的渐近性质 [MT18] ，以及确定 Hilbert 几何的等距群 [LW11]。

我们证明，赋予度量 d 的 $\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S)$ 的 horofunction 紧化与 $\mathbb{PC}$ 同胚。

定理 1.1。 配备扩展 *Thurston* 度量 d 的 $\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S)$ 的 *horofunction* 紧化与射影流空间 $\mathbb{PC}(S)$ 同胚。此外，视函数边界恰好对应于射影非填充流空间。

Teichmüller 空间的 horofunction 紧化在其若干种自然距离下都已有研究。例如，对于瑟斯顿度量，Walsh [Wal14a] 证明， $\mathcal{T}(S)$ 的 horofunction 边界与射影测地层空间 $\mathbb{PML}(S)$ 重合。定理 1.1 中构造的 $(\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S)\ d)$ 的 horofunction 紧化扩展了 Walsh 对 $(\mathcal{T}(S)\ d_{Th})$ 所作的 horofunction 紧化。关于 $\mathcal{T}(S)$ 上相对于 Teichmüller 度量的 horofunction 紧化，也已有充分研究；参见 [LS14, Aze24]。其他已研究过 horofunction 紧化的相关度量空间包括非紧对称

空间（配备多面体 Finsler 度量） [KL18], 有限维和无限维的 Hilbert 几何 [Wal14b, Wal18], 哈达玛流形及其商空间 [DPS12], , 以及配备卡诺–卡拉西奥多里度量的 Heisenberg群 [KN10]。

($\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S)$ d) 上的 horofunction 紧化构造以 Walsh 关于 Teichmüller 空间 $\mathcal{T}(S)$ [上瑟斯顿度量 d_{Th} 的框架为基础 Wal14a]。然而，将其推广到测地流的情形带来了真正的新挑战。特别是，分析等距映射 ϕ: $\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S) \to \mathbb{PC}_{\text{fill}}(S)$ 的延拓如何成为视函数边界 $\mathbb{PC}_{\text{fill}}(\infty)$ 上的同胚，要微妙得多，因为测地流空间的边界点所呈现的行为远比 Teichmüller 空间中的情形多样。

1.1.2. 等距刚性。 作为定理 1.1 的推论，我们证明以下刚性结果。

定理 1.2。 设 S_g 和 $S_{g'}$ 是亏格至少为二的闭可定向曲面，且满足 $g \neq g'$。那么，赋予各自非对称 *Thurston* 度量 d和 d'的空间 $(\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S_g)$ $d)$ 与 $(\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S_{g'})$ $d')$不同胚等距。

与 Teichmüller 空间不同， $\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S)$ 是无限维的，因此很难判别其等距类型。在相关情形中，例如带有希尔伯特度量的无限维锥 [Wal18],, 判定等距类型是一个棘手的问题。

此外，由肖凯理论中的经典结果可知，与不同闭双曲曲面相关联的测地流空间彼此同胚（见命题 8.3）。因此，要区分源自不同闭曲面的流空间，我们需要更精细的结构。定理 1.2 表明，度量空间 $(\mathbb{PC}_{\text{fill}}, d)$ 的等距类型由曲面的亏格唯一确定。目前尚不清楚不同亏格曲面的填充流子空间是否可能同胚（在映射类群作用下不要求等变）。

非对称度量 d 自然地为 S 上若干可实现为测地流的几何结构给出非对称度量的类似物（第 9 节），包括归一化的负曲率黎曼度量、非正曲率度量，以及曲面群的 Hitchin 表示。理解这些空间关于此度量的几何性质将会很有趣。现在，我们在双曲群上的度量势 $\mathcal{H}_\Gamma^{++}$ 这一背景下讨论扩展 Thurston 度量。

1.2. **将度量扩展到测地流之外：Anosov 表示**。除测地流之外，度量 d 还可扩展到更一般的情形，例如（归一化的）立方化（见第 A.6 节）以及 Gromov 双曲群 Γ 的 *Θ-Anosov* 表示（见第 9 节）。事实上，这些度量源自将非对称度量 d 扩展到更广泛的度量势$\mathcal{H}_\Gamma^{++}$ 空间，这一概念见 [CT25、CRS24] （精确定义见附录 A）；下面我们对此作简要讨论。

对于一个 Gromov双曲群，令 Γ, D_Γ 表示其上的伪度量空间 Γ。该空间由左不变的、Gromov双曲的伪度量组成，并且与 Γ [Fur02、OR23]上的词度量拟等距。伪度量是满足对称性和三角不等式的非负函数 $\Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}$ 。例子包括 Γ 上的任意词度量，以及由 Γ 在 Gromov 双曲测地空间上的几何作用所产生的距离。若两个伪度量在缩放后相差有界，则称它们粗略相似。度量结构空间 $\mathcal{D}_\Gamma$ 是 D_Γ 关于粗略相似等价关系的商空间。

当 $\Gamma = \pi_1(S)$ 时，空间 $\mathcal{D}_\Gamma$ 包含 $\mathbb{PC}_{\text{fill}}(S)$ [CR25、DRMG25], , 其中已涵盖上文讨论的许多有趣例子。然而，即使在曲面情形下， $\mathcal{D}_\Gamma$ 也包含并非源自测地流的伪度量，例如拟福克斯表示或立方复形 [FF22、BR24]。 Γ的适当度量势集合，记为 H_Γ^{++} ，是进一步的

推广（由 [CRS24] 在 [CT25]的基础上引入），它放宽了伪度量必须满足对称性和非负性的假设。适当度量势具有定义良好的熵概念 $h(\psi)$，用于衡量 $[\Gamma]$的共轭类的指数增长率；它还具有稳定长度函数 $\ell_\psi\colon [\Gamma] \to \mathbb{R}$，为每个 $[g]$ 赋予不变量 $\lim_n \psi(o,\ g^n)/n$。对于适当度量势，熵和稳定长度均严格为正。适当度量势的空间 $\mathcal{H}_\Gamma^{++}$，是将 H_Γ^{++} 按粗相似等价关系取商后得到的。

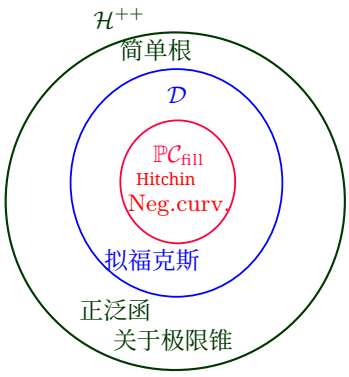

图1. 该示意图展示了适当双曲势函数的空间：当$\Gamma = \pi_1(S)$时，我们有包含关系 $\mathcal{C}_{\text{fill}}(S) \subset D_\Gamma \subset H_\Gamma^{++}$，这在相应的商空间上诱导出包含关系$\mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}}(S) \subset \mathcal{D}_\Gamma \subset \mathcal{H}_\Gamma^{++}$。Hitchin 表示和负曲率黎曼度量包含在 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}}(S)$中。拟福克斯表示属于 $\mathcal{D}_\Gamma$，但不属于 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}}(S)$。此外，由单根，或更一般地，由 Benoist 极限锥上的正泛函导出的势函数属于 $\mathcal{H}_\Gamma^{++}$，但不属于 $\mathcal{D}_\Gamma$。最后这一结论是定理 1.3 内容的一部分。

不一定属于 $\mathcal{D}_\Gamma$ 的适当双曲泛函的自然例子源自 Anosov表示理论。设 G 为连通半单李群，Γ 为 Gromov 双曲群。Anosov 表示 $r\colon \Gamma \to$ G 由 Cartan子空间$\mathfrak{a}$ （属于 $\mathfrak{g}$）的单根子集 Θ 索引，并将秩一情形中的凸余紧表示推广开来。每个这样的表示 r都确定了 Cartan子代数 $\mathfrak{a}^+$ 内部的一个闭子集，称为 Benoist 极限锥$\mathcal{L}_r^\Theta \subset \mathfrak{a}^+$。该锥编码了 $r(\Gamma)$的渐近 Cartan 投影，并记录了表示的增长方向。任何在线性泛函 $\varphi\colon \mathfrak{a}^+ \to \mathbb{R}$ 上为正的线性泛函 $\varphi\colon \mathfrak{a}^+ \to \mathbb{R}$，即$\varphi \in \text{int}((\mathcal{L}_r^\Theta)^*)$，都会给出一个共轭不变函数 $\ell_r^\varphi\colon \Gamma \to \mathbb{R}$。该函数起到$\varphi$-长度的作用。令 $\mathcal{X}_\Theta(\Gamma,\text{G})$表示从 Γ 到 G 的 Θ-Anosov 表示集合，并固定一个泛函$\varphi \in \bigcap_{r\in\mathcal{X}_\Theta(\Gamma,\text{G})} \text{int}((\mathcal{L}_r^\Theta)^*)$。令 $\Gamma' \subset \Gamma$表示Γ中无限阶元素的子集，并令 $[\Gamma']$表示其共轭类集合。在 [CDPW24 中，定理 1.1], 为每个 φ在 $\mathcal{X}_\Theta(\Gamma, \text{G})$上构造了如下非对称度量：

$$d^\varphi(r_1, r_2) := \sup_{[g]\in[\Gamma']} \frac{h_{r_2}^\varphi \ell_{r_2}^\varphi(g)}{h_{r_1}^\varphi \ell_{r_1}^\varphi(g)}$$

其中，h_r^φ表示相对于ℓ_r^φ度量的共轭类 $[\Gamma]$ 的指数增长。

我们证明，d 限制于该度量。

定理 1.3。 给定一个非初等 *Gromov* 双曲群 Γ，存在一个将非对称度量 d 扩展到度量势空间 $\mathcal{H}_\Gamma^{++}$ 上的扩展，其定义为

$$d(\psi_1, \psi_2) := \log\left(\sup_{[g]\in[\Gamma']} \frac{h(\psi_2)\ell_{\psi_2}([g])}{h(\psi_1)\ell_{\psi_1}([g])}\right).$$

此外，对于每个 Θ-Anosov 表示，以及每个 $\varphi \in \mathrm{int}((\mathcal{L}_r^{\Theta})^*)$，都存在 $\psi_{\varphi,\, r} \in H_\Gamma^{++}$，使得

$$\ell_{\psi_{r,\varphi}}(g) \coloneqq \lim \frac{\psi(o, g^n)}{n} = \ell_r^{\varphi}(g)$$

对每个 $g \in \Gamma$ 都成立。特别地，若 $\varphi \in \bigcap_{r \in \mathfrak{X}_\Theta(\Gamma,\mathsf{G})}$ 属于 $((\mathcal{L}_r^{\Theta})^*)$ 的内部，则

$$d(\psi_{r_1,\varphi}, \psi_{r_2,\varphi}) = d^{\varphi}(r_1, r_2),$$

也就是说，d 扩展了度量 d^{φ}。

上述定理的内容有两方面：

(1) 注意到 d 可以扩展到 $\mathcal{H}_\Gamma^{++}$。这可由对 [CT25] 中论证的改编得出，见命题 A.9。(2) Θ-阿诺索夫表示为 Benoist 极限锥内部的任意线性泛函提供势函数的实例（定义见第 9 节），推广了 [CT24，引理 7.1]，并涵盖了 [CDPW24，定理 1.1]。这一结果即为命题 9.7。我们强调，与 [CDPW24] 中的构造不同，扩展度量 d 的定义不依赖于 Mineyev 流的赫尔德重参数化 [Min05]；这种重参数化仅在特定情形下存在 [Sam24]。在即将发表的工作 [CMGR] 中，第二作者及其合作者证明，这些重参数化也会在 H_Γ^{++} 中诱导出点。

关于 $\mathcal{D}_\Gamma$ 和 $\mathcal{H}_\Gamma^{++}$ 的详细讨论，以及度量 d 如何在这些空间上定义，请参见附录 A。文中所述的例子见第 9 节。

结合文献中的标记长度谱刚性结果，度量 d 将经典的非对称 Thurston 度量推广到了许多其他几何背景：面积为 1 的度量、负曲率度量和非正曲率度量，或熵为 1 的立方化（见第 9 节和附录 A.6）。

1.3. 射影填充流上的扩展 Thurston 度量。 对于任意两个标记双曲结构 $x, y \in \mathcal{T}(S)$，Thurston 最初定义的度量 $d_{Th}(x, y)$，是与标记变换 [Thu98] 同伦的映射 $f : (S, x) \to (S, y)$ 的最小利普希茨常数的对数。关于该度量的最新综述，参见 [PS24]。Thurston 还证明，d_{Th} 具有以下等价刻画：对于 $x \in \mathcal{T}(S)$ 以及 S 上的一条闭曲线 c，令 $\ell_x(c)$ 表示相对于 x 的 c 的测地代表的长度。那么对于 $x, y \in \mathcal{T}(S)$，

$$d_{Th}(x, y) = \log \sup_{c \in \mathrm{scc}} \frac{\ell_y(c)}{\ell_x(c)}, \tag{2}$$

其中，上确界取遍所有简单闭曲线 $c \in \mathrm{scc}$。

该度量 d_{Th} 是不对称的。闭曲线的自由同伦类空间 S 和 $\mathcal{T}(S)$ 都嵌入到 $\mathcal{C}(S)$ 中，也嵌入到其射影化 $\mathbb{P}\mathcal{C}(S)$ 中。此外，闭曲线之间的几何交数可延拓为一个连续双线性形式

$$i : \mathcal{C}(S) \times \mathcal{C}(S) \to \mathbb{R}_+$$

定义在测地流 [Bon86] 上。特别地，对于任意 $x \in \mathcal{T}(S)$ 和 S 上的闭曲线 c，有 $i(x,\ c) = \ell_x(c)$（更多详情参见第 2.2 节）。

将测地线长度替换为交形式，并对所有闭曲线取上确界，可得到公式（2）的一个自然推广。为确保所得比值定义良好，我们用流的拓扑熵进行归一化。具体而言，对于 $x,\ y \in \mathbb{P}\mathcal{C}_{\mathrm{fill}}(S)$，在填充流空间中选取代表元 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$，并令

$$d(x, y) \coloneqq \log \left(\sup_{\boldsymbol{c} \in \mathrm{cc}} \frac{i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})} \cdot \frac{h(\boldsymbol{y})}{h(\boldsymbol{x})} \right), \tag{3}$$

其中，上确界取遍所有闭曲线 $\boldsymbol{c} \in \mathrm{cc}$，熵 $h : \mathcal{C}(S) \to \mathbb{R}_+$ 定义为

$$h(\boldsymbol{x}) \coloneqq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#\{\boldsymbol{c} \in \mathrm{cc} : i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) < n\}.$$

在命题 A.11 中，我们证明 d 是 $\mathbb{PC}_{\mathrm{fill}}(S)$ 上定义良好的度量。Sapir 最近将瑟斯顿度量的一个对称化版本扩展到了射影填充流的空间 [Sap24]。Reyes [OR23, Remark 3.8] 指出，可以将 d_{Th} 扩展到 $\mathcal{D}_\Gamma$。在附录 A 中，我们指出，非对称距离还可以进一步扩展到度量势函数空间 $\mathcal{H}_\Gamma^{++}$。这建立在 [CT25, CR25, DRMG25, CRS24] 的基础上。如上所述，这一度量推广了此前在 Θ-阿诺索夫表示 [CDPW24], 背景下引入的非对称度量；而后者又推广了在双曲流形群到 PO(n,1) 的凸余紧表示背景下出现的类似非对称度量 [Bur93]。

文献中还出现过若干相关度量，但它们不在本文扩展的讨论范围内。这些度量包括 Culler–Vogtmann 外空间上的非对称度量 [FM11], ，其采用不同的归一化方式（按体积归一化）；平坦结构空间上的度量 [Shi25], ，其按面积而非熵归一化；以及对几何有限（但非凸余紧）双曲流形上的非对称度量的扩展 [GK17]。最近，非对称度量已扩展到从双曲群到非半单李群的表示，尤其是在 Margulis 时空的背景下 [GM25]。这一构造建立在 [CDPW24], 中引入的非对称度量之上，该度量源自 [Sam15, Sam14b, Sam24, BCLS18] 中发展的 Mineyev 流赫尔德重参数化理论。

在即将发表的工作中，第二作者及其合作者 [CMGR] 证明，这些流重参数化会在 $\mathcal{H}_\Gamma^{++}$ 中诱导出点，因此也包含在本文所考虑的扩展度量之中。

1.4. 记号约定。 从这里开始，为简便起见，我们采用以下记号：

$$\mathbb{PC}_{\mathrm{fill}}(S) = \mathbb{PC}_{\mathrm{fill}} \quad \mathbb{PC}(S) = \mathbb{PC}, \text{ and } \mathcal{T}(S) = \mathcal{T}$$

当我们讨论与多个曲面相关的空间时，如定理 1.2 中所述，我们会在记号中注明曲面。

如式 (3) 所述，为了对任意 $x, y \in \mathbb{PC}_{\mathrm{fill}}$ 定义 $d(x, y)$，我们在测地流空间中分别选取 x 的代表元 $\boldsymbol{x}$ 和 y 的代表元 $\boldsymbol{y}$。这是因为测地流的交形式和熵都不具有射影不变性。

稍后我们还会看到类似的定义。例如，在第 4 节中，我们为任意 $x \in \mathbb{PC}$ 定义函数 $\mathcal{L}_x$。但 $\mathcal{L}_x$ 的定义使用了函数 Q，而该函数定义在流空间上。

为保持一致并确保表述精确，我们将用粗体字母 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$、$\mathbf{z}$ 表示流，用 x、y、z 表示射影流空间中的元素。特别地，对于任意 $x \in \mathbb{PC}$，我们将用 $\mathbf{x}$ 表示流空间中 x 的一个代表元。

我们偶尔写作 $[\boldsymbol{x}]$ 来表示测地流 $\boldsymbol{x}$ 的射影类，不过这种记法并不常见。例如，第 2.3 节中就出现了这种写法。

在对闭曲线/流取上确界的公式中，我们将用 scc 表示简单闭曲线，用 cc 表示闭曲线。

注1.4。 我们指出，S 是闭的这一假设在全文中都发挥着重要作用。若 S 有边界分支，则已知不存在与 $x \in \mathcal{T}(S)$ [相关联的刘维尔流L_x Tri22，命题 2。2]。此外，公式*2*不再定义度量 [LSZ15, 注 1。1]。若 S 有尖点，则刘维尔流存在 [ES22，第 56 页，注], ，且瑟斯顿度量有定义 [PS16, 第 2 节。1], ，但此时交数的连续性会失效 $i(\mu, \cdot)$: $\mathcal{C}(S) \to \mathbb{R}$（根据 [Sas22，第 6]节）。这一事实贯穿全文均有用到

本文。此外，第 *2.3* 节讨论的流的分解结果并不那么直接。例如，存在短 *systole* 为正且支撑为层状结构的流 [BIPP21，例 1。1]

1.5. **论文概要与关键思路**。 本文安排如下：

§2 本节介绍必要的背景知识，并分为三部分 s.

(1) 第一部分中，我们考察任意度量空间 (X,d)。我们讨论视函数边界 $X(\infty)$、绕行代价、布塞曼点以及若干关键性质；当 (X,d) 满足这些性质时，可确保紧化具有良好的性质。例如，如果 (X,d) 满足所有关键性质，那么自然映射 $X \to C(X)$ 是一个嵌入，而对称化绕行代价 δ 在 X 的视函数边界上定义了一个（可能取无穷值的）度量。(2) 第二部分介绍关于 $\mathcal{C}$、 $\mathbb{P}\mathcal{C}$、 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}}$ 以及 Thurston 度量 d_{Th}的背景知识。我们将更详细地讨论 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}}$ 上的扩展 Thurston 度量 d 。( ) I

3 n the third 部分中，我们证明de a d测地流的分解 f 一个非 fill填充测地d流及其 d

基于 [BIPP21] 中测地流的分解来构造其射影化。§3 我们证明 $(\mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}},d)$ 满足所有关键性质。§4 利用 §3 中证明的关键性质，我们证明定理 1.1，即视界边界结果。§5 我们证明所有非填充射影流都是布塞曼点。对于每个非填充射影流，我们构造一条无参数线性测地线，使其在 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}}$ 中收敛到该流。因此，对称化绕行代价 δ 在射影非填充流上构成一个（可能取无穷值的）度量。§6 我们用交形式表示绕行代价，并借助 §2.3 中讨论的分解，导出两个非填充流 η 和 ξ 满足 $\delta(\eta,\xi) < \infty$ 的必要条件。§7 我们利用绕行代价刻画极小测度层状结构。§8 我们证明 $(\mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}},d)$ 的等距刚性。对于两个不同的曲面 S_g 和 $S_{g'}$，等距映射 $f\colon (\mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}}(S_g)\ d) \to (\mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}}(S_{g'})\ d)$ 可延拓为其 horofunction 紧化之间的同胚 $f^*\colon \mathbb{P}\mathcal{C}(S_g) \to \mathbb{P}\mathcal{C}(S_{g'})$。映射 f^* 将边界映到边界，并保持对称化绕行代价。利用 §6 和 §7 的刻画，我们证明 f^* 将 S_g 上的简单闭曲线映到 $S_{g'}$ 的极小测度层状结构，并保持不相交性。最后，我们观察到只有在 $g = g'$ 时这才可能成立，从而推出刚性。§9 我们讨论若干几何结构空间的例子，在这些空间上，测地流上的扩展 Thurston 度量 d 限制后给出非对称度量，并讨论其他例子。特别地，我们介绍 Anosov 表示所需的背景，并讨论它们如何诱导出 [CRS24]，意义下的真双曲势；这些势在附录中定义。§10 我们讨论关于 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}}$ 上的非对称度量 d 及其对称对应物的一些开放问题。附录 A 我们汇集非初等双曲群 Γ 的度量结构空间 $\mathcal{D}_\Gamma$ 以及更一般的度量势空间 $\mathcal{H}_\Gamma^{++}$ 的相关事实。随后，我们讨论如何在 $\mathcal{H}_\Gamma^{++}$ 上定义 d 的扩展，以及如何利用该扩展恢复 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$ 上的非对称度量 d 。

1.6. **致谢**。 第一作者感谢她的导师 Jenya Sapir，在本研究开展过程中给予富有洞见的意见和指导。第一作者还感谢 Lorenzo Ruffoni 和 Jing Tao 的宝贵讨论。第二作者感谢 Eduardo Reyes 的有益交流。作者感谢 Giuseppe Martone 仔细阅读稿件早期版本。第二作者获得玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里行动

CurrGeo 项目（101154865）的支持。关于等距刚性和 horofunction 紧化的成果构成第一作者博士论文的一部分。

2. 背景

背景分为三个部分。第一部分介绍视界边界、绕行代价和 Busemann 点的概念，这些概念定义在任意度量空间 (X, d) 上，且不假设度量具有对称性。

第二部分聚焦于与本文相关的特定度量空间。我们回顾测地流、射影流、Teichmüller 空间上的 Thurston 度量，以及该度量向射影填充流空间的扩展。

第三部分讨论非填充射影流的分解。在第 6 节和第 7 节中，我们广泛运用这一分解来刻画两个射影非填充流相距有限绕行代价的条件。

2.1. 度量空间的概念。 设 (X, d) 是一个度量空间，其中 d 不一定对称；也就是说， d 满足度量的所有性质，只是对于所有 $x, y \in X$，我们未必有 $d(x, y) = d(y, x)$。本文所建立的大部分背景理论适用于非对称度量。不过，在某些情况下，考虑如下定义的对称化度量 d_{sym} 较为方便：$d_{\mathrm{sym}}(x, y) := d(x, y) + d(y, x)$。

关于下文内容的更详细讨论，请参阅 [Wal14a] s.

2.1.1. 视界边界。 为定义度量空间 X的 horofunction 紧化，我们考虑 $C(X)$，即 X上连续实值函数构成的空间。固定一个基点 $b \in X$，并定义映射 $\Psi : X \hookrightarrow C(X)$，如下：

$$\Psi(z) = \Psi_z,$$

其中， $\Psi_z : X \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$\Psi_z(x) = d(x, z) - d(b, z) \quad \text{for all } x, z \in X. \tag{4}$$

众所周知，映射 Ψ 是单射且连续的 [Bal95, Wal14a]。空间 X 的视函数边界 $X(\infty)$由 $\Psi(X)$的闭包中不属于 $\Psi(X)$本身的所有元素构成。

$$X(\infty) := \overline{\{\Psi_z \mid z \in X\}} \setminus \{\Psi_z \mid z \in X\}.$$

闭包 $\{\Psi_z \mid \overline{z \in X\}}$ 称为 X的 horofunction 紧化。将基点 b 改为另一个 b' ，所得的 horofunction 紧化和边界与原来同胚。若度量 d 满足某些良好性质，我们还可以进一步描述视函数边界：

关键性质。

- 性质 ***A***。度量 d_{sym} 是 *proper* 的。
- 性质 ***B***。在 X 中任意一对点之间，存在一条相对于 d 的测地线。
- 性质 ***C***。对于任意点 x 和序列 x_n （属于 X），当且仅当 $d(x_n, x) \to 0$ 时，$d(x, x_n) \to 0$。
- 性质 ***D*** 对于 ***X*** 中的每个序列 x_n ，如果 $d_{\mathrm{sym}}(b, x_n)$ 趋于无穷远，那么 $d(b, x_n)$ 也趋于无穷远。

例如，如果 d 满足下列性质 (A)、(B) 和 (C)，那么映射 $\Psi : X \hookrightarrow C(X)$ 实际上是一个嵌入 [Wal14a]。已知 Teichmüller 空间上的非对称 Thurston 度量满足性质 (A) 至 (D) [PT07]。在第 3 节中，我们将证明射影填充流上的扩展 Thurston 度量同样满足性质 (A) 至 (D)。

2.1.2. 视界边界上的诱导同胚。设 (X,d) 和 (X',d') 是两个度量空间，且 $f\colon (X,d) \to (X',d')$ 是一个等距映射。映射 f 诱导出一个映射 $f^*\colon \Psi(X) \to \Psi(X')$，其定义为 $f^*(\Psi_z) = \Psi_{f(z)}$。由 f 的连续性和 d 的性质可知，f^* 是连续的，并可连续延拓到视界边界。这个延拓也记作 $f^*\colon X(\infty) \to X'(\infty)$，它是视界边界之间的一个同胚 [Wal14a，命题 2.4]。类似地，逆等距映射 f^{-1} 诱导出 $(f^{-1})^*\colon X'(\infty) \to X(\infty)$。根据 f^* 和 $(f^{-1})^*$ 的定义可知，这些映射互为逆映射，满足 $(f^{-1})^* \circ f^* = Id_X$ 和 $f^* \circ (f^{-1})^* = Id_{X'}$，其中 Id_X 和 $Id_{X'}$ 分别表示 X 和 X' 上的恒等映射。

2.1.3. 测地线与 ***Busemann*** 点. 路径 $\gamma\colon [0,\infty) \to X$ 若满足可加性条件，则称为无参数测地线

$$d(\gamma(0),\gamma(s)) + d(\gamma(s),\gamma(t)) = d(\gamma(0),\gamma(t)) \text{ for all } s,t \in \mathbb{R}_+ \text{ with } s \le t. \tag{5}$$

We 例如，若参数化曲线 $\gamma\colon [0,\infty) \to X$ 对每个 $\epsilon > 0$ 都满足，则称其为近似测地线，

$$|d(\gamma(0),\gamma(s)) + d(\gamma(s),\gamma(t)) - t| < \epsilon$$

对足够大的所有 s 和 t，且 $s \le t$。所有测地线都是近似测地线。若边界 X 上的点 z 满足：存在一条近似测地线 $\gamma(t)$，使得当 $t \to \infty$ 时，$\gamma(t)$ 趋近于 z，则称该点为*Busemann* 点。

2.1.4. 绕行代价. 设 ξ 和 η 是 (X,d) 的视界边界 $X(\infty)$ 上的两个点。ξ 与 η 之间的绕行代价定义为

$$H(\xi,\eta) = \inf_{\gamma} \liminf_{t\to\infty} \Big(d(b,\gamma(t)) + \Psi_\eta(\gamma(t)) \Big) \tag{6}$$

其中，下确界取遍所有收敛到 ξ 的路径 $\gamma(t)\colon \mathbb{R}_+ \to X$。

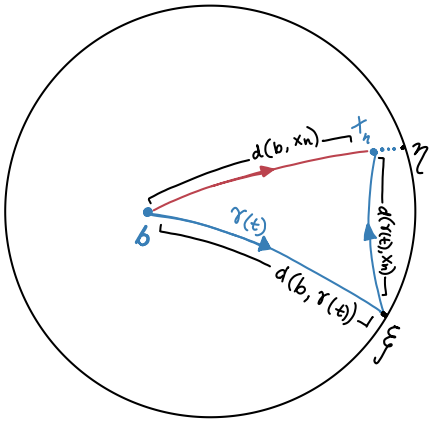

图 2。圆盘表示度量空间（X，d），其边界圆对应于视界边界 $X(\infty)$。绕行代价 $H(\xi,\ \eta)$ 比较 $d(b,\ \gamma(t))\ +\ d(\gamma(t)\ x_n)$ 与 $d(b,\ x_n)$，其中 n 和 t 趋于无穷远。这里，(x_n) 是 X 中收敛到 η 的一个序列。$\gamma(t)$ 是 X 中收敛到 ξ 的一条路径，并且它实现了定义 $H(\xi,\ \eta)$ 时的下确界。

绕行代价不一定对称；也就是说，对于视界边界上的任意两点 ξ 和 η，$H(\xi,\eta)$ 不一定等于 $H(\eta,\xi)$。此外，两点之间的绕行代价可能

是无穷大。撇开这些差异不谈，绕行代价的性质与度量相似。更确切地说，已知对于 $X(\infty)$中的任意三点 ξ、 η和 υ，有：

(1) $H(\xi,\eta)\geq 0$;
(2) $H(\xi,\eta)\leq H(\xi,\upsilon)+H(\upsilon,\eta)$.

