arXiv:2601.02093v1 [math.AP] 5 Jan 2026

高维朗道算子的最优谱不等式

SEDEF OZCAN 和 MATTHIAS TAUFER

ABSTRACT. 我们证明了全空间及任意维数下朗道算子的最优谱不等式。谱不等式是指：对有限能量谱子空间中的函数，在采样集 $S \subset \mathbb{R}^d$上积分时，其 L^2-质量的下界。朗道算子是与恒定磁场相关的薛定谔算子，形式为 $(-\nabla + A(x))^2$，其中 A 是——在磁场不为零的情况下——无界矢势。我们的方法依赖于所谓的磁性伯恩斯坦估计和解析性，并借鉴了 Kovrijkine 在 Logvinenko-Sereda定理背景下采用的方法。我们推广了此前仅在 $d = 2$维中已知的结果。在 $d \geq 3$ 维中，主要困难在于磁性伯恩斯坦不等式；与二维情形相比，这些不等式带来了额外的复杂性，并需要更精细的估计。我们的结果对控制理论、谱理论和数学物理有直接推论，我们将在文中对此加以评论。

1. INTRODUCTION

Lebeau-Robbiano型谱不等式具有如下形式：

$$\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \exp(c\sqrt{E}) \|\phi\|^2_{L^2(S)} \quad \text{for all } f \in \operatorname{Ran} \mathbf{1}_{(-\infty,E]}(A)$$

其中， A 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$中的自伴椭圆微分算子， $S \subset \mathbb{R}^d$ 是一个适当的可测采样集，而 Ran $\mathbf{1}_{(-\infty,E]}(A)$是对应于 A、能量不超过 E 的谱子空间。它们也被称为定量唯一延拓原理或不确定性关系，并在抛物型方程的控制理论、谱理论和数学物理中发挥着重要作用。

在控制理论中，由 Lebeau 和 Robbiano 在 [LR95]发起、随后得到系统发展（例如见 [Mil04, TT11, LRL12] ）的一套如今已成为经典的框架表明，谱不等式蕴含可观测性估计，进而可推出带有内部控制的相关热方程的零可控性（见 S）。此外，常数 C 和 c 会直接且明确地影响相关的控制代价。事实上，近年来谱不等式已被用于证明全空间中各种抛物型问题的零可控性：经典热方程 [EV18, WWZZ19], ；某些亚椭圆二次方程 [BPS17, BJPS21],; 具有拉普拉斯-贝尔特拉米算子的热方程，其定义在带有解析势的黎曼流形上，并且该解析势具有渐近形式 $\mathbb{R}^d$ [LM19], ；带有有界势的热方程 [NTTV20a], ；带有幂增长势的热方程 [DSV24b], ；Shubin 算子 [AS24], ；二维朗道算子 [PT25], ；以及量子图 [EMS24]。

Date：2026年1月6日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：35Pxx。次要分类：35A23、93B05、82B44、35R03。*Key words and phrases.* 朗道算子、谱不等式、定量唯一延拓、磁导数、厚集。

在谱理论中，谱不等式已被用于证明扰动对谱影响的下界 [NTTV20b]，以及半经典特征值估计 [FLP25]。在数学物理中，谱不等式一直是理解量子系统的基石，尤其是在凝聚态物理中安德森局域化的相关研究背景下；参见 [TV15, ST20, CT25] 及其中的参考文献。

谱不等式与采样集 S 的几何性质之间的相互作用一直备受关注。所谓的厚集已成为热方程 [EV18, WWZZ19] 可观测性的自然且最优的集合类别。事实上，在这种情况下，对厚集导出的谱不等式的理解最为充分，因为拉普拉斯算子的谱子空间可以用傅里叶变换的支撑集来表述，因此谱不等式等价于经典 Kovrijkine-Logvinenko-Sereda 定理 [LS74, Kov00, Kov01]。遗憾的是，这种方法相当僵化，不太适合推广到加入一般电势或磁场等情形。因此，人们通常转而采用限制性更强的几何概念——均匀分布集；这类集合由开球组成，球的间距经过安排，使每个基本单元至少包含一个这样的球 [NTTV18, NTTV20b, DWZ20, DSV24a, DYZ26]。相应的谱不等式通常依赖于 Carleman 估计，这类估计要求更严格的几何条件，但允许将有界势视为自由拉普拉斯算子的扰动。沿着类似的 Carleman 型方法，也有一些关于有界磁势下谱不等式的研究，参见例如 [TT18]。然而，在 $\mathbb{R}^d$ 中，这相当于磁场在宏观尺度上趋于零（仅存在微小波动），因此特别排除了物理上最相关的均匀恒定磁场情形。全空间中的恒定磁场需要本质上无界的磁势，低阶项因而不再能作为扰动处理。事实上，令 $x = (x_1, \dots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d$ 为描述磁场的反对称矩阵，$B \in \mathbb{R}^{d\times d}$。相应的磁势和协变梯度为

$$A(x) = \tfrac{1}{2}Bx, \qquad \tilde{\nabla} := -i\nabla - A(x),$$

且磁拉普拉斯算子为

$$H_B := \tilde{\nabla}^2 = (-i\nabla - A(x))^2 .$$

该算子描述了处于均匀恒定磁场中的带电量子粒子。这里存在一定的规范不变性，对 A 的不同选择将得到相同的磁场 B，另见第2节；但无论如何，只要磁场 B不为零，每个相应的磁势 A 都必须无界，并且在 x中呈线性增长。

只要研究的是有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$，与恒定磁场对应的磁势就会保持有界；人们已利用这一点，通过 Carleman 估计推导出可控性（例如参见 [HKSY19]）。然而，这类估计本质上依赖于区域的直径，因此不可能是最优的，也无法推广到全空间情形。

对于具有恒定磁场的二维薛定谔算子，近期已在 [PT25] 中得到了一个最优谱不等式。据我们所知，本工作首次在 $\mathbb{R}^d$ 上自然的无界情形中研究磁拉普拉斯算子，建立了一个不依赖任何区域截断的谱不等式，并充分刻画了无界磁势与厚集几何之间的相互作用。其中的策略利用特征函数的解析性，采用了 [Kov00]，的伯恩斯坦型（或“解析延拓”）方法，另见 [ES21]。关键在于所谓的磁性

伯恩斯坦不等式，它将高阶磁导数表示为二维朗道算子的幂。适当的磁导数之和能够重新组合为二维朗道算子的幂，这似乎是与维数 $d = 2$ 有关的一种多少有些幸运的情形；在更高维中则不成立，见 [PT25，注释 6]。

本文克服了这一难题，并证明了 H_B on$\mathbb{R}^d$ 上的尖锐谱不等式。对于每个能级 $E > 0$ 以及每个按 [EV18, EV20]，意义下为厚的可测集 $S \subset \mathbb{R}^d$，我们证明

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le C(E, B, S)\, \|f\|^2_{L^2(S)}, \qquad f \in \operatorname{Ran} \mathbf{1}_{(-\infty,E]}(H_B),$$

其中，可观测性常数 $C(E, B, S)$ 是显式的，并且对能量 E、S 的几何形状以及磁场 B 的依赖是最优的。该估计重现了已知的二维朗道算子情形，并首次给出了一个对所有参数的依赖都完全显式的高维结果。我们的关键贡献是对由磁导数生成的代数进行更精细的分析，并建立相应估计：我们以非负项补全磁导数之和，再将其提升至适当的幂，从而得到磁薛定谔算子；这为 [PT25] 中对磁导数的代数分析方法补充了分析技巧（见第 5 节）。除了前文提到的抛物型问题的可控性、谱理论和安德森局域化方面的应用之外，我们还强调，现已处理具有实际物理意义的三维和四维情形 [LW13]。

本文结构如下：第2节回顾 H_B的谱性质；第4节证明解析性估计；第5节给出谱不等式及其对参数的尖锐依赖，并讨论指数的最优性和可能的推广。

2. Preliminaries

2.1. 记号。本文中我们始终假设维数为 $d \ge 3$。事实上，情形 $d = 2$最近已在 [PT25] 中得到处理；而在维数 $d = 1$ 下不存在非平凡的恒定磁场，相应的非磁性结论可归结为经典的Logvinenko–Sereda–Kovrijkine定理 [Kov00, Kov01]。

对于向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$，我们将其

$$|x| := \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{and} \quad |x|_1 := \sum_{i=1}^{d} |x_i|$$

分别记为其欧几里得范数和 ℓ^1-范数。对于矩阵 $M = (M_{kl}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$，我们将其记为

$$\|M\|_{\mathrm{f}} := \left(\sum_{j,l} |M_{jl}|^2 \right)^{1/2},$$

其弗罗贝尼乌斯范数，并由

$$\|M\|_1 := \max_{1\le l\le d} \sum_{k=1}^{d} |M_{kl}|,$$

由 ℓ^1-范数诱导的矩阵范数。表达式 Vol(S) 指可测集 d 的 $S \subset \mathbb{R}^d$ 维勒贝格测度，而 $\mathbf{1}_S$ 表示集合 S 的指示函数。特别地，给定自伴算子 A 和 $E \in \mathbb{R}$，我们用 $\mathbf{1}_{(-\infty,E]}(A)$ 表示

到 A 的谱子空间上的正交投影，该谱子空间对应于不超过 E 的能量。我们用 $\partial_i := \frac{d}{dx_i}$ 表示关于 x_i 坐标的偏导数。

本文的核心几何概念是厚集或相对稠密集。它们起源于傅里叶分析中所谓的Logvinenko-Sereda定理背景下 [LS74]，另见 [Pan61, Kac73, Kov00, Kov01]。

定义 2.1. 设 $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_d) \in (0,\infty)^d$ 且 $\rho \in (0,1]$。若可测集 $S \subset \mathbb{R}^d$ 满足：对于每个边长为 $(\ell_1, \cdots, \ell_d)$ 且平行于坐标轴的超矩形 Q，都有

$$\mathrm{Vol}(S \cap Q) \geq \rho \,\mathrm{Vol}(Q).$$

若 S 对于某个 $\ell \in (0,\infty)^d$ 和 $\rho > 0$ 是 (ℓ, ρ)-厚的，则称其为厚集。

(ℓ, ρ)-厚集必定占据每个与坐标轴平行的 $\mathbb{R}^d$ 中 ℓ-超矩形体积的至少 ρ 比例。它们可能相当不规则，甚至可能具有非空内部；利用正测度的史密斯-沃尔特拉康托尔集构造即可看出这一点。

近年来，它们在谱不等式研究中占据了重要地位 [EV18, WWZZ19, NTTV20b]，并且可视为能够成立谱不等式的最优集合。事实上，对于许多经典微分算子，例如带势的拉普拉斯算子，虽然基于厚集的谱不等式可能成立，但目前仍难以证明，相关研究通常转而采用一种限制更严格的设定，即所谓的均匀分布集（由球组成的集合，并且每个 $\mathbb{Z}^d$ 基本单元中恰好包含一个这样的球），参见 [NTTV18, NTTV20b]。

2.2. 磁薛定谔算子。没有磁场时，系统的动力学由负拉普拉斯算子 $-\Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial xj}^2$ 描述。存在磁场时，这一算子由磁薛定谔算子取代 $(i\nabla + A(x))^2$，其中 A: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是磁矢势。事实上，具有物理意义的并非向量场 A，而只有磁场 B，它由向量场的旋度 $B = \mathrm{rot}\, A$ 给出（类似于静电势，只有其梯度，也就是相对差值，会影响动力学）。这里存在规范不变性：任意满足 $\mathrm{rot}\, A' = 0$ 的矢势 A'，替换A 为 $A + A'$ 后，都会产生相同的动力学。实际上，B 是一个 2-形式，也就是说，它可以写成函数 B: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}(\binom{d}{2})$。特别地，在维数 $d = 1$ 中不存在磁场；在维数 $d = 2$ 中，磁场由每个点 $x \in \mathbb{R}^2$ 处的一个值确定；在维数 $d = 3$ 中，磁场由每个点 $x \in \mathbb{R}^3$ 处的一个三维向量确定；而在高维情形下，则由一个取值于 $\frac{d}{2}$ 的 $\mathbb{R}$ 值函数确定。如果磁势 A 有界，则可以得到许多结论，并且磁薛定谔算子可视为拉普拉斯算子 [的扰动 ¨TT18]。

然而，我们感兴趣的是一种本质上不同的情形，即恒定磁场。这些磁场必然源自无界矢势，因此，试图将相应的磁拉普拉斯算子视为无界区域上自由拉普拉斯算子的扰动来处理，注定徒劳无功。事实上，对磁薛定谔算子的一种解释是：拉普拉斯算子中的经典导数被磁导数取代；这些磁导数不再彼此对易，但其对易子包含了有关底层磁场的信息。采用一种特定的规范，即对称规范，便可得到以下定义。

定义 2.2. 设 $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 为表示恒定磁场的实反对称矩阵，并通过 $A(x) := \frac{1}{2}Bx, \quad x \in \mathbb{R}^d.$ 定义相应的磁矢势

于是，沿 k 个坐标方向的磁导数定义为

$$\tilde{\partial}_k := i\partial_k + A_k(x) = i\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} B_{kj}x_j, \quad \text{for } k = 1, \dots, d.$$

相应的磁拉普拉斯算子或朗道算子为

$$H_B := \sum_{k=1}^{d} \tilde{\partial}_k^2 = (-i\nabla - A(x))^2. \tag{2.1}$$

~ ~ ~算子 ∂_k 满足对易关系 $[\partial_k, \partial_l] = iB_{kl}$，因此生成一个反映底层磁场的非交换代数。方程 2.1 使我们能够将恒定磁场下的磁拉普拉斯算子解释为一种拉普拉斯算子的形式，也称为磁拉普拉斯算子。在本文余下部分，我们将广泛利用这一结构。值得注意的是，非交换磁导数代数历史悠久，也因其与海森堡李代数 [Tha 98]的联系而受到研究。我们首先讨论磁拉普拉斯算子的定义域，它与经典索伯列夫空间相似。

Defi义 2.3. 设 $m \in \mathbb{N}$。对于多重指标 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$，其中 $1 \le k \le m$，令

$$\tilde{\partial}^\beta := \tilde{\partial}_{\beta_1} \cdots \tilde{\partial}_{\beta_k}.$$

阶数为 m 的磁索伯列夫空间是

$$W_B^{m,2}(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \tilde{\partial}^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ for all } \beta \in \{1, \cdots, d\}^k \text{ for all } k \le m\}$$

当定义域明确时，我们记为 $W^{m}{}_{,B}{}^{2}$

$$W_B^{\infty,2}(\mathbb{R}^d) := \bigcap_{m \ge 1} W_B^{m,2}(\mathbb{R}^d).$$

简单来说，磁索伯列夫空间 $W^{\infty}{}_{,B}{}^{2}(\mathbb{R}^d)$ 由 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中所有各阶磁导数均存在且平方可积的函数组成。我们首先证明谱子空间值域 $\mathbf{1}_{(-\infty,E]}(H_B)$ 包含于 $W^{\infty}{}_{,B}{}^{2}(\mathbb{R}^d)$。为此，回顾一下 [Sj¨o91 中的以下辅助引理，引理 2.1]。

引理 2.1. 若 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 且 $H_B f \in W^{m}{}_{,B}{}^{2}$, $m \in \mathbb{N}$，则 $f \in W^{m+2}{}_{,B}{}^{2}$。

引理 2.2. 对任意 $E > 0$，值域 $\mathbf{1}_{(-\infty,E]}(H_B) \subset W^{\infty}{}_{,B}{}^{2}$。

引理 2.2 的证明见附录 A。

注 1. 我们来讨论朗道算子的谱，另请参见 [Gof10]。众所周知，在维数为 $d = 2$时，朗道算子具有纯离散谱，其特征值位于朗道能级处且具有无限重数 $\{B, 3B, 5B, \dots\}$，其中 $B > 0$ 为磁场强度。在高维情形下，情况更加复杂，并且根据维数的不同，可能出现离散谱或连续谱。

事实上，考虑一个实反对称矩阵 $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 以及相应的磁势 $A(x) = \frac{1}{2}Bx$。根据实反对称矩阵标准形 [HJ12、推论 2.5，11], 我们可以找到一个正交矩阵 $U \in O(d)$ 和正数 C_1,... , $C_m > 0$，满足 $2m = \mathrm{rank}(B)$，使得

$$\mathcal{C} := U^\top B U = \bigoplus_{j=1}^{m} \begin{pmatrix} 0 & C_j \\ -C_j & 0 \end{pmatrix} \oplus 0_{d-2m}.$$

对 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 应用酉变换 $(\mathcal{U}f)(y) = f(Uy)$，我们看到磁拉普拉斯算子 $H_B := (-i\nabla_x - A(x))^2$ 与 $(-i\nabla_y - A_{\mathcal{C}}(y))^2$，酉等价，其中 $A_{\mathcal{C}}(y) = \frac{1}{2}\mathcal{C}y$. 。由于 $\mathcal{C}$ 是分块对角的，每个非零 2×2 块仅作用于其自身的一对坐标，而其余 $d - 2m$ 个坐标对应于 B 的零空间，其中 $A_{\mathcal{C}}$ 为零。更明确地说，在第 i个二维平面中，我们有

$$A_{\mathcal{C},i}(y_i, y_{i+1}) = \tfrac{1}{2}C_i(-y_{i+1}, y_i), \qquad i = 1, \dots, m.$$

这意味着磁场在每个二维平面上独立作用，而在零空间中没有磁效应。

因此， H_B 分解为若干个二维朗道哈密顿量（每个的磁场强度均为 C_j）以及作用在 $\mathbb{R}^{d-2m}$ 上的标准拉普拉斯算子之和：

$$H_B \cong \sum_{j=1}^{m} H^{(2)}_{C_j} \otimes I + I \otimes (-\Delta_{\mathbb{R}^{d-2m}}).$$

每个 $H^{(2)}_{C_j}$ 都具有众所周知的离散朗道能级 $\{(2n_j + 1)C_j : n_j \in \mathbb{N}_0\}$，而零空间上的拉普拉斯算子则贡献连续谱 $[0, \infty)$ 。因此，根据 [Sch12，推论 7.25], ， H_B 的谱为

$$\sigma(H_B) = \Big\{ \sum_{j=1}^{m} (2n_j + 1)C_j + |\xi|^2 : n_j \in \mathbb{N}_0,\ \xi \in \mathbb{R}^{d-2m} \Big\},$$

特别地，

$$E_0 = \inf \sigma(H_B) = \sum_{j=1}^{m} C_j.$$

若 $d - 2m > 0$，尤其是当 d 为奇数时，每个离散的“朗道能级”都会因自由拉普拉斯算子的贡献而展宽为一个连续带。

最后，我们强调一下，以便后文使用： B 和 $\mathcal{C}$ 酉等价，因此具有相同的谱范数：

$$|B|_{\mathrm{op}} = \sup_{x \neq 0} \frac{|Bx|}{|x|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\mathcal{C}x|}{|x|} = |\mathcal{C}|_{\mathrm{op}}. \tag{2.2}$$