此外，如果 $(X,\ d)$ 满足性质 (A) 至 (D)，那么 $H(\xi,\ \xi)=0$ 当且仅当 ξ 是一个 Busemann 点 [Wal14a，命题 5.4]。因此，如果 X 满足性质 (A) 至 (D)，那么下文定义的对称化绕行代价 δ 在 X 的 Busemann 点集合上诱导出一个（可能取无穷值的）度量

$$\delta(\eta,\xi)=H(\eta,\xi)+H(\xi,\eta).$$

根据 [Wal14a，命题 5.7]，，第 2.1.2 节讨论的映射 $f^*\colon X(\infty)\to X'(\infty)$ 关于 δ 是一个等距映射，其含义是

$$\delta(f^*(\eta),f^*(\xi))=\delta(\eta,\xi).$$

2.2. **Teichmüller 空间、测地流与扩展 Thurston 度量**。 测地流是定义在双曲曲面的测地线空间上的测度，它们为加权闭曲线空间提供了一个自然的完备化。

为了获得拓扑性质更好的空间，我们不考虑 S 上的测地线空间，而是考虑 S 的测地线空间。令 $G(S)$ 表示 $\widetilde{S}$ 上双向无限、无向、无参数测地线的空间。由于 $\widetilde{S}$ 与 $\mathbb{H}^2$ 等距（通过任意选取一个辅助双曲度量），每条这样的测地线都可以用一对 $(a,\ b)\in S^1\times S^1-\Delta$ 参数化，其中 $\Delta=\{(a,\ a)\in S^1\times S^1\}$。坐标 $(a,\ b)$ 与翻转 $(b,\ a)$ 确定同一条无向测地线。因此，我们有$G(S)=(S^1\times S^1-\Delta)/\mathbb{Z}_2$，其中商空间是通过方向翻转作用得到的。

S 上的测地流 定义为 $\pi_1(S)$-不变的局部有限正博雷尔测度，定义在$G(S)$上。令 $\mathcal{C}(S)$ 表示 S的测地流空间。

作为测度空间， $\mathcal{C}(S)$ 配备了 弱*-拓扑，即使得对于每个紧支集连续函数 $f\colon G(S)\to\mathbb{R}$，映射

$$\begin{aligned}F_f\colon \mathcal{C}(S)&\to\mathbb{R}\\ \mu&\mapsto\int f d\mu\end{aligned}$$

是连续的。该拓扑是可度量化的、第二可数的且满足序列性，并且可以等价地用交数的收敛来定义 [Ota90, DLR10]： $\mu_n\to\mu$当且仅当对于每条闭曲线 c，$\lim_n i(\mu_n,\ c)=i(\mu,\ c)$。关于此拓扑， $\mathcal{C}(S)$ 是局部紧的，而 $\mathbb{P}\mathcal{C}(S)$ 是紧的 [Bon88]。

测地流的一个自然例子由 S 上的每条闭测地线 c 给出。事实上， c 的完整$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$提升到 S 后为 $C:=\{g\cdot\widetilde{c}\}_{g\in\pi_1(S)/\mathrm{stab}(\widetilde{c})}$，它是 $G(S)$ 的一个子空间。令 δ_c 表示支撑在 C上的$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$狄拉克测度。由于 C 是 $G(S)$ 的一个可数离散子空间， δ_c 是$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$局部有限的博雷尔测度。最后，由于其支撑满足 $\pi_1(S)(C)=C$，它是 $\pi_1(S)$-不变的。提及与闭测地线 c 相关的测地流时，我们将滥用记号，用 $\boldsymbol{c}$ 代替 δ_c。注意，在双曲度量下，每个闭曲线的自由同伦类都包含唯一的闭测地线。因此， $\boldsymbol{c}\in\mathcal{C}(S)$ 也表示与任意闭曲线 c 的自由同伦类相关的测地流。

Teichmüller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 是 S 上标记双曲结构所组成的空间，即由一对 (X,ϕ) 构成，其中 X 是 S 上的双曲度量，且 $\phi\colon S\to X$ 是一个同胚；若存在等距映射 $I\colon X\to X'$，使得 $I\circ\phi$ 与 ϕ' 同伦，则两个 $(X,\phi),(X',\phi')$ 等价。

根据 Bonahon [Bon86，Bon88], 可以为每个标记度量 $\boldsymbol{x}=(X,\ \phi)\in\mathcal{T}(S)$关联一个双曲李乌维尔流流 $L_{\boldsymbol{x}}$，定义如下。将标记 ϕ提升为一个同胚

~ ~ ~万有覆盖 ϕ: $S \to X$，并考虑边界~ ~X上的 X-双曲交比 $[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]_X$——利用 X与 $\mathbb{H}$等距这一事实——为每个测地线子集 $[a,b]\times[c,d] \subset G(S)$ 指定数值，其中 a， b， c， d均按逆时针方向定向

$$L_{\boldsymbol{x}}([a,b]\times[c,d]) = \log\left[\widetilde{\phi}(a),\widetilde{\phi}(b),\widetilde{\phi}(c),\widetilde{\phi}(d)\right]_X.$$

根据交比的性质，这个赋值是有限可加的，并且具有 $\pi_1(S)$-不变性。由于交比始终为正，有限可加性可以提升为可数可加性，从而得到一个测地流。事实上，这是一个**填充测地流**的例子，也就是说，其支撑与曲面上的每条测地线都相交的测地流。我们用 $\mathcal{C}_{\text{fill}}$ 表示**填充测地流**的空间。

根据 Bonahon [Bon86，命题 4.5], ，闭曲线之间的标准几何交数可扩展为流空间上的双线性连续函数 $i(\cdot,\cdot)$。

根据 [BIPP21，定理 1.5]， $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{C}(S)$ 是填充的，当且仅当 $i(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}) > 0$ 对每个非零的 $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{C}(S)$ 均成立；这又当且仅当 μ 的短 ***systole*** 为正，其中测地流的 systole 定义如下:

$$\mathrm{Syst}(\mu) \coloneqq \inf\{i(\mu,\mathbf{c}) \mid c \text{ is a closed geodesic on } S\}.$$

映射 $\boldsymbol{x} \mapsto L_{\boldsymbol{x}}$ 给出了从 $\mathcal{T}(S)$ 到射影填充流空间 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}}(S)$ 的真嵌入。射影填充流空间是 $\mathcal{C}_{\text{fill}}(S)$ 的一个商空间，通过将一个填充测地流与其标量倍数等同而得到。此外，曲线 c相对于 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{T}(S)$ 的双曲长度，记作 $\ell_{\boldsymbol{x}}(c)$，可以通过下式求得

$$i(L_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{c}) = \ell_{\boldsymbol{x}}(c) \tag{7}$$

根据 [Bon86, Bon88]。我们之后会滥用记号，在指称点 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{T}(S)$ 的测地流时，用 $\boldsymbol{x}$ 代替 $L_{\boldsymbol{x}}$。

给定 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}}$，我们可以定义 $\boldsymbol{x}$ 的熵为

$$h(\boldsymbol{x}) \coloneqq \limsup_n \frac{1}{n}\log\#\{c \text{ closed geodesics } : i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) < n\}. \tag{8}$$

例如，当 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{T}(S)$ 时，

$$\begin{aligned} h(L_{\boldsymbol{x}}) &= \limsup_n \frac{1}{n}\log\#\{c \text{ closed geodesics } : i(L_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{c}) < n\} \\ &= \limsup_n \frac{1}{n}\log\#\{c \text{ closed geodesics } : \ell_{\boldsymbol{x}}(c) < n\} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{9}$$

其中，第一个等号是熵的定义，第二个等号利用了公式 7，最后一个等号则依据 Huber 的经典曲线计数结果 [Hub61]。

熵的以下性质很容易验证。

引理 2.1. 熵满足:

- 对于每个 $a > 0$ 和每个 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_{\text{填充}}$，我们有

$$h(a\cdot\boldsymbol{x}) = \frac{1}{a}\cdot h(\boldsymbol{x}).$$

- 对于任意一对满足对每条闭曲线 $\boldsymbol{c}$都有 $i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}) \le i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})$ 的填充流 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$，我们有

$$h(\boldsymbol{x}) \le h(\boldsymbol{y}).$$

本文将反复用到一个一般性事实：给定一对填充测地流 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$，存在正数常数 $c_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ $c_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 0$，使得

$$c_1 < \frac{i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})} < c_2 \tag{10}$$

对于每个测地流 $\boldsymbol{c}$。这是因为 $i(\boldsymbol{y}, \cdot)$ $i(\boldsymbol{x}, \cdot)$ 是紧空间射影测地流 $\mathbb{P}\mathcal{C}$ 上定义良好、连续且为正的函数。

由这一观察可立即得到以下结果。

引理 2.2。给定一对填充测地流 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$，存在正的常数 c_1、c_2，使得

$$c_1 < \frac{h(\boldsymbol{y})}{h(\boldsymbol{x})} < c_2. \tag{11}$$

特别地，对于每个 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_{\text{fill}}$，都有 $h(\boldsymbol{x}) < \infty$。

证明。第一个断言成立，因为根据上面的段落，我们有常数 $c_1 > 0$，$c_2 > 0$，使得

$$c_2 i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) < i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c}) < c_1 i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}). \tag{12}$$

对每条闭曲线 $\boldsymbol{c}$。由引理 2.1，可得方程 11。由此，根据方程 9 可知，对于每个 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_{\text{fill}}$，$h(\boldsymbol{x}) < \infty$，因为 $h(L_{\boldsymbol{x}}) = 1$。□

上述讨论引出了以下定义。对于 x，$y \in \mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}}(S)$，选取填充流空间中的代表元 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，并令

$$\mathrm{Dil}(x, y) \coloneqq \sup_{\boldsymbol{c} \in \mathrm{cc}} \frac{i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})}, \tag{13}$$

我们称其为 x 和 y的膨胀 。

现在可以将扩展非对称度量 d写为

定义 2.3。对于 x、$y \in \mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}}$，选取 x 的代表元 $\boldsymbol{x}$，以及填充流 $\mathcal{C}(S)$中 y 的代表元 $\boldsymbol{y}$。x 与 y 之间的扩展 Thurston 度量 定义如下：

$$d(x, y) \coloneqq \log\left(\mathrm{Dil}(x, y) \cdot \frac{h(\boldsymbol{y})}{h(\boldsymbol{x})}\right).$$

在命题 A.11 中，我们将证明以下结果。

命题 2.4。扩展 *Thurston* 度量 d 在 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}}$ 上定义了一个非对称度量，对于任意 x、y、$z \in \mathbb{P}\mathcal{C}_{\text{fill}}$ 均成立。它满足：

- $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$。
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$。

命题 2.5。度量 d 将经典*Thurston*度量 d_{Th} 扩展到 $\mathcal{T}(S)$ 上，即：

$$d|_{\mathcal{T}(S)} = d_{\mathrm{Th}}.$$

证明。由方程 9 可知，对于 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y} \in \mathcal{T}(S)$，$h(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{y}) = 1$。根据 Sapir 的证明[Sap24，引理 61]，可知在定义 d_{Th}时，对所有闭曲线取上确界与仅对简单闭曲线取上确界所得结果相同。因此，结论得证。□

2.3. **分解非填充测地流**。本节将证明，任意非填充测地流 $\boldsymbol{\eta}$ 都可以分解为一个填充分量 $\boldsymbol{\eta}_{S'}$ 和一个层状分量 $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\eta}}$,

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_{S'} + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\eta}}.$$

这一分解源自 [BIPP21 中的测地流分解，定理 1.2]。为了明确我们将什么归为$\boldsymbol{\eta}_S$ 、什么归为 $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\eta}}$, 下面将介绍这一构造的一些细节。尽管该分解是在测地流层面定义的，但我们将看到，这一构造的某些特征在射影类中保持不变。

对于任意测地流 $\boldsymbol{\eta}$, [BIPP21]考察下文定义的集合 $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\eta}}$。对于曲面上的闭曲线 c， $\boldsymbol{c}$表示与 c相关联的测地流。

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{\eta}} := \begin{cases} c \text{ is a closed curve in } S: & i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{c}) = 0 \text{ and} \\ & i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{c}') \neq 0 \text{ for every closed curve } \boldsymbol{c}' \text{ with } i(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}') \neq 0. \end{cases} \tag{14}$$

请注意， $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\eta}}$ 在 $\boldsymbol{\eta}$的射影类中保持不变。

$$\mathcal{E}_{\eta} = \mathcal{E}_{\boldsymbol{\eta}}, \text{ 其中 } \boldsymbol{\eta} \text{ 是流空间中 } \eta \text{ 的一个代表元。}$$

集合 $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\eta}}$ 由两两互不相交的简单闭曲线组成。这些简单闭曲线将 S 分解成有限个子曲面 $\{S_1, S_2, \dots S_n\}$。若测地流 $\boldsymbol{\mu}$ 由 S_i 支撑，则称其支撑满足以下条件： $\boldsymbol{\mu}$的支撑包含 $\mathbb{H}^2$ 中的测地线，且该测地线投影到 S_i的内部。对于测地流，[BIPP21]将 $\boldsymbol{\eta}$ 在 S_i 上的短 systole 定义如下:

定义 2.6. 设 $\boldsymbol{\eta}$ 是一个测地流， S' 是 S的一个子曲面。 $\boldsymbol{\eta}$ 在S' 上的短 systole 定义为

$$\mathrm{Syst}_{S'}(\boldsymbol{\eta}) := \inf \left\{ i(\boldsymbol{\eta}, c) \mid c \textit{ is a closed geodesic in the interior of } S' \right\}.$$

若短 systole$_{S'}(\boldsymbol{\eta}) > 0$, 则称 $\boldsymbol{\eta}$ 充满 S'。

根据 [BIPP21] 中的定理 1.2，我们知道测地流 $\boldsymbol{\eta}$ 可以分解为

$$\boldsymbol{\eta} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\eta}_i + \sum_{c \in \mathcal{E}_{\boldsymbol{\eta}}} \kappa_c \boldsymbol{c},$$

其中， $\boldsymbol{c}$ 是与简单闭曲线 c对应的测地流， κ_c是非负实数， $\boldsymbol{\eta}_i$ 是仅支撑于 S_i上的测地流。流 $\boldsymbol{\eta}_i$ 恰好属于以下三种情形之一:

(1) $\boldsymbol{\eta}$ 不支撑于 S_i上。在这种情况下， $\boldsymbol{\eta}_i = 0$; (2) 短 systole$_{S_i}(\boldsymbol{\eta}_i) > 0$, 即 $\boldsymbol{\eta}_i$ 充满 S_i; (3) 短 systole$_{S_i}(\boldsymbol{\eta}_i) = 0$。在这种情况下， η_i 是一个仅支撑于 S_i 上、与 S_i内部的每条曲线都相交的测度层状结构。

在我们的分解中

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_{S'} + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\eta}} \tag{15}$$

- $\boldsymbol{\eta}_{S'}$ 由满足 Syst$_{S_i}(\boldsymbol{\eta}_i) > 0$ 的流 $\boldsymbol{\eta}_i$ 组成。对于任意这样的 $\boldsymbol{\eta}_i$, 如果 S_i 的边界上的简单闭曲线支撑 $\boldsymbol{\eta}$, 我们也会将这些闭曲线纳入考虑。

$$\boldsymbol{\eta}_{S'} = \sum_{\mathrm{Syst}_{S_i}(\eta_i) > 0} \boldsymbol{\eta}_i + \sum_{\substack{\mathrm{Syst}_{S_i}(\eta_i) > 0 \\ c \in \partial S_i}} \kappa_c c.$$

这里 S' 是所有满足 Syst$_{S_i}(\boldsymbol{\eta}_i) > 0$ 的 S_i's 的并集。子曲面 S' 不必是连通的。

• 测度叶层分量of η is $\boldsymbol{\lambda}_\eta = \eta - \eta_{S'}$。由于 $\boldsymbol{\lambda}_\eta$ 仅由测度层状结构和互不相交的简单闭曲线组成，因此它是一个测度层状结构。

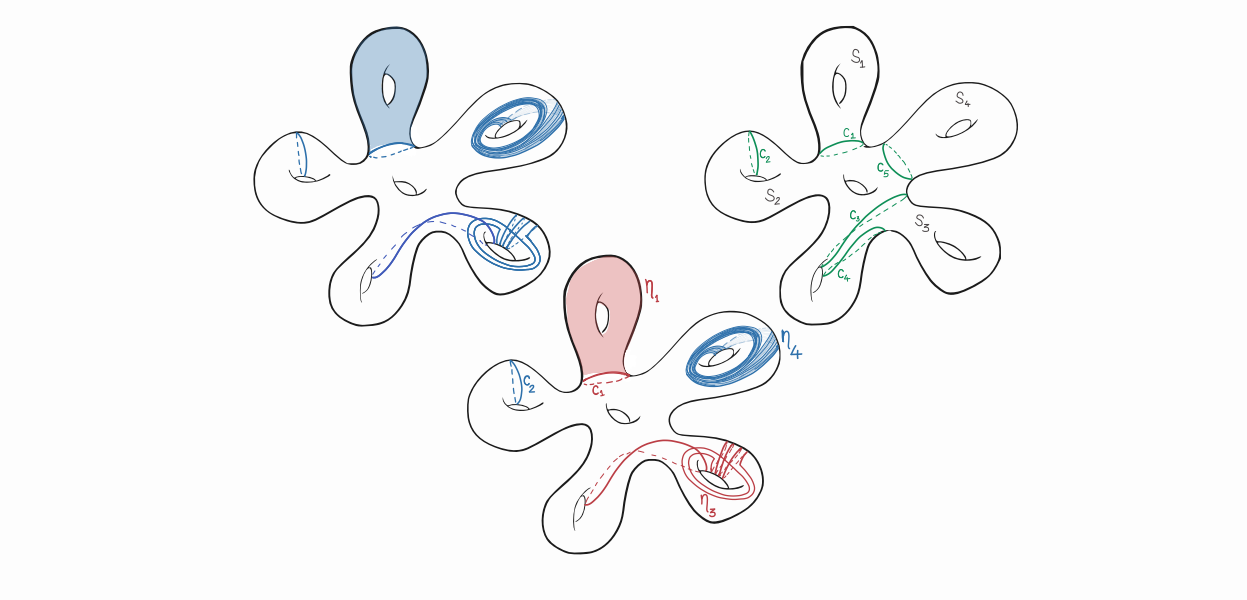

图3。左上：蓝色曲线表示测地流 η 支撑中的测地线。如果 η 支撑于某个子曲面内部的所有测地线上，我们就用阴影标出该子曲面。右上：绿色简单闭曲线属于 $\mathcal{E}_\eta$，并将曲面分解为子曲面 $\{S_1, \ldots, S_4\}$。下方：红色分量构成填充分量 $\boldsymbol{\eta}_{S'}$，而蓝色分量表示层状结构部分 $\boldsymbol{\lambda}_\eta$。

同一射影类中的任意两个测地流 η 和 $k\eta$ 都填充 S 中相同的子曲面，并且 $k\eta$ 的分解等于式（15）右侧乘以 k。因此，我们可以将射影流 $\eta = [\eta]$ 的分解写为 $[\boldsymbol{\eta}_{S'} + \boldsymbol{\lambda}_\eta]$

定理2.7。 任意非填充测地流 $\eta \in \mathcal{C}$ 都可以分解为

$$\eta = \boldsymbol{\eta}_{S'} + \boldsymbol{\lambda}_\eta,$$

其中， $\boldsymbol{\eta}_{S'}$ 是填充 S 的子曲面 S' 的测地流，而 $\boldsymbol{\lambda}_\eta$ 是测度层状结构。我们将 $\boldsymbol{\eta}_{S'}$ 称为 η的<样式 id='6'>填充分量</样式>，将 $\boldsymbol{\lambda}_\eta$ 称为 η的<样式 id='10'>测度叶层分量</样式>，并将 S' 称为由 η<样式 id='14'>填充的子曲面</样式>。

.

3. 扩展 Thurston 度量的拓扑性质及其关键性质

本节将证明，射影填充流上的扩展 Thurston 度量满足关键性质。Jenya Sapir 在 [Sap24, 推论 7.2] 中证明了 d_{sym} 是完备的。因此， d满足性质 A。接下来需要证明它满足性质 B - D。我们先证明性质 D，再证明性质 C，因为性质 C 的证明依赖于性质 D。

3.1. **性质 B：测地度量空间**。我们证明性质 B 对 $(\mathbb{PC}_{fill},\ d)$ 成立，这基本上可由 [CR25, 定理 1.2] 推出。$\mathcal{D}_\Gamma$ 的精确定义见附录 A。

命题 3.1. *[性质 B] 配备扩展 Thurston 度量的射影填充流空间是测地的。*

证明. 根据命题 A.12（Cantrell–Reyes），对于任意 $x, y \in \mathbb{PC}_{fill}(S)$，空间 $\mathcal{D}_{\pi_1(S)}$ 中从 x到 y 、关于 d_{sym} 的测地线由下式给出

$$r(t) = [t\boldsymbol{y} + \theta_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{y}}(t)\boldsymbol{x}], \quad 0 \le t \le h(\boldsymbol{y}).$$

这里，$\theta_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{y}}$ 是与 x 和 y 相关联的曼哈顿曲线（见 A.4 节），而 $[\cdot]$ 表示 $\mathcal{D}_\Gamma$中的粗相似类。

注意，$\theta_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{y}}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个连续可微函数，并且满足

$$\theta_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{y}}(0) = h(\boldsymbol{x}) \quad \text{and} \quad \theta_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{y}}(h(\boldsymbol{y})) = 0,$$

同时在区间 $[0, h(\boldsymbol{y})]$上保持为正。

由于填充流的正线性组合仍然是填充流，测地线 $r(t)$ 始终位于子空间 $\mathbb{PC}_{fill} \subset \mathcal{D}(\Gamma)$ 内。因此，$(\mathbb{PC}_{fill}, d_{\mathrm{sym}})$ 是一个测地度量空间。最后，根据命题 A.13，关于 d_{sym} 的任意测地线都是 d 的测地线，因此 $(\mathbb{PC}_{fill}, d)$ 是测地的。□

3.2. **性质 D：无穷远处的行为**。我们证明，序列 $\{x_n\} \subset \mathbb{PC}_{fill}$ 逃逸出 $\mathbb{PC}_{fill}$ 的每个紧子集，当且仅当对于任意选择的 $b \in \mathbb{PC}_{fill}$，$d(b,\ x_n) \to \infty$ 。在 $\mathcal{T}$ 的情形下，这由 [PT07] 证明。他们还证明，对于 Teichmüller 空间中的序列 x_n 以及某个基点 $b \in \mathcal{T}$，有 $d_{Th}(b,\ x_n) \to \infty$，当且仅当 $d_{Th}(x_n,\ b) \to \infty$。下面说明为何对于流空间而言，这一等价性更难证明。

定义 3.2. 若序列 $\{x_n\} \subset \mathbb{PC}_{fill}$ 趋于无穷远，我们记作 $x_n \to \infty$；这意味着任意紧子集 $K \subset \mathbb{PC}_{fill}$ 都至多包含 $\{x_n\}$中的有限多个元素。

引理 3.3. 设 $b \in \mathbb{PC}_{fill}$，并假设 $\{x_n\}$ 是一个收敛到某个 $\eta \in \mathbb{PC}$的填充流序列。那么，距离 $d(b, x_n)$ 趋于无穷远，当且仅当 η 是非填充流。

证明。若 $\{x_n\}$ 收敛到一个填充流 η，那么由度量 d的连续性可知，$d(b, x_n)$ 收敛到 $d(b, \eta)$，其值有限。因此，$d(b, x_n)$ 不会趋于无穷远。接下来只需证明，若 $\{x_n\}$ 收敛到一个非填充流 η，则 $d(b, x_n)$ 趋于无穷远。我们将对 $b \in \mathcal{T}$证明该结论；一般情形下的 $b \in \mathbb{PC}_{fill}$ 则可由三角不等式推出。

对于序列中的每个 x_n，我们在流空间中选取一个代表元 $\boldsymbol{x}_n$，使得 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 收敛到 η 的一个代表元 $\boldsymbol{\eta}$。注意，对于任意 $b \in \mathcal{T}$，其代表元 $\boldsymbol{b} \in \mathcal{T} \subset \mathcal{C}$ 满足 $h(\boldsymbol{b}) = 1$，由方程 9 可知。因此我们得到

$$d(b, x_n) = \log\left(\sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})} h(\boldsymbol{x}_n) \right).$$

由命题 3.9 可知，如果流中的序列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 收敛到一个非填充流，那么 $\lim_{n\to\infty} h(\boldsymbol{x}_n) = \infty$。因此，要证明 $\lim_{n\to\infty} d(b, x_n)$，只需证明

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}$$

与零保持正距离。注意，

$$\frac{i(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})} \le \sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})} \text{ for all } n \in \mathbb{N} \text{ and for all } \boldsymbol{c} \in \mathcal{C}$$

因此,

$$\frac{i(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})} \leq \lim_{n\to\infty}\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})} \text{ for all } \boldsymbol{c}\in\mathcal{C}$$

我们总能找到某个测地流 $\boldsymbol{\lambda}$，使得 $i(\boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\lambda}) = k_1 > 0$。由于 $\boldsymbol{b}$ 是填充的，因此我们得到$i(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{\lambda}) = k_2 > 0$。因此

$$0 < \frac{k_1}{k_2} < \lim_{n\to\infty}\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}$$

这就证明了所需的结果。因此，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}h(\boldsymbol{x}_n) = \infty$$

因此 $\lim_{n\to\infty} d(b,\ x_n) = \infty$。 □

命题 3。 **4.** 设 $\{x_n\}$是 $\mathbb{PC}_{fill}$ 中的一个序列，以下三个性质等价 *t:*

(1) $x_n \to \infty$。*(2)* $\{x_n\}$的任何收敛子序列都必须收敛到一个非填充射影流。*(3)* 对所有 $b\in\mathbb{PC}_{fill}$、$d\ (b、\ x_n)\ \to\infty$。

证明。 (1)⟹(2)：由于 $\mathbb{PC}$ 是紧的，序列 $\{x_n\}$ 有一个收敛子序列 $\{x_{n'}\}$。假设 $x_{n'}$ 收敛到一个射影流 μ。我们断言， μ 不可能是填充流。

反设 μ是填充流。那么，我们可以找到一个实数 N 以及 $\mathbb{PC}_{fill}$ 中包含的 μ 的一个紧邻域 K_μ，使得对于所有 $n > N$都有 $x'_n \in K_\mu$。由于 K_μ 包含 $\{x'_n\} \subset \{x_n\}$的无穷多个元素，序列 $\{x_n\}$ 不可能逃逸到无穷远。

(2)⟹(1) 如果一个紧集 $K \subset \mathbb{PC}_{fill}$ 包含序列 $\{x_n\}$的无穷多个元素，那么 $K \cap \{x_n\}$ 有一个收敛子序列 $\{x'_n\}$，其极限是包含于 K中的一个射影充填流，这与(2)矛盾。

(2)⟺(3) 假设存在某个 $b \in \mathbb{PC}_{fill}$，使得 $d(b,\ x_n)$ 不趋于无穷远。那么存在一个子序列 $\{x'_n\} \subset \{x_n\}$，使得 $d(b,\ x'_n)$ 被某个常数 L 所界定。由于 $\mathbb{PC}$ 是紧集， $\{x'_n\}$ 存在一个收敛子序列，我们仍用 $\{x'_n\}$ 表示。令 $\mu = \lim_{n\to\infty} x'_n$。那么

$$d(b,\mu) = \lim_{n\to\infty} d(b,x'_n) \leq L.$$

根据定理 3.3， μ 必须是填充的，这与 (2) 矛盾。反向论证即可得出逆命题 .