3. Results and Applications

本文的主要结果是关于恒定磁场下 $\mathbb{R}^d$ 上磁拉普拉斯算子 H_B 的如下尖锐谱不等式。

定理 3.1. 设 $S \subset \mathbb{R}^d$ 是一个 (ℓ, ρ)-厚集。则存在常数 $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$，它们仅依赖于维数和集合的结构，使得对每个能级 $E > 0$ 以及每个函数 $f \in \operatorname{Ran} \mathbf{1}_{(-\infty, E]}(H_B)$，以下不等式成立：

$$|f|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left(\frac{C_1}{\rho} \right)^{C_2 + C_3|\ell|_1\sqrt{E} + C_4|\ell|_1^2\sqrt{\|B^2\|_1}} |f|^2_{L^2(S)}.$$

定理 3.1 对磁拉普拉斯算子谱子空间中函数的唯一延拓性质进行了定量刻画：能量至多为 E 的函数，在厚集 S上不能任意小。控制常数随能量尺度 $\sqrt{E}$和磁场强度 $\|B^2\|_1^{1/2}$ 呈指数增长，更重要的是，还随厚集的尺度参数 $|\ell|_1$ 的平方呈指数增长。

我们通过以下观察补充主要结果，这些观察涉及指数的最优性以及几何假设的必要性：

- 指数中对尺度参数 $|\ell|_1$ 的二次依赖是最优的。通过构造一种特定的孔洞分布，并以高斯基态检验该不等式，可以证明指数至少必须按$|\ell|_1^2$增长。这一尖锐性结果在备注3中正式陈述并证明（见第5.2节）。
- 集合 S 的几何厚度不仅足以保证谱不等式成立，也是其成立的必要条件。在定理 4.4 中，我们证明，若这类谱不等式对低能谱子空间中的所有函数都成立，那么 S 必为厚集。证明采用反证法，通过对基态进行磁平移，检测非厚集中的任意大“孔洞”。

定理 3.1 中建立的尖锐谱不等式，是数学物理若干领域中的一项关键分析工具。下面我们概述定量唯一延拓性质所带来的直接推论，并介绍三个具体应用：

- 磁热方程的零可控性。谱不等式的一个直接应用（结合 Lebeau–Robbiano策略 [LR95]）是由磁拉普拉斯算子控制的热方程的零可控性。考虑在 $\mathbb{R}^d$ 上的系统：

$$\begin{cases} (\partial_t + H_B)u(t,x) = \mathbf{1}_S(x) f(t,x) & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中， S 是一个厚集， f 是支撑在 S 上的控制函数。定理 3.1 表明，该系统在任意时间 $T > 0$ 内均可零控制。也就是说，对于任意初始状态 $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$，存在一个控制 $f \in L^2((0,T)\times S)$，使得解满足 $u(T,\cdot) \equiv 0$。此外，我们的常数对几何的显式依赖使得能够精确估计控制代价，并将 [WWZZ19] 的结果推广到一般厚集。

- 半经典界与特征值和。Frank、Larson 和 Pfeiffer [FLP25] 最近运用这一谱不等式的二维版本，为朗道哈密顿量推导出了改进的半经典估计。具体而言，他们针对有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上的特征值和，建立了加强版的 Berezin-Li-Yau 和 Kr¨oger 不等式。通过去除维数限制，定理 3.1 提供了必要的分析工具，使得他们的方法能够推广到 $\mathbb{R}^d$。特别是，这为证明如下结论铺平了道路：对于有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 3)$，特征值和满足反映磁几何的尖锐下界；该下界通过一个与 Ω 的厚度相关的精确几何因子，对标准 Weyl渐近作出修正。

- 连续随机算子的安德森局域化。我们的结果提供了定量唯一延拓估计，这是分析带磁场的多维安德森哈密顿量所必需的。考虑随机算子

$$H_\omega = H_B + V_\omega \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^d), \quad d \geq 3,$$

其中 V_ω 是一种随机合金型势。自举多尺度分析（MSA）中证明安德森局域化（纯点谱）的关键步骤之一是 Wegner 估计，它要求将势的不确定性传递到谱投影上。定理 3.1 的尺度不变性使得人们能够证明， H_ω 的有限体积限制的特征值会随势的变化而改变，

这是在维数为 $d \geq 3$ 时证明谱底部局域化的关键要素，参见 [PT25] 中的讨论和参考文献。请注意，高维朗道算子的谱理论复杂得多，因为二维算子的谱为纯点谱，但这一性质在高维情形下未必成立。

4. Algebraic Framework for Magnetic Derivatives and High-Order Estimates

本节中，我们证明 $\mathbb{R}^d$ 上的磁性伯恩斯坦不等式。首先来说明证明策略。最终目标是证明磁性薛定谔算子的谱子空间中函数的解析性。为此，我们将证明这些函数的泰勒级数收敛，这需要控制其所有导数的 L^∞-范数。首先，我们将控制其磁导数的 L^2-范数。对于自由拉普拉斯算子，这是因为给定阶数的所有导数之和的 L^2 范数可视为与相应拉普拉斯算子幂相关联的二次型。该策略可以推广到二维朗道算子 [PT25] ，此时拉普拉斯算子的幂由某些多项式取代。但在高维情形下，这一策略原则上行不通，因为所有磁导数的和不再能表示为与朗道算子的多项式相关联的二次型。我们的解决方案是对相应表达式进行仔细分析和估计。更准确地说，尽管形如 $\|\widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\partial}_{\alpha_2}\cdots\widetilde{\partial}_{\alpha_n} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ $\alpha_j \in \{1,\dots,d\}$ 的表达式通常无法精确地用 H_B^k 表示，但我们将证明，它们至少可以由涉及 H_B 的显式量从上方估计。

接下来，我们分析由这类算子生成的代数的结构。 $\widetilde{\partial}_1,\ \dots\dots,\ \widetilde{\ }$

定义 4.1。对于每个 $m \in \mathbb{N}$，我们定义算子 X_m 和 Y_m 如下：

$$X_m := \sum_{k=1}^{d} \tilde{\partial}_k H_B^m \tilde{\partial}_k, \qquad Y_m := i \sum_{j,l=1}^{d} B_{jl} \tilde{\partial}_l H_B^m \tilde{\partial}_j.$$

注意， X_m 是对称且非负的，也就是说，对于所有 f、 $g \in W^{\infty,\ {}^2_B}(\mathbb{R}^d)$，都有

$$\langle f, X_m g\rangle = \langle X_m f, g\rangle, \quad \text{and} \quad \langle f, X_m f\rangle \geq 0,$$

并且，由于 B的反对称性，对于 Y_m.也同样成立
这些数列的初始值为

$$\begin{aligned} X_0 &= \sum_{k=1}^{d} \tilde{\partial}_k^2 = H_B, \\ Y_0 &= i \sum_{j,l=1}^{d} B_{jl} \tilde{\partial}_l \tilde{\partial}_j = i \sum_{j>l} B_{jl} (\tilde{\partial}_l \tilde{\partial}_j - \tilde{\partial}_j \tilde{\partial}_l) \\ &= i \sum_{j>l} B_{jl} (i B_{lj}) = \sum_{j>l} |B_{jl}|^2 = \|B\|_f^2, \end{aligned}$$

其中，在 Y_0 的第二个等式中，我们用到了 B 是反对称的这一事实。

由于每个磁导数 $\tilde{\partial}_k$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上都是自伴的，因此通过分部积分，对于每个多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$，

$$\big\|\tilde{\partial}_{\alpha_1} \cdots \tilde{\partial}_{\alpha_m} f\big\|_{L^2}^2 = \Big\langle f,\, \tilde{\partial}_{\alpha_m} \cdots \tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\partial}_{\alpha_1} \cdots \tilde{\partial}_{\alpha_m} f \Big\rangle .$$

对所有 $\alpha \in \{1, \dots, d\}^m$ 求和后，可将其简写为

$$\sum_{\alpha \in \{1,\dots,d\}^m} \big\|\tilde{\partial}_{\alpha_1} \cdots \tilde{\partial}_{\alpha_m} f\big\|_{L^2}^2 = \big\langle f, R^m(\mathrm{Id}) f \big\rangle, \tag{4.1}$$

其中算子 R 将变量 ∂_k 的多项式映射到其自身，其定义为

$$R := \sum_{k=1}^{d} \tilde{\partial}_k(\,\cdot\,)\tilde{\partial}_k .$$

特别地，$R^m(\mathrm{Id})$ 表示磁导数的 m 重对称化乘积，即对所有有序多重指标 α 的 $\partial_{\alpha_m} \cdots \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_m}$ 求和。该恒等式通过 R 的幂刻画了所有 m 阶磁导数的总 L^2 范数，并为磁性伯恩斯坦不等式奠定了基础；这些不等式为 $f \in W^{\infty,}{}_B{}^2(\mathbb{R}^d)$ 给出了这些范数的定量界。因此，推导出 $R^m(\mathrm{Id})$ 的上界，就能直接得到磁性伯恩斯坦不等式左侧的上界。特别地，若对于磁拉普拉斯算子的某个函数 F_m，有 $R^m(\mathrm{Id}) \le F_m(H_B)$ H_B，则可得到磁性伯恩斯坦不等式的算子形式：

$$\sum_{\alpha \in \{1,\dots,d\}^m} \|\tilde{\partial}_{\alpha_1} \cdots \tilde{\partial}_{\alpha_m} f\|_{L^2}^2 \le \langle f, F_m(H_B) f \rangle .$$

本节的关键结果是以下命题 4.2，它表明 $R^m(\mathrm{Id})$ 有一个以 H_B 为自变量的多项式上界。在此基础上，定理 4.3 给出了该多项式上界的显式形式，使我们能够将 (4.1) 中的 $R^m(\mathrm{Id})$ 替换为以 H_B 为自变量的多项式。

命题 4.1. 设 $Z_m := \frac{Y_m}{\sqrt{\|B^2\|_1}}$。那么，对于所有整数 $m \ge 0$，

$$\begin{bmatrix} X_m \\ Z_m \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} X_0 & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_B & 2\sqrt{\|B^2\|_1} \\ 2\sqrt{\|B^2\|_1} & H_B \end{bmatrix}^m$$

其中，不等式按二次型的意义逐行理解。特别地，

$$\begin{aligned} 2R(H_B^m) = 2X_{m+1} \le{}& \left(H_B - \frac{||B||_f^2}{\sqrt{\|B^2\|_1}} \right) \left(H_B - 2\sqrt{\|B^2\|_1} \right)^m \\ &+ \left(H_B + \frac{||B||_f^2}{\sqrt{\|B^2\|_1}} \right) \left(H_B + 2\sqrt{\|B^2\|_1} \right)^m . \end{aligned} \tag{4.2}$$

证明。为了推导序列 X_m 和 Y_m 的递推关系，我们先展开 $\tilde{\ }$ 次幂 H_B^m。对于这一展开，我们使用以下对易子恒等式，因为 $[\partial_\ell, \partial_k] = iB_{\ell k}$，

$$[H_B, \tilde{\partial}_k] = \sum_{\ell=1}^{d} [\tilde{\partial}_\ell^2, \tilde{\partial}_k] = \sum_{\ell=1}^{d} \big(\tilde{\partial}_\ell [\tilde{\partial}_\ell, \tilde{\partial}_k] + [\tilde{\partial}_\ell, \tilde{\partial}_k] \tilde{\partial}_\ell \big) = \sum_{\ell=1}^{d} 2iB_{\ell k}\, \tilde{\partial}_\ell .$$

从而得到序列 X_m 的以下递推关系：

$$\begin{aligned} X_m =& \sum_{k=1}^{d} \tilde{\partial}_k H_B^m \tilde{\partial}_k = \sum_{k=1}^{d} \tilde{\partial}_k H_B^{m-1} \Big(\tilde{\partial}_k H_B + \sum_{j=1}^{d} 2iB_{jk} \tilde{\partial}_j \Big) \\ =& X_{m-1} H_B + 2Y_{m-1}, \end{aligned}$$

对于 Y_m，类似地

$$\begin{aligned} Y_m =& i \sum_{j,l=1}^{d} B_{jl} \tilde{\partial}_l H_B^m \tilde{\partial}_j = i \sum_{j,l=1}^{d} B_{jl} \tilde{\partial}_l H_B^{m-1} \Big(\tilde{\partial}_j H_B + \sum_{k=1}^{d} 2iB_{kj} \tilde{\partial}_k \Big) \\ =& Y_{m-1} H_B + i \sum_{j,l=1}^{d} B_{jl} \tilde{\partial}_l H_B^{m-1} \sum_{k=1}^{d} 2iB_{kj} \tilde{\partial}_k \\ =& Y_{m-1} H_B - 2 \sum_{k,l=1}^{d} \Big(\sum_{j=1}^{d} B_{kj} B_{jl} \Big) \tilde{\partial}_l H_B^{m-1} \tilde{\partial}_k, \end{aligned}$$

其中在最后一步中，我们交换了求和的顺序。最后一行中的内层求和给出 B^2 的 kl^{th} 项：

$$\begin{aligned} Y_m =& Y_{m-1} H_B - 2 \sum_{k,l=1}^{d} (B^2)_{kl} \tilde{\partial}_l H_B^{m-1} \tilde{\partial}_k \\ \leq& Y_{m-1} H_B + 2 \max_l \sum_{k=1}^{d} \big| (B^2)_{kl} \big| \sum_{k=1}^{d} \tilde{\partial}_k H_B^{m-1} \tilde{\partial}_k \\ =& Y_{m-1} H_B + 2 \|B^2\|_1 X_{m-1}. \end{aligned}$$

在第二步中，可以通过以下方式说明转化为不等式的合理性。对于任意 $f \in W^{\infty}, {}_B{}^2(\mathbb{R}^d)$，我们有

$$\begin{aligned} \left\langle f, -2 \sum_{k,l=1}^{d} (B^2)_{kl} \tilde{\partial}_l H_B^{m-1} \tilde{\partial}_k f \right\rangle \leq& |-2| \sum_{k,l=1}^{d} \big| (B^2)_{kl} \big| \Big| \langle f, \tilde{\partial}_l H_B^{m-1} \tilde{\partial}_k f \rangle \Big| \\ \leq& \sum_{k,l=1}^{d} \big| (B^2)_{kl} \big| \, 2 \Big| \langle H_B^{(m-1)/2} \tilde{\partial}_l f, H_B^{(m-1)/2} \tilde{\partial}_k f \rangle \Big|. \end{aligned}$$

使用柯西-施瓦茨不等式和 $2ab \leq a^2 + b^2$：

$$\begin{aligned} &\left\langle f, -2 \sum_{k,l=1}^{d} (B^2)_{kl} \tilde{\partial}_l H_B^{m-1} \tilde{\partial}_k f \right\rangle \leq \sum_{k,l=1}^{d} \big| (B^2)_{kl} \big| \cdot 2 \| H_B^{(m-1)/2} \tilde{\partial}_l f \| \cdot \| H_B^{(m-1)/2} \tilde{\partial}_k f \| \\ &\leq \sum_{k,l=1}^{d} \big| (B^2)_{kl} \big| \left[\| H_B^{m/2} \tilde{\partial}_l f \|^2 + \| H_B^{m/2} \tilde{\partial}_k f \|^2 \right] \\ &\leq \left(\max_l \sum_{k=1}^{d} \big| (B^2)_{kl} \big| \right) \sum_{l=1}^{d} \| H_B^{m/2} \tilde{\partial}_l f \|^2 + \left(\max_k \sum_{l=1}^{d} \big| (B^2)_{kl} \big| \right) \sum_{k=1}^{d} \| H_B^{m/2} \tilde{\partial}_k f \|^2. \end{aligned}$$

由于 B^2 是对称的，$\max_l \sum_{k=1}^d |(B^2)_{kl}|$ 和 $\max_k \sum_{l=1}^d |(B^2)_{kl}|$ 相等。因此

$$\begin{aligned}\left\langle f, -2\sum_{k,l=1}^{d}(B^2)_{kl}\tilde{\partial}_l H_B^{m-1}\tilde{\partial}_k f\right\rangle &\le \left\langle f, 2\Big(\max_l \sum_{k=1}^{d}|(B^2)_{kl}|\Big)\sum_{k=1}^{d}\tilde{\partial}_k H_B^{m-1}\tilde{\partial}_k f\right\rangle \\ &\le \left\langle f, 2\|B^2\|_1\sum_{k=1}^{d}\tilde{\partial}_k H_B^{m-1}\tilde{\partial}_k f\right\rangle\end{aligned}$$

综合以上结果，我们得到以下向量不等式，其中每个分量都满足该不等式：

$$\begin{bmatrix}X_m & Y_m\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}X_{m-1} & Y_{m-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_B & 2\|B^2\|_1\\ 2 & H_B\end{bmatrix}.$$

反复应用这一过程，我们得到

$$\begin{bmatrix}X_m & Y_m\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}X_0 & Y_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_B & 2\|B^2\|_1\\ 2 & H_B\end{bmatrix}^m.$$

我们定义 $Z_m = \frac{Y_m}{\sqrt{\|B^2\|_1}}$，由此得到以下递推关系：

$$\begin{bmatrix}X_m & Z_m\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}X_0 & Z_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_B & 2\sqrt{\|B^2\|_1}\\ 2\sqrt{\|B^2\|_1} & H_B\end{bmatrix}^m.$$

对这个矩阵进行对角化，我们得到这一递推公式的新形式：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}X_m & Z_m\end{bmatrix} &\le \begin{bmatrix}H_B & \frac{||B||_f^2}{\sqrt{\|B^2\|_1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_B & 2\sqrt{\|B^2\|_1}\\ 2\sqrt{\|B^2\|_1} & H_B\end{bmatrix}^m \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}H_B & \frac{||B||_f^2}{\sqrt{\|B^2\|_1}}\end{bmatrix} S\begin{bmatrix}H_B+2\sqrt{\|B^2\|_1} & 0\\ 0 & H_B-2\sqrt{\|B^2\|_1}\end{bmatrix}^m S,\end{aligned}$$

其中 $S = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$。由此可得

$$\begin{aligned}2R(H_B^m) = 2X_{m+1} \le &\left(H_B - \frac{||B||_f^2}{\sqrt{\|B^2\|_1}}\right)\left(H_B - 2\sqrt{\|B^2\|_1}\right)^m \\ &+ \left(H_B + \frac{||B||_f^2}{\sqrt{\|B^2\|_1}}\right)\left(H_B + 2\sqrt{\|B^2\|_1}\right)^m.\end{aligned}$$

□

在下一个引理中，我们利用递推恒等式 (4.2) 推导出 R^m(Id) 的界。

引理 4.2。对于每个 $m \in \mathbb{N}$，我们有

$$R^m(\mathrm{Id}) \le \frac{d^m}{2^m}(H_B+\sqrt{\|B^2\|_1})(H_B+3\sqrt{\|B^2\|_1})\cdots(H_B+(2m+1)\sqrt{\|B^2\|_1}). \tag{4.3}$$

特别地

$$\begin{aligned}\|R^m(\mathrm{Id})\mathbf{1}_{(-\infty,E]}(H_B)\| &= \max\{|R^m(\mathrm{Id})(t)| : t \in \sigma(H_B)\cup(-\infty,E]\} \\ &\le \Big(\frac{d}{2}(E+\sqrt{\|B^2\|_1}m)\Big)^m.\end{aligned}$$