□

推论 3.5 (性质 D)。 设 $b \in \mathbb{PC}_{fill}$，则对于 $\mathbb{PC}_{fill}$ 中的每个序列 x_n，如果 $d_{\mathrm{sym}}(b,\ x_n)$ 趋于无穷远，那么 $d(b,\ x_n)$ 也趋于无穷远。

证明。 假设 $d_{\mathrm{sym}}(b,\ x_n)$ 趋于无穷远。根据 [Sap24，推论 7.2]， $\{x_n\}$ 中有无穷多个元素不能包含在 $\mathbb{PC}_{fill}$ 的某个紧集中。因此， $x_n \to \infty$。但根据定理 3.4，我们有 $d(b,\ x_n) \to \infty$。□

注释 3.6。 可以设想， $d\ (x_n, b)$ 沿着某些逃逸至无穷远的序列 $\mathbb{PC}_{fill}$ 仍保持有界。事实上，选取一个基点 $b \in \mathcal{T}\ (S)$。令 $\boldsymbol{b} \in \mathcal{T} \subset \mathcal{C}$ 表示其代表元。根据定理 *3.4*，我们可以找到 $\{x_n\}$ 的一个收敛到射影非填充流η的子序列。我们继续用 $\{x_n\}$表示这个子序列。令 $\boldsymbol{x}_n$ 为 x_n 的一个代表元，使得序列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$收敛到 η的一个代表元 $\boldsymbol{\eta}$。于是

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,b) = \lim_{n\to\infty} \log\left(\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{c})}\frac{1}{h(\boldsymbol{x}_n)}\right).$$

对于一个收敛到非填充流 η的序列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$，熵 $h(\boldsymbol{x}_n)$ 趋于无穷远。因此，根据命题 *3.9*，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h(\boldsymbol{x}_n)}=0.$$

另一方面，由于 $\boldsymbol{\eta}$ 是非填充的，存在一个闭曲线序列 $\boldsymbol{\lambda}_n$，使得$i(\boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\lambda}_n)\to 0$ [BIPP21，命题 5。1]。因此，$\lim_{n\to\infty} i(\boldsymbol{x}_n,\ \boldsymbol{\lambda}_n)=0$。由于下文所考虑比值的分子对于所有 $\boldsymbol{\lambda}_n$*s* 都与零有正距离，因此可知

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{c})}=\infty.$$

这意味着，$\lim_{n\to\infty} d(x_n,\ b)$ 比较了 $h(\boldsymbol{x}_n)$ 的增长速率与该比值的上确界值的增长速率。因此，我们预期对于某些逃逸序列，该极限是有限的。

3.3. **性质 C：距离趋近于零**。设 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{PC}_{fill}$ 中的一个序列，并令 $x\in\mathbb{PC}_{fill}$。在本节中，我们证明，当且仅当 $d(x_n,\ x)\to 0$ 时，$d(x,\ x_n)\to 0$。我们还证明，这等价于序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x。

我们首先证明以下引理。

引理 3.7. 设 $b\in\mathbb{PC}_{fill}$，且 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{PC}_{fill}$ 中的一个序列，满足 $d(x_n,b)\to 0$，则 x_n 在 $\mathbb{PC}$ 中的任意极限点 y 都是一个填充射影流。

证明。假设 $\{x_n\}$ 有一个子序列 $\{x'_n\}$ 收敛到一个非填充射影流 η。由定理 3.4，$x'_n\to\infty$。我们将证明，对于任意 $b\in\mathbb{PC}_{fill}$，$d(x'_n,\ b)$ 不可能收敛到 0，因此

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,b)\neq 0.$$

设 K 是 $\mathbb{PC}_{fill}$ 的一个紧子集，使得 b 包含在 K 的内部。由于 $x'_n\to\infty$，我们可以找到一个 N，使得对所有 $n>N$ 都有 $x'_n\notin K$。由于我们选取的 K 是 $\mathbb{PC}_{fill}$ 的真子集且内部非空，因此 ∂K 的边界非空。我们定义

$$D=\inf_{y\in\partial K} d(y,b).$$

由于 K 是紧的，而 $\mathbb{PC}$ 是豪斯多夫的，因此 ∂K 是闭的，进而是紧的。因此，$d(y,\ b)$ 的下确界在某个 $z\in\partial K$ 处取得。注意，由于 b 位于 K 的内部，故 $z\neq b$。因此，我们有

$$D=d(z,b)\neq 0$$

但现在，对所有不属于 K 的 x'_n，都有 $d(x'_n,\ b)>D$。这是因为 $(\mathbb{PC}_{fill},\ d)$ 是一个测地度量空间，并且对于每个不属于 K 的 x'_n，我们都能找到一条测地线 $\gamma_{n'}\colon[0,1]\to\mathbb{PC}_{fill}$，使得 $\gamma_{n'}(0)=x'_n$ 且 $\gamma_{n'}(1)=b$。由于 $\gamma_{n'}$ 连续，$\gamma_{n'}$ 下 K 和 $\mathbb{PC}\setminus K$ 的内部的原像是 $[0,1]$ 中不相交的非空开集。因此，存在某个 $t\in[0,1]$，使得 $\gamma_{n'}(t)$ 既不位于 K 的内部，也不位于 $\mathbb{PC}\setminus K$ 的内部。这意味着 $\gamma_{n'}(t)\in\partial K$。因此，我们得到

$$\begin{aligned} d(x'_n,b)&=d(x_{n'},\gamma_{n'}(t))+d(\gamma_{n'}(t),b)\\ &\geq D+d(\gamma_{n'}(t),b)\end{aligned}$$

由于 $d(\gamma_{n'}(t),\ b)$ 非零，$d(x'_n,\ d)>D$。但这样一来

$$\lim_{n\to\infty} d(x'_n,b)\neq 0$$

我们的证明便完成了。

□

现在我们证明，熵是填充流上的连续函数。

引理 3.8。 设 $(\boldsymbol{x}_n)$ 是一个收敛于 $\boldsymbol{x}$ 的填充测地流序列。那么 $h(\boldsymbol{x}_n) \to h(\boldsymbol{x})$。

证明。 假设 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$。由于

$$\mathrm{Dil}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sup_{\gamma \in \mathrm{cc}} \frac{i(\boldsymbol{y}, \gamma)}{i(\boldsymbol{x}, \gamma)} = \max_{\nu \in \mathcal{PC}} \frac{i(\boldsymbol{y}, \nu)}{i(\boldsymbol{x}, \nu)},$$

函数 $F(\cdot) = {}^{i(\boldsymbol{y},\cdot)}\, i(\boldsymbol{x},\cdot)$ 在射影测地流上连续，且射影测地流空间是紧的，由 Berge 最大值定理 [AB06，定理 17，31],$\mathrm{Dil}(\boldsymbol{x}, \cdot)$ 连续。我们有

$$\mathrm{Dil}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_n)^{-1} i(\boldsymbol{x}_n, \gamma) \leq i(\boldsymbol{x}, \gamma) \leq \mathrm{Dil}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_n) i(\boldsymbol{x}_n, \gamma)$$

对每个 γ 均成立。因此，对每个 $\epsilon > 0$，存在 n_0，使得对每个 $n \geq n_0$，我们都有

$$1 - \epsilon \leq \frac{i(\boldsymbol{x}, \gamma)}{i(\boldsymbol{x}_n, \gamma)} \leq 1 + \epsilon.$$

因此，若 $G(L, \boldsymbol{x}) := \{\gamma \in \mathrm{cc} : i(\boldsymbol{x}, \gamma) < L\}$，则有

$$G(L/(1+\epsilon), \boldsymbol{x}_n) \subset G(L, \boldsymbol{x}) \subset G(L/(1-\epsilon), \boldsymbol{x}_n).$$

因此

$$\frac{1}{1+\epsilon} h(\mu_i) \leq h(\mu) \leq \frac{1}{1-\epsilon} h(\mu_i)$$

因此，取对数后，当 ϵ 足够小时，我们有

$$-\epsilon \leq \log(h(\boldsymbol{x}_n)) - \log(h(\boldsymbol{x})) \leq \epsilon.$$

因此 $h(\boldsymbol{x}_n) \to h(\boldsymbol{x})$。 □

接下来，我们证明 h 在填充流上是真函数。

命题 3.9。 设 $\boldsymbol{x}_n$ 是一列收敛到测地流$\boldsymbol{x}$的填充测地流。那么， $\boldsymbol{x}$ 是非填充的，当且仅当 $\lim h(\boldsymbol{x}_n) \to +\infty$。

证明。首先，假设 $\boldsymbol{x}$ 是填充的。由于填充测地流空间是局部紧的，因此存在 $\boldsymbol{x}$的一个紧邻域 K 。于是，存在 n_0 ，使得对于 $n \geq n_0$， $\boldsymbol{x}_n \in K$，并且由于 h 由引理 3.8 知是连续的，因此存在一个正的常数 $C > 0$ ，使得对于所有$n \geq n_0$，都有 $h(\boldsymbol{x}_n) \leq C$ 。现在假设 $\boldsymbol{x}$ 是非填充的，并且为了导出矛盾，假设存在一个常数 $C > 0$ ，使得对于所有 n，都有 $h(\boldsymbol{x}_n) < C$。那么，对于每个 n，令 $h_n := h(\boldsymbol{x}_n) > 0$。我们有 $h(h_n \boldsymbol{x}_n) = 1$。令 $\boldsymbol{x}'$ 为子序列 $h_{n_k} \boldsymbol{x}_{n_k}$的一个极限点。根据 CR25，引理 3.7],，可知 $\boldsymbol{x}'$ 是填充的。由于 h_{n_k} 有界，进一步取子序列后， $h_{n_k} \to h' \geq 0$。由于$\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{x}$，我们有 $\boldsymbol{x}' = h' \boldsymbol{x}$。若 $h' = 0$，则 $\boldsymbol{x}'$ 是零流，这就矛盾了。若$h' > 0$，则 $\boldsymbol{x}'$ 是非填充的，这也矛盾。证明完毕。□

命题 3.10 (性质 C)。 对于 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$ 中的任意序列 $\{x_n\}$ ，以及任意 $x \in \mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$ ，以下三个性质等价:

(1) x_n 在 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$ 中收敛至 x
(2) $d(x, x_n) \to 0$*(3)* $d(x_n, x) \to 0$

证明。 (1)⟹(2) 设 $\boldsymbol{x}_n$ 为流空间中 x_n 的一个代表元，使得序列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 收敛到 $x \in \mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$ 的一个代表元 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$ 。根据 Bona-hon [Bon86，命题 4.5], ，交形式是连续的；根据引理 3.8，熵也是连续的。因此，我们得到:

$$\lim_{n \to \infty} i(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{c}) = i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})$$

对于所有测地流 $\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}$，以及

$$\lim_{n\to\infty} h(\boldsymbol{x}_n) = h(\boldsymbol{x})$$

作为推论

$$\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = \lim_{n\to\infty} \log\left(\sup_{c\in\mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})} \frac{h(\boldsymbol{x}_n)}{h(\boldsymbol{x})} \right) = 0$$

类似的论证表明 (1)⟹(3)。

(2)⟹(1) Papadopoulos 和 Théret 在 [PT07, 定理 2] 中证明了 Teichmüller 空间上的瑟斯顿度量满足这一结论。这里的证明采用了类似的策略。

反设 $d(x, x_n) \to 0$，但序列 $\{x_n\}$ 不收敛于 x。那么存在一个邻域 N_x，使得对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在 $n_k > k$ 满足$x_{n_k} \notin N_x$。我们有 $d(x, x_{n_k}) \to 0$。由于 $\mathbb{PC}$ 的紧致性，序列 $\{x_{n_k}\}$ 存在一个收敛子序列 $\{x_{n'_k}\}$，其极限为 $y \in \mathbb{PC}$。由于 $\{x_{n'_k}\}$ 是 $\{x_{n_k}\}$ 的子序列，我们仍有 $d(x, x_{n'_k}) \to 0$。由于 $d(x, x_{n'_k})$ 不趋于无穷远，根据定理 3.3，子序列 $\{x_{n'_k}\}$ 的极限 y 必须是一个填充流。应用三角不等式，我们得到

$$d(x, y) \le d(x, x_{n'_k}) + d(x_{n'_k}, y) \text{ for all } n'_k.$$

我们知道 $d(x, x_{n'_k}) \to 0$。由于子序列 $\{x_{n'_k}\}$收敛到 y，因此 $d(x_{n'_k}, y) \to 0$ 也成立。因此，$d(x, y) = 0$ 且 $x = y$。

这意味着 x 是序列 $\{x_{n_k}\}$的极限点。特别地，x的每个邻域，包括 N_x，都必须包含子序列 $\{x_{n'_k}\}$的无穷多个元素。然而，根据 $\{x_{n'_k}\}$的构造，这产生了矛盾。

(3)⟹(1)的证明类似，只是我们使用定理 3.7而非定理 3.3来论证，y 是 $\{x_{n'_k}\}$ 的极限点，且为填充流。□

4. Horofunction compactification of $\mathbb{PC}_{fill}$ is $\mathbb{PC}$.

在本节中，我们证明 $(\mathbb{PC}_{fill}, d)$ 的 horofunction 紧化与射影流空间 $\mathbb{PC}$ 同胚，并且 $(\mathbb{PC}_{fill}, d)$ 的视函数边界由射影非填充流组成。这一结果扩展了 Walsh 的一个定理，该定理指出，$(\mathcal{T}, d_{Th})$ 的 horofunction 紧化与 Teichmüller 空间的 Thurston 紧化[Wal14a]同胚。

为建立 $\mathbb{PC}_{fill}$ 的 horofunction 紧化是 $\mathbb{PC}$，我们定义一个映射 $\Psi\colon \mathbb{PC} \to C(\mathbb{PC}_{fill})$，使得对于任意属于 $\mathbb{PC}_{fill}$的 z，z 的像为 $\Psi_z\colon \mathbb{PC}_{fill} \to \mathbb{R}$ 是

$$\Psi_z(x) = d(x, z) - d(b, z) \text{ for all } x \in \mathbb{PC}_{fill}.$$

我们假设基点为 $b \in \mathcal{T}$。非对称度量 d 仅定义在射影填充流上。因此，当 z 是非填充的时，我们无法使用上述 Ψ_z的定义。接下来，我们将把映射 Ψ 的定义扩展到所有射影流。在第4.2节和第4.3节中，我们将证明由此得到的映射 Ψ 是一个嵌入，因而与其像同胚。

4.1. 在射影流上定义 Ψ。 为了为非填充流定义映射 Ψ_z，我们首先需要定义以下分量映射。这些分量映射与 Walsh 在 [Wal14a], 中定义的相同，但经过调整，以适用于 $(\mathbb{PC}_{fill}, d)$ 的情形。

- 对于任意 $\boldsymbol{z}$ 在 $\mathcal{C}$ 中，我们定义

$$Q(\mathbf{z}) = \sup_{\boldsymbol{c}\in\mathcal{C}} \frac{i(\mathbf{z}, \boldsymbol{c})}{i(\mathbf{b}, \boldsymbol{c})} \frac{1}{h(\mathbf{b})} = \sup_{\boldsymbol{c}\in\mathbb{PC}} \frac{i(\mathbf{z}, \boldsymbol{c})}{i(\mathbf{b}, \boldsymbol{c})} \frac{1}{h(\mathbf{b})}$$

根据公式 9，表示 Teichmüller 空间中一个点的任意流的熵都等于 1。因此，我们可以将 Q **(z)** 重写为

$$Q(\boldsymbol{z}) = \sup_{c\in\mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{z},\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}.$$

由于上确界是在紧集上取的，且分母始终不为零，因此上确界总能取到，并且为正且有限。

- 对于任意 $z \in \mathbb{PC}$，我们定义

$$\mathcal{L}_z : \mathbb{PC} :\to \mathbb{R}_+$$
$$\mathcal{L}_z(\mu) = \frac{i(\mathbf{z},\mu)}{Q(\mathbf{z})}.$$

为了定义 $\mathcal{L}_z$，我们在流空间中选取 z 的一个代表元 $\boldsymbol{z}$。但是，由于对于任意正实数 k，$Q(k\mathbf{z}) = kQ(\mathbf{z})$，$\mathcal{L}_z$ 不依赖于代表元的选取。

现在，对于任意 $z \in \mathbb{PC}$，我们定义 Ψ_z： $\mathbb{PC}_{fill} \to \mathbb{R}$，使得对所有 $x \in \mathbb{PC}_{fill}$

$$\Psi_z(x) = \log\left(\sup_{c\in\mathbb{PC}} \frac{\mathcal{L}_z(\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})}\frac{1}{h(\boldsymbol{x})}\right). \tag{16}$$

上述函数在 x 的射影类上定义良好，因为对于任意正的常数 k，根据引理 2.1 2.1，我们有：

$$i(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})\, h(k\boldsymbol{x}) = k\, i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) \cdot \frac{1}{k} h(\boldsymbol{x}) = i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})\, h(\boldsymbol{x}).$$

引理 4.1。对于任意 $z \in \mathbb{PC}_{fill}$，在公式（16）中定义的映射 Ψ_z 满足 $\Psi_z(x) = d(x、z) - d(b、z)$，对所有 $x \in \mathbb{PC}_{fill}$ 均成立。

证明。考虑任意 $z \in \mathbb{PC}_{fill}$。则有

$$\Psi_z(x) = \log\left(\sup_{c\in\mathbb{PC}} \frac{\mathcal{L}_z(\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})}\frac{1}{h(\boldsymbol{x})}\right).$$

由于 z 是填充的，根据引理 2.2，z、$h(\boldsymbol{z})$ 的任意代表元 $\boldsymbol{z}$ 都是有限的。因此，将 $\mathcal{L}_z(c) = {}^{i}(\mathbf{z}\ \boldsymbol{c})\ Q(\boldsymbol{z})$ 以及 $Q(\mathbf{z})$ 分别代入上式中的 $\sup_{c\in\mathbb{PC}} {}^{i}_{i}(\mathbf{z}\ \boldsymbol{c})(\mathbf{b}\ \boldsymbol{c})$，并化简可得

$$\begin{aligned}&\log\left(\sup_{c\in\mathbb{PC}} \frac{i(\mathbf{z},\boldsymbol{c})h(\boldsymbol{z})}{i(\mathbf{x},\boldsymbol{c})h(\boldsymbol{x})}\right) - \log\left(\sup_{c\in\mathbb{PC}} \frac{i(\mathbf{z},\boldsymbol{c})}{i(\mathbf{b},\boldsymbol{c})}\frac{h(\boldsymbol{z})}{h(\boldsymbol{b})}\right)\\ =&d(x,z) - d(b,z).\end{aligned}$$

□

4.2. **映射 Ψ 是单射**。我们通过分别考虑两种情况来证明 Ψ 是单射。为确立这两种情况，我们作出如下定义：

定义 4.2。我们称测地流$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$具有相同的零支撑 if

$$i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) = 0 \Longleftrightarrow i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}) = 0 \ for\ all\ geodesic\ currents\ \boldsymbol{c} \tag{17}$$

并将其记作 $|\boldsymbol{x}|_0 = |\boldsymbol{y}|_0$。

注意，以下性质对$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$的射影类是不变的。这使我们能够定义具有相同零支撑的射影流。

De定义 4.3。 如果射影流 x和 y 具有相同的零支撑，我们称之为

$$i(\boldsymbol{x}, c) = 0 \Longleftrightarrow i(\boldsymbol{y}, c) = 0 \tag{18}$$

对于任意代表元 $\boldsymbol{x}$ *of* x *and* $\boldsymbol{y}$ *of* y *and* 以及任意测地流 $\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}$，我们将其记为$|x|_0 = |y|_0$。

4.2.1. 情形 *1*：零支撑不同的射影流。

Lemma 4.4. 设 x、 y 是 $\mathbb{PC}$ 中的两个元素，满足 $|x|_0 \neq |y|_0$。则 $\Psi_x \neq \Psi_y$.

证明。 已知映射 $\Psi\colon \mathbb{PC} \to C(\mathbb{PC}_{fill})$ 在 $\mathbb{PC}_{fill}$ [上是单射（Wal14a，命题 2.1]）。

我们关注 x 或 y 至少一个是非填充的情形。不失一般性，假设 x 是非填充的。令 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别为流空间中 x 和 y 的代表元。根据初始假设，我们可以找到一个测地流 $\boldsymbol{\mu}$，使得 $i(\mathbf{x}\ \boldsymbol{\mu}) = 0$ 且 $i(\mathbf{y}\ \boldsymbol{\mu}) \neq 0$。为了证明 $\Psi_x \neq \Psi_y$，我们需要找到一个元素 $p \in \mathbb{PC}_{fill}$，使映射 Ψ_x 和 Ψ_y 在该元素处取值不同。

设 $\boldsymbol{\nu}$ 是一条填充多曲线。考虑由填充流组成并收敛到 $\mathbf{x}$ 的序列 $\mathbf{p}_n = \mathbf{x} + \frac{1}{n}\boldsymbol{\nu}$。对于每个 n，由于上确界是在紧集上取的，且分母始终不为零，因此它有限且能够取到：

$$\sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})}{Q(\boldsymbol{x}) i(\mathbf{p}_n, \boldsymbol{c})}.$$

利用交形式和上确界的性质，我们得到如下计算：

$$\begin{aligned} \sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})}{Q(\boldsymbol{x}) i(\mathbf{p}_n, \boldsymbol{c})} &= \frac{1}{Q(\mathbf{x})} \sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})}{i(\mathbf{p}_n, \boldsymbol{c})} \\ &= \frac{1}{Q(\mathbf{x})} \sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) + \frac{1}{n} i(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{c})} \\ &= \frac{1}{Q(\mathbf{x})} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n} \inf_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})}} \right) \end{aligned} \tag{19}$$

由于下确界 $\inf_{c \in \mathbb{PC}} i(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{c})\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})$ 是在紧集上取的，且 $\boldsymbol{\nu}$ 与所有流的交数均非零，因此我们有

$$\inf_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})} > 0.$$

因此，我们有

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})}{Q(\boldsymbol{x}) i(\mathbf{p}_n, \boldsymbol{c})} = \frac{1}{Q(\boldsymbol{x})}.$$

另一方面，由于存在一个 $\boldsymbol{\mu}$，使得 $i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) = 0$ 且 $i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\mu}) \neq 0$，我们有 $i(\boldsymbol{p}_n, \boldsymbol{\mu})$ 在 n 趋于无穷远时趋于 0。这说明

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{Q(\boldsymbol{y})} \sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{p}_n, \boldsymbol{c})} = \infty$$

我们可以取一个足够大的 N，使得，

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})}{Q(\boldsymbol{y}) i(\boldsymbol{p_N}, \boldsymbol{c})} \neq \sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})}{Q(\boldsymbol{x}) i(\boldsymbol{p_N}, \boldsymbol{c})}.$$

随后 $\Psi_y(p_N) \neq \Psi_x(p_N)$。 □

4.2.2. 情形 *2*：具有相同零支撑的射影流。在定理 4.7 中，我们证明，对于 x，y 属于 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$ 且满足 $|x|_0 = |y|_0$ 时，$\Psi_x \neq \Psi_y$。为证明这一点，我们引入以下定义和定理 4.6。

定义 4.5。对于一个测地流 $\boldsymbol{x}$，我们用 $\mathcal{C}_x$ 表示所有与$\boldsymbol{x}$的交数非零的测地流所组成的集合。因此，

$$\mathcal{C}_x \coloneqq \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{C} \mid i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \neq 0\}.$$

对于$\boldsymbol{x}$的射影类中的每个元素，集合 $\mathcal{C}_x$ 都相同。

引理 4.6。设$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 是两个不同的测地流，且满足 $|\boldsymbol{x}|_0 = |\boldsymbol{y}|_0$。那么

$$either \sup_{\lambda \in \mathcal{C}_y} \frac{i(\boldsymbol{x}, \lambda)}{i(\boldsymbol{y}, \lambda)} > 1 \ or \sup_{\lambda \in \mathcal{C}_x} \frac{i(\boldsymbol{y}, \lambda)}{i(\boldsymbol{x}, \lambda)} > 1.$$

证明。假设 存在不同的测地流$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$，它们满足以下不等式 s

$$\sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{C}_y} \frac{i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{i(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda})} \leq 1 \text{ and } \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{C}_x} \frac{i(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda})}{i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})} \leq 1$$

由于 $|\mathbf{x}|_0 = |\mathbf{y}|_0$，我们有 $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$。

第一个不等式意味着，对于所有 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{C}_y$，$i(\mathbf{x}\ \boldsymbol{\lambda}) \leq i(\mathbf{y}\ \boldsymbol{\lambda})$。类似地，由第二个不等式可得，对于所有 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{C}_x$，$i(\mathbf{y}\ \boldsymbol{\lambda}) \leq i(\mathbf{x}\ \boldsymbol{\lambda})$。这意味着

$$i(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}) = i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \text{ for all } \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{C}_x.$$

但是，我们还有

$$i(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 = i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \text{ for all } \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_x.$$

因此，流 $\boldsymbol{x}$和 $\boldsymbol{y}$ 与所有闭曲线的交数都相同。然而，根据 Otal 的一个结果 [Ota90, Théorè me 2], ，这意味着测地流 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 相等，由此得到矛盾。□

引理 4.7。设 x, y 是 $\mathbb{P}\mathcal{C}$ 中的两个元素，满足 $|x|_0 = |y|_0$。那么 $\Psi_x \neq \Psi_y$。

证明。如前所述，映射 $\Psi : \mathbb{P}\mathcal{C} \to C(\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill})$ 在 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$ 上是单射。假设 x 或 y 至少有一个是非填充的。由于 $|x|_0 = |y|_0$，可知 x和 y 都必须是非填充的。

在流空间中，取 x 的一个代表元$\mathbf{x}$ 和 y 的一个代表元$\mathbf{y}$。令$\mathbf{x}' = Q(\mathbf{y})\mathbf{x}$，并令$\mathbf{y}' = Q(\mathbf{x})\mathbf{y}$。根据定理 4.6，有 $\sup_{\lambda \in \mathcal{C}_x} i(\mathbf{y}', \lambda)\, (\mathbf{x}', \lambda) > 1$ 或 $\sup_{\lambda \in \mathcal{C}_y} i(\mathbf{x}', \lambda)\, (\mathbf{y}', \lambda) > 1$。不失一般性，假设前者成立。

设 $\boldsymbol{\nu}$ 是一条填充多曲线。考虑 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$ 中的序列$\mathbf{p}_n = \mathbf{x} + \frac{1}{n}\boldsymbol{\nu}$。我们声称，当 n 足够大时，$\Psi_y(p_n) \neq \Psi_x(p_n)$。

为此，取

$$\Psi_y(p_n) - \Psi_x(p_n) = \log\left(\sup_{c \in \mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\mathbf{y}, \boldsymbol{c})}{Q(\mathbf{y}) i(\mathbf{p}_n, \boldsymbol{c})} \frac{1}{h(\mathbf{p}_n)}\right) - \log\left(\sup_{c \in \mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\mathbf{x}, \boldsymbol{c})}{Q(\mathbf{x}) i(\mathbf{p}_n, \boldsymbol{c})} \frac{1}{h(\mathbf{p}_n)}\right).$$

由于对于所有 n， $Q(\mathbf{x})$、 $Q(\mathbf{y})$ 和 $h(\mathbf{p}_n)$ 都是常数，因此不会影响上确界。故上式等于

$$\log\left(\frac{\frac{Q(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{y})}\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\mathbf{y},\boldsymbol{c})}{i(\mathbf{p}_n,\boldsymbol{c})}}{\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\mathbf{x},\boldsymbol{c})}{i(\mathbf{p}_n,\boldsymbol{c})}}\right). \tag{20}$$

分子 $Q(\mathbf{x})\,Q(\mathbf{y})\sup_{c\in\mathbb{PC}} i(\mathbf{y},\boldsymbol{c})\,i(\mathbf{p}_n,\boldsymbol{c}) = \sup_{c\in\mathbb{PC}} Q\,i(\mathbf{y},\boldsymbol{c})\,i(\mathbf{y})i(\mathbf{p}_n,\boldsymbol{c})$ 收敛到 $\sup_{c\in\mathbb{PC}} i(\mathbf{y},\boldsymbol{c})\,i(\mathbf{x},\boldsymbol{c})$。

我们知道

$$\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\mathbf{y},\boldsymbol{c})}{i(\mathbf{x},\boldsymbol{c})} \geq \sup_{\boldsymbol{c}\in\mathcal{C}_x}\frac{i(\mathbf{y}',\lambda)}{i(\mathbf{x}',\lambda)} > 1$$

我们可以选取 N 足够大，使得式 (20) 中该量的分子大于 1。

现在，我们将采用与定理 4.4 的证明中类似的论证，来说明式 (20) 中的分母小于 1。

$$\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\mathbf{x},\boldsymbol{c})}{i(\mathbf{p}_n,\boldsymbol{c})} = \sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\mathbf{x},\boldsymbol{c})}{i(\mathbf{x},\boldsymbol{c})+\frac{1}{n}i(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{c})} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}\inf_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{c})}{i(\mathbf{x},\boldsymbol{c})}}$$

由于下确界 $\inf_{c\in\mathbb{PC}} i(\boldsymbol{\nu},\ \boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{c})$ 是在紧集 $\mathbb{PC}$ 上取到的，并且 $\boldsymbol{\nu}$ 与所有流的交数均非零，因此我们得到

$$\inf_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})} > 0$$

这意味着式 (20) 中该量的分母从左侧趋近于 1。这告诉我们，对于所有 n，$\sup_{c\in\mathbb{PC}} i(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{c})\,(\mathbf{p}_N,\ \boldsymbol{c}) < 1$。

总之，当 N 足够大时，我们得到

$$\Psi_y(p_N) - \Psi_x(p_N) = \log\left(\frac{\frac{Q(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{y})}\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\mathbf{y},\boldsymbol{c})}{i(\mathbf{p}_N,\boldsymbol{c})}}{\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\mathbf{x},\boldsymbol{c})}{i(\mathbf{p}_N,\boldsymbol{c})}}\right) > 0$$

$$\Psi_y(p_N) \neq \Psi_x(p_N)$$

□

命题 4.8。 映射 $\Psi\colon\ \mathbb{PC} \to C(\mathbb{PC}_{fill})$ 是单射。

证明。 该命题直接由定理 4.4 和定理 4.7 得出 □

4.3. **映射 Ψ 是一个嵌入**。 以下两个引理可由 [Wal14a] 中命题 3.2 和引理 3.5 的证明得出。Walsh 在 Thurston 紧化 Teichmüller 空间的情形下建立了这些结果， $\mathcal{T}^{\mathcal{T}}$，而非在 $\mathbb{PC}$ 中。不过，这些证明并不依赖 Teichmüller 空间的任何特有性质，因此在论证中将 $\mathcal{T}^{\mathcal{T}}$ 和 $\mathbb{PML}$ 替换为 $\mathbb{PC}$ 后仍然成立。

引理 4.9。 若序列 x_n 在 $\mathbb{PC}$ 中收敛到一点 $x \in \mathbb{PC}$，则 $\mathcal{L}_{x_n}$ 在 $\mathbb{PC}$的紧集上一致收敛到 $\mathcal{L}_x$。

引理 4.10。 将 z 映射到 Ψ_z 的映射 $\Psi : \mathbb{PC} \to C(\mathbb{PC}_{fill})$ 是连续的 .

定理 1.1。 配备扩展 *Thurston* 度量的 $\mathbb{PC}_{fill}$ 的 *horofunction* 紧化与射影流空间 $\mathbb{PC}$同胚。此外，视函数边界恰好对应于射影非填充流空间。

证明。 由定理 4.8 和定理 4.10 可知，映射 $\Psi : \mathbb{P}\mathcal{C} \to C(\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill})$ 是从紧空间到豪斯多夫空间的连续单射，因此是到其像上的同胚。

$$\mathbb{P}\mathcal{C} \cong \Psi(\mathbb{P}\mathcal{C}).$$

$\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$的 horofunction 紧化是 $C(\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill})$ 中 $\Psi(\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill})$ 的闭包。由于 $\Psi(\mathbb{P}\mathcal{C})$ 是豪斯多夫空间中的紧子集，因此它是闭集。由此可得

$$\overline{\Psi(\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill})} \subseteq \Psi(\mathbb{P}\mathcal{C})$$

另一方面，根据连续性， $\Psi^{-1}(\Psi(\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}))$ 是闭集且包含 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$，因此

$$\Psi(\mathbb{P}\mathcal{C}) \subseteq \overline{\Psi(\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill})}$$

因此， $\Psi(\mathbb{P}\mathcal{C}) = \overline{\Psi(\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill})}$，且 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$的 horofunction 紧化与$\mathbb{P}\mathcal{C}$同胚。□

注 4.11. *Walsh* 证明了，关于瑟斯顿度量 d_{Th} ，*Teichmüller* 空间 $\mathcal{T}$ 的视函数边界与射影测度层状结构空间 $\mathbb{P}\mathcal{ML}$[Wal14a]同胚。由于射影测度层状结构包含于射影非填充流空间，因此 $(\mathcal{T}, d_{Th})$ 的视函数边界包含于 $(\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}, d)$的视函数边界。

回顾命题 *2.5*，对于任意 x、$y \in \mathcal{T}$，我们有 $d_{Th}(x, y) = d(x, y)$。因此，对每个 $y \in \mathcal{T}$，与瑟斯顿度量相关的视函数映射 $\Psi_y : \mathcal{T} \to C(\mathcal{T})$ 是与度量 d 相关的视函数映射 $\Psi_y : \mathbb{P}\mathcal{C}_{fill} \to C(\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill})$ 的限制。

5. 所有射影非填充流都是 Busemann 点

由上一节可知， $\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$ 的视函数边界由射影非填充流组成。现在我们证明，每个非填充射影流都可以沿着 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$ 中的一条测地路径逼近。给定基点 $b \in \mathcal{T}$ 和一个射影非填充流 z，在定理 5.3 中，我们给出一条无参数测地射线 $\gamma(t) : [0, \infty) \to \mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$，当 t 趋于无穷远时，该射线趋近于 z。 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$ 视界边界上的每个点都是 Busemann 点这一事实，是此引理的直接推论。

首先，我们扩展 膨胀 $\mathrm{Dil}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 的定义，使得其中一个流可以是非填充的 .