证明。我们对 m 进行归纳，其中 $R(\mathrm{Id})$ 的指数为 m。对于初始情形，由于 $d \geq 2$ 和 H_B 非负，我们已经有

$$R(\mathrm{Id}) = H_B \leq H_B + \sqrt{\|B^2\|_1} \leq \frac{d}{2}(H_B + \sqrt{\|B^2\|_1}).$$

假设引理中的不等式对 m 成立：

$$R^m(\mathrm{Id}) \leq \frac{d^m}{2^m}(H_B + \sqrt{\|B^2\|_1})(H_B + 3\sqrt{\|B^2\|_1}) \cdots (H_B + (2m-1)\sqrt{\|B^2\|_1}).$$

我们将证明它对 $m+1.$ 成立。首先，利用归纳假设和 R 的线性性，可得

$$\begin{aligned} R(R^m(\mathrm{Id})) &\leq R\left(\frac{d^m}{2^m}(H_B + \sqrt{\|B^2\|_1})(H_B + 3\sqrt{\|B^2\|_1}) \cdots (H_B + (2m-1)\sqrt{\|B^2\|_1})\right) \\ &= \frac{d^m}{2^m} R\left((H_B + \sqrt{\|B^2\|_1})(H_B + 3\sqrt{\|B^2\|_1}) \cdots (H_B + (2m-1)\sqrt{\|B^2\|_1})\right). \end{aligned}$$

展开 R 中的多项式，可得

$$\left(H_B + \sqrt{\|B^2\|_1}\right)\left(H_B + 3\sqrt{\|B^2\|_1}\right) \cdots \left(H_B + (2m-1)\sqrt{\|B^2\|_1}\right) = \sum_{j=0}^{m} D_{j,m} H_B^j, \tag{4.4}$$

其中 $D_{j,\ m}$ 表示系数。利用 R 的线性性，可得

$$R\left(R^m(\mathrm{Id})\right) \leq \frac{d^m}{2^m} R\left(\sum_{j=0}^{m} D_{j,m} H_B^j\right) = \frac{d^m}{2^m} \sum_{j=0}^{m} D_{j,m} R(H_B^j).$$

接下来，将估计式 (4.2) 应用于 $R(H_B^j)$，并利用 H_B 非负这一事实，可得

$$\begin{aligned} R^{m+1}(\mathrm{Id}) &= R\big(R^m(\mathrm{Id})\big) \\ &\leq \frac{d^m}{2^m} \sum_{j=0}^{m} D_{j,m} \frac{1}{2} \left(\left(H_B - \frac{||B||_f^2}{\sqrt{\|B^2\|_1}} \right) \left(H_B - 2\sqrt{\|B^2\|_1}\right)^j \right. \\ &\quad \left. + \left(H_B + \frac{||B||_f^2}{\sqrt{\|B^2\|_1}} \right) \left(H_B + 2\sqrt{\|B^2\|_1}\right)^j \right) \\ &\leq \frac{d^m}{2^m} \left(H_B + \frac{||B||_f^2}{\sqrt{\|B^2\|_1}} \right) \sum_{j=0}^{m} D_{j,m} \left(H_B + 2\sqrt{\|B^2\|_1}\right)^j. \end{aligned}$$

现在，最后一个算子就是在$H_B + 2\sqrt{\|B^2\|_1}$处计算的式（4.4）中给出的算子$\sum_{j=0}^{m} D_{j,\ m} H_B^j$：

$$R^{m+1}(\mathrm{Id}) \leq \frac{d^m}{2^m} \left(H_B + \frac{||B||_f^2}{\sqrt{\|B^2\|_1}} \right) (H_B + 3\sqrt{\|B^2\|_1}) \cdots (H_B + (2m+1)\sqrt{\|B^2\|_1}). \tag{4.5}$$

最后一步，我们将用 B^2 的 1-范数来界定 B 的 $\|.\|_f$ 范数。利用 B 的反对称性， B^2 的对角元素可写成如下形式：

$$(B^2)_{\ell\ell} = \sum_{k=1}^{d} B_{\ell k} B_{k\ell} = \sum_{k=1}^{d} B_{\ell k}(-B_{\ell k}) = -\sum_{k=1}^{d} |B_{\ell k}|^2.$$

取绝对值并对所有 $\ell = 1$、...、 d 求和:

$$\sum_{\ell=1}^{d} |(B^2)_{\ell\ell}| = \sum_{\ell=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} |B_{\ell k}|^2 = 2\|B\|_f^2.$$

由于 $|(B^2)_{\ell\ell}|$ 只是总和 $\|B^2\|_1$中的一部分，对于每个 ℓ ，我们有

$$|(B^2)_{\ell\ell}| \le \sum_{k=1}^{d} |(B^2)_{\ell k}| \le \|B^2\|_1.$$

代入:

$$2\|B\|_f^2 = \sum_{\ell=1}^{d} |(B^2)_{\ell\ell}| \le \sum_{\ell=1}^{d} \|B^2\|_1 = d\cdot\|B^2\|_1 \Rightarrow \|B\|_f^2 \le \frac{d}{2}\|B^2\|_1.$$

于是 (4.5) 变为

$$R^{m+1}(\mathrm{Id}) \le \frac{d^m}{2^m}\Big(H_B + \frac{d}{2}\sqrt{\|B^2\|_1}\Big)(H_B + 3\sqrt{\|B^2\|_1})\cdots(H_B + (2m+1)\sqrt{\|B^2\|_1}). \tag{4.6}$$

最后，由于 H_B 非负，可得

$$R^{m+1}(\mathrm{Id}) \le \frac{d^{m+1}}{2^{m+1}}(H_B + \sqrt{\|B^2\|_1})(H_B + 3\sqrt{\|B^2\|_1})\cdots(H_B + (2m+1)\sqrt{\|B^2\|_1}), \tag{4.7}$$

这就完成了归纳步骤。于是结论得证。 □

定理 m 4.3. 对任意 $E > 0$ 和 $m \in \mathbb{N}$，我们有磁 Bernstein 不等式 y

$$\sum_{\alpha\in\{1,\cdots,d\}^m} \|\tilde\partial_{\alpha_1}\tilde\partial_{\alpha_2}\cdots\tilde\partial_{\alpha_m} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \le C_B(m)\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \forall f \in \mathrm{Ran}\,\mathbf{1}_{(-\infty,E]}(H_B) \tag{4.8}$$

其中 $C_B(m) = \Big(\frac{d}{2}(E + \sqrt{\|B^2\|_1}m)\Big)^m$。

证明。令 $f \in$ 值域 $\mathbf{1}_{(-\infty,E]}(H_B)$。由引理 2.2 可得 $f \in W^{\infty,2}(\mathbb{R}^d)$，这意味着该和

$$\sum_{\alpha\in\{1,\ldots,d\}^m} \|\tilde\partial_{\alpha_1}\tilde\partial_{\alpha_2}\cdots\tilde\partial_{\alpha_m} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$$

该和是有限的。因此，我们可以对磁导数进行分部积分。由于 $R^m(\mathrm{Id})$ 是次数为 m 的对称多项式之和，我们得到

$$\begin{aligned}\langle f, R^m(\mathrm{Id})f\rangle &= \sum_{\alpha\in\{1,\ldots,d\}^m} \big\langle f, \tilde\partial_{\alpha_m}\tilde\partial_{\alpha_{m-1}}\cdots\tilde\partial_{\alpha_1}\tilde\partial_{\alpha_1}\tilde\partial_{\alpha_2}\cdots\tilde\partial_{\alpha_m} f\big\rangle \\ &= \sum_{\alpha\in\{1,\ldots,d\}^m} \|\tilde\partial_{\alpha_1}\tilde\partial_{\alpha_2}\cdots\tilde\partial_{\alpha_m} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.\end{aligned}$$

应用引理 4.2，可得

$$\sum_{\alpha\in\{1,\ldots,d\}^m} \|\tilde\partial_{\alpha_1}\tilde\partial_{\alpha_2}\cdots\tilde\partial_{\alpha_m} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \le \Big(\frac{d}{2}(E + \sqrt{\|B^2\|_1}m)\Big)^m \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \qquad \square$$

注 2. 在定理 4.3 的背景下，使用磁导数 $\tilde\partial_j$ 而非经典导数 ∂_j至关重要。谱子空间值域 $1_{(-\infty,E]}(H_B)$中的函数在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中的经典梯度可能无界，而其磁导数始终一致有界。

为简单起见，假设维数 $d = 2m$ 为偶数，使得常磁场矩阵 B 具有满秩。此时，最低朗道能级是一个孤立特征值，并具有归一化特征函数 $\psi \in \ker(H_B - E_0)$。对于 $y \in \mathbb{R}^d$，定义磁平移

$$f_y(x) := e^{i\chi(x,y)}\psi(x-y), \qquad \chi(x,y) := \tfrac{1}{2}x^\top By. \tag{4.9}$$

众所周知（例如参见 [Bro64]），该算子

$$(T_y\varphi)(x) := e^{i\chi(x,y)}\varphi(x-y)$$

在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上是酉的，并且与 H_B 对易。因此，只要 $\psi$is， $f_y \in \operatorname{Ran} 1_{(-\infty,E]}(H_B)$ 就成立。对（4.9）关于 x 求导可得

$$\nabla f_y(x) = i\left[\nabla_x\chi(x,y)\right] f_y(x) + e^{i\chi(x,y)}(\nabla\psi)(x-y).$$

由于 $\nabla_x\chi(x,y) = \frac{1}{2}By$，我们有

$$\nabla f_y(x) = i\left(\tfrac{1}{2}By\right) f_y(x) + e^{i\chi(x,y)}(\nabla\psi)(x-y).$$

取 L^2-范数并使用三角不等式，

$$\|\nabla f_y\|_{L^2} \geq \left\|i\tfrac{1}{2}By\, f_y\right\|_{L^2} - \|\nabla\psi\|_{L^2} = \tfrac{1}{2}|By| - \|\nabla\psi\|_{L^2}.$$

因此，当 $|y| \to \infty$ 时，经典梯度范数随 wit 线性增长 h $|y|$。

˜对 f_y 应用 j 阶磁导数 ∂_j，得到

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}_j f_y(x) &= i\left[i\left(\tfrac{1}{2}By\right) f_y(x) + e^{i\chi(x,y)}(\partial_j\psi)(x-y)\right] + A_j(x)f_y(x)\\ &= -\tfrac{1}{2}(By)_j f_y(x) + e^{i\chi(x,y)}i(\partial_j\psi)(x-y) + \tfrac{1}{2}(Bx)_j f_y(x).\end{aligned}$$

由于 $-\frac{1}{2}By + \frac{1}{2}Bx = \frac{1}{2}B(x-y)$，

$$\tilde{\partial}_j f_y(x) = e^{i\chi(x,y)}\left[i\partial_j\psi + A_j(x-y)\psi\right](x-y) = e^{i\chi(x,y)}(\tilde{\partial}_j\psi)(x-y).$$

由于 m ˜磁平移是酉的， $\|\partial_j f_y\|_{L^2} = \|\partial_j\psi\|_{L^2}$、 $j = 1$、.....、 d，关于 y 一致 .