定义 5.1。 设 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_{\text{fill}}$ 和 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}$。我们将 $\mathrm{Dil}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 定义为

$$\mathrm{Dil}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup_{c \in \mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})}.$$

注意，由于 $\boldsymbol{x}$是填充的，上述上确界总能取得，且为有限值，因为上确界是在紧空间 $\mathbb{P}\mathcal{C}$ 上取的，并且分母永不为零。

以下有用事实将在定理 5.3 的证明中使用。

引理 5.2。 设 $\boldsymbol{z}$ 是一个非填充测地流，并令 $\boldsymbol{b} \in \mathcal{T}$。考虑路径 $\boldsymbol{\gamma}(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{C}_{fill}$，其由 $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{b} + t\boldsymbol{z}$给出。对于任意 $t \in \mathbb{R}_+$，$\mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\gamma}(t)) = 1 + \mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z})$。

证明。 我们计算：

$$\mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\gamma}(t)) = \sup_{c \in \mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})} = \sup_{c \in \mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + t.i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})} = \sup_{c \in \mathbb{P}\mathcal{C}} \left(1 + t\frac{i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}\right) = 1 + t\,\mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z}).$$

这就证明了引理。 □

现在我们构造未参数化的测地射线。注意，Cantrell–Reyes 已经在更广义的伪度量空间中构造了双向无限测地线 [CR25]，但相应的射线并未自然地包含在测地流空间中。因此，下面的构造是必要的。

引理 5.3. 设 $z \in \mathbb{P}\mathcal{C}$ 是一个射影非填充流，并设 $\boldsymbol{b} \in \mathcal{T}$。固定 z 的一个代表元 $\boldsymbol{z}$，并定义曲线 $\boldsymbol{\gamma}: \mathbb{R}_+ \to \mathcal{C}_{fill}$，使得

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{b} + t\boldsymbol{z}.$$

那么，射影类 $\gamma(t) = [\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{z}]$ 定义了一条测地线 $\gamma: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$，当$t \to \infty$时，它收敛到 z。

证明。 由于在流空间中有以下极限

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}(\mathbf{b} + t\mathbf{z}) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{b}}{t} + \mathbf{z} = \mathbf{z}$$

我们有 $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = z$，其在射影流空间中成立。还需证明 $\gamma(t)$ 是一条测地线。为此，我们要证明 $\gamma(t)$ 满足以下关系

$$d(b, \gamma(s)) + d(\gamma(s), \gamma(t)) = d(b, \gamma(t)), \text{ where } s, t \in \mathbb{R}_+ \text{ with } s \le t. \tag{21}$$

使用 Thurston 扩展度量的定义，并利用对数的性质进行化简后，所有涉及熵的项都相互抵消，从而得到以下等价方程:

$$\mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\gamma}(s)).\,\mathrm{Dil}(\boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{\gamma}(t)) = \mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\gamma}(t)) \tag{22}$$

在证明的其余部分，我们证明等式 (22) 成立。

简化 三角不等式 $d(b, \gamma(s)) + d(\gamma(s), \gamma(t)) \ge d(b, \gamma(t))$ 告诉我们 t

$$\mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\gamma}(s)).\,\mathrm{Dil}(\boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{\gamma}(t)) \ge \mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\gamma}(t)) \tag{23}$$

我们必须证明上面的等式确实成立。由等式 (23) 和定理 5.2 可得

$$\mathrm{Dil}(\boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{\gamma}(t)) \ge \frac{\mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\gamma}(t))}{\mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\gamma}(s))} = \frac{1 + t\,\mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z})}{1 + s\,\mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z})}.$$

假设等式 (23) 是严格不等式，即

$$\mathrm{Dil}(\boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{\gamma}(t)) > \frac{1 + t\,\mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z})}{1 + s\,\mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z})}. \tag{24}$$

将 $\mathrm{Dil}(\boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{\gamma}(t))$ 用 s 和 t 表示，我们得到:

$$\mathrm{Dil}(\boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{\gamma}(t)) = \sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{c})} = \sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{1 + t\frac{i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}}{1 + s\frac{i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}}.$$

将其代入式（24），得到

$$\sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{1 + t\frac{i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}}{1 + s\frac{i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}} > \frac{1 + t\,\mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z})}{1 + s\,\mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z})}.$$

设左侧的上确界由某个 $\boldsymbol{\lambda}_s$ 取得。那么，

$$\frac{1 + t\frac{i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}_s)}{i(b, \boldsymbol{\lambda}_s)}}{1 + s\frac{i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}_s)}{i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda}_s)}} > \frac{1 + t\,\mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z})}{1 + s\,\mathrm{Dil}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z})}.$$

展开并化简上述不等式，得到

$$\frac{i(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}_s)}{i(\boldsymbol{b},\boldsymbol{\lambda}_s)} > \mathrm{Dil}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{z}).$$

然而，Dil($\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{z}$) 定义为上确界，因此不可能严格小于左边。这迫使式 (23) 成为等式，由此我们得出式 (22) 成立，证明了$\gamma(t)$ 是一条测地线。□

备注 5.4。上述论证并未用到这些伪度量源自测地流这一事实，而且它在更一般的非初等双曲群的一般伪度量框架下同样适用（该框架的定义见附录 A）。

定理 5.5。所有射影非填充流都是布塞曼点。

证明。该定理直接由定理 1.1 和定理 5.2 得出。□

6. 非填充射影流上有限绕行代价的刻画

对于视函数边界上的任意两点 η 和 ξ，对称化绕行代价 δ 定义如下：

$$\delta(\eta,\xi) = H(\eta,\xi) + H(\xi,\eta).$$

本节中，我们研究非填充射影流 ξ 和 η之间的绕行代价 $H(\xi,\eta)$ 与对称化绕行代价 $\delta(\xi,\eta)$。

定理 6.1 根据交形式描述了 $H(\xi,\eta)$。在定理 6.5 中，我们给出了 ξ 和 η 必须满足的一个必要条件，使得 $H(\xi,\eta)$ 有限。基于这一结果以及上一节中测地流的分解，定理 6.6 表明，非填充射影流 ξ 和 η

$$\delta(\xi,\eta) < \infty$$

必须填充 S 的同一个子曲面，并且其测度层状结构分量具有相同的支撑。

引理 6.1。设 ξ 和 η 为非填充射影流，且 b 为 $\mathcal{T}$中的一个基点。那么绕行代价为

$$H(\xi,\eta) = \inf_{\gamma}\liminf_{t\to\infty}\left(\log\left(\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\boldsymbol{\gamma}(t),\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\right) + \log\left(\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{\gamma}(t),\boldsymbol{c})}\right) - \log\left(\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\right)\right), \tag{25}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}$、$\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{b}\in\mathcal{C}$ 分别是 ξ、η 和 b的代表元。下确界取遍所有满足 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 当 $t\to\infty$时收敛到 $\boldsymbol{\xi}$ 的某个标量倍数的路径 $\boldsymbol{\gamma}\colon \mathbb{R}_+\to\mathcal{C}_{fill}$。注意，上述表达式与流空间中代表元的选取无关。

证明。根据式（6）中绕行代价的定义，我们知道

$$H(\xi,\eta) = \inf_{\gamma}\liminf_{t\to\infty}\Big(d(b,\gamma(t)) + \Psi_\eta(\gamma(t))\Big)$$

其中，下确界取遍所有收敛到 ξ 的路径 $\gamma(t)\colon\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{PC}_{fill}$。对于每个 $t\in\mathbb{R}_+$，我们可以在流空间 $\mathcal{C}$ 中为 $\gamma(t)$ 选取一个代表元，使得 $\gamma(t)$ 收敛到 $\mathcal{C}_{fill}$ 中 ξ 的一个代表元。我们将此代表路径定义为 $\boldsymbol{\gamma}(t)\colon\ \mathbb{R}_+\to\mathcal{C}_{fill}$。将公式（16）中 $\Psi_\eta(\gamma(t))$ 的表达式代入并化简后，所有涉及熵的项都相互抵消。

$$H(\xi,\eta) = \inf_{\gamma}\liminf_{t\to\infty}\left(\log\left(\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\boldsymbol{\gamma}(t),\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\right) + \log\left(\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{\gamma}(t),\boldsymbol{c})}\right) - \log\left(\sup_{c\in\mathbb{PC}}\frac{i(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\right)\right).$$

对于每条 $\boldsymbol{\gamma}:\ \mathbb{R}_+ \to \mathcal{C}_{fill}$ 收敛到 $\boldsymbol{\xi}$ 的一个标量倍数的射线，我们都能得到一条 $\gamma:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$ 收敛到 ξ 的射线。因此，上述表达式等价于公式（ 25 ），从而完成了引理的证明。□

注 6.2 (记号约定)。 在本文余下部分中，若某个陈述不依赖于 x代表元的选择，我们便用 x 代替 $\boldsymbol{x}$ 。例如，表达式$\underline{\sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}}}^{\,i(\boldsymbol{x},c)}\, i(\boldsymbol{y},c)$ 不依赖于 c代表元的选择，因此我们写作 c ，而不写作 $\boldsymbol{c}$。

讨论交数为零还是非零时，也会出现另一种情况。若对 x 的某个代表元 $\boldsymbol{x}$ 和对 y的某个代表元 $\boldsymbol{y}$ ，有 $i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\ =0$ ，那么对于其他任意代表元的选择，均有 $i(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')\ =0$ 。因此，我们只写作 $i(x,y)\ =0$。

讨论有限性性质时，这一约定尤其重要：本文所考察的大多数量是否有限，并不取决于代表元的选择。例如，当我们写出

$$\sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(x,c)}{i(y,c)} < \infty,$$

我们的意思是，无论选择何种 $\boldsymbol{x}\in[x]$、 $\boldsymbol{y}\in[y]$和 $\boldsymbol{c}\in[c]$，上确界都是有限的。需要注意的是，有限性与代表元的选择无关，但上确界的实际数值可能会随所选代表元而变化。

6.1. **有限绕行代价的必要条件**。

引理 6.3. 设 ξ 和 η 为非填充测地流，且令 $b\in\mathcal{T}$。绕行代价 $H(\xi,\eta)$ 有限，当且仅当存在某条曲线 $\boldsymbol{\gamma}(t):\ \mathbb{R}_+ \to \mathcal{C}_{fill}$ ，它收敛到 ξ 在 $\mathcal{C}$ 中的一个代表元，并且满足

$$\liminf_{t\to\infty} \sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\eta,c)}{i(\boldsymbol{\gamma}(t),c)} < \infty.$$

证明。 注意，公式（25）中出现的$\underline{\text{量 sup}}_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}}^{\,i(\boldsymbol{\eta},c)}\, i(\boldsymbol{b},c)$，无论选择 b 的代表元 $\boldsymbol{b}$ 和 η 的代表元 $\boldsymbol{\eta}$ ，都是有限的。这是因为上确界是在紧集上取的，且分母有正的下界。

类似地，对于任意 $t\in\mathbb{R}_+$ 以及任意 $\boldsymbol{\gamma}(t)$：收敛到 ξ 的代表元 $\boldsymbol{\xi}$ 的 $\mathbb{R}_+ \to \mathcal{C}_{fill}$ ，上确界 $\underline{\sup}_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}}^{\,i(\boldsymbol{\gamma}(t),\,c)}\, i(b,\ c)$ 总能取到。也就是说，存在某些 $c_t\in\mathbb{P}\mathcal{C}$，使得

$$\sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\boldsymbol{\gamma}(t),c)}{i(\boldsymbol{b},c)} = \frac{i(\boldsymbol{\gamma}(t),c_t)}{i(\boldsymbol{b},c_t)}.$$

我们可以找到一个包含在 $\{c_t \mid t\in\mathbb{R}_+\}$ 中并收敛到射影流κ的点列 $\{c_n\}$。这表明

$$\liminf_{n\to\infty} \sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\boldsymbol{\gamma}(n),c)}{i(\boldsymbol{b},c)} \le \lim_{n\to\infty} \frac{i(\boldsymbol{\gamma}(n),c_n)}{i(\boldsymbol{b},c_n)} = \frac{i(\boldsymbol{\xi},\kappa)}{i(\boldsymbol{b},\kappa)} < \infty.$$

注意，上述两个上确界值的有限性不取决于代表元 $\boldsymbol{\xi}$、$\boldsymbol{\gamma}$（t）和 $\boldsymbol{b}$的选择。因此，根据公式（25），H（ξ，η）有限，当且仅当存在某条曲线 $\boldsymbol{\gamma}$（t）：$\mathbb{R}_+ \to \mathcal{C}_{fill}$ 收敛到 ξ 在 $\mathcal{C}$ 中的一个代表元，并且

$$\liminf_{t\to\infty} \sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\boldsymbol{\eta},c)}{i(\boldsymbol{\gamma}(t),c)} < \infty.$$

该上确界的有限性确实取决于曲线 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 在各自射影类中的选择。我们将其写为

$$\liminf_{t\to\infty} \sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\eta, c)}{i(\boldsymbol{\gamma}(t), c)} < \infty.$$

□

引理 6.4. 设 ξ 和 η 是非填充测地流，且 $b \in \mathcal{T}$。绕行代价 $H(\xi, \eta)$ 有限，当且仅当

$$\sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\eta, c)}{i(\xi, c)} \textit{ is bounded above.}$$

证明。设 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 分别是流空间中 ξ 和 η 的代表元。假设 $H(\xi, \eta)$ 有限。则由定理 6.3，存在一条路径 $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{C}_{\text{fill}}$ 收敛到 $\boldsymbol{\xi}$，使得

$$\liminf_{t\to\infty} \sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\boldsymbol{\eta}, c)}{i(\boldsymbol{\gamma}(t), c)} < \infty.$$

由于对每个 $t \in \mathbb{R}_+$，$\boldsymbol{\gamma}(t)$ 都是填充的，因此对每个 t，上确界都能取到。也就是说，对任意 $t \in \mathbb{R}_+$，上确界在 $\boldsymbol{c}_t \in \mathcal{C}$ 处取到

$$\frac{i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{c})} \leq \frac{i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{c}_t)}{i(\boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{c}_t)} \quad \text{for all } \boldsymbol{c} \in \mathcal{C}. \tag{26}$$

由于下极限有限，我们可以找到一个序列 $\{t_n\} \to \infty$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{c}_{t_n})}{i(\boldsymbol{\gamma}(t_n), \boldsymbol{c}_{t_n})} \leq L$$

对某个正的常数 L。由于 $\mathbb{P}\mathcal{C}$ 是紧的，我们可以找到 $\{\boldsymbol{c}_{t_n}\}$ 的一个子序列 $\{\boldsymbol{c}_m\}$，它射影收敛到某个 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{C}$。也就是说，存在一个由正标量组成的序列 k_n，使得

$$\lim_{n\to\infty} k_n \boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{\lambda}.$$

由交形式的连续性以及 $\boldsymbol{\gamma}(t_n) \to \boldsymbol{\xi}$ 的收敛性，我们得到

$$\frac{i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{c})} \leq \frac{i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda})}{i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda})} \leq L \text{ for all } \boldsymbol{c} \in \mathcal{C}.$$

因此，

$$\sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{c})}{i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{c})} \leq L.$$

由于代表元 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 的选择是任意的，我们有：

$$\sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\eta, \boldsymbol{c})}{i(\xi, \boldsymbol{c})} < \infty.$$

现在，为证明逆命题，我们假设上确界被某个常数 L从上方所界定，因此，对于任意 $\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}$，我们有

$$i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{c}) \leq L\, i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{c}). \tag{27}$$

设 $\boldsymbol{\mu}$ 为一个填充流。我们定义一条路径 $\boldsymbol{\gamma}(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{C}_{fill}$，如下：

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{t}\boldsymbol{\mu}.$$

注意，当 $t \to \infty$ 时，$\boldsymbol{\gamma}(t)$ 趋近于 $\boldsymbol{\xi}$。每个 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 都是填充流，因此上确界

$$\sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\boldsymbol{\eta}, c)}{i(\boldsymbol{\gamma}(t), c)}$$

是有限且可取到的。设 c_t 是在 t 处达到上确界的射影流。由等式可得 (27)

$$\sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\boldsymbol{\eta},c)}{i(\boldsymbol{\gamma}(t),c)} = \frac{i(\boldsymbol{\eta},c_t)}{i(\boldsymbol{\gamma}(t),c_t)} = \frac{i(\boldsymbol{\eta},c_t)}{i(\boldsymbol{\xi},c_t)+\frac{1}{t}i(\boldsymbol{\mu},c_t)} \le \frac{L\cdot i(\boldsymbol{\xi},c_t)}{i(\boldsymbol{\xi},c_t)+\frac{1}{t}i(\boldsymbol{\mu},c_t)} \le \frac{L}{1+\frac{1}{t}\cdot\frac{i(\boldsymbol{\mu},c_t)}{i(\boldsymbol{\xi},c_t)}}.$$

由于分子 有上界，且对于所有 t，分母都大于 1，因此可得 t

$$\liminf_{t\to\infty} \sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\boldsymbol{\eta},c)}{i(\boldsymbol{\gamma}(t),c)} < \infty.$$

证明不依赖于代表元 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$的选择，并且由定理 6.3 可得$H(\xi,\eta) < \infty$。□

引理 6.5。 设 ξ 和 η 是两个非填充射影流。若绕行代价 $H(\xi,\eta)$ 有限，则对于所有 $x\in\mathbb{P}\mathcal{C}$, $i(\xi,x) = 0$ 均蕴含 $i(\eta,x) = 0$。

证明。 假设存在某个 $x\in\mathbb{P}\mathcal{C}$，使得 $i(\xi,x) = 0$，但 $i(\eta,x) \neq 0$。那么，对于任意路径$\boldsymbol{\gamma}(t)$：$\mathbb{R}_+ \to \mathcal{C}_{fill}$ 收敛于 ξ的一个代表元 $\boldsymbol{\xi}$，我们有

$$\lim_{t\to\infty} i(\boldsymbol{\gamma}(t),x) = 0.$$

因此,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{i(\eta,x)}{i(\boldsymbol{\gamma}(t),x)} = \infty.$$

注意,

$$\frac{i(\eta,x)}{i(\boldsymbol{\gamma}(t),x)} \le \sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\eta,c)}{i(\boldsymbol{\gamma}(t),c)} \text{ for all t,}$$

因此

$$\lim_{t\to\infty} \frac{i(\eta,x)}{i(\boldsymbol{\gamma}(t),x)} \le \liminf_{t\to\infty} \sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\eta,c)}{i(\boldsymbol{\gamma}(t),c)}.$$

由定理 6.3 可知， $H(\xi,\ \eta) = \infty$。 □

命题 6.6。 如果两个非填充的射影流 ξ 和 η 的对称化绕行代价 $\delta(\xi,\eta)$ 有限，那么对于流空间中 η 的任意代表元 $\boldsymbol{\eta}$ 和 ξ 的任意代表元 $\boldsymbol{\xi}$，以下两个条件成立：

(1) 填充分量 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 填充同一个子曲面 S' S；且 *(2)* $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 的测度层状结构分量具有相同的支撑。

证明。 由定理 6.5 可知，若 $\delta(\xi,\eta) = H(\xi,\eta)+H(\eta,\xi)$ 有限，则必须满足以下条件：

$$i(\eta,c) = 0 \Longleftrightarrow i(\xi,c) = 0 \text{ for any geodesic current } c. \tag{28}$$

任意两个满足式（28）的射影流 η 和 ξ，由式（14）定义的集合 $\mathcal{E}_\eta$ 和 $\mathcal{E}_\xi$ 相同。因此， η 和 ξ 都将 S 分解为相同的一组子曲面 $\{S_i\}_{i=1}^n$。现在，若存在一个由 η 填充而未被 ξ填充的子曲面 S_i，那么我们可以找到一个与 η 和 ξ 中恰好一个相交的测地流 c，这与式（28）矛盾。令 S' 为所有同时被 η 和 ξ填充的 S_i 的并集。填充分量 ξ 和 η 填充了 S的同一个子曲面 S'。

为证明 ξ 和 η 的测度叶层分量具有相同的支撑，我们在流空间中分别选取 ξ 的代表元 $\boldsymbol{\xi}$ 和 η 的代表元 $\boldsymbol{\eta}$。令 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_{S'} + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\eta}}$ 和 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_{S'} + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\xi}}$ 表示这些流的分解（依照式（15））。层状分量 $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\xi}}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\eta}}$必须支撑在 S的相同子曲面 S_i 上。否则，我们就能找到一条与一个层状结构相交、却不与另一个相交的闭测地线，这与式（28）矛盾。现在，若 $\boldsymbol{\eta}$ 填充一个子曲面 S_i,

那么根据分解可知，它与 S_i内部的每条曲线都相交。若 $\boldsymbol{\lambda_\eta}$ 和$\boldsymbol{\lambda_\xi}$ 的支撑不同，就会有 $i(\boldsymbol{\lambda_\eta},\ \boldsymbol{\lambda_\xi}) \neq 0$, 从而导致

$$i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda_\eta}) = i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, \boldsymbol{\lambda_\eta}) + i(\boldsymbol{\lambda_\eta}, \boldsymbol{\lambda_\eta}) = 0,$$

and

$$i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda_\eta}) = i(\boldsymbol{\xi}_{S'}, \boldsymbol{\lambda_\eta}) + i(\boldsymbol{\lambda_\xi}, \boldsymbol{\lambda_\eta}) \neq 0,$$

这再次与式（28）矛盾。 □

7. 射影极小测度层状结构的刻画

本节使用对称化绕行代价 δ刻画极小射影测度叶层。具体而言，我们证明，非填充射影流 η 是极小测度层状结构，当且仅当与 η的 δ距离有限的非填充射影流只有 η 自身。也就是说， η 是极小射影测度层状结构，当且仅当任意满足下述条件的非填充射影流 ξ

$$\delta(\eta, \xi) < \infty$$

必须等于 η。

简单闭曲线是极小测度层状结构的一种特殊情形。当 η 是简单闭曲线时，由定理 6.6 可知，任何满足 $\delta(\xi,\ \eta) < \infty$的非填充射影流 ξ 都必须与 η射影等价。在定理 7.2 中，我们将这一结果推广到任意极小射影测度层状结构。本节余下部分将证明，不存在其他满足这一刚性性质的非填充射影流。

在定理 7.4 中，我们考虑一个非极小射影测度层状结构 η，并给出另一个与其相距有限 δ的射影测度层状结构的明确例子。定理 7.7 对具有填充分量的非填充射影流建立了类似的结果。特别地，我们证明，如果一个非填充射影流 η 填充一个子曲面 $S' \subset S$，且 b 是 S'的一条边界曲线，那么 $\delta(\eta,\ \eta + b) < \infty$。定理 7.3 将定义在非填充射影流上的绕行代价 $H(\xi,\ \eta)$ 与 $H_{Th}(\xi,\ \eta)$ 进行比较，后者在 [Wal14a] 中仅定义于射影测度层状结构上。我们在定理 7.4 的证明中使用这一点。定理 7.8 直接由这些引理推出。

以下定义来自 [Wal14a]。

定义 7.1。 设 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 为测度层状结构，并假设

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\xi}_i$$

是分解 为 $\boldsymbol{\xi}$ 的极小分支 $\boldsymbol{\xi}_i$。如果 $\boldsymbol{\eta}$ 可以表示为 a，我们记作 $\boldsymbol{\eta} \ll \boldsymbol{\xi}$ s

$$\boldsymbol{\eta} = \sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{\xi}_i,$$

其中每个 k_i 都是非负实数。

引理 7.2。 设 η 是一个极小测度层状结构。若非填充的射影流 ξ 满足$\delta(\xi,\ \eta) < \infty$，则 $\xi = \eta$。

证明。 假设 ξ 是满足 $\delta(\xi,\ \eta) < \infty$ 的非填充射影流。由定理 6.6 可知， ξ 的分解不可能包含任何填充分量。因此， ξ 必须是射影测度层状。

令 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 分别为表示射影类 η 和 ξ 的测度层状结构。反设 $\eta \neq \xi$。由于 $\boldsymbol{\eta}$ 是极小的，且 $\boldsymbol{\xi}$ 不与 $\boldsymbol{\eta}$ 射影等价，因此可得

$$\boldsymbol{\xi} \not\ll \boldsymbol{\eta}.$$

根据 [Wal14a，引理 6.4], ，这意味着以下上确界为无穷大:

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{P}\mathcal{ML}} \frac{i(\boldsymbol{\xi}, \lambda)}{i(\boldsymbol{\eta}, \lambda)} = \infty.$$

然而，由于 $\mathbb{P}\mathcal{ML} \subset \mathbb{PC}$，我们也有

$$\sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{\xi}, c)}{i(\boldsymbol{\eta}, c)} \geq \sup_{\lambda \in \mathbb{P}\mathcal{ML}} \frac{i(\boldsymbol{\xi}, \lambda)}{i(\boldsymbol{\eta}, \lambda)}$$

这意味着在射影流上取比值的上确界为无穷大，因此由定理 6.4 可得

$$H(\xi, \eta) = \infty$$

但这与我们的假设 $\delta(\eta, \xi) < \infty$ 矛盾 □

引理 7.3。 对于任意两个射影测度层状结构 ξ, η, 相对于 *Teichmüller* 空间 $(\mathcal{T}(S)\ d_{Th})$ 上的瑟斯顿度量，绕行代价 $H_{Th}(\xi, \eta)$ 大于或等于相对于 $(\mathbb{PC}_{fill}, d)$ 的绕行代价 $H(\xi, \eta)$，即

$$H(\xi, \eta) \leq H_{Th}(\xi, \eta)$$

证明。 根据命题 2.5，我们知道，射影填充流上的扩展 Thurston 度量与 Teichmüller 空间上的经典Thurston度量一致。也就是说，对于所有 x, $y \in \mathcal{T}(S)$, $d_{Th}(x, y) = d(x, y)$。引理中所述的不等式由这一事实以及式（6）中给出的绕行代价定义立即得到。由于 $H(\xi, \boldsymbol{\eta})$ 被定义为在更大的路径集合 $\gamma(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{PC}_{fill}$ 收敛到 ξ, $H(\xi, \eta) \leq H_{Th}(\xi, \eta)$ 上取下确界，

为了更精确地说明这一点，考虑

$$H_{Th}(\xi, \eta) = \inf_{\gamma \in \mathcal{T}} \liminf_{t \to \infty} \left(d_{Th}(b, \gamma(t)) + \eta(\gamma(t)) \right).$$

这里，我们有 $b \in \mathcal{T}(S)$，下确界取遍所有满足 $\gamma(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{T}$ 收敛到 ξ 的路径。我们选取的基点位于视函数边界的定义中的 $\mathcal{T}(S)$ 内。因此，由于对于每个 t 都有 $\gamma(t) \in \mathcal{T}(S)$, $\eta(\gamma(t))$ 的值无论将其视为 $(\mathcal{T}(S)\ d_{Th})$ 的视函数边界中的点，还是 $\mathbb{PC}_{fill}$, d 的视函数边界中的点，都是相同的。因此，我们有

$$\begin{aligned} H_{Th}(\xi, \eta) &= \inf_{\gamma \in \mathcal{T}} \liminf_{t \to \infty} \left(d(b, \gamma(t)) + \eta(\gamma(t)) \right) \\ &\geq \inf_{\gamma \in \mathbb{PC}_{fill}} \liminf_{t \to \infty} \left(d(b, \gamma(t)) + \eta(\gamma(t)) \right) \\ &= H(\xi, \eta) \end{aligned}$$

由于第二个等式中的下确界是在更大的路径集合 $\gamma(t)$: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{PC}_{fill}$ 上取的，因此它更小。□

引理 7.4。 设 $\boldsymbol{\eta}$ 是一个可分解为有限个非零极小层理之和的测度层状结构:

$$\boldsymbol{\eta} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\eta}_i.$$

对于任意一组正实数 $k_i > 0$，考虑测度层状结构

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{\eta}_i.$$

那么，射影类 $\eta = [\boldsymbol{\eta}]$ 和 $\xi = [\boldsymbol{\xi}]$ 满足 $\delta(\xi,\ \eta) < \infty$。

证明。射影测度层状结构 η 和 ξ 满足 $\eta \ll \xi$ 和 $\xi \ll \eta$。根据 [Wal14a]，我们知道

$$H_{Th}(\xi, \eta) < \infty \text{ and } H_{Th}(\eta, \xi) < \infty,$$

因此，由定理 7.3 可得

$$H(\xi, \eta) < \infty \text{ and } H(\eta, \xi) < \infty.$$

因此，$\delta(\xi,\ \eta) < \infty$ 从而证明了我们的引理。 □

引理 7.5。设 $\boldsymbol{\eta}_{S'}$ 是一个充满连通子曲面 S' 的测地流，其中 b是一条构成 S'的一个边界分支的简单闭曲线。设 $\boldsymbol{b}$表示该简单闭曲线 b所对应的测地流。那么

$$\sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{b}, c)}{i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, c)} \leq \frac{4}{\mathrm{Syst}_{S'}(\boldsymbol{\eta}_{S'})}$$

其中 $\mathrm{Syst}_{S'}(\boldsymbol{\eta}_{S'})$ 定义见定理 *2.6*。

证明。设 a 是 S 上的一条与 b交数非零的闭曲线，并令 $\boldsymbol{a}$ 为其在流空间中的代表元。我们有，

$$i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \neq 0$$

在本证明中，我们证明任意这样的 $\boldsymbol{a}$都满足不等式

$$i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, \boldsymbol{a}) \geq \frac{i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}{4} \cdot \mathrm{Syst}_{S'}(\boldsymbol{\eta}_{S'}).$$

$\mathcal{E}_{\boldsymbol{\eta}_{S'}}$: $=$ $\begin{cases} c \text{ 是 } S \text{ 中的一条闭测地线：对每个满足 } i(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c'}) \neq 0 \text{ 的闭曲线 } \boldsymbol{c'},\ i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, \boldsymbol{c}) = 0 \text{ 以及} i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, \boldsymbol{c'}) \neq 0 \end{cases}$ ：

由于 b 是 b 的边界曲线，它包含于 $\mathcal{E}_{\eta_{S'}}$中。我们在此回顾 $\mathcal{E}_{\eta_{S'}}$ 的定义

因此，我们有 $i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, \boldsymbol{a}) \neq 0$。在覆盖变换群中选取 a 的一个代表元。这给出了 a 在 $\mathbb{H}^2$上的作用。令 x 和 y 分别表示 a 在 $\mathbb{H}^2$上的作用的不动点，并令 L为 $\mathbb{H}^2$ 中作为该作用的轴的测地线（见图4）。选取一点 $q \in L$，使得 q 位于对应于 $S \setminus S'$的覆盖的一个基本域内。也就是说，$\pi(q) \notin S'$。元素 a 通过沿 a平移作用于 L。令$(q, a \cdot q]$ 表示沿 L 从 q到 $a \cdot q$ 的定向弧，包括aq，不包括 q。令 $G_{(q,c\cdot q]}$ 为所有与弧$(q, a \cdot q]$相交的测地线所成的集合。根据 [MZ19，引理4.4]，我们知道

$$i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{(q,a\cdot q]}). \tag{29}$$

令 $\alpha : [0, 1] \to S$ 为同伦类 a中的一条闭曲线，它是将弧$[q, a \cdot q]$ 投影到曲面 S上得到的。我们选取 $\alpha(0) = \alpha(1)$作为 q 的像，并赋予 α 由该弧诱导的定向。

令 $\{\alpha(t_1)\ \alpha(t_2) \ldots, \alpha(t_n)\}$ 为 α 与 S'的任意 边界曲线相交的所有点，并按 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 排序。由于 S' 的边界分支将 S' 与曲面的其余部分隔开，交点总数 n为偶数。注意

$$i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \leq n. \tag{30}$$

这是因为有些交点 $\alpha(t_i)$可能位于 S'的某个边界分支 $\boldsymbol{b'}$ 上，而该边界分支不同于 $\boldsymbol{b}$。

考虑弧 $\alpha : (t_1,\ t_2] \to S$ 其完全位于子曲面 S' 内。令 α_{12} 为该弧在 $\mathbb{H}^2$ 上的提升，使得 $\alpha_{12} \subset (q,\ a \cdot q]$。根据我们的构造，下一个子弧 $\alpha : (t_2,\ t_3] \to S$位于

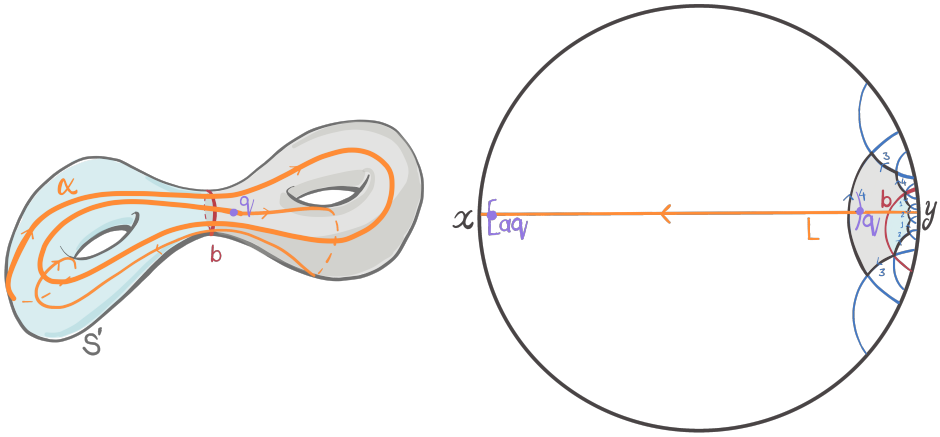

图4。一个例子，其中 S 是亏格二曲面，而由 $\boldsymbol{\eta}_{S'}$ 填充的子曲面 S' 是单孔环面。图中展示了 S 和 S' 的基本域、边界曲线 b 的一个提升、点 q、弧 $(q,\ aq]$，以及投影闭曲线 α。

S'之外。由于流 $\boldsymbol{\eta}_{S'}$ 仅支撑于 S' 上，任何与子弧 α_{23} 相交的测地线都不会对 $\boldsymbol{\eta}_{S'}$ 作出贡献。因此，

$$\boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{\alpha_{23}}) = 0. \tag{31}$$

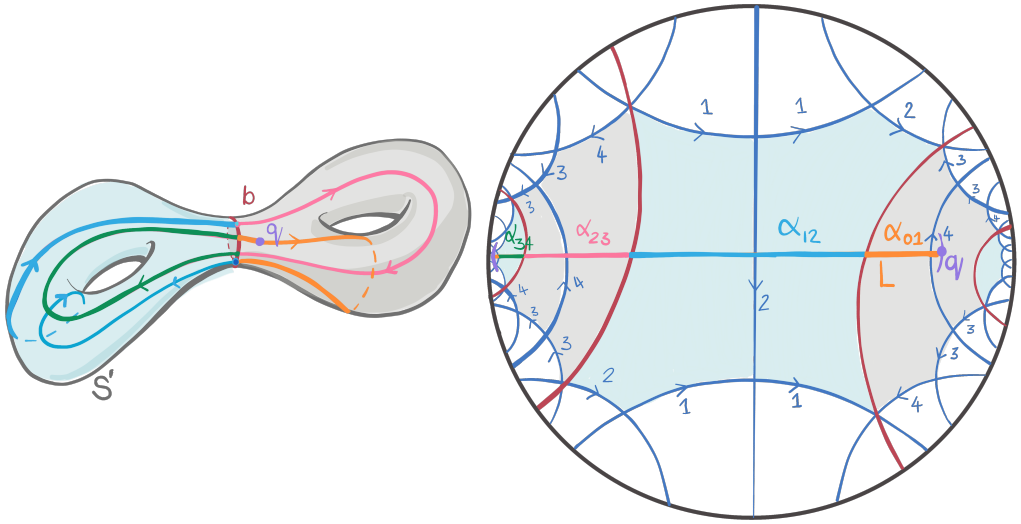

图5。子弧 $\alpha_{(j-1)j}$ 及其在曲面 S 上的投影，针对与图3相同的例子进行考察。

通过类似的构造，我们得到一组子弧，将 $(q,\ a\cdot q]$ 划分为若干部分

$$\{\alpha_{01}, \alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}, \ldots, \alpha_{(n-1)n}, \alpha_{n0}\}.$$

对于任意整数 $1 \leq i \leq n-1$，弧 $\alpha_{i(i+1)}$ 在曲面 S 上的投影是弧 $\alpha\colon (t_i,\ t_{i+1}] \to S$。$\alpha_{01}$ 的投影是弧 $\alpha\colon (0,\ t_1] \to S$，而 α_{n0} 的投影是弧 $\alpha\colon (t_n,\ 1] \to S$。

注意，$\alpha\colon (t_i,\ t_{i+1}] \to S$。当 i 为偶数时，S' 位于外部。因此，

$$\boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{\alpha_{i(i+1)}}) = 0 \text{ when } i \text{ is even.} \tag{32}$$

我们还有，

$$(q, a \cdot q] = \bigcup_{i=0}^{n-1} \alpha_{i(i+1)}.$$

这意味着，

$$i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, a) = \boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{\alpha_{12}}) + \boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{\alpha_{34}}) + \cdots + \boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{\alpha_{(n-1)n}}). \tag{33}$$

在 证明的后半部分，我们将证明每条满足 j 为偶数的弧$\alpha_{(j-1)j}$ s

$$\mathrm{Syst}_{S'}(\boldsymbol{\eta}_{S'}) \leq 2\boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{\alpha_{(j-1)j}}), \quad \text{for } 2 \leq j \leq n, \text{ with } j \text{ even.} \tag{34}$$

假设等式 (34) 成立，证明的其余部分如下：

$$\frac{n}{2}\left(\frac{\mathrm{Syst}_{S'}(\boldsymbol{\eta}_{S'})}{2}\right) \leq \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ even}}}^{n} \boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{(\alpha_{(j-1)j}}) = i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, \boldsymbol{a}).$$

因此，对于任意曲线 $\boldsymbol{a}$，只要 $i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \neq 0$，就有

$$\frac{i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}{i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, \boldsymbol{a})} \leq \frac{n}{i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, \boldsymbol{a})} \leq \frac{4n}{n\mathrm{Syst}_{S'}(\boldsymbol{\eta}_{S'})} = \frac{4}{\mathrm{Syst}_{S'}(\boldsymbol{\eta}_{S'})}.$$

由于闭曲线在射影流中稠密，因此可得

$$\sup_{c \in \mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(\boldsymbol{b}, c)}{i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, c)} = \sup_{c \in \mathrm{cc}} \frac{i(\boldsymbol{b}, c)}{i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, c)} \leq \frac{4}{\mathrm{Syst}_{S'}(\boldsymbol{\eta}_{S'})}.$$

最后，我们证明短 systole 是 $\eta_{S'}$ 与弧 $\alpha_{(j-1)j}$ 的交数的下界。我们断言

$$\mathrm{Syst}_{S'}(\boldsymbol{\eta}_{S'}) \leq 2\boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{\alpha_{(j-1)j}}).$$

对于每条弧 $\alpha(t_{(j-1)}, t_j]$，在 S' 上，我们构造一条闭曲线 $\gamma_{(j-1)j}$，使得 $\gamma_{(j-1)j}$ 位于 S' 的内部且满足

$$i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, \boldsymbol{\gamma}_{(j-i)j}) \leq 2\boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{\alpha_{(j-1)j}}).$$

为构造这条曲线，我们考虑以下两种情况：

情形I。 $\alpha(t_{j-1})$ 和 $\alpha(t_j)$ 位于 S' 的同一条边界曲线 $\boldsymbol{b}'$ 上。

请注意，$\boldsymbol{b}' \in \mathcal{E}_{\eta_{S'}}$ 和 $\boldsymbol{b}'$ 不一定与 $\boldsymbol{b}$ 相同。

弧 $\alpha(t_{j-1},\ t_j]$ 在 S' 中是本质的；也就是说，它不同伦于一条完全包含在 $\partial S'$ 中且端点相同的弧。这是因为 $\alpha(t)$ 是一个实现与 $\eta_{S'}$ 的最小交数的测地代表。我们定义 $\gamma_{(j-1)j}\colon [0,1] \to S'$ 为一条闭曲线：沿弧 $\alpha[t_{j-1}, t_j)$ 前进，再与图 6 所示的弧 β_1、β_2 或 β_2 之一连接而成。由于 $\alpha[t_{j-1}, t_j)$ 是本质的，我们总能从 β_1、β_2 或 β_3 中选出一条，使所得的连接不同伦于一点或 S' 的一个边界分支。我们选择该 β_i 来闭合曲线 γ_{ij}。

情形 II. $\alpha(t_{j-1})$ 和 $\alpha(t_j)$ 位于 S' 的不同边界曲线 $\boldsymbol{b}'$ 和 $\boldsymbol{b}''$ 上。

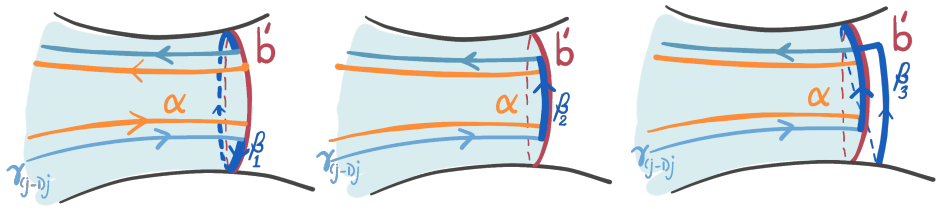

图6. 可用于构造情形I中的闭曲线的子弧 β_1， β_2 和 β_3

.

假设 $\alpha(t_{j-1})$ 位于边界分支 b' 上，而 $\alpha(t_j)$ 位于另一个边界分支b'' 上。在这种情况下，我们将按以下步骤构造闭曲线 $\gamma_{(j-1)j}$：

(1) 沿着 S'上的弧（α（t_{j-1}） α（t_j）］）前进。这将得到一条从 b' 开始、在 b''结束的弧。(2) 沿着边界曲线 b'' 前进，直到它再次与上一步构造的弧相交。(3) 反向沿着弧（α（t_{j-1}） α（t_j）］）前进。这将得到一条从 b'' 到 b' 的弧（见图7）。(4) 与图7中给出的弧 β_1或 β_2 中的一条连接，使所得闭曲线既不同伦于一个点，也不同伦于 S'的某个边界分支。出于与情形I中所讨论的类似原因，我们总能找到这样一条 β_i。

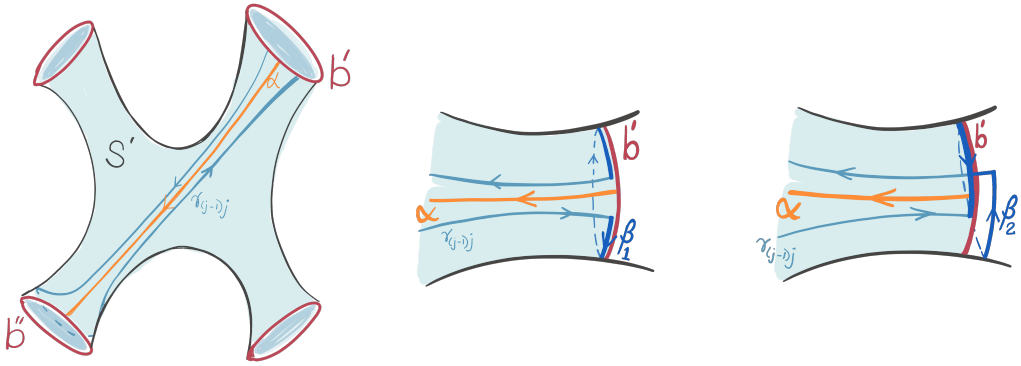

图 7。 S' 是四孔球面的一个示例。该图展示了弧$\gamma_{(j-1)j}$ 的构造过程；随后将右侧所示的弧 β_1或 β_2 之一连接上去，即可完成构造。在此具体示例中，用于完成构造的弧是 β_2。

对于在情形I中构造的闭曲线$\gamma_{(j-1)j}$ ，我们考虑其到 $\mathbb{H}^2$ 的提升，该提升沿着测地线$\alpha_{(j-1)j}$行进。这条在 $\mathbb{H}^2$ 中的提升曲线首先沿着$\alpha_{(j-1)j}$行进，然后继续沿着

$\tilde{}$用于完成$\gamma_{(j-1)j}$构造的子弧 β_i 的提升。我们将 β_i 的这一提升记作 $\beta_{i\circ}$ 将$\gamma_{(j-1)j}$ 提升到 $\mathbb{H}^2$ 后，完整的提升从 $\mathbb{H}^2$ 边界上的一点行进到另一点，并沿着 α的不同提升重复这一模式（$t_{j-i},\ t_j]$ 以及 β_i [MZ19，引理4.4]。

$\gamma_{(j-1)j}$ 的提升与其测地线代表在无穷远处具有相同的端点。由测地流的 π_1-不变性，可以得出：

$$i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, \boldsymbol{\gamma}_{(j-1)j}) \leq \boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{\alpha_{(j-1)j}}) + \boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{\tilde{\beta}_i}). \tag{35}$$

对于在情形 II 中构造的闭曲线 $\boldsymbol{\gamma}_{(j-1)j}$ ，也可以进行类似的论证，从而得到：

$$i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, \boldsymbol{\gamma}_{(j-1)j}) \leq 2\boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{\alpha_{(j-1)j}}) + i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, \boldsymbol{b''}) + \boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{\tilde{\beta}_i}). \tag{36}$$

注意，弧 β_i 的提升沿着边界曲线 $\boldsymbol{b'}$的提升。由于 $i(\boldsymbol{\eta}_{S'},\ \boldsymbol{b'}) = 0$ 我们有

$$\boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{\tilde{\beta}_i}) = 0. \tag{37}$$

由式 (35)、式 (36) 和式 (37) 可知，无论考虑情形 I 还是情形 II，我们总能得到

$$i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, \boldsymbol{\gamma}_{(j-1)j}) \leq 2\boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{\alpha_{(j-1)j}})$$

因此，

$$\mathrm{Syst}_{S'}(\boldsymbol{\eta}_{S'}) \leq 2\boldsymbol{\eta}_{S'}(G_{\alpha_{(j-1)j}}).$$

这就完成了该断言的证明，从而也完成了引理的证明。 □

引理 7.6。 设 $\eta_{S'}$ 是填充连通子曲面 $S' \subset S$ 的非填充射影流。设 b 是 $\mathcal{E}_{\eta_{S'}}$ 中的一条简单闭曲线，它构成 S' 的一个边界分支。那么

$$H(\eta_{S'}, b) < \infty.$$

证明。 根据定理 6.4，要证明 $H(\eta_{S'},\ b) < \infty$ ，只需证明

$$\sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(b,c)}{i(\eta_{S'}, c)} < \infty. \tag{38}$$

设 $\boldsymbol{b}$ 是与闭曲线 b 对应的测地流，并设 $\boldsymbol{\eta}_{S'}$ 是射影类 $\eta_{S'}$ 中的一个测地流。为测地流 $\boldsymbol{b}$ 赋予正权重 $k > 0$。根据定理 7.5，有

$$\sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(k\boldsymbol{b}, c)}{i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, c)} = k \left(\sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{b}, c)}{i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, c)} \right) \leq \frac{4k}{\mathrm{Syst}_{S'}(\boldsymbol{\eta}_{S'})}. \tag{39}$$

由于 $\boldsymbol{\eta}_{S'}$ 填充 S'，$\mathrm{Syst}_{S'}(\boldsymbol{\eta}_{S'}) > 0$。因此，公式 (39) 中的量是有限的。由于公式 (39) 不依赖于代表元 $\boldsymbol{\eta}_{S'}$ 或权重 k 的选择，我们得到公式 (38)，这就证明了该引理。□

引理 7.7。 设 $\eta_{S'}$ 是填充子曲面 $S' \subset S$ 的非填充测地流。设 b 是 S' 的一个边界分支，且为简单闭曲线。那么 $\delta(\eta_{S'}, \eta_{S'} + b) < \infty$。

证明。 首先，注意到

$$\sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\eta_{S'}, c)}{i(\eta_{S'} + b, c)} \leq 1.$$

因此，由定理 6.4，我们有 $H(\eta_{S'} + b,\ \eta_{S'}) < \infty$。为了证明 $H(\eta_{S'} + b,\ \eta_{S'})$ 的有限性，我们考虑

$$\sup_{c \in \mathbb{PC}} \frac{i(\eta_{S'} + b, c)}{i(\eta_{S'}, c)} = \sup_{c \in \mathbb{PC}} 1 + \frac{i(b,c)}{i(\eta_{S'}, c)}.$$

由定理 7.6，我们知道 $\sup_{c\in\mathbb{PC}} \overset{i}{i}(b,\ c)\ (\eta_{S'},\ c)$ 是有限的。这证明了上述上确界是有限的，因此 $\delta(\eta_{S'},\ \xi) < \infty$。 □

命题 7.8. 非填充射影流 η 是极小测度层状结构，当且仅当每个满足 $\delta(\eta,\xi) < \infty$ 的非填充射影流 ξ 都满足 $\xi = \eta$。

证明。 如果 η 是极小测度层状结构，那么由定理 6.6 和定理 7.2 可知，与 η 的距离有限的唯一射影非填充流是 η 本身。

设 η 有一个非平凡的填充分量 $\eta_{S'}$，它填充 S的一个子曲面 S'。注意， S'不必是连通的。令 $b \in \mathcal{E}_{\eta_{S'}}$。这里， b 是 S'的某个连通分量的一条边界曲线。我们证明 $\delta(\eta + b, \eta)$ 是有限的。令 $\boldsymbol{\eta}$ 为 η 在流空间中的一个代表元。我们有

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_{S'} + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\eta}}.$$

注意，由于分母始终大于分子，以下上确界始终小于一

$$\sup_{c\in\mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{\eta}, c)}{i(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{b}, c)}$$

根据定理 6.4，可知 $H(\eta + b,\ \eta) < \infty$。现在，

$$\sup_{c\in\mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{b}, c)}{i(\boldsymbol{\eta}, c)} = \sup_{c\in\mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{\eta}_{S'} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\eta}}, c)}{i(\boldsymbol{\eta}_{S'} + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\eta}}, c)} \leq \sup_{c\in\mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{\eta}_{S'} + \boldsymbol{b}, c)}{i(\boldsymbol{\eta}_{S'} + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\eta}}, c)} + \sup_{c\in\mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\eta}}, c)}{i(\boldsymbol{\eta}_{S'} + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\eta}}, c)}.$$

由定理 7.6 可知，上述方程中的第一项是有限的 e

$$\sup_{c\in\mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{\eta}_{S'} + \boldsymbol{b}, c)}{i(\boldsymbol{\eta}_{S'} + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\eta}}, c)} \leq \sup_{c\in\mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{\eta}_{S'} + \boldsymbol{b}, c)}{i(\boldsymbol{\eta}_{S'}, c)} < \infty.$$

对于第二项，我们得到

$$\sup_{c\in\mathbb{PC}} \frac{i(\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\eta}}, c)}{i(\boldsymbol{\eta}_{S'} + \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{\eta}}, c)} \leq 1.$$

同样，根据定理 6.4，我们有 $H(\eta,\ \eta + b) < \infty$。因此，没有任何具有填充分量的射影流能够满足命题中的条件。现在，设 η 是一个非极小射影测度层状结构。也就是说，我们可以将 η 的一个代表元 $\boldsymbol{\eta}$ 写成

$$\boldsymbol{\eta} = \sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{\eta}_i$$

其中每个 k_i 都是正实数， $\boldsymbol{\eta}_i$ 是极小测度层状结构，并且 n 至少为 2。于是，根据定理 7.4，将 $\boldsymbol{\xi}$ 定义为如下形式的射影类 ξ

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^{n} k_i' \boldsymbol{\eta}_i, \text{ with } k_i' > 0 \text{ and } k_i \neq k_i.$$

满足 $\delta(\eta,\xi) < \infty$。至此，命题的证明完成。 □

8. 等距刚性

设 S_g 和 $S_{g'}$ 分别是亏格为 g 和 g'的闭、可定向光滑曲面。不失一般性，假设 $g' \leq g$。若 $f : (\mathbb{PC}_{fill}(S_g),\ d) \to (\mathbb{PC}_{fill}(S_{g'}),\ d)$ 是一个等距映射，则如第 2.1.2 节所述， f 诱导出相应 horo边界之间的一个同胚 $f^*\colon\ \mathbb{PC}_{S_g}(\infty) \to \mathbb{PC}_{S_{g'}}(\infty)$。

在本节中，我们证明所诱导的同胚 f^* 将简单闭曲线映射为极小射影测度层状结构（定理 8.1），并且保持不相交性（定理 8.2）。然而，只有当 $g = g'$ 时这才是可能的（定理 1.2）。

引理 8.1。 同胚 $f^*\colon \mathbb{P}\mathcal{C}_{S_g}(\infty) \to \mathbb{P}\mathcal{C}_{S_{g'}}(\infty)$ 将简单闭曲线映射为极小射影测度层状结构。

证明。设 λ 是 S_g 上的一条简单闭曲线。考虑 $f^*(\lambda) \in \mathbb{P}\mathcal{C}_{S_{g'}}(\infty)$。假设 η 是 $\mathbb{P}\mathcal{C}(S_{g'})$ 中的一个非填充射影流，且 $\delta(f^*(\lambda)\ \eta) < \infty$。由于 f^* 关于 δ 是一个等距映射，我们得到 $\delta(\lambda, (f^*)^{-1}(\eta)) < \infty$。根据定理 7.8，与 λ 具有有限对称化绕行代价的唯一射影流就是 λ 本身。因此，$(f^*)^{-1}(\eta) = \lambda$，这意味着 $\eta = f^*(\lambda)$。于是，任何满足 $\delta(f^*(\lambda)\ \eta) < \infty$ 的测地流 η 必须是 $f^*(\lambda)$。根据定理 7.8，$f^*(\lambda)$ 是一个极小射影测度层状结构。□

引理 8.2。 设 η_1 和 η_2 是互不相交的简单闭曲线。那么，η_1 和 η_2 在映射 $f^*\colon \mathbb{P}\mathcal{C}_{S_g}(\infty) \to \mathbb{P}\mathcal{C}_{S_{g'}}(\infty)$ 下的像互不相交：

$$i(f^*(\eta_1), f^*(\eta_2)) = 0.$$

证明。 由于 η_1 和 η_2 是互不相交的简单闭曲线，$\eta_1 + \eta_2$ 是一个测度层状结构。利用测地流的分解和定理 6.5，可以得出，任何满足以下条件的非填充射影流 ξ

$$H(\eta_1 + \eta_2, \xi) < \infty$$

必定具有 $\xi = k_1\eta_1 + k_2\eta_2$ 的形式，其中 k_1 和 k_2 是非负实数。

我们要证明 $i(f^*(\eta_1)\ f^*(\eta_2)) = 0$。这等价于证明 $f^*(\eta_1) + f^*(\eta_2)$ 是一个测度层状结构。我们按以下步骤证明：

步骤 1： 我们断言，$f^*(\eta_1) + f^*(\eta_2)$ 是一个非填充射影流。

由定理 7.4 可知

$$H(\eta_1 + \eta_2, \eta_i) < \infty \text{ for } i = 1 \text{ and } 2.$$

由于 f^* 保持绕行代价 [Wal14a 的有限性，命题 5.3]，得：

$$H(f^*(\eta_1 + \eta_2), f^*(\eta_i)) < \infty \text{ for } i = 1 \text{ and } 2. \tag{40}$$

注意，$f^*(\eta_1+\eta_2)$ 是一个非填充射影流，因为它是非填充射影流在 f^* 下的像。这意味着我们可以找到 $c \in \mathbb{P}\mathcal{C}$ 使得

$$i(f^*(\eta_1 + \eta_2), c) = 0.$$

由定理 6.5，得 $i(f^*(\eta_1)\ c) = 0$ 且 $i(f^*(\eta_2)\ c) = 0$。因此，

$$i(f^*(\eta_1) + f^*(\eta_2), c) = 0.$$

因此，$f^*(\eta_1) + f^*(\eta_2)$ 是非填充的。

步骤 2: 我们声称，对于某些非零常数 η_1 和 η_2，有 $f^*(\eta_1) + f^*(\eta_2) = f^*(k_1\eta_1 + k_2\eta_2)$。

根据定理 6.4，公式（40）等价于以下上确界有限：

$$\sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(f^*(\eta_i), c)}{i(f^*(\eta_1 + \eta_2), c)} < \infty \quad \text{for } i = 1 \text{ and } 2.$$

这意味着

$$\sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(f^*(\eta_1) + f^*(\eta_2), c)}{i(f^*(\eta_1 + \eta_2), c)} \le \sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(f^*(\eta_1), c)}{i(f^*(\eta_1 + \eta_2), c)} + \sup_{c\in\mathbb{P}\mathcal{C}} \frac{i(f^*(\eta_2), c)}{i(f^*(\eta_1 + \eta_2), c)} < \infty.$$

根据定理 6.4，这等价于

$$H(f^*(\eta_1+\eta_2), f^*(\eta_1)+f^*(\eta_2)) < \infty.$$

由于 f是等距映射，因此它可逆。此外，$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$也保持绕行代价的有限性。因此，

$$H(\eta_1+\eta_2, (f^{-1})^*\big(f^*(\eta_1)+f^*(\eta_2)\big)) < \infty.$$

正如证明中前文所述，这只有在以下情况下才有可能：

$$(f^{-1})^*\big(f^*(\eta_1)+f^*(\eta_2)\big) = k_1\eta_1 + k_2\eta_2$$

对于非负常数 k_1 和 k_2。因此，

$$f^*(\eta_1)+f^*(\eta_2) = f^*(k_1\eta_1+k_2\eta_2).$$

步骤 3： 我们断言，$f^*(\eta_1)+f^*(\eta_2)$没有填充分量。

假设 $i(f^*(\eta_1)\ f^*(\eta_2)) \neq 0$，或者等价地，$f^*(\eta_1)+f^*(\eta_2)$不是测度层状结构。这意味着，$f^*(\eta_1)+f^*(\eta_2)$的任意测地流代表元都有一个填充分量，该分量填充了 S的一个真子空间 S'。令$b \in \mathcal{E}_{f^*(\eta_1)+f^*(\eta_2)}$ 为 S'的一条边界曲线。注意，

$$b \neq f^*(\eta_i) \text{ for } i = 1 \text{ or } 2.$$

根据我们的构造，我们知道 $i(f^*(\eta_1)+f^*(\eta_2)\ b) = 0$，因此 $i(f^*(\eta_1)\ b) = 0$ 和 $i(f^*(\eta_2)\ b) = 0$ 均成立。

我们有

$$H\big(k_1\eta_1+k_2\eta_2, (f^*)^{-1}(b)\big) = H(f^*(k_1\eta_1+k_2\eta_2), b) = H(f^*(\eta_1)+f^*(\eta_2), b) < \infty.$$

其中，第一个等式利用了 H 的 f^*-不变性，第二个等式利用了步骤 2，最后一个不等式则利用了定理 7.6。这里，$k_1\eta_1+k_2\eta_2$ 是由互不相交的简单闭曲线组成的加权多曲线。采用与本证明开头类似的论证，我们得出，只有在下列条件成立时，上述绕行代价才是有限的：

$$(f^*)^{-1}(b) = \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2,$$

其中，α_1 和 α_2 是非负实数。由于 b 是一条简单闭曲线（f^*），$^{-1}(b)$ 是一个极小测度层状结构。因此，α_1 或 α_2 至少有一个必须为零。不失一般性，假设 $\alpha_2 = 0$。由于射影流是按缩放等价来考虑的，我们得到

$$\begin{aligned}(f^*)^{-1}(b) &= \eta_1\\ f^*(\eta_1) &= b.\end{aligned}$$

然而，我们证明了 b不同于 $f^*(\eta_1)$ 和 $f^*(\eta_2)$，从而导致矛盾。因此，$f^*(\eta_1)+f^*(\eta_2)$ 必须是测度层状结构，证明完毕。□

定理 1.2。设 S_g 和 $S_{g'}$ 是亏格至少为二的闭可定向曲面，且满足 $g \neq g'$。则赋予扩展 *Thurston* 度量 d 的射影填充流空间 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}(S_g)$ 和 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}(S_{g'})$ 不等距。