定理 4.4（高维情形下厚性的必要性）。设 $S \subset \mathbb{R}^d$ 可测，且 $E > E_0 := \inf\sigma(H_B)$。假设存在 $C > 0$ 使得

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\,\|f\|_{L^2(S)} \qquad \textit{for all } f \in \operatorname{Ran} 1_{(-\infty,E]}(H_B).$$

那么 S 是厚的。

证明。我们采用反证法。假设 $S \subset \mathbb{R}^d$ 不是厚的。那么

$$\forall \ell > 0,\ \forall \rho > 0,\ \exists y \in \mathbb{R}^d \text{ such that } |S \cap Q_\ell(y)| < \rho\ell^d.$$

不失一般性，假设 B 是满秩的（因此 $d = 2m$）；一般情形可通过在 B的零空间方向上乘以一个高斯因子得到。令 $\Psi_0 \in \ker(H_B - E_0)$为归一化的基态，它是一个高斯函数：

$$\Psi_0(x) = \prod_{j=1}^{m} K_j \exp(-C_j(x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2)/2), \tag{4.10}$$

我们有 $\|\Psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$，并且存在常数 $A, \alpha > 0$ （依赖于 B），使得$|\Psi_0(x)| \leq Ae^{-\alpha|x|^2}$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^d$. 均成立。对于 $y \in \mathbb{R}^d$，如注 2 所示，磁平移为

$$f_y(x) := T_y\Psi_0(x) = e^{i\chi(x,y)}\Psi_0(x-y), \qquad \chi(x,y) := \frac{1}{2}x^\top By.$$

由 T_y 的幺正性以及它与 H_B 的交换性，我们有

$$f_y \in \operatorname{Ran} \mathbf{1}_{(-\infty,E]}(H_B), \qquad \|f_y\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\Psi_0\|_{L^2} = 1.$$

由于 Ψ_0 按高斯函数衰减，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们可以选择 $\ell_\varepsilon > 0$，使得对所有 $\ell \geq \ell_\varepsilon$和所有 $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus Q_\ell(y)} |f_y(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q_\ell(0)} |\Psi_0(x)|^2 \, dx \leq \varepsilon.$$

固定 $\varepsilon := \frac{1}{4C^2}$，其中 C 是谱不等式中的常数。选择 $\ell := \ell_{\varepsilon^\circ}$ 由于 S 不是厚集，对于上面选取的 ℓ 以及 $\rho > 0$，存在 $y \in \mathbb{R}^d$ 使得 $|S \cap Q_\ell(y)| < \rho \ell^d$.我们进行分解:

$$\|f_y\|^2_{L^2(S)} \leq \int_{S \cap Q_\ell(y)} |f_y(x)|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q_\ell(y)} |f_y(x)|^2 \, dx.$$

对于第一项，注意到$\|f_y\|_{L^\infty} = \|\Psi_0\|_{L^\infty} =: M$ （一个仅取决于 B的常数）。因此,

$$\int_{S \cap Q_\ell(y)} |f_y(x)|^2 \, dx \leq M^2 |S \cap Q_\ell(y)| < M^2 \rho \ell^d.$$

对于第二项，根据我们对 ℓ的选择，有

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus Q_\ell(y)} |f_y(x)|^2 \, dx \leq \varepsilon = \frac{1}{4C^2}.$$

因此,

$$\|f_y\|^2_{L^2(S)} < M^2 \rho \ell^d + \frac{1}{4C^2}.$$

现在取 ρ 足够小，使得 $M^2 \rho \ell^d < \frac{1}{4C^2}$..。采用这一取值,

$$\|f_y\|^2_{L^2(S)} < \frac{1}{4C^2} + \frac{1}{4C^2} = \frac{1}{2C^2}.$$

由于 $f_y \in$ 值域 $\mathbf{1}_{(-\infty,E]}(H_B)$，谱不等式给出

$$1 = \|f_y\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f_y\|_{L^2(S)} < C \cdot \frac{1}{\sqrt{2}C} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,$$

这就产生了矛盾。 □

若 β 是 α 的子序列，我们记作 $\beta \preceq \alpha$，并将 β 在 α 中的补子序列记作 $\alpha \setminus \beta$。现在可以陈述下一个定理，它给出了关于 $|f|^2$ 的伯恩斯坦型不等式（涉及普通导数），其中 $f \in$ 值域 $\mathbf{1}_{(-\infty,E]}(H_B)$。

定理4.5。设 $E \geq 0$、 $m \in \mathbb{N}$，且 $f \in$ 值域 $1_{(-\infty,E]}(H_B)$。则有:

$$\sum_{\alpha \in \{1,\dots,d\}^m} \|\partial^\alpha |f|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C'_B(m) |f|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{4.11}$$

其中常数 $C'_B(m)$ 为

$$C'_B(m) = d^{\frac{dm}{2}} \left(\frac{d}{2} (E + \sqrt{\|B^2\|_1} m) \right)^{\frac{m}{2}}.$$

此外，我们还有逐点估计:

$$\sum_{\alpha \in \{1,\dots,d\}^m} \|\partial^\alpha |f|^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C_{sob,d} \sum_{m'=m}^{m+d+1} C'_B(m') |f|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{4.12}$$

其中 $C_{sob,\ d}$ 是一个仅依赖于维数 d 的通用常数。

证明。设 $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$。对于每个 $k \in \{1, \dots, d\}$，我们有：

$$\begin{aligned}\bar{v}(x)\tilde{\partial}_k u(x) - u(x)\overline{\tilde{\partial}_k v(x)} &= iv(x)\partial_k u(x) + \bar{v}(x)\sum_{j\neq k}\frac{B_{jk}}{2}x_j u(x)\\ &\quad + iu(x)\partial_k \bar{v}(x) - u(x)\sum_{j\neq k}\frac{B_{jk}}{2}x_j\bar{v}(x) = i\partial_k(u\bar{v})(x).\end{aligned}$$

根据归纳法，对于任意多重指标 $\alpha \in \{1, \dots, d\}^m$，我们得到：

$$i^m\partial^\alpha|u|^2(x) = \sum_{\beta\preceq\alpha}(-1)^{m-|\beta|}\tilde{\partial}^\beta u(x)\,\overline{\tilde{\partial}^{\alpha\setminus\beta}u(x)}.$$

由此得到以下估计：

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\{1,\dots,d\}^m}\|\partial^\alpha|f|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &\le \sum_{|\alpha|=m}\sum_{\beta\preceq\alpha}\|\tilde{\partial}^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,\|\tilde{\partial}^{\alpha\setminus\beta}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\ &= \sum_{k=0}^m\binom{m}{k}\sum_{\substack{|\beta|=k\\|\beta'|=m-k}}\|\tilde{\partial}^\beta f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,\|\tilde{\partial}^{\beta'}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\ &\le \sum_{k=0}^m\binom{m}{k}d^{m/2}\sqrt{\sum_{|\beta|=k}\|\tilde{\partial}^\beta f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\sum_{|\beta'|=m-k}\|\tilde{\partial}^{\beta'}f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}\\ &\le \sum_{k=0}^m\binom{m}{k}d^{m/2}\sqrt{C_B(k)C_B(m-k)}|f|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\end{aligned}$$

根据 $C_B(k)$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\{1,\dots,d\}^m}\|\partial^\alpha|f|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &\le \sum_{k=0}^m\binom{m}{k}d^{\frac{m}{2}}\Big(\frac{d}{2}(E+\sqrt{\|B^2\|_1}m)\Big)^{m/2}|f|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\ &\le d^{\frac{dm}{2}}\Big(\frac{d}{2}(E+\sqrt{\|B^2\|_1}m)\Big)^{\frac{m}{2}}|f|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

为证明估计 (4.12)，我们应用 Sobolev嵌入：

$$|f|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le C_{\mathrm{sob}}|f|_{W^{d+1,1}(\mathbb{R}^d)},$$

由此可得：

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\{1,\dots,d\}^m}\|\partial^\alpha|f|^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\le C_{\mathrm{sob}}\sum_{\alpha\in\{1,\dots,d\}^m}\|\partial^\alpha|f|^2\|_{W^{d+1,1}(\mathbb{R}^d)}\\ &= C_{\mathrm{sob}}\sum_{\alpha\in\{1,\dots,d\}^m}\sum_{|\beta|\le d+1}\|\partial^\beta\partial^\alpha|f|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\\ &= C_{\mathrm{sob}}\sum_{m'=m}^{m+d+1}\sum_{|\alpha'|=m'}\|\partial^{\alpha'}|f|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\le C_{\mathrm{sob}}\sum_{m'=m}^{m+d+1}C_B(m')|f|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