证明。不失一般性，设 $g' < g$。反设存在一个等距映射

$$f : \mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}(S_g) \to \mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}(S_{g'})$$

关于扩展 Thurston 度量。根据定理 8.1，诱导的映射在视界

$$f^* : \mathbb{P}\mathcal{C}_{S_g}(\infty) \to \mathbb{P}\mathcal{C}_{S_{g'}}(\infty)$$

上将简单闭曲线映为极小射影测度叶层。设 $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{3g-3}\}$ 是 S_g的裤子分解。那么，根据定理 8.2，集合 $\{f^*(\gamma_1)\ f^*(\gamma_2)\ldots, f^*(\gamma_{3g-3})\}$ 由 $S_{g'}$上的两两不相交的射影测度层状组成。然而，这与亏格为 g' 的曲面至多容纳 $3g'-3$ 个互不相交的测度层状结构这一事实相矛盾，且根据假设 $g' < g$。□

尽管定理 1.2 初看似乎很自然，但实际上并非显而易见，因为测地流空间是无限维的。例如，S 自身的拓扑并不能确定 $\mathbb{PC}(S)$的拓扑类型：事实上，对于所有属数 g，g'，$\mathbb{PC}(S_g)$ 都与 $\mathbb{PC}(S_{g'})$ 同胚；这一事实可由肖凯理论中的结果推出。现在我们回顾证明这一点所需的预备知识。

关于以下预备知识，请读者参阅文献 [Dow91, Phe01]。设 K 是拓扑向量空间的一个凸子集。若一个点 $x \in K$ 满足极点 的定义，则称其为 K 的极点：

$$x = ty + (1-t)z \quad \text{with } y, z \in K,\ 0 < t < 1,$$

我们有 $x = y = z$。K 的所有极点组成的集合记为 ext(K)。

此外，若 K 是紧的，根据克莱因–米尔曼定理，每个 $x \in K$ 都可以表示为一个支撑在极点集合 ext(K)上的概率测度 μ 的重心，即

$$x = \int_{\mathrm{ext}(K)} y \, d\mu(y).$$

如果对每个 $x \in K$，这个表示测度 μ 都是唯一的，那么 K 称为***Choquet*** 单纯形。Choquet 单纯形的例子包括 $\mathbb{R}^n$中的有限维单纯形，以及无限维空间，例如紧度量空间上的概率测度空间（赋予弱星拓扑）。

Poulsen单纯形 是极点集在单纯形中稠密的可分 Choquet 单纯形，且在仿射同胚意义下唯一 [Pou61, LOS78]。

命题 8.3. 所有射影测地流空间都彼此同胚。

证明。根据上文，只需证明对于任意闭双曲曲面 S，$\mathbb{PC}(S)$ 同胚于一个 Poulsen单纯形。测地流空间 $\mathcal{C}$ 与空间 $\mathcal{M}_{\text{flip、inv}}(T^1S)$ 仿射同胚；后者由 T^1S [上的翻转不变且测地流不变的局部有限博雷尔测度构成 Bon86, Bon88, ES22],，并且是 $\mathcal{M}_{\text{inv}}(T^1S)$ 的闭子空间；$\mathcal{M}_{\text{inv}}(T^1S)$ 是 T^1S上的测地流不变测度空间。通过按总质量归一化（由于 T^1S紧，这在弱* 拓扑下是一个同胚），$\mathbb{P}\mathcal{M}_{\text{inv}}(T^1S)$ 同胚于空间 $\mathcal{P}_{\text{inv}}(T^1S)$，即 T^1S上的测地流不变博雷尔概率测度空间；已知该空间是 Poulsen单纯形。类似地，$\mathbb{PC}(S)$ 同胚于射影化空间 $\mathbb{P}\mathcal{M}_{\text{flip、inv}}(T^1S)$，后者同胚于 $\mathcal{P}_{\text{flip、inv}}(T^1S)$。由于 $\mathcal{P}_{\text{flip、inv}}(T^1S)$ 是 $\mathcal{P}_{\text{inv}}(T^1S)$ 的闭凸子空间，它是一个凸紧空间：这是因为由保向反转同胚诱导的翻转映射 σ_*：$\mathcal{M}(T^1S) \to \mathcal{M}(T^1S)$ 是仿射同胚，因此保持凸性。于是 $\mathcal{P}_{\text{flip、inv}}(T^1S)$ 是一个 Choquet 单纯形。由于支撑在闭曲线上的测地流是极端的，并且这类测度在 $\mathcal{P}_{\text{flip、inv}}(T^1S)$ 中稠密 [Bon86, 命题 4.4],，因此 ext($\mathcal{P}_{\text{flip、inv}}(T^1S)$) 稠密，于是 $\mathcal{P}_{\text{flip、inv}}(T^1S)$ 是一个 Poulsen单纯形；又由于 $\mathbb{PC}(S)$ 与其同胚，结论得证。□

9. 几何结构上的诱导非对称度量示例

如引言中所述，射影填充测地流空间 $\mathbb{PC}_{fill}$ 包含许多值得关注的几何结构。正如我们在引言中概述、并在附录 A 中详细说明的那样，曲面上的射影填充测地流空间嵌入到更广泛的

度量结构空间 $\mathcal{D}_{\pi_1(S)}$ [DRMG25, CR25], ，而后者又嵌入到适当度量势空间 $\mathcal{H}^{++}_{\pi_1(S)}$中，其含义见 [CRS24]。更一般地说，这两个空间可以针对任意非初等双曲群 Γ来定义。于是，在 $\mathcal{H}^{++}_{\Gamma}$ 上定义扩展 Thurston 度量 d ； 当 $\Gamma = \pi_1(S)$ 时，它限制为第 4 节中使用的 $\mathbb{PC}_{fill}$ 上的度量 d （见命题 A.9）。

现在，我们将说明如何在几何结构的集合上诱导出一种非对称度量。

令 $\mathcal{M}$ 为与 Γ相关联的几何结构族，即一个类，其中对每个 $m \in \mathcal{M}$，都有一个长度函数 ℓ_m: $[\Gamma] \to \mathbb{R}$，满足 $\ell_m(g) = \ell_m(g^{-1})$，对每个 $g \in \Gamma$ 均成立。通常，$\mathcal{M}$ 将定义为几何对象的等价类集合，而等价关系则取决于具体语境，例如与恒等映射同伦的微分同胚、共轭等。

要应用这一框架，需要满足两个条件：

- **要求 1：可实现**。每个 $m \in \mathcal{M}$ 都可以实现为一个真双曲势 Γ；也就是说，存在一个映射，将每个 $m \in \mathcal{M}$ 赋予一个元素 $\psi_m \in H^{++}_{\Gamma}$ ，使得对每个 $g \in \Gamma$都有 $\ell_m(g) = \ell_{\psi_m}(g)$。
- **要求 2：归一化标记长度谱**。赋值 $m \mapsto \psi_m$定义了一个到 $\mathcal{H}^{++}_{\Gamma}$ 中的单射映射。注意，$\mathcal{H}^{++}_{\Gamma}$ 是粗相似类的空间：如果两个真双曲度量势相差一个缩放（误差为加性项），则它们等价（定义见附录 A）。我们称 $\mathcal{M}$ 在缩放下封闭，也就是说，存在一个作用 $\mathbb{R}^+$ 于 $\mathcal{M}$ ，使得当 $\lambda \in \mathbb{R}^+$、 $m \in \mathcal{M}$时， $\lambda \in \mathbb{R}^+$ 且 $\lambda \cdot m \in \mathcal{M}$ 。在这种情况下，若 $\mathcal{M}$满足要求 1，且稳定长度齐次缩放 $\ell_{\psi_{\lambda \cdot m}} = \lambda \ell_{\psi_m}$，那么，为了使 $\mathcal{M}$ 满足要求 2，就需要将度量限制在某一类中，其中某个齐次不变量经过了归一化（例如熵为1、面积为1等）。

可由测地流实现的例子。在许多有趣的情形下，我们能够通过 $\psi_m \in \mathcal{D}_{\Gamma}$满足要求 1。事实上，如果 $\Gamma = \pi_1(S)$ ，有时可以通过将 m 经由测地流 μ_m嵌入 $\mathbb{PC}_{fill}$ ，来实现要求 1。赋值 $m \mapsto \mu_m$ 由此给出一个到射影填充流中的嵌入；也就是说，若 $[\mu_m] = [\mu_{m'}]$ ，则 $m = m'$。由此可以构造伪度量ρ_{μ_m} （如附录 A.2 所述）。

许多带标记度量结构（其中，带标记的关系是指通过与恒等映射同伦的微分同胚建立的关系）会产生满足要求 1 的族 $\mathcal{M}$ ，其势函数 ψ_m 定义在 $m \in \mathcal{M}$ 上，并由测地流给出。

(1) $\mathcal{T}(S)$ 或带标记双曲度量 [Bon88，命题 14]。(2) 带标记负曲率黎曼度量 [Ota90，定理 1]。这是空间 $\mathcal{M}(S)$，由 S 上的负曲率黎曼度量构成，其中两个度量等价，当且仅当它们之间存在一个与恒等映射同伦的微分同胚。(3) 带有角度为 $\geq 2\pi$ [的锥形奇点的带标记负曲率黎曼度量], HP97，定理 A [，这是对前一项的推广。(4) 带标记非正曲率黎曼度量]CFF92，定理 A [。(5) 由二次微分导出的带标记奇异欧几里得锥度量 9]DLR10，引理 $\geq 2\pi$ [。(6) 锥角为 3] 的非正曲率欧几里得锥度量 BL17，命题 3。（这涵盖了前一种情况。）

在即将发表的工作 [MGT26], 中，第二作者和 D. Thurston 建立了一个通用框架，将长度函数实现为测地线流，涵盖了这些例子以及许多其他例子。

刚性结果。 对于上述每个例子，归一化带标记长度谱刚性都是已知的，因此满足条件 2（编号与上面的列表相对应）：

(1) 对于任意标记双曲度量 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{T}(S)$，令 $L_{\boldsymbol{x}}$ 表示与 $\boldsymbol{x}$相关联的双曲李乌维尔流流。Bonahon 在 [Bon88 中证明，定理 12] 表明 $\boldsymbol{x} \mapsto [L_{\boldsymbol{x}}]$ 是一个真嵌入

。他的结果归结为应用双曲度量的标记长度谱刚性，这一结果可追溯至 Fricke–Klein [FK65]的工作。在近期的一项研究 [ELS22], 中，研究者针对圆锥 双曲度量的一个泛型子空间，得到了一个基于刘维尔流支撑的刚性结果。

（2）对于面积为1的负曲率黎曼度量，归一化标记长度谱刚性与标记长度谱刚性相同，这可由 [Ota90, Théorème 2]推出。请注意，这里必须进行归一化，因为将负曲率度量乘以一个正数，会得到一个不同的负曲率度量，但它们诱导的伪度量粗略相似（就测地流而言，它们互为倍数）。另一种归一化方式是令熵为1。（3）同一篇被引用的论文证明了刚性。（4）上述被引用的论文还证明了面积为1（或者，也可以令熵为1）的非正曲率黎曼度量的归一化刚性 [CFF92, Lemma 1.5]。（5）对于与二次微分相关、面积为1的奇异欧几里得度量，也证明了刚性 [DLR10, Theorem 2]。（6）上文引用的同一篇论文证明了刚性。

在下一小节中，我们将讨论一个由阿诺索夫表示产生的相关例子，它属于真双曲势，而我们的非对称度量可扩展至此。

9.1. 扩展到阿诺索夫表示。我们将简要介绍阿诺索夫表示，并讨论它们如何在度量结构空间 $\mathcal{D}_\Gamma$ 中诱导出点，进而更一般地诱导出度量势 $\mathcal{H}_\Gamma^{++}$ （定义见附录 A）。

阿诺索夫表示由 Labourie [Lab06] 提出，随后 Guichard–Wienhard[GW12] 将其推广到一般的 Gromov 双曲群。它们是一类核有限的离散表示，取值于半单李群，并具有许多与秩一情形下的凸余紧表示相同的特征。

9.1.1. 半单李群的结构。设 G 是一个非紧型连通实半单代数群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。固定一个极大紧子群 $\mathsf{K} < \mathsf{G}$，它对应的嘉当对合为 τ，作用于 $\mathfrak{g}$，并令 $\mathfrak{p} := \{v \in \mathfrak{g} : \tau v = -v\}$。固定一个 Cartan子空间 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$。分别令 $\mathfrak{m} = \mathsf{Z}_{\mathsf{K}}(\mathfrak{a})$ 和 $\mathsf{N}_{\mathsf{K}}(\mathfrak{a})$ 为其中心化子和正规化子。令 $\Sigma \subset \mathfrak{a}^*$ 为限制根系；对于 $\alpha \in \Sigma$，根空间为

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{Y \in \mathfrak{g} : \ [H, Y] = \alpha(H)Y \ \text{ for all } H \in \mathfrak{a}\}.$$

选取一个正根系 Σ^+，其单根为 Π。记 $\mathfrak{a}^+$ 为闭正魏尔室，并记 w_0 为魏尔群 $\mathsf{W} \simeq \mathsf{N}_{\mathsf{K}}(\mathfrak{a})/\mathfrak{m}$ 的最长元素；对向对合为$\iota := -w_0$。

对于 $\Theta \subset \Pi$，令

$$\mathfrak{p}_\Theta := \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in \langle \Pi - \Theta \rangle} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

$$\overline{\mathfrak{p}_\Theta} := \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \langle \Pi - \Theta \rangle} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

其中 $\mathfrak{g}_0 = \mathsf{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$，而 $\langle \Pi - \Theta \rangle$ 表示由 $\Pi - \Theta$中的根生成的正根集合。令 P_Θ 和 $\mathsf{P}_{\overline{\Theta}}$ 为相应的抛物子群。G 的每个抛物子群都与唯一的某个 P_Θ共轭，其中 $\Theta \subset \Pi$；而 $\mathsf{P}_{\overline{\Theta}}$ 与 $\mathsf{P}^{\iota(\Theta)}$共轭，其中 $\iota(\Theta) := \{\alpha \circ \iota : \ \alpha \in \Theta\}$。

令 $\mathcal{F}_\Theta := \mathsf{G}/\mathsf{P}_\Theta$, $\mathcal{F}_{\overline{\Theta}} := \mathsf{G}/\mathsf{P}_{\overline{\Theta}}$为 旗流形 的 G。

如果一对旗标属于 $\mathcal{F}_\Theta^{(2)}$ （G 在 $\mathcal{F}_\Theta \times \mathcal{F}_\Theta$ 上作用时唯一的开轨道），那么它们在 $\mathcal{F}_\Theta \times \mathcal{F}_\Theta$ 中是横截的 。

例 9.1. 当$\mathsf{G} = \mathsf{PSL}(V)$ 对应于一个实（分别为复） d维向量空间 V时，我们可以令 $\mathfrak{a}$ 为某个正交（分别为酉）基下的对角无迹矩阵。记 ε_i 为对 i个对角项中第 i项的取值，则有 $\Sigma = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j : \ i \neq j\}$, $\Sigma^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j : \ \ i < j\}$，以及$\Pi = \{\alpha_{i,i+1} = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} : \ \ 1 \leq i \leq d-1\}$ （通常记作 α_i）。

对于 $\Theta \subset \Pi$, $p_\Theta : \ \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_\Theta \coloneqq \bigcap_{\beta \in \Pi - \Theta} \ker(\beta)$表示在群$\mathsf{W}_\Theta \coloneqq \{w \in \mathsf{W} : \ w|_{\mathfrak{a}_\Theta} = id_{\mathfrak{a}_\Theta}\}$作用下不变的唯一投影。对偶线性空间$\mathfrak{a}_\Theta^*$ 与 $\{\varphi \in \mathfrak{a}^* : \ \varphi \circ p_\Theta = \varphi\}$相对应。

设 N 为 $\mathsf{P} = \mathsf{P}_\Pi$ 的幂零根基，即与李代数 $\sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\mathfrak{a}$ 相关联的连通子群。若令 $\mathsf{A} \coloneqq \exp \mathfrak{a}$, 则伊瓦萨瓦分解 为

$$\mathsf{G} = \mathsf{KAN}.$$

特别地， $\mathcal{F} \cong \mathsf{K}/\mathfrak{m}$，并且对于 $\xi \in \mathcal{F}$，我们可以找到 $k \in \mathsf{K}$，使得 $k\mathfrak{m} = \xi$。Quint [Qui02] 定义了一个映射 $\sigma\colon \mathsf{G} \times \mathcal{F} \to \mathfrak{a}$，其定义为

$$gk = l \exp(\sigma(g, k\mathfrak{m}))n,$$

其中 $n \in \mathsf{N}$，且 $l \in \mathsf{K}$。在 [Qui02, Lemme 6.11] 中，证明了 $p_\Theta \circ \sigma\colon \mathsf{G} \times \mathcal{F} \to \mathfrak{a}_\Theta$ 可通过映射 $\sigma_\Theta(gh, \xi) = \sigma_\Theta(g, h \cdot \xi) + \sigma_\Theta(h, \xi)$ 进行分解。该映射 σ_Θ 称为 G 的 Θ-布塞曼–伊瓦萨瓦余循环 。

令 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing型的对偶内积。对于 $\varphi, \psi \in \mathfrak{a}^*$，令

$$\langle \varphi, \psi \rangle \coloneqq 2\frac{(\varphi, \psi)}{(\psi, \psi)}.$$

给定 $\alpha \in \Pi$，基本权是由公式 $\langle \omega_\alpha, \ \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$对 $\beta \in \Pi$定义的泛函 $\omega_\alpha \in \mathfrak{a}^*$。有

$$\omega_\alpha \circ p_\Theta = \omega_\alpha$$

对所有 $\alpha \in \Theta$均成立。特别地， $\omega_\alpha \in \mathfrak{a}_\Theta^*$。基本权与 Tits 引入的 G 的一组特殊表示有关。如果 $\Lambda\colon \mathsf{G} \to \mathsf{PGL}(V)$ 是一个不可约表示，那么泛函 $\chi \in \mathfrak{a}^*$ 是 Λ 的一个权，如果权空间

$$V_\chi \coloneqq \{\Lambda(\exp(X)) \cdot v = e^{\chi(X)} v, \text{ for all } X \in \mathfrak{a}\}$$

非零。Tits 证明了存在唯一的权 χ_Λ，它关于序 $\chi \geq \chi'$ 是极大的，其中 $\chi - \chi'$ 是单根的非负系数线性组合。泛函 χ_Λ 称为 Λ 的最高权；当相应的权空间 V_{χ_Λ} 是一维时，该表示是近端的。

我们在 V上取一个良范数 [Qui02，第 4 节2]，即在 $\Lambda(K)$ 下不变的 V上的范数，并且 $\Lambda(A)$ 由半相似变换组成（即，在 V的一个标准正交基 $\mathcal{E}$下为对角矩阵）。

对于每个 $g \in G$，都有

$$\log ||\Lambda(g)|| = \chi_\Lambda^\omega(a(g)), \qquad \log \lambda_1(\Lambda(g)) = \chi_\Lambda^\omega(\lambda(g))$$

其中 $\lambda_1(\Lambda(g))$ 是 $\Lambda(g)$ 的最大特征值的模的对数。记 W_{χ_Λ} 为 V_{χ_Λ} 的 $\underline{\Lambda}(A)$–不变补空间。 G 中 W_{χ_Λ} 的稳定子为 $\mathsf{P}_{\Theta_\Lambda}$，因此可得到一个旗流形的映射

$$(\Xi_\Lambda, \Xi_\Lambda^*)\colon \mathcal{F}_{\varphi_\phi}^{(2)} \longrightarrow \mathrm{Gr}^{(2)}_{\dim V_{\chi_\Lambda}}(V).$$

Here

$$\Theta_\Lambda = \{\, \sigma \in \Pi : \chi_\Lambda - \sigma \text{ is a weight of } \Lambda \,\}.$$

命题 9.2 (Tits [Tit71]). 对于每个 $\alpha \in \Pi$，都存在一个有限维实表示

$$\Lambda_\alpha : \mathsf{G} \to \mathsf{PGL}(V_\alpha)$$

其为不可约且近端的表示，其最高权为 $\chi_\alpha = l_\alpha \omega_\alpha$，其中 $l_\alpha \in \mathbb{N}$。此外，对于每个包含 α 的 $\Theta \subset \Pi$，$\Lambda_\alpha(\mathsf{P}_\Theta)$ 都在 V_α 中稳定一条直线。

固定这样一个族 $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha\in\Pi}$。我们有

$$\chi_\alpha \circ p_\Theta = \chi_\alpha \quad \text{for } \alpha \in \Theta, \tag{41}$$

因此，当 $\alpha \in \Theta$ 时，$\chi_\alpha \in \mathfrak{a}_\Theta^*$。

Cartan 投影 $\mu : \mathsf{G} \to \mathfrak{a}^+$ 由唯一的元素 $\mu(g) \in \mathfrak{a}^+$ 定义，使得

$$g \in \mathsf{K}\, \exp(\mu(g))\, \mathsf{K}.$$

令 $g \in G$，并令 $g = k_g z_g l_g$ 表示其 Cartan 分解。若 $g \in G$ 在 Θ 处具有间隙，则称其具有该性质；也就是说，对所有 $\sigma \in \Theta$，都有 $\sigma(\mu_\Theta(g)) > 0$。在这种情况下，$g$ 在 $\mathcal{F}_\Theta$ 中的 Cartan 吸引子定义为

$$U_\Theta(g) = k_g[P_\Theta].$$

该*Jordan* 投影 是

$$\lambda(g) := \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(g^n)}{n} \in \overline{\mathfrak{a}^+}. \tag{42}$$

对于 $g \in \mathsf{G}$ 和所有 $\alpha \in \Pi$，我们有

$$\lambda_1\big(\Lambda_\alpha(g)\big) = \chi_\alpha\big(\lambda(g)\big) = l_\alpha\, \omega_\alpha\big(\lambda(g)\big). \tag{43}$$

此外，我们定义 $\mu_\Theta := p_\Theta \circ \mu$ 和 $\lambda_\Theta := p_\Theta \circ \lambda$。

按照 Quint [Qui02，第 4.2], 节，为每个 V_α 赋予一个良范数 $||\cdot||_\alpha$，使得对于任意 $v \in \mathfrak{a}^+$

$$||\Lambda_\alpha(\exp v)|| = e^{\omega_\alpha(v)}.$$

9.1.2. 半相似性与近端性。 我们遵循 [Qui02，第 2.2] 节。有限维赋范向量空间上的线性算子 T: $V \to V$称为半相似性，如果存在一个直和分解:

$$V = V_T^M \oplus V_T^m$$

到 T-不变子空间中，使得

(1) $T|_{V_T^M}$是比例为 $||T||$ 的相似变换，即对所有 $v \in V_T^M$， $||T(v)|| = ||T|| \cdot ||v||$，其中我们对诱导算子范数使用相同的记号 $||\cdot||$。(2) V_T^M上的所有特征值模都严格小于 $||T||$。

如果此外 V_T^M 是一维的，我们称 T 为近端半相似变换。

9.1.3. 布塞曼余循环。对于 $g \in G$ 和一个旗 $\xi \in P_\Theta$， Θ-布塞曼余循环是一个映射 σ_Θ: $G \times P_\Theta \to E_\Theta$，使得经由表示 Λ_α，满足

$$\omega_\alpha(\sigma_\Theta(g,\xi)) = \log \frac{||\Lambda_\alpha(g)v||_\alpha}{||v||_\alpha}$$

其中 v 位于表示 ξ的直线上。 [Sam15].$\mathcal{G}_\Theta$ 中定义了一种格罗莫夫积: $\mathcal{F}_\Theta^{(2)} \to E_\Theta$ 的定义使得

$$l_\alpha \omega_\alpha(G_\Theta(p,q)) = \log \frac{||\phi(v)||}{||\phi||_\alpha ||v||_\alpha}$$

其中 $\phi \in \Xi_\alpha^*(x)$和 $v \in \Xi_\alpha(y)$，且 Ξ_α， Ξ_α^* 是表示 V_α的极限映射，对每个$\alpha \in \Theta$均成立。

回顾一下，对于 $\alpha > 0$， $g \in$G 的卡当盆地定义为

$$B_{\Theta,\alpha}(g) := \{x \in \mathcal{F}_\Theta : \omega_\sigma(\mathcal{G}_\Theta(U_{\iota\Theta}(g^{-1})), x) > -\alpha \text{ for all } \sigma \in \Theta\}.$$

根据 [Qui02, 引理 理 6.7], 给定 $\eta > 0$，存在一个常数 $\kappa_\eta > 0$，使得如果 $y \in B_{\Theta,\ \eta}(g)$，那么

$$||\mu_\Theta(g) - \sigma_\Theta(g, y)|| < \kappa_\eta.$$

9.1.4. 阿诺索夫表示及其长度函数。固定 $\Theta \subset \Pi$。表示 $r : \Gamma \to$ G 是 P_Θ–阿诺索夫的，如果存在常数 C， $c > 0$，使得对每个 $\alpha \in \Theta$ 及每个 $\gamma \in \Gamma$,

$$\alpha\big(\mu(r(\gamma))\big) \ \geq \ C\,|\gamma| - c. \tag{44}$$

由定义可知，阿诺索夫表示是拟等距嵌入，特别是离散的且核有限。根据 Kapovich-Leeb-Porti 的结果 [KLP18，定理 6.15]可知，若 $r : \Gamma \to$G 是 Θ-阿诺索夫表示，则 Γ 是 Gromov双曲的。我们假设 Γ 是非初等的，并将其 Gromov边界记为 $\partial\Gamma$ （定义见附录 A）。此外，令 $\partial^2\Gamma$ 表示 $\partial\Gamma$ 中不同点组成的有序对空间。每个无限阶元素 $\gamma \in \Gamma$ 在 $\partial\Gamma$ 中都有唯一的吸引（分别为排斥）不动点，记为 γ_+ （分别为 γ_-）。令 $\Gamma' \subset \Gamma$ 表示由无限阶元素组成的子集。 $\gamma \in \Gamma$ 的共轭类记为 $[\gamma]$，而 Γ（分别为 Γ'）中元素的共轭类集合记为 $[\Gamma]$（分别为$[\Gamma']$）。

Θ-Anosov 表示的一个核心特征是它们具有极限映射。根据定义，这些映射是霍尔德连续的、 r-等变的保动力学映射

$$\xi_r : \partial\Gamma \to \mathcal{F}_\Theta \text{ and } \overline{\xi}_r : \partial\Gamma \to \overline{\mathcal{F}}_\Theta,$$

并且还是横截的，也就是说，对于每个 $x \neq y$ in $\partial\Gamma$，都有

$$(\overline{\xi}_r(x), \xi_r(y)) \in \mathcal{F}_\Theta^{(2)}.$$

Th极限映射存在且唯一（详见 [BPS19、GGKW17、KLP17] ）。

从 Γ 到 G 的 Θ-Anosov 表示集合是所有表示 $\Gamma \to$G [Lab06、GW12] 所构成空间的一个开子集。

射影阿诺索夫表示涵盖了所有阿诺索夫表示。

命题 9.3。设 r： $\Gamma \to$ G 是 Θ-*Anosov*。那么对于每个 $\alpha \in \Theta$，表示 $\Lambda_\alpha \circ r$： $\Gamma \to$PGL(V_α) 都是射影 *Anosov*。

我们用 $\mathcal{X}_\Theta(\Gamma,G)$ 表示从 Γ 到 G 的 P_Θ-Anosov 表示的共轭类空间。

Carvajales-Dai-Pozzetti-Wienhard 在 [CDPW24] 中依托 Sambarino [Sam14a, Sam14b] 的工作，为每个 $r \in \mathcal{X}_\Theta(\Gamma,G)$ 关联了一个特定的流空间，该空间是 Γ [Min05] 的 Mineyev 流的赫尔德重参数化。随后，他们运用动力学技术，例如热力学形式主义，来研究 $\mathcal{X}_\Theta(\Gamma,G)$。

为了定义与 Anosov 表示相关的长度和熵，我们为 G 的一般离散子群引入 Benoist 极限锥 [Ben 97] 。

定义 9.4。 Θ-极限锥是包含集合 $\{\lambda_\Theta(r(\gamma)) : \gamma \in \Gamma\}$ 的最小闭锥，其中 $r \in \mathcal{X}_\Theta(\Gamma,G)$ 。 r 的极限锥是 Π-极限锥。

在假设 r 是扎里斯基稠密的条件下，Benoist [Ben97] 证明了 $\mathcal{L}_r$ 和 Θ-极限锥是具有非空内部的凸锥。

Let

$$(\mathcal{L}_r^{\Theta})^* := \{\varphi \in \mathfrak{a}_{\Theta}^* : \varphi|_{\mathcal{L}_r^{\Theta}} \geq 0\}$$

是对偶锥。我们用 int($(\mathcal{L}_r^{\Theta})^*$) 表示 $(\mathcal{L}_r^{\Theta})^*$的内部，即在$\mathfrak{a}_{\Theta}^*$ 上对 $\mathcal{L}_r^{\Theta} \setminus \{0\}$取正值的泛函集合。

固定一个泛函

$$\varphi \in \bigcap_{r \in \mathcal{X}_{\Theta}(\Gamma,\mathsf{G})} \operatorname{int}((\mathcal{L}_r^{\Theta})^*).$$

上述交集非空：例如，对所有 $\alpha \in \Pi$，它都包含 λ_1 和 ω_α。

定义 9.5。 $r \in \mathcal{X}_{\Theta}(\Gamma,\mathsf{G})$ 的 φ-标记长度谱（或简称 φ-长度谱）是由下式给出的函数 $\ell_r^{\varphi}\colon \Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\ell_r^{\varphi}(\gamma) := \varphi(\lambda_{\Theta}(r(\gamma))).$$

注意，对于 Θ-Anosov 表示 r，当且仅当其具有无限阶时，$\ell_r^{\varphi}(\gamma) > 0$。此外，$\varphi$-长度谱在 Γ 中的共轭作用下保持不变，因此可下降为函数 $[\Gamma] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们仍将其记作 ℓ_r^{φ}。

定义 9.6。 r 的 φ-熵定义为

$$h_r^{\varphi} := \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \#\{[\gamma] \in [\Gamma] : \ell_r^{\varphi}(\gamma) \leq t\} \in [0,\infty].$$

φ熵最早由 Sambarino 引入，用于研究 r [Sam14a, Sam14b]。他证明了该熵由一个真正的极限定义，且为正值、有限，并且等于与 r 和 φ相关的某个流的拓扑熵。该流源自对 [Min05], 上所谓的 Mineyev 流进行赫尔德重参数化；Mineyev 流是测地流在双曲群上的粗略推广。