□

5. Analytic Foundations and Spectral Inequalities for Magnetic Laplacians

本节证明高维磁拉普拉斯算子的谱不等式，将 Kovrijkine [Kov00] 关于经典拉普拉斯算子的结果推广到 [ES21] 的抽象框架中，并结合 [PT25]在二维情形下的技术。证明策略受到 Kovrijkine 针对经典拉普拉斯算子所采用方法的启发，并进一步基于 [ES21]所建立的抽象框架。此外，我们改编了 [PT25],中的技术；该文在二维情形下建立了磁性伯恩斯坦不等式，以及朗道算子在厚集上的谱不等式。

5.1. 通过降维获得定量下界。现在我们证明，高维磁拉普拉斯算子的谱子空间中的函数具有很强的解析性，并可平滑延拓到复邻域中。

定理 5.1. 设 $E>0$ 和 $f\in$ 属于值域 $\mathbf{1}_{(-\infty,E]}(H_B)$。则函数 $|f|^2$ 在 $\mathbb{R}^d$上实解析，并可延拓为全纯函数 $\Phi\colon \mathbb{C}^d\to\mathbb{C}$，其定义于 $\mathbb{R}^d$的一个邻域中。

证明。由估计 (4.12)， m 阶导数的大小不超过右端求和中的最大项：

$$\sum_{\alpha\in\{1,\dots,d\}^m}\|\partial^\alpha|f|^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\le (d+2)\,C_{\mathrm{sob}}d^{\frac{d(m+d+1)}{2}}\Big(\frac{d}{2}(E+\sqrt{\|B^2\|_1}(m+d+1))\Big)^{\frac{m+d+1}{2}}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

右端的增长阶为 $m^{m/2}$。由于当 $m\to\infty$ 时 $m^{m/2}\ll m!$，存在常数 $C>0$ 使得

$$\|\partial^\alpha|f|^2\|_{L^\infty}\le C^{|\alpha|+1}\alpha!.$$

此界保证 $|f|^2$ 的泰勒级数局部一致收敛，从而定义了 $\mathbb{R}^d$ 某邻域内的全纯延拓 Φ。□

接下来，我们需要这些解析函数的局部下界。为此，对于 $r>0$ 和 $\ell=(\ell_1,\ \ell_2,\ \cdots,\ \ell_d)\in(0,\ \infty)^d$，记 $D(r)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<r\}$，以及 $D_\ell=D(\ell_1)\times D(\ell_2)\times\cdots\times D(\ell_d)$，分别。

引理 5.2。设 $\phi:\ D(4+\epsilon)\to\mathbb{C}$ 是某个 $\epsilon>0$ 上满足 $|\phi(0)|\ge 1$ 的解析函数。此外，设 $E\subset[0,1]$ 可测且测度为正。则

$$\sup_{t\in[0,1]}|\phi(t)|\le\left(\frac{12}{\mathrm{Vol}(E)}\right)^{\frac{2\log M_\phi}{\log 2}}\sup_{t\in E}|\phi(t)|, \tag{5.1}$$

其中 $M_\phi=$ 上确界$_{z\in D(4)}|\phi(z)|$。

为方便读者，我们建议参阅 [PT25，引理 15]。现在我们将证明引理 5.3。

引理 5.3. 设 $Q\subset\mathbb{R}^d$ 是一个边长为 $\ell_1,\dots,\ell_d>0$ 且与坐标轴对齐的超矩形。假设 $g:\ Q\to\mathbb{C}$ 是一个非零函数，它可解析延拓至复邻域 $Q+D(4\ell)\subset\mathbb{C}^d$ 中，记为 G，其中 $\ell:=(\ell_1,\dots,\ell_d)$。那么，对于

任意可测子集 $\omega \subset Q$ 以及任意线性双射 $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，以下不等式成立：

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^1(Q\cap\omega)} &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Vol}(\psi(Q\cap\omega))}{24\,\mathrm{Vol}(\mathcal{S})\,\mathrm{diam}(\psi(Q))^d}\right)^{\frac{2\log M}{\log 2}} \cdot \frac{\mathrm{Vol}(Q\cap\omega)}{\mathrm{Vol}(Q)}\,\|g\|_{L^1(Q)} \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Vol}(\psi(Q\cap\omega))}{24\,\mathrm{Vol}(\mathcal{S})\,\mathrm{diam}(\psi(Q))^d}\right)^{\frac{2\log M}{\log 2}+1} \|g\|_{L^1(Q)},\end{aligned}$$

其中， $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{R}^d$中的单位球面，且 $M := \mathrm{Vol}(Q)\,\overline{\|g\|_{L^1(Q)}}\,\sup_{z\in Q+D(4\ell)} |G(z)| \geq 1$.

文献中多个地方都出现了与引理 5.3 类似的结果，其基本思想可追溯至 [Kov00]。本文的证明受到 [PT25, 引理 14], 的启发，其中证明了关于 L^2-范数的类似命题，并引入了一个线性双射 A。该映射在定理 3.1 的证明中至关重要，因为它使常数得以优化：若没有 A，边长为（$\ell_1, \ldots, \ell_d$）的矩形的偏心率，更准确地说，其直径与体积之比，就会显式地出现在结果中。使用 A 消除了这种几何依赖，因此最终估计中只会出现 $|\ell|_1$ 。

引理 5.3 的证明结合了降维论证与一维估计；后者由 [Kov00], 提出，本身基于关于多项式和 Blaschke 乘积的经典 Remez 不等式。

证明。证明基于一种降维策略，其灵感来自 [Kov00] and [PT25]。我们的主要目标是估计“次水平”集合 W 的体积，该集合定义为函数值较小的点所组成的集合：

$$W := \left\{x \in Q : |g(x)| \leq C\|g\|_{L^1(Q)}\right\},$$

其中常数 $C > 0$ 是经过精心选择的。若能证明 $\mathrm{Vol}(W) \leq \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(Q\cap\omega)$，则只需在集合 $Q\cap\omega$ 的其余部分上对 $|g|$ 积分，即可立即得到所需结果。

为建立这一体积界，我们首先选取一个“枢轴”点 $y \in Q$ ，使函数值相对较大，具体而言，满足 $|g(y)| \geq \|g\|_{L^1(Q)}/\mathrm{Vol}(Q)$。难点在于找到一条经过 y 的线段，以刻画 W 的行为，从而将问题降至一维。

我们分析 W 在线性变换 ψ 下的几何性质。以 $\psi(y)$ 为中心使用球坐标积分，可以将 $\psi(W)$ 的总体积与其一维截面的长度联系起来。具体而言，

$$\mathrm{Vol}(\psi(W)) \leq \mathrm{Vol}(\mathcal{S}) \int_{|\xi|=1} \int_0^\infty \chi_{\psi(W)}(\psi(y) + s\xi)\, s^{d-1} ds\, d\sigma(\xi).$$

由于任何此类切片的最大长度都受 $\mathrm{diam}(\psi(Q))$ 限制，通过平均论证（借助中值定理），可以保证存在一个特定方向 ζ，使相应的线段 $I = \{y + s\zeta : \ s \geq 0\} \cap Q$ 在 W 中“稠密”。也就是说，

$$\frac{\mathrm{Vol}(I\cap W)}{\mathrm{Vol}(I)} \geq \frac{\mathrm{Vol}(\psi(W))}{\mathrm{Vol}(\mathcal{S})\,\mathrm{diam}(\psi(Q))^d}. \tag{5.2}$$

在建立了这一几何基础后，我们转而研究 G 的解析性质。我们将函数限制在折线段 I 上，定义一元函数 $\phi(z) := \mathrm{Vol}(Q)\,\frac{}{\|g\|_{L^1(Q)}} G(y + \tilde{}\mathrm{Vol}(I)\zeta z)$，其定义域为圆盘 $D(4+\epsilon)$。

根据构造， $|\phi(0)| \geq 1$ 且 $M_\phi \leq M$。因此，我们可以应用引理 5.2 中的一维估计，其中令 E 为位于 W 内的线段部分。利用密度界 (5.2)，得到：

$$\sup_{x\in W}|g(x)| \geq \left(\frac{\operatorname{Vol}(\psi(W))}{12\operatorname{Vol}(\mathcal{S})\operatorname{diam}(\psi(Q))^d}\right)^{\frac{2\log M_\phi}{\log 2}} \frac{\|g\|_{L^1(Q)}}{\operatorname{Vol}(Q)}. \tag{5.3}$$

将方程 (5.2) 与 (5.3) 结合，并代入特定数值C 的定义，可通过以下论证得出结论：

$$\begin{aligned}\sup_{x\in W}|g(x)| &\leq \left(\frac{\operatorname{Vol}(\psi(Q\cap W))}{24\operatorname{Vol}(\mathcal{S})\operatorname{diam}(\psi(Q))^d}\right)^{\frac{2\log M_\phi}{\log 2}} \frac{1}{\operatorname{Vol}(Q)}\|g\|_{L^1(Q)}\\ &\leq \left(\frac{\operatorname{Vol}(\psi(Q\cap W))}{2\operatorname{Vol}(\psi(W))}\frac{\operatorname{Vol}(\psi(W))}{12\operatorname{Vol}(\mathcal{S})\operatorname{diam}(\psi(Q))^d}\right)^{\frac{2\log M_\phi}{\log 2}} \frac{\|g\|_{L^1(Q)}}{\operatorname{Vol}(Q)}\\ &\leq \left(\frac{\operatorname{Vol}(Q\cap\omega)}{2\operatorname{Vol}(W)}\right)^{\frac{2\log M_\phi}{\log 2}} \sup_{x\in W}|g(x)|.\end{aligned}$$