9.1.5. 与阿诺索夫表示相关的双曲势函数。存在一些与曲面群的一般 Θ-阿诺索夫表示相关的自然伪度量。其中一些长度函数可通过正广义交比实现为测地流 [MZ19, 命题 2.24]，[BIPP24, 定理 1.6]。然而，许多例子源自更一般的伪度量，而非测地流（例如，准福克斯非福克斯表示 [FF22, BR24]）。更广泛地说，对于任意非初等双曲群，都有类似的对称例子，它们源自该表示的希尔伯特长度谱。然而，也有一些长度函数并非源自伪度量的稳定长度，而是源自真双曲度量势；这种势函数允许非对称性和某些负值，但其稳定长度严格为正。更多细节请见附录 A。

在附录 A 中，我们给出真双曲度量势的精确定义，并证明度量 d 可以延拓到度量势 $\mathcal{H}_{\Gamma}^{++}$ 空间。

现在我们证明，对于任意 Θ-Anosov 表示 r，以及 φ的内部 Θ-极限锥中的一个r，存在一个 H_{Γ}^{++} 中的势函数，可以恢复长度ℓ_r^{φ}-长度。

命题 9.7。 令 $r\colon \Gamma \to \mathsf{G}$ 为 Θ*–Anosov*，且 $\varphi \in \operatorname{int}((\mathcal{L}_r^{\Theta})^*)$。则赋值

$$\psi_{r,\varphi}(x,y) := \varphi(\mu_{\Theta}(r(x^{-1}y))),$$

定义了 H_{Γ}^{++} 中的一个元素，其稳定长度满足

$$\ell_{\psi_{r,\varphi}}(\gamma) = \ell_r^{\varphi}(\gamma)$$

对于每个 $\gamma \in \Gamma$。

证明。 首先，我们声称 $\psi_{r,\varphi} \in H_\Gamma$。为此，我们证明，对于任意常数 $C, R > 0$，存在一个常数 $c_0 > 0$，使得对于任意连接 x 与 y 的 C-粗测地线段（$\eta(i)$）$_{i\in\{1,\cdots,k\}}$（定义见附录 A.1 小节），以及任意 $z \in U_R(\eta)$,

$$\varphi(\mu_\Theta(x^{-1}y)) \geq \varphi(\mu_\Theta(x^{-1}z)) + \varphi(\mu_\Theta(z^{-1}y)) - c_0.$$

根据 [CRS24，命题 3，1] 结论便得证。将 z 从左侧相乘进行平移后，不妨假设 C-粗测地线与单位元 o的距离不超过 R。

令 $c_R := \inf\{\min_{\alpha\in\Theta} \exp\ \omega_\alpha(\mathcal{G}_\Theta(\xi_{\Lambda_\alpha}(\eta)\ \xi_{\Lambda_\alpha}(\zeta)) : (\eta,\ \zeta)_o < R + 4\delta\}$。对于 $g \in \Gamma$，令 $g_\alpha := \Lambda_\alpha(g)$，对每个 $\alpha \in \Theta$均成立。由与 [CT25，引理 7.1], 相同的论证可得 $c_R > 0$，且存在常数 $L_R > 0$，使得对于一条连接 x 与 y、经过 o 和 $|x|,\ |y| > L_R > 0$的测地线，我们有

$$\min_{\alpha\in\Theta} \exp \omega_\alpha(\mathcal{G}_\Theta(U_{\iota\Theta}(x_\alpha), U_\Theta(y_\alpha))) > \frac{c_R}{2}.$$

若令 $V^M_{\alpha,\ y} := U_\Theta(y_\alpha)$，则这表示 $V^M_{\alpha,\ y} \in B_{\Theta,\ \epsilon}(x_\alpha^{-1})$，其中 $\epsilon = c_R/2$。必要时进一步缩小 c_R，使得 $\epsilon \leq 1$，然后应用引理 9.8，由此可知存在常数 $K > 0$，使得

$$||\mu_\Theta(x_\alpha^{-1}y_\alpha) - \mu_\Theta(y_\alpha) - \sigma_\Theta(x_\alpha^{-1}, U_\Theta(y_\alpha))|| \leq K.$$

根据第 9.1.3 小节中的讨论，我们有

$$||\mu_\Theta(x_\alpha^{-1}) - \sigma_\Theta(x_\alpha^{-1}, U_\Theta(y_\alpha))|| < \kappa_{c_R/2}.$$

综合上述所有结果，存在一个常数 $c_0 := K + \kappa_{c_R/2} > 0$（其取决于 C 和 R），使得

$$\varphi(\mu_\Theta(x^{-1}y)) \geq \varphi(\mu_\Theta(x^{-1})) + \varphi(\mu_\Theta(y)) - c_0.$$

这就证明了 $\psi_{r,\ \varphi} \in H_\Gamma$，正如所需。为证明 $\psi_{r,\ \varphi} \in H_\Gamma^{++}$，注意到对于每个 $\alpha \in \Theta$，交数 $\ker\ \omega_\alpha \cap \mathcal{L}_r^\Theta$ 为空；根据对 φ 的假设，$\ker\ \varphi \cap \mathcal{L}_r^\Theta$ 也为空。于是，φ/ω_α 在 $\mathcal{L}_r^\Theta$ 上有一个严格的正下界，因此由 [Sam24，命题 5.4。2]，，存在常数 $q,\ Q > 0$，使得

$$\varphi(\mu_\Theta(r(g))) \geq q\omega_\alpha(\mu_\Theta(r(g))) - Q$$

对于每个 $g \in \Gamma$。结合 $\Lambda_\alpha \circ r$ 是射影 Anosov 这一事实、命题 9.3 以及上述不等式，我们得到常数 Q', $q' > 0$，使得

$$\varphi(\mu_\Theta(r(g))) \geq q'|g| - Q'$$

对于某个/任意词度量 $|\cdot|$，以及每个 $g \in \Gamma$。取 g^n 的幂并除以 n，再利用公式 42，可得 $\ell_{\psi_{r,\ \varphi}} = \lim_n {}^{\varphi(\mu_\Theta(r(g^n)))}{}_n \geq c\ell_{|\cdot|}$ ~~这表明 $\ell_{r,\ \varphi}(g) = \ell_{\psi_{r,\ \varphi}}$~~ 并且，由于词度量 $|\cdot|$ 是 D_Γ 中的一个元素，因此可得 $\psi_{r,\ \varphi} \in H_\Gamma^{++}$。□

以下是前述结果中用到的关键引理。

引理 9.8。 固定 $\Theta \subseteq \Pi$ 和 E_Θ 上的一个范数 $||\cdot||$。对于每个 $\alpha \in \Theta$，令 $\Lambda_\alpha :\ G \to \mathrm{PGL}(V_\alpha)$ 为命题 *9.2* 中配备良范数的表示之一。令 $1 \geq \epsilon > 0$。那么存在一个常数 $K > 0$，它取决于 ϵ，使得对每个 $\alpha \in \Theta$，下述结论均成立。对于每个$g, h \in \Gamma$，令 $g_\alpha := \Lambda_\alpha(g)\ h_\alpha := \Lambda_\alpha(h)$，并假设

$$V^M_{\alpha,h_\alpha} \in B_{\Theta,\epsilon}(g_\alpha).$$

于是，我们有

$$||\mu_\Theta(g_\alpha h) - \mu_\Theta(h_\alpha) - \sigma_\Theta(g_\alpha, U_\Theta(h_\alpha))|| \leq K.$$

证明。 固定 $\alpha \in \Theta$。则 h_α 是定义在 V_α 上的近端半相似，且满足

$$V_\alpha = V_{\alpha,h}^M \oplus V_{\alpha,h}^m.$$

设 $v_\alpha \in V_\alpha^{M,\ h_\alpha} \setminus \{0\}$。由 [Qui02，引理 2.6]（左侧不等式），可得

$$\frac{||g_\alpha(v_\alpha)||}{||v_\alpha||} \ \leq \ \frac{||g_\alpha h_\alpha||}{||h_\alpha||}.$$

另一方面，将 [Qui02，引理 4.2] 应用于近端半相似变换 g_α，可得

$$||g_\alpha(v_\alpha)|| \ \geq \ \epsilon\, ||g_\alpha||\, ||v_\alpha||,$$

并且由于 $||g_\alpha h_\alpha|| \leq ||g_\alpha||\, ||h_\alpha||$，我们得到

$$\frac{||g_\alpha h_\alpha||}{||h_\alpha||} \ \leq \ \frac{1}{\epsilon}\, \frac{||g_\alpha(v_\alpha)||}{||v_\alpha||}$$

对每个 $\alpha \in \Theta$，均成立。

由 [Qui02，引理 6.4]，可将其改写为

$$e^{\varpi_\alpha(\sigma_\Theta(g_\alpha, U_\Theta(h_\alpha)))} \ \leq \ e^{\varpi_\alpha(\mu(g_\alpha h_\alpha) - \mu(h_\alpha))} \ \leq \ \frac{1}{\epsilon}\, e^{\varpi_\alpha(\sigma_\Theta(g_\alpha, U_\Theta(h_\alpha)))}.$$

由 [Qui02, 引理 3.1], ，我们得到一个一致的上界

$$||\mu_\Theta(g_\alpha h_\alpha) - \mu_\Theta(h_\alpha)) - \sigma_\Theta(g_\alpha, U_\Theta(h_\alpha))\,|| \ \leq \ K,$$

其中某个常数 $K > 0$ 仅依赖于 ϵ，如所述。 □

注 9.9。 上述结果推广了 $\varphi = \omega_\alpha$ 对每个 $\alpha \in \Pi$ （单根）的情形，这由 [CT25, 引理 7.1]给出。上述关于 ι-不变 $\varphi \in (\mathfrak{a}_\Theta^+)^*$ 的结论可利用 [DK22, 定理 4.5]推得。

定理 *1.3* 的证明。 在命题 A.9 中，我们证明 d 可延拓至度量势空间 $\mathcal{H}_\Gamma^{++}$。由命题 9.7，对每个 Θ-阿诺索夫表示 r 以及每个 $\varphi \in \text{int}((\mathcal{L}_r^\Theta)^*)$，存在一个真双曲势 $\psi_{r,\varphi} \in H_\Gamma$，使得

$$\ell_{\psi_{r,\varphi}}(g) = \ell_r^\varphi(g)$$

对每个 $g \in \Gamma$均成立。由此可得

$$h(\psi_{r,\varphi}) = h_r^\varphi.$$

只需证明，将 d 限制在由泛函 φ 诱导的这些势函数上，会在 Θ-阿诺索夫表示空间上给出一个非退化度量。若 $d(\psi_{r,\varphi}, \psi_{r',\varphi}) = 0$，则可得

$$\ell_{\psi_{r,\varphi}}(g) h(\psi_{r,\varphi}) = \ell_{\psi_{r',\varphi}}(g) h(\psi_{r',\varphi})$$

对每个 $g \in \Gamma$，即

$$h_r^\varphi \ell_r^\varphi(g) = h_{r'}^\varphi \ell_{r'}^\varphi(g)$$

对每个 $g \in \Gamma$。由此可知，根据 [BCLS18] 中以及更一般地在 [Ben97], [Bur93], [DK00] 中确立的关于阿诺索夫表示的标记长度谱刚性结果， r 和 r' 是共轭表示。综合性的表述见 [CDPW24，定理 6.8]。□

特别是，与 [CDPW24]，中的设定不同，我们的构造不依赖于测地流的 Hölder 重参数化（当 $\Gamma = \pi_1(S)$ 时），也不依赖于一般非初等双曲情形下的 Mineyev 流 [Sam14b, Sam24]。

10. 更多问题

有意思的是，探究定理 1.1 和定理 1.2 的类似结论是否适用于对称化 Thurston 度量 d_{sym}。关于 d_{sym} 的等距刚性并不能直接由定理 1.2 推出。此外，关于 d_{sym} 的 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{\mathrm{fill}}$ horofunction 紧化目前尚不清楚。事实上，为了证明 d_{sym} 上的定理 1.1，必须对式 (16) 中引入的扩展映射 $\Psi : \mathbb{P}\mathcal{C} \to C(\mathbb{P}\mathcal{C}_{\mathrm{fill}})$ 进行调整。

问题 10.1. 对于不同的闭曲面 S_g 和 $S_{g'}$，$(\mathbb{P}\mathcal{C}_{\mathrm{fill}}(S_g)\ d_{\mathrm{sym}})$ 与 $(\mathbb{P}\mathcal{C}_{\mathrm{fill}}(S_{g'})\ d_{\mathrm{sym}})$是否等距?

另一个自然且似乎更具挑战性的问题，是探讨这两种度量中任意一种的拟等距刚性。

问题 10.2. 对于不同的闭曲面 S_g 和 $S_{g'}$，$(\mathbb{P}\mathcal{C}_{\mathrm{fill}}(S_g)\ d_{\mathrm{sym}})$ （分别地，$(\mathbb{P}\mathcal{C}_{\mathrm{fill}}(S_g)\ d)$ 与 $(\mathbb{P}\mathcal{C}_{\mathrm{fill}}(S_{g'})\ d_{\mathrm{sym}})$ （分别地，$(\mathbb{P}\mathcal{C}_{\mathrm{fill}}(S_{g'})\ d)$ 是否不拟等距?

在附录 A 中，我们说明射影填充流的空间（$\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}, d$）可等距嵌入到一个更大的度量结构空间 $\mathcal{D}_{\pi_1(S)}$ 中；该空间最初由 [Fur02] 引入，近期又由 [OR23, CT25, CR25] 进行了研究。将视界边界的构造推广到这个空间将很有意义。

问题 10.3。能否构造度量结构空间$\mathcal{D}_{\pi_1(S)}$的视函数边界，所依据的视界边界函数扩展框架不要求底层空间是本原的，例如 [Wal18]中所述的框架？更一般地，能否为任意非初等双曲群 Γ 的 $\mathcal{D}_\Gamma$ 构造视函数边界（详见附录 *A*）？ $\mathcal{D}_\Gamma$ 的 ***horofunction*** 紧化是否与具有有界回溯性质 的左不变双曲伪度量空间（按 [CR25]中的定义）重合?

Thurston 的非对称度量 d_{Th} 在 $\mathcal{T}(S)$上的一个结构性质已由 [Thu98],证明，即它是一个 Finsler 度量。在高秩情形下也存在类似的非对称 Finsler 度量，但尚不清楚它们是否等价于 d_{Th}的自然扩展；参见 [CDPW24，定理 1.4]。

问题 10.4。 d 能否实现为射影填充流空间（或更一般地，伪度量空间）上的一种自然 *Finsler* 度量?

要回答这个问题，首先需要为测地流空间定义一种合适的切空间概念。一种可能的方法是运用测地流连续重参数化理论 [Tho19]。

附录 A. 伪度量空间上的非对称 Thurston 度量

在本附录中，我们讨论非对称度量得以定义的最一般情形：双曲群的真双曲势空间。这是一个涵盖范围广泛的类别；对于曲面群，它包含射影填充测地流空间；对于非初等 Gromov 双曲群，它包含度量结构空间 $\mathcal{D}_\Gamma$，该空间由与词度量拟等距的左不变 Gromov 双曲伪度量的等价类组成。

本附录主要是阐述性的。唯一真正的新意在于指出，度量 d 可以延拓到真双曲势函数空间；这一事实可由对 [CT25]中的论证稍作调整得出。在说明证明所需的修改后，我们证明，将此度量限制在射影填充流上时，它恰好还原了测地流上的非对称 Thurston 度量。这正是支撑我们关于视界边界和刚性结果的度量。

详情　关于前文背景，读者可参阅 [OR23、CT25、CR25、DRMG25、CRS24　　].

A.1. 伪度量空间。设 (X,ρ) 是一个度量空间。若存在 $\delta>0$，使得对于任意 x、y、z、$w\in\Gamma$、$\rho(x,z)+\rho(y,w)\leq\max\{\rho(x,y)+\rho(z,w)\ \rho(x,w)+\rho(y,z)\}+2\delta$，则称 ρ 是 δ-Gromov 双曲的（或简称双曲的）。基本例子包括 $\mathbb{H}^2$ 或实树。

设 Γ 是一个 Gromov双曲群，即一个有限生成群 Γ，使得对于某个有限对称生成集 S（即 $|S|<\infty$ 和 $S=S^{-1}$），其诱导的词度量 ρ_S 是 Gromov双曲的。基本例子包括曲面群，即 $\Gamma=\pi_1(S)$，其中 S 是亏格至少为 2 的闭可定向双曲曲面，以及自由群。

令 $\partial\Gamma$ 表示其*Gromov*边界，它由发散序列的理想类构成。若群元素序列 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 发散，则称其发散，当且仅当 $(x_n|x_m)_o$ 对某个 $o\in\Gamma$ 成立；$o\in\Gamma$ 是 Γ 中的单位元，且当 $\min\{n,m\}$ 趋于无穷远时亦如此。若两个发散序列 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ 和 $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ 满足 $\min\{n,m\}$ 趋于无穷远时 $(x_n|y_m)_o$ 发散，则称它们等价。这可以看作有界距离无限射线的等价类的离散版本。若 $\partial\Gamma,|\partial\Gamma|$ 的基数为无限，则称 Γ 为非初等。在 $\Gamma=\pi_1(S)$ 的情形下，$\partial\Gamma$ 与 S^1 同胚。

Γ上的伪度量是一个函数 $\rho\colon\Gamma\times\Gamma\to\mathbb{R}$，使得对任意 x、y、$z\in\Gamma$，都有 $\rho(x,y)\geq0$，$\rho(x,y)=\rho(y,x)$，且 $\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z)$。也就是说，它是一种距离，唯一的区别是两个不同的点之间的距离允许为零。若对任意 g、x、$y\in\Gamma$，都有 $\rho(gx,gy)=\rho(x,y)$，则称伪度量为左不变的。

若存在常数 $c_2,c_1,a>0$，使得，我们称两个伪度量 ρ,ρ' 为拟等距 的

$$c_1\rho(x,y)-a\leq\rho'(x,y)\leq c_2\rho(x,y)+a$$

对任意 $x,y\in\Gamma$。例如，曲面 S上的任意两个双曲度量，通过提升该度量，都会在 $\mathbb{H}^2$ 上诱导出拟等距的度量。

从现在起，假设 Γ是非初等的，并令 D_Γ为 Γ上所有与 Γ上的某个固定词度量拟等距的左不变伪度量所构成的集合。对于某个 C（取决于 ρ），伪度量 $\rho\in D_\Gamma$总是C-粗测地的，这意味着对于任意 x、$y\in\Gamma$，存在一个有限点集 $\eta(i)\in\Gamma$，其中 $i=0,\cdots,k$，使得 $x=\eta(0)$ $y=\eta(k)$，并且对任意 $k\geq i>j\geq0$，都有 $i-j-C\leq\rho(\eta(i)\ \eta(j))\leq i-j+C$。若存在正常数 λ、A，使得 $|\rho-\lambda\cdot\rho'|<A$，则称两个伪度量 ρ、ρ' 粗略相似；也就是说，经过正常数缩放后，ρ与 ρ'之间的距离有界。若 $\lambda=1$，则称它们粗等距。我们用 $\mathcal{D}_\Gamma$表示 D_Γ中元素的粗相似类集合。D_Γ中元素的两个具体例子是：

(1) 词度量：给定任意有限的、对称的生成子集 $S\subset\Gamma$，词度量 ρ_S是 D_Γ中的一个元素。事实上，词度量是双曲的，并且与任意固定的对称有限生成集拟等距。(2)几何作用：如果 Γ 在一个粗测地线伪度量空间（X，ρ_X）上具有几何作用，那么对于任意 $w\in X$，轨道伪度量 $\rho_X^w(g,\ h):=\rho_X(gw,\ hw)$ 根据米尔诺-施瓦茨引理属于D_Γ。如果我们选取另一个基点 $w'\in X$，由三角不等式可得

$$|\rho_X^w-\rho_X^{w'}|\leq\rho_X(w,w').$$

因此，ρ_X^w 和 $\rho_X^{w'}$ 粗等距，并且它们在 $\mathcal{D}_\Gamma$中诱导出点。

令 o表示 Γ的单位元。给定 $\rho\in D_\Gamma$和 $x\in\Gamma$，我们将 Γ中的x 的稳定长度 定义为 $\ell_\rho(x):=\lim_n\frac{1}{n}\rho(o,\ x^n)$，如下所示

$$\ell_\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\rho(o,x^n).$$

该定义仅取决于 x in Γ 中 Γ 的共轭类，因此在 Γ 的共轭类集合上定义了一个函数。直接验证可知，$\ell_\rho(x)>0$ 当且仅当 x 为无挠的。因此，子群 $\{x\in\Gamma\colon\ \rho(o,\ x)=0\}$ 是挠群。由于 Γ 是双曲的，每个

挠子群都是有限的 [GdlH90, Ch.8-Corollarie 36]。注意，对于任意伪度量 $\rho \in D_\Gamma$ 以及 $x,\ y \in \Gamma$，我们有

$$\rho(x,y) = \rho(y^{-1}x, o) \geq \ell_\rho(y^{-1}x).$$

若 $\rho(x,\ y) = 0$，则 $\ell_\rho(y^{-1}x) = 0$ 且 $y^{-1}x$ 是一个挠元。因此，若 Γ 无挠，则 Γ 上的任何伪度量都是真正的度量。

另一个自然的例子来源于*Green*度量，即由 Γ上的可容许随机游走得到的度量；它们并非自然地来源于 Gromov双曲群 [BHM11]上的作用。

A.2. **将测地流视为伪度量**。本文关注的主要例子是由 S上的测地流产生的伪度量。

若 $\Gamma = \pi_1(S)$，给定 S上的测地流 μ，以及 $[(X,\ \phi)] \in \mathcal{T}(S)$，再给定一个点 $w \in \mathcal{X}$，便可按如下方式在 Γ 上定义一个度量

$$\rho^w_{\mu,\mathcal{X}}(x,y) \coloneqq \rho_{\phi_*\mu}(\phi_*(y)w, \phi_*(y)w)$$

~对每个 $x,\ y \in \Gamma$，其中 $\phi_*\mu$是将 S上的流 μ推前得到的 X上的流 $\phi_*\mu$，而 $\rho_{\phi_*\mu}$是定义在 X上的伪度量，定义如下 [BIPP21, DRMG25]: 令 $[p,q)$，$(p,\ q]$~表示连接 $p,\ q \in X$的半闭半开 X-测地线段。

$$\rho_{\phi_*\mu}(p,q) \coloneqq \frac{1}{2}\left(\phi_*\mu(G([p,q)) + \phi_*\mu(G((p,q]\right).$$

交数的不变性以及 [BIPP21，引理 4.7]

$$\ell_{\rho^w_{\mu,\mathcal{X}}}(x) = i(\phi_*(\mu), \phi^*(x)) = i(\mu, x), \quad \text{for all } x \in \Gamma, \tag{45}$$

因此，$\rho^w_{\mu,\ \mathcal{X}}$的粗等距类仅取决于 μ，而与 $\mathcal{X} \in$ Teich(Γ) 的选择无关。我们将其粗相似类简称为 ρ_μ。在 [DRMG25]，中，第二作者详细研究了这些伪度量的性质。他们证明了

(1) ρ_μ 是 δ-双曲的，且 δ 双曲性由 μ 给出。(2) ρ_μ 是（等变等距于）一棵 $\mathbb{R}$-树，当且仅当 μ 是测度层状结构。(3) $\rho_\mu \in D_\Gamma$ 当且仅当 μ 是填充的。

最后一项也由 Cantrell-Reyes [CR25] 证明。

A.3. **膨胀与熵**。以下内容将填充测地流中的膨胀推广至此情形。

定义 A.1. 对于两个 ρ、$\rho' \in D_\Gamma$，我们按以下公式定义其膨胀

$$\mathrm{Dil}(\rho, \rho') \coloneqq \sup_{[x] \in [\Gamma']} \frac{\ell_{\rho'}(x)}{\ell_\rho(x)}$$

其中，$[\Gamma']$表示共轭类 $[x]$的子集，对于 $x \in \Gamma$，使得 $\ell_\rho(x) > 0$（因此，$\ell_{\rho'}(x) > 0$）。

容易看出，对于任意三元组 $\rho,\ \rho',\ \rho'' \in D_\Gamma$，$\mathrm{Dil}(\rho,\ \rho'') \leq \mathrm{Dil}(\rho,\ \rho')\,\mathrm{Dil}(\rho',\ \rho'')$。

$\rho \in D_\Gamma$的另一个相关量是其熵。

$$h_\rho \coloneqq \limsup_n \log |\{[x] \in \Gamma : \ell_\rho(x) \leq n\}|/n,$$

可以证明（参见 Cantrell-Tanaka）它与以下量相同

$$v_\rho \coloneqq \lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} \log \#B(o,r),$$

其中 $B(o,\ r) \coloneqq \{y \in \Gamma\colon\ d(y,o)\ < r\}$。在 [CT25，命题 3.1] 中证明了，事实上 ，

$$h_\rho = v_\rho.$$

A.4. **曼哈顿曲线**。曼哈顿曲线最初是在秩一对称空间上的等距作用背景下引入的 [Bur93]。我们遵循 Cantrell-Tanaka 的定义。

定义 A.2 。设 ρ、$\rho' \in D_\Gamma$。ρ、ρ' 的曼哈顿曲线是凸集的边界 t

$$C_{\rho'/\rho} \coloneqq \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \sum_{x\in\Gamma} e^{-a\rho'(o,x)-b\rho(o,x)} < \infty\}.$$

注意，如果 $a = 0$，则该和是 ρ 关于参数 b的庞加莱和。因此，所得级数的临界指数是使该级数收敛的 b中的下确界。类似地，对每个$t \in \mathbb{R}$，令 $\theta_{\rho'/\rho}\ (t)$ 表示级数的临界指数

$$s \mapsto \sum_{x\in\Gamma} e^{-t\rho'(o,x)-\rho d(o,x)}.$$

与熵的情形一样，曼哈顿曲线也可以等价地通过稳定长度而非距离，并对共轭类进行计数来定义，如下所示。令 C_M 为 $\mathbb{R}^2$ 给出的子集

$$\mathrm{C}^{\ell}_{\rho'/\rho} \coloneqq \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : Q(a,b) < \infty\}$$

其中

$$Q(a,b) \coloneqq \sum_{[x]\in[\Gamma]} \exp(-a\ell_\rho(x) - b\ell_{\rho'}(x)).$$

那么 $\mathrm{C}^{\ell}_{\rho'/\rho} = C_{\rho'/\rho}$。下文中，若不强调其对 ρ, ρ' 的具体依赖，我们将直接称其为 $C_{\rho'/\rho}$ 或 C_M。Cantrell-Tanaka 证明了以下结论。

定理 A.3. 对于 $\rho, \rho' \in D_\Gamma$.

(1) $\theta_{\rho'/\rho}$ 是凸的、递减的且连续可微。*(2)* $\theta_{\rho'/\rho}$ 经过点 $(0,v_\rho)$ 和 $(v_{\rho'}, 0)$，当且仅当 ρ, ρ' 粗略相似时，它在这两点之间是一条直线。*(3)*

$$-\theta'_{\rho'/\rho}(v_{\rho'}) \le \frac{v_\rho}{v_{\rho'}} \le -\theta'_{\rho'/\rho}(0),$$

且当且仅当 ρ和 ρ' 粗略相似时，这两个等式都成立。

(4) ρ, ρ' 当且仅当它们具有成比例的标记长度谱时，才粗略相似 .

对于某些伪度量对，例如词度量或 Green度量， $C_{\rho'/\rho}$ 已知是实解析的。Cantrell-Reyes 还证明，对于 ρ， ρ' 并非粗略相似的情形， $\theta_{\rho'/\rho}$ 实际上是严格凸的 [CR24，命题 2.3]。

Cantrell-Tanaka 在 [CT25，定理 1.2] 中证明了以下结论

定理 A.4. 对于任意一对(ρ, ρ')，若 $\rho, \rho' \in D_\Gamma$，则下列极限（称为的平均畸变和 ρ' ）存在：

$$\tau(\rho'/\rho) \coloneqq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\#B(o,r)} \sum_{x\in B(o,r)} \frac{\rho'(0,x)}{r},$$

其中球 $B(o,r)\colon = \{y \in \Gamma | \rho(y,o)\ \le r\}$。此外，

$$\tau(\rho'/\rho) \ge \frac{v}{v'}$$

其中， v 是 ρ 和 v'的指数增长率， ρ'是指数增长率。此外，以下条件等价：

（*1*）等式 $\tau(\rho'/\rho) = v/v'$ 成立；（*2*）存在一个常数 $c > 0$，使得对所有 $[x] \in [\Gamma]$都有 $\ell'([x]) = c\ell([x])$；（*3*） ρ和 ρ' 粗略相似。

正如 Cantrell-Tanaka 中所证明的，可以证明，平均畸变也可等价地用稳定长度以及稳定长度非零的共轭类来定义，如下所示

$$\tau(\rho'/\rho) \coloneqq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{|\{[x] \in [\Gamma'] : \ell_\rho(x) \le r\}|} \sum_{\ell_\rho(x)\le r} \frac{\ell_{\rho'}(x)}{r}.$$

一般而言，平均畸变在 ρ，ρ' 中并不对称。它定义良好、有限且为正。

A.5. **双曲势**。近期的研究 [CRS24] 指出，Cantrell-Tanaka 论文 [CT25] 中与帕特森-沙利文构造相关的一些变体，可以从 $\mathcal{D}_\Gamma$ 推广到他们引入的更一般的度量势空间 度量势 $\mathcal{H}_\Gamma^{++}$，我们将在下文概述这一空间。粗略地说，这些是度量结构的推广，允许度量具有非对称性并取负值，同时其稳定长度仍为正。

我们将讨论如何进一步将 d 上的非对称度量扩展到 $\mathcal{H}_\Gamma^{++}$。

根据 [CT25，CRS24], 我们称 ψ 为一个双曲度量势，若它是一个 Γ 左不变函数 $\psi\colon\ \Gamma\times\Gamma\to\mathbb{R}$ 并且对每个 $\rho_0 \in D_\Gamma$，都存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$(x|y)_z^\psi < C(x|y)_z^{\rho_0} + C,$$

其中

$$(x|y)_z^\psi \coloneqq \frac{1}{2}\left(\psi(x,z) + \psi(z,y) - \psi(x,y)\right).$$

所有双曲度量势构成的空间记为 H_Γ。类似地，我们可以对粗相似的等价关系取商，即两个双曲度量势 ψ, ψ' 等价，当且仅当存在常数 $k, A > 0$ 使得

$$|k\cdot\psi - \psi'| < A.$$

最后，若存在 $\rho_0 \in D_\Gamma$ 使得$\ell_\psi \ge \ell_{\rho_0}$，我们称 ψ 为真双曲度量势，并将这类元素构成的空间记为 H_Γ^{++}。由于这在粗相似意义下定义良好，我们可以给出下一个定义。

定义 A.5. 度量势空间定义为真双曲度量势的粗相似类所构成的空间，记为 $\mathcal{H}_\Gamma^{++}$。

按照 [CT25], 的说法，若存在一个将 ψ 拟延拓至 $\Gamma\times(\Gamma\cup\partial\Gamma)$ 的函数 $\psi(\cdot|\cdot)_0\colon\ \Gamma\times(\Gamma\cup\partial\Gamma) \to \mathbb{R}$，以及一个常数 $C \ge 0$，使得

$$\limsup_{n\to\infty} \psi(x|\zeta_n) - C \le \psi(x|\zeta)_o \le \liminf_{n\to\infty} \psi(x|\zeta_n')_o + C$$

对所有 $(x,\ \zeta) \in \Gamma\times(\Gamma\cup\partial\Gamma)$ 以及所有序列 (ζ_n)，$(\zeta_n') \in \zeta$，均成立。于是可以定义类似的布塞曼函数 $(x,\ \zeta) \in \Gamma\times\partial\Gamma$,

$$\beta_o^\psi(x,\zeta) \coloneqq \sup\{\limsup_n(\psi(x,\zeta_n) - \psi(o,\zeta_n)) : (z_n) \in \zeta\}.$$

如果 ψ 是 Γ不变的，则 β_0^ψ 满足

$$|\beta_0^\psi(xy,\zeta) - (\beta_0^\psi(y,x^{-1}\zeta) + \beta_o^\psi(x,\zeta))| \le 4C.$$

现在，我们将 Cantrell-Tanaka 对（RG）的定义（参见 [CT25，第 2.6] 节）从关于（ψ， d）的情形推广到关于（ψ'， ψ）的情形，其中 $\psi \in H_\Gamma^{++}$ 且 $\psi' \in H_\Gamma$。如果存在 $C > 0$ 使得.....，则称 ψ' 满足相对于 ψ 的（RG）

$$(x|y)_z^{\psi'} \leq C(x|y)_z^{\psi} + C$$

对所有 x， y， $z \in \Gamma$。

我们注意到，当 $\psi = d \in D_\Gamma$ 时，后一个定义等价于 Cantrell-Tanaka 对配对 (d， ψ)、$d \in D_\Gamma$、 $\psi \in H_\Gamma^{++}$ 的定义；参见 [CRS24，命题 3.1]。

特别是，我们将在此指出，实际上，定理 A.4 可以提升为 H_Γ^{++}，如下所示。

定理 A.6。 对于任意满足 ψ、$\psi' \in H_\Gamma^{++}$ 的配对 (ψ, ψ')，以下极限（称为 ψ 和 ψ' 的平均畸变）存在：

$$\tau(\psi'/\psi) := \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\#C^\psi(r)} \sum_{x\in C^\psi(r)} \frac{\ell_{\psi'}([x])}{r},$$

其中，球 $C^\psi(r)\colon = \{[y]] \in [\Gamma'] \mid \ell_\psi([y]) \leq r\}$。此外，

$$\tau(\psi'/\psi) \geq \frac{h(\psi)}{h(\psi')}$$

其中 $h(\psi)$（分别为 $h(\psi')$）是 ψ （分别为 ψ'）的熵。此外，以下条件等价：

(1) 等式 $\tau(\psi'/\psi) = h(\psi)/h(\psi')$ 成立；*(2)* 存在一个常数 $c > 0$，使得对所有 $[x] \in [\Gamma]$都有 $\ell_{\psi'}([x]) = c\ell_\psi([x])$；*(3)* ψ 与 ψ' 粗略相似。

首先，我们注意到 [CT25，命题 2.7] 对于对 $(\psi, \psi') \in H_\Gamma^{++} \times H_\Gamma$ 的以下推广，其中 ψ' 关于 ψ 满足（RG）。证明与该命题中的相同，只需将其记号中的 ψ 替换为 ψ'，将 d 替换为 ψ，并定义

$$O^\psi(x, R) := \{\zeta \in \partial\Gamma : (\zeta|o)_x^\psi \leq R\}.$$

命题 A.7。 对于 $\psi \in H_\Gamma^{++}$，设 $\psi' \in H_\Gamma$ 相对于 ψ 满足（*RG*）。则级数 s 中 θ 的收敛横坐标为

$$\sum_{x\in\Gamma} \exp(-\psi'(o, x) - s\psi(o, x)),$$

是有限的，并且存在一个概率测度μ_ψ 在 $\partial\Gamma$ 上满足（*QC*），其指数为 θ，相对于（ψ', ψ）而言。此外，每个满足（*QC*）的有限博雷尔测度 μ 都具有以下性质：

$$(C')^{-1} \exp(-\psi'(o, x) - \theta\psi(o, x)) \leq \mu(O^\psi(x, R)) \leq C' exp(-\psi'(o, x) - \theta\psi(o, x))$$

对所有 $x \in \Gamma$，其中 $C' > 0$ 是一个取决于 R 以及（*RG*）定义中的常数 C 的常数。

定理 *A.6* 的证明。命题 A.7 使我们能够将 CT 中的引理 2.8 和引理 2.9 推广到对 (ψ, ψ')，方法仍是进行相同的替换。随后可利用这些结果证明 CT 中推论 2.10、命题 2.11、引理 2.12 和推论 2.13 的对应版本。进而，这些结果可用于确立 CT 中引理 3.5 和引理 3.6 的推广。引理 3.5 用于证明定理 3.12 的推广，而我们将依赖这一结果。引理 3.5 和引理 3.6 都用于证明 CT25 的定理 3.7] 的推广。接着，利用推论 2.10、引理 2.12、引理 3.5 和定理 3.7，证明 CT25 的定理 3.10] 的对应版本。最后，定理 3.12、引理 3.4、定理 3.7 和定理 3.10 的推广确立了定理 1.2 的对应版本。

最后，我们使用关于共轭类和稳定长度的类似推广，以及曼哈顿曲线的相应推广；后者可由 CT25 的命题 3.1] 的推广推出。□

于是得到以下结果，其证明思路与 [CT25 中的命题 3.1],类似，其中 ψ' 和 ψ的膨胀 Dil(ψ'， ψ) 以类似的方式定义。

引理 A.8. 对于任意一对伪度量 $\psi,\psi' \in H_\Gamma^{++}$ ，有

$$\tau(\psi'/\psi) \le \mathrm{Dil}(\psi', \psi).$$

证明。 对于足够大的 $L > 0$，以及每个 $a \in \mathbb{R}$

$$\theta(a) \coloneqq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\substack{x\in\Gamma \\ |\psi(o,x)-n|\le L}} e^{-a\psi'(o,x)}$$

and

$$\Theta(a) \coloneqq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\substack{[x]\in[\Gamma'] \\ |\ell_\psi(x)-n|\le L}} e^{-a\ell_{\psi'}(x)}.$$

对于每个共轭类 $[x] \in [\Gamma']$，有

$$\mathrm{Dil}(\psi', \psi) \ge \frac{\ell_{\psi'}(x)}{\ell_\psi(x)}.$$

特别地，对于每个 $a > 0$ 和每个 $n \ge 0$，有

$$\sum_{[x]:|\ell_\psi(x)-n|\le L} e^{-a\ell_{\psi'}(x)} \ge c \cdot e^{-a\cdot \mathrm{Dil}\cdot n}.$$

根据 [CT25、命题 3.1]、 $\theta(a) = \Theta(a)$ 的推广，因此，对 n 取对数并除以 n，然后在 $n \to \infty$ 时取上极限，我们得到

$$\theta(a) \ge -a \cdot \mathrm{Dil}(\psi', \psi).$$

根据 [CT25、定理 3.7，]在 $\mathbb{R}$ 上可微，并且 $\theta'(a) = \tau_{a,\ b}$，其中 $\tau_{a,\ b}$ 是点对（a， b） $\in C_M$ 的函数。因此，

$$-\frac{\theta(a)}{a} \le \mathrm{Dil}(\psi', \psi)$$

取 $\lim a \to 0^+$ 并利用 θ 的可微性，

$$-\theta'(0) \le \mathrm{Dil}(\psi', \psi).$$

根据 [CT25、定理 3.12], ，此外，$\tau_{0,\ v} = \tau(\psi'/\psi)$。因此， $-\theta'(0) = \tau(\psi'/\psi)$，结论得证。□

我们将使用引理 A.8 来证明以下命题。

命题 A.9。函数

$$d(\psi, \psi') \coloneqq \log\left(\mathrm{Dil}(\psi, \psi')\frac{h(\psi')}{h(\psi)}\right).$$

是 $\mathcal{H}_\Gamma^{++}$ 上的非对称度量，即 d 非负、正定，并满足三角不等式。

证明。 由定理 A.6 和引理 A.8 可得

$$h(\psi)/h(\psi') \leq \tau(\psi'/\psi) \leq \mathrm{Dil}_+(\psi', \psi).$$

因此， $d(\psi, \psi') \geq 0$。此外，由这些不等式可知，若 $d(\psi, \psi') = 0$，则 $h(\psi)/h(\psi') = \mathrm{Dil}_+(\psi', \psi)$，从而 $h(\psi)/h(\psi') = \tau(\psi'/\psi)$。因此，根据定理 A.6 ψ'， ψ 粗略相似，这证明了 d的非退化性。三角不等式可直接由以下事实推出：和的上确界小于或等于各项上确界之和，以及对数的单调性。□

A.6. **立方化**。空间度量势$\mathcal{H}^{++}_{\Gamma}$ 上的这一非对称距离 d，是对度量结构空间 $\mathcal{D}_\Gamma$上的非对称距离的推广。它也推广了许多其他语境中考虑的非对称距离。我们已在第 9 节见过其中一些语境，包括许多源自测地流的情形，以及更一般地，源自 Anosov 表示的长度。另一个与本文关系不那么密切的例子，是对 Γ进行立方化，即 Gromov双曲群 Γ 在熵为1的超平面本质 CAT(0) 立方复形 $\mathcal{X}$ 上的本质几何作用。更一般地，可以考虑熵为1的立方体 [BF21]；立方体是立方化的一种推广，其中边距离可以取任意正实数，而不只是正整数。“本质”和“超平面本质”的定义超出了本文范围，读者可参阅所引论文。这里包括许多自然源自曲面上的闭曲线，或与拟福克斯 3-流形相关的拟圆不变集的立方化实例 [BR24]。几何作用于立方体上的标记长度谱刚性已在 [BF21]中证明。

A.7. **曲面群上的测地流**。事实上，它在射影填充测地流上诱导出一个非对称度量。

引理 A.10。从 $\mathcal{C}_{fill}$ 到 $D_{\pi_1(S)}$ 的映射 $\mu \mapsto \rho_\mu$ 诱导出从 $\mathbb{P}\mathcal{C}\mathit{fill}$ 到 $\mathcal{D}_{\pi_1(S)}$的嵌入。

证明。该证明并非新内容（参见 [CR25, Theorem 1.11], [DRMG25, Theorem C]），但为完整起见，我们在此概述其证明。测地流 μ 是填充的，当且仅当 ρ_μ 是适当的。此外，Γ 在 ρ_μ 上的作用是共有界的，因此，根据米尔诺-斯瓦尔茨引理，ρ_μ 属于 D_Γ。因此，要证明该映射是一个嵌入，只需证明：由填充测地流 μ, μ' 产生的两个伪度量 $\rho = \rho_\mu, \rho' = \rho_{\mu'}$ 是粗等价的，当且仅当这些流彼此成倍数。假设存在常数 $k, A > 0$，使得

$$|\rho - k \cdot \rho'| < A$$

取 $g \in \pi_1(S)$，令 $\tilde{g}$ 为与 g 和$x \in \tilde{g} \subset \mathbb{H}^2$相关的覆盖变换的双曲轴。我们有

$$-A < \rho_\mu(x, g^n x) - k \cdot \rho_{\mu'}(x, g^n x) < A.$$

由 x的选取可知，对于每个$g \in \pi_1(S)$和每个 $n \in \mathbb{N}$，都有$\rho_\mu(x, g^n x) = i(\mu, g^n)$，且$\rho_{\mu'}(x, g^n x) = i(\mu', g^n)$。将前面的不等式除以 n 并令$n \to \infty$取极限，得到对于每个 $g \in \pi_1(S)$，都有 $i(\mu, g) = i(k \cdot \mu', g)$。根据 [Ota90 定理 2],，有 $\mu = k \cdot \mu'$。反向蕴含显然。□

由此可得

命题 A.11。 将 d 限制到 $\mathcal{H}^{++}_{\pi_1 S}()$ 内部的 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$ （的像）上，诱导出一个非对称距离 $d_{\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}}$，其在 $\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}$ 上定义为

$$d_{\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}}(x, y) = \log \left(\sup_{\boldsymbol{c} \in \mathrm{cc}} \frac{i(x, \boldsymbol{c})}{i(y, \boldsymbol{c})} \cdot \frac{h(x)}{h(y)} \right).$$

证明。我们有

$$d_{\mathbb{P}\mathcal{C}_{fill}}(x,y)=\log\left(\sup_{g\in\Gamma}\frac{\ell_{\rho_y}(g)}{\ell_{\rho_x}(g)}\cdot\frac{h(\rho_y)}{h(\rho_x)}\right)=\log\left(\sup_{\boldsymbol{c}\in\mathrm{cc}}\frac{i(y,\boldsymbol{c})}{i(x,\boldsymbol{c})}\cdot\frac{h(y)}{h(x)}\right)$$

其中，第一个等式根据度量 d 的定义成立，第二个等式根据公式 45 成立，因此我们有$i(x,\ \boldsymbol{c})=\ell_{\rho_x}(\boldsymbol{c})$，从而也有 $h(x)=h(\rho_x)$。□

A.8. **上的非对称度量是测地的**。给定两个伪度量 $\rho,\ \rho'$，令 $\theta_{\rho'/\rho}(t)$ 为它们的曼哈顿曲线。

下一个结果包含于 [CR25，定理 1。2], 其中尤其指出， $\mathcal{D}_\Gamma$ 中任意两点之间都存在无参数化的测地线段。

命题 A.12。给定两个伪度量 $\rho,\rho'\in D(\Gamma)$。对于 $t\in\mathbb{R}$，令 $\rho_t:=t\rho+\theta(t)\rho'$。那么，对于每个 $r<s<t$，我们有

$$d_{\mathrm{sym}}([\rho_r],[\rho_t])=d_{\mathrm{sym}}([\rho_r],[\rho_s])+d_{\mathrm{sym}}([\rho_s],[\rho_t]).$$

以下是一个一般性引理，指出对称化度量的测地线也是非对称度量的测地线。

命题 A.13. 设(X,d) 是一个配备了非对称度量 d 的度量空间，并设$d_{\mathrm{sym}}(x,y):=d(x,y)+d(y,x)$ 对每个 $x,y\in X$ 都成立。若 γ 是连接 $x,y\in X$ 的 d_{sym}测地线，则 γ 是连接 x 和 y 的 d 测地线，也是连接 y 和 x 的 d测地线。

证明。设 $\gamma\colon[0,1]\to X$ 是相对于 d_{sym} 的测地线，即对每个 $0\le s<t<u\le1$，都有

$$d_{\mathrm{sym}}(\gamma(s),\gamma(u))=d_{\mathrm{sym}}(\gamma(s),\gamma(t))+d_{\mathrm{sym}}(\gamma(t),\gamma(u)).$$

将 d_{sym} 的定义展开，并把各项移至等式一侧，可得

$$[d(\gamma(s),\gamma(u))-d(\gamma(s),\gamma(t))-d(\gamma(t),\gamma(u))]+[d(\gamma(u),\gamma(s))-d(\gamma(u),\gamma(t))-d(\gamma(t),\gamma(s))]=0.$$

由于根据 d 的三角不等式，两个括号内的项都是 ≤0，因此它们都必须为零。于是结论成立。□

参考文献

[AB06] Charalambos D. Aliprantis 和 Kim C. Border。《无穷维分析》。Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006年。[Aze24] Aitor Azemar。Teichmüller 度量的视界边界的定性描述。《代数与几何拓扑》，24(7)：3919–3984，2024年。[Bal95] Werner Ballmann。《非正曲率空间讲义》，第25卷《DMV 研讨会》。Birkhäuser 出版社，巴塞尔，1995年。附录由 Misha Brin 撰写。[BCLS18] Martin Bridgeman、Richard Canary、François Labourie 和 Andres Sambarino。Hitchin 表示的简单根流。《专用几何》，192：57–86，2018年。[Ben97] Yves Benoist。线性群的渐近性质。《几何与泛函分析》，7(1)：1–47，1997年。[BF21] Jonas Beyrer 和 Elia Fioravanti。CAT(0) 立方复形上的交比与标记长度谱刚性。《伦敦数学会杂志》，104(5)：1973–2015，2021年。[BHM11] Sébastien Blachère、Peter Haïssinsky 和 Pierre Mathieu。双曲群的调和测度与拟共形测度。《高等师范学校科学年刊，第四辑》，44(4)：683–721，2011年。[BIPP21] M. Burger、A. Iozzi、A. Parreau 和 M. B. Pozzetti。特征簇的流、短 systole 与紧化。《伦敦数学会会刊》（第3辑），123(6)：565–596，2021年。[BIPP24] Marc Burger、Alessandra Iozzi、Anne Parreau 和 Maria Beatrice Pozzetti。正交比、重心、树及其在极大表示中的应用。《群、几何与动力系统》，18(3)：799–847，2024年。[BL17] Anja Bankovic 和 Christopher J. Leininger。平坦度量的标记长度谱刚性。《美国数学会会刊》，370(3)：1867–1884，2017年。

[Bon86] Francis Bonahon。三维双曲流形的端部 158，1986 2 124 1 71。《数学年刊》（），（）：–。[Bon88] Francis Bonahon。通过测地流研究 Teichmüller 空间的几何。《数学发明》，92 162，1988 1 139( )：–。[BPS19] Jairo Bochi、Rafael Potrie 和 Andrés Sambarino。阿诺索夫表示与支配分裂。《欧洲数学学会杂志》，11：3343–3414，2019年。[BR24] Nic Brody 和 Eduardo Reyes。通过立方化逼近双曲格，2024年。[Bur93] Marc Burger。秩2中的交数、曼哈顿曲线与帕特森–沙利文理论。《国际数学研究通报》，1993(7)：217–225，1993年。[CDPW24] León Carvajales、Xian Dai、Beatrice Pozzetti 和 Anna Wienhard。阿诺索夫表示的 Thurston 非对称度量。《群、几何与动力学》，2024年。2024年7月24日在线优先发表。[CFF92] C. Croke、A. Fathi 和 J. Feldman。非正曲率曲面上的标记长度谱。《拓扑学》，31(4)：847–855，1992年。[CMGR] Stephen Cantrell、Dídac Martínez-Granado 和 Eduardo Reyes。双曲群的格林度量的稠密性。准备中。[CR24] Stephen Cantrell 和 Eduardo Reyes。从子集上的刚性得到的标记长度谱刚性，2024年。[CR25] Stephen Cantrell 和 Eduardo Reyes。双曲群的曼哈顿测地线与度量结构空间的边界。《赫尔维蒂数学评论》，100(1)：11–59，2025年。[CRS24] Stephen Cantrell、Eduardo Reyes 和 Cagri Sert。联合平移谱与曼哈顿流形，2024年。[CT24] Stephen Cantrell 和 Ryokichi Tanaka。双曲群上的拓扑流不变测度与无穷远处的测度。《现代动力系统杂志》，20：215–274，2024年。[CT25] Stephen Cantrell 和 Ryokichi Tanaka。曼哈顿曲线、拓扑流的遍历理论与刚性。《几何与拓扑》，29(4)：1851–1907，2025年。[DK00] Françoise Dal’Bo 和 Inkang Kim。Zariski 稠密子群的共轭判据。《法国科学院院报》—数学系列，330(8)：647–650，2000年。[DK22] Subhadip Dey 和 Michael Kapovich。阿诺索夫子群的帕特森–沙利文理论。《美国数学会会刊》，375(12)：8687–8737，2022年。[DLR10] Moon Duchin、Christopher J. Leininger 和 Kasra Rafi。平坦度量的长度谱与退化。《数学发明》，182(2)：231–277，2010年。[Dow91] Tomasz Downarowicz。极小流的不变测度的 Choquet 单纯形。《以色列数学杂志》，74(2-3)：241–256，1991年。[DPS12] Fran¸çoise Dal’bo、Marc Peigné 和 Andrea Sambusetti。负曲率流形的视界边界与射线的几何。《太平洋数学杂志》，259(1)：55–100，2012年。[DRMG25] Luca De Rosa 和 Dídac Martínez-Granado。测地流的对偶空间。《拓扑学杂志》，2025年。即将出版。[ELS22] Viveka Erlandsson、Christopher J. Leininger 和 Chandrika Sadanand。双曲锥度量与台球。《数学进展》，409：论文编号108662，74页，2022年。[ES22] Viveka Erlandsson 和 Juan Souto。测地流与 Mirzakhani 曲线计数，《数学进展丛书》第 xii-151 卷。Birkhäuser Cham，2022年。[FF22] Ethan Fricker 和 Alex Furman。曲面群上的拟福克斯度量与负曲率度量。《以色列数学杂志》，251：365–378，2022年。[FK65] Robert Fricke 和 Felix Klein。《自守函数理论讲义》。第1卷：群论基础。第II卷：函数论论述及其应用，第3、4卷《Teubner 数学文库》。Johnson Reprint Corp.，纽约；B. G. Teubner 出版社，斯图加特，1965年。[FM11] Stefano Francaviglia 和 Armando Martino。外空间的度量性质。《数学出版物》，55(2)：433–473，2011年。[Fur02] Alex Furman。负曲率流形与群的粗几何视角，第149–166页。Springer 柏林海德堡，柏林、海德堡，2002年。[GdlH90] É. Ghys 和 P. de la Harpe，编。《根据 Mikhael Gromov 论双曲群》，第83卷《数学进展丛书》。Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1990年。瑞士双曲群研讨班论文，会议于1988年在伯尔尼举行。[GGKW17] Olivier Guichard、François Guéritaud、Fanny Kassel 和 Anna Wienhard。阿诺索夫表示与适当作用。《几何与拓扑》，21：485–584，2017年。[GK17] Fran¸çois Guéritaud 和 Fanny Kassel。几何有限双曲流形上的最大伸展层状结构。《几何与拓扑》，21(2)：693–840，2017年。[GM25] Krishnendu Gongopadhyay 和 Neelanjan Mondal。Margulis 时空上的 Thurston 非对称度量，2025年。

[Gro81] M. Gromov. 双曲流形、群与作用。载于《黎曼曲面及相关主题：1978年斯托尼布鲁克会议论文集》（纽约州立大学，纽约州斯托尼布鲁克，1978），《数学年刊研究》，第97号，第183–213页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1981年。[GW12] Olivier Guichard 和 Anna Wienhard。Anosov 表示：不连续域及其应用。《数学发明》，190：357–438，2012年。[HP97] Sa'ar Hersonsky 和 Frédéric Paulin。负曲率空间中离散等距群的刚性。《赫尔维蒂数学评论》，72(3)：349–388，1997年。[Hub61] H. Huber。双曲空间形式与运动群的解析理论。II. 数学年刊第142卷第385–398页（1961年）的补遗。《数学年刊》，143：463–464，1961年。[KL18] Michael Kapovich 和 Bernhard Leeb。对称空间及某些局部对称空间的芬斯勒边界化。《几何与拓扑》，22(5)：2533–2646，2018年。[KLP17] Michael Kapovich、Bernhard Leeb 和 Joan Porti。Anosov 子群：动力学与几何刻画。《欧洲数学杂志》，3：808–898，2017年。[KLP18] Michael Kapovich、Bernhard Leeb 和 Joan Porti。对称空间和欧氏建筑中拟测地线的Morse引理。《几何与拓扑》，22(7)：3827–3923，2018年。[KN10] Tom Klein 和 Andrew Nicas。Heisenberg群的视函数边界：Carnot–Carathéodory度量。《共形几何与动力系统》，14：269–295，2010年。[Lab06] François Labourie。Anosov流、曲面群与射影空间中的曲线。《数学发明》，165：51–114，2006年。[LOS78] J. Lindenstrauss、G. Olsen 和 Y. Sternfeld。Poulsen单纯形。《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》，28(1)：vi，91–114，1978年。[LS14] Lixin Liu 和 Weixu Su。Teichmüller 度量的视函数紧化。载于《特希米勒理论手册》第IV卷，IRMA数学与理论物理讲义第19卷，第355–374页。欧洲数学学会，苏黎世，2014年。[LSZ15] Lixin Liu、Weixu Su 和 Youliang Zhong。关于边界曲面Teichmüller空间上由长度谱定义的度量。《芬兰科学院数学学报》，40：617–644，2015年。[LW11] Bas Lemmens 和 Cormac Walsh。多面体Hilbert几何的等距变换。《拓扑分析杂志》，3(2)：213–241，2011年。[MGT26] Dídac Martínez-Granado 和 Dylan P. Thurston。测地流的交叉对偶。准备中，2026年。[Min05] Igor Mineyev。度量空间的流与拼接。《几何与拓扑》，9：403–482，2005年。[MOT24] Giuseppe Martone、Charles Ouyang 和 Andrea Tamburelli。通过树的核对极大分支进行闭球紧化。《代数与几何拓扑》，24(7)：3693–3717，2024年。[MT18] Joseph Maher 和 Giulio Tiozzo。弱双曲群上的随机游走。《纯粹与应用数学杂志》，742：187–239，2018年。[MZ19] Giuseppe Martone 和 Tengren Zhang。正比表示。《赫尔维蒂数学评论》，94(2)：273–345，2019年。[OR23] Eduardo Oregón-Reyes。双曲群上的度量结构空间。《伦敦数学学会杂志》(2)，107(3)：914–942，2023年。[OT21] Charles Ouyang 和 Andrea Tamburelli。Blaschke度量的极限。《杜克数学杂志》，170：1683–1722，2021年。[OT23] Charles Ouyang 和 Andrea Tamburelli。$SO_0(2,3)$-Hitchin分支的长度谱紧化。《数学进展》，420：论文编号108997，共37页，2023年。[Ota90] Jean-Pierre Otal。负曲率曲面的标记长度谱。《数学年刊》(2)，131(1)：151，1990年。[Phe01] Robert R. Phelps。《Choquet定理讲义》，数学讲义第1757卷。施普林格，柏林，第2版，2001年。[Pou61] E. B. Poulsen。一个具有稠密极点的单纯形。《傅里叶研究所年刊》，11：83–87，1961年。[PS16] Athanase Papadopoulos 和 Weixu Su。Teichmüller 空间上的Thurston 度量与映射类的平移距离。《芬兰科学院数学学报》，41(2)：867–879，2016年。[PS24] Huiping Pan 和 Weixu Su。Thurston度量的几何：综述。载于Ken'ichi Ohshika和Athanase Papadopoulos编《Thurston传统之三：几何与动力学》，第7–43页。施普林格，2024年。首次在线发表：2024年3月19日。[PT07] Athanase Papadopoulos 和 Guillaume Théret。关于 Thurston 的非对称度量所定义的拓扑。《剑桥哲学学会数学会刊》，142(3)：487–496，2007年。[Qui02] J.-F. Quint。高秩下的Patterson–Sullivan测度。《几何与泛函分析》，12(4)：776–809，2002年。[RS19] Kasra Rafi 和 Juan Souto。测地流与计数问题。《几何与泛函分析》，29(3)：871–889，2019年。

[Sam14a] Andrés Sambarino。超凸表示与指数增长。《遍历理论与动力系统》，34(3)：986–1010，2014年。[Sam14b] Andrés Sambarino。凸表示的定量性质。《赫尔维蒂数学评论》，89(2)：443–488，2014年。[Sam15] Andrés Sambarino。超凸表示的轨道计数问题。《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》，65(4)：1755–1797，2015年。[Sam24] Andrés Sambarino。遍历二分性报告。《遍历理论与动力系统》，44：236–289，2024年。[Sap24] Jenya Sapir。将Thurston度量扩展到射影填充流。《专用几何》，218(3)：论文编号78，共18页，2024年。[Sas22] Dounnu Sasaki。带尖点双曲曲面上的流与稠密性。《群、几何与动力学》，16(3)：1077–1117，2022年。[Shi25] Jiajun Shi。平坦度量空间上的Thurston 的非对称度量，2025年。[Tho19] Nicolas Tholozan。测地流的余循环、上同调与重新参数化。未发表PDF；可见ENS网站：https://www.math.ens.psl.eu/~tholozan/Annexes/CocyclesReparametrizations2.pdf.，2019年。[Thu98] William P. Thurston。双曲曲面之间的最小伸缩映射。arXiv:math GT/9801039，1998年。[Tit71] Jacques Tits。任意域上约化群的不可约线性表示。《克雷尔纯粹与应用数学杂志》，1971(247)：196–220，1971年。[Tri22] Marie Trin。通过测地流对Thurston 紧化：非紧有限面积曲面的情形，2022年。[Wal14a] Cormac Walsh。Thurston 的利普希茨度量的视界边界与等距群。载于《特希米勒理论手册》第IV卷，IRMA数学与理论物理讲义第19卷，第327–353页。欧洲数学学会，苏黎世，2014年。[Wal14b] Cormac Walsh。Hilbert 几何的视函数边界与等距群。载于《Hilbert几何手册》，IRMA数学与理论物理讲义第22卷，第127–146页。欧洲数学学会，苏黎世，2014年。[Wal18] Cormac Walsh。与无限维巴拿赫空间等距的Hilbert几何与Thompson几何。《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》，68(5)：1831–1877，2018年。

数学系，俄克拉荷马大学，榆树大道601号423室，诺曼，俄克拉荷马州 73019，USA
电子邮件地址：mjyothis@ou.edu

卢森堡大学数学系，德拉丰特大道6号，埃施叙尔阿尔泽特，L-4364，卢森堡电子邮件地址：didac.martinezgranado@uni.lu