□

5.2. 划分为良性与劣性超矩形。我们使用一族可数的开超矩形 $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$对$\mathbb{R}^d$ 进行划分。每个超矩形 Q_j 的边长为 $\ell_1,\dots,\ell_d$，与坐标轴平行，且与其他超矩形互不相交。它们的并集 $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$ 覆盖 $\mathbb{R}^d$，但相差一个勒贝格测度为零的集合。

定义 5.1. 设 $E>0$，且 $f\in$ 属于$\mathbf{1}_{(-\infty,E]}(H_B)$。若对所有 $m\in\mathbb{N}$ 及所有多重指标 $\alpha\in\{1,\dots,d\}^m$，下列估计成立，则称超矩形 Q_j 为良性：

$$\|\partial^\alpha|f|^2\|_{L^1(Q_j)} \leq (d+2)^{m+1}C'_B(m)|f|^2_{L^2(Q_j)},$$

其中

$$C'_B(m) = d^{\frac{dm}{2}}\left(\frac{d}{2}(E+\sqrt{\|B^2\|_1}\,m)\right)^{\frac{m}{2}}.$$

如果该条件不成立，则称 Q_j 为坏的。

下面的引理表明，函数 f 在良好超矩形上的总 L^2 范数至少是其在 $\mathbb{R}^d$ 上总 L^2 范数的一半。

引理 5.4. 设 E、$B>0$，且 $f\in$值域 $1_{(-\infty,E]}(H_B)$。则 f 在良好超矩形上的 L^2 范数之和满足

$$\sum_{j:Q_j\ good}|f|^2_{L^2(Q_j)} \geq \frac{1}{2}|f|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

证明。如果超矩形 Q_j 是坏的，根据定义，存在某个 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\alpha\in\{1,\dots,d\}^m$，使得

$$|f|^2_{L^2(Q_j)} < \frac{\|\partial^\alpha|f|^2\|_{L^1(Q_j)}}{(d+2)^{m+1}C'_B(m)}.$$

我们通过对所有可能的违例求和（并集界），以此对所有不良超矩形求和。利用定理 5.1 给出的全局估计， $\|\partial^\alpha|f|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq$

$C'_B(m)|f|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$，我们得到：

$$\begin{aligned}\sum_{j:Q_j \text{ bad}} |f|^2_{L^2(Q_j)} &\le \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\alpha\in\{1,\dots,d\}^m} \frac{\|\partial^\alpha |f|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}{(d+2)^{m+1} C'_B(m)} \\ &\le |f|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^m C'_B(m)}{(d+2)^{m+1} C'_B(m)} \\ &= \frac{|f|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{d+2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{d}{d+2}\right)^m = \frac{1}{2}|f|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

通过补上良好超矩形即可得出结论。 □

定理 3.1 的证明。由定理 5.1，函数 $|f|^2$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上实解析，并可解析延拓 Φ 至 $\mathbb{C}^d$。在每个良好矩形 Q_j 上，我们将对 $g = |f|^2$ 应用引理 5.3；所需的唯一条件是，在矩形内某一点处对 g 的导数有一致上界。我们断言，存在 $x_0 \in Q_j$，使得对每个阶数为 m 的多重指标 α，

$$|\partial^\alpha |f|^2(x_0)| \;\le\; \frac{(2(d+2))^{m+1} d^m\, C'_B(m)}{\mathrm{Vol}(Q_j)} \,\|f\|^2_{L^2(Q_j)}. \tag{5.4}$$

若此结论不成立，则反向不等式将在整个 Q_j 上成立。对该矩形积分，并利用 Q_j 是良好的这一事实，便得到

$$\|f\|^2_{L^2(Q_j)} < \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} \|f\|^2_{L^2(Q_j)} = \|f\|^2_{L^2(Q_j)},$$

这就产生了矛盾。因此，这样的 x_0 存在。

对多圆盘 $D_{(5\ell_1,\dots,5\ell_d)}$ 中的每个 z，在 x_0 处应用泰勒公式并结合 (5.4)，可得

$$|\Phi(z)| \;\le\; 2(d+2)\, \frac{\|f\|^2_{L^2(Q_j)}}{\mathrm{Vol}(Q_j)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\big(10(d+2)d|\ell|_1\big)^m\, C'_B(m)}{m!}.$$

设 ψ 为将 Q_j 映射到单位矩形的仿射映射。将引理 5.3 应用于 $g = |f|^2$、$\omega = Q_j \cap S$，并令线性双射 A 将每个 Q_j 映射到单位矩形，然后由 $G = \Phi$ 得到

$$\|f\|^2_{L^1(Q_j\cap S)} \;\ge\; \frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{\rho}\right)^{\frac{2\log M_\Phi}{\log 2}} \|f\|^2_{L^1(Q_j)}.$$

回忆起 $C'_B(m) = d^{\frac{m}{2}}(d+1)\Big(\frac{1}{2}(E+\beta m)\Big)^{\frac{m}{2}}$，我们得到

$$M_\Phi \le 2(d+2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\big(10(d+2)\, d\, |\ell|_1\big)^m\, d^{\frac{dm}{2}}\, \big(\frac{d}{2}(E+\beta m)\big)^{\frac{m}{2}}}{m!}.$$

利用不等式 $(E+\beta m)^{\frac{m}{2}} \le 2^{\frac{m}{2}}\big(E^{\frac{m}{2}}+(\beta m)^{\frac{m}{2}}\big)$，我们推得

$$M_\Phi \le 2(d+2)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Big(10\sqrt{2}(d+2)\,d^{\frac{d+1}{2}}\,|\ell|_1\Big)^m E^{\frac{m}{2}}}{m!} + 2(d+2)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Big(10\sqrt{2}(d+2)\,d^{\frac{d+1}{2}}\,|\ell|_1\,\beta^{1/2}\sqrt{m}\Big)^m}{m!}.$$

第一个级数等于一个指数函数，而对于第二个级数，我们使用

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(s\sqrt{m})^m}{m!} \le \exp(2s^2+s), \qquad s\ge 0.$$

因此，

$$M_\Phi \le 2(d+2)\exp\Big(10\sqrt{2}(d+2)\,d^{\frac{d+1}{2}}\,|\ell|_1\,\sqrt{E}\Big) \times \exp\Big(10\sqrt{2}(d+2)\,d^{\frac{d+1}{2}}\,|\ell|_1\,\beta^{1/2}+200(d+2)^2d^{d+1}|\ell|_1^2\beta\Big).$$

合并指数函数并取对数，得到

$$\ln M_\Phi \le \ln\big(2(d+2)\big) + A_1\,|\ell|_1\,\sqrt{E} + A_2\,|\ell|_1\,\beta^{1/2} + A_3\,|\ell|_1^2\,\beta,$$

with

$$A_1 = A_2 = 10\sqrt{2}(d+2)\,d^{\frac{d+1}{2}}, \qquad A_3 = 200(d+2)^2\,d^{d+1}, \qquad \beta = \sqrt{\|B^2\|_1}.$$

最后，对所有良好超矩形求和，并使用引理 5.4，得到

$$\begin{aligned}|f|^2_{L^1(\mathbb{R}^d)} &\le 2\sum_{\substack{j:\\ Q_j\ \text{good}}}|f|^2_{L^1(Q_j)}\\ &\le \sum_{\substack{j:\\ Q_j\ \text{good}}} 4\left(\frac{C_1}{\rho}\right)^{C_2+C_3|\ell|_1\sqrt{E}+C_4\left(|\ell|_1\sqrt[4]{\|B^2\|_1}+|\ell|_1^2\sqrt{\|B^2\|_1}\right)}|f|^2_{L^2(Q_j\cap S)}\\ &\le 4\left(\frac{C_1}{\rho}\right)^{C_2+C_3|\ell|_1\sqrt{E}+C_4\left(|\ell|_1\sqrt[4]{\|B^2\|_1}+|\ell|_1^2\sqrt{\|B^2\|_1}\right)}|f|^2_{L^2(S)}.\end{aligned}$$

为完成论证，我们必须用能量截断 E 控制指数中的磁贡献。只需将 $\sqrt{\|B^2\|_1}$ 估计为关于 $\inf\sigma(H_B)$ 的量即可。磁矩阵 $B\in\mathbb{R}^{d\times d}$ 是反对称的，并且根据注 1，可写成分块对角矩阵 $\mathcal{C}$。由 (2.2) 可知，B 和 $\mathcal{C}$ 的算子范数相同。由于有限维空间上的所有范数都等价，存在 $c_d>0$（仅依赖于 d），使得

$$\|B^2\|_1 \le c_d\,\|B^2\|_{\mathrm{op}}. \tag{5.5}$$

对于分块对角形式 $\mathcal{C}$，$\mathcal{C}^2$ 的特征值为 $-C_j^2$，因此

$$\|B^2\|_{\mathrm{op}} = \|\mathcal{C}^2\|_{\mathrm{op}} = \max_{1\le j\le m} C_j^2.$$

将此与（5.5）结合可得

$$\sqrt{\|B^2\|_1} \;\le\; \sqrt{c_d}\,\max_{1\le j\le m} C_j. \tag{5.6}$$

由于最低朗道能级满足 $\inf\ \sigma(H_B) = \sum_{j=1}^{m} C_j \geq \max_j C_j$，我们得到

$$\sqrt{\|B^2\|_1} \ \leq\ \sqrt{c_d}\,\inf \sigma(H_B) \ \leq\ \sqrt{c_d}\,E. \tag{5.7}$$

将此界代入前面的估计可得

$$|f|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left(\frac{C_1}{\rho}\right)^{C_2+\widetilde{C}_3|\ell|_1\sqrt{E}+\widetilde{C}_4|\ell|_1^2 E\sqrt{||B||_1}} |f|^2_{L^2(S)},$$

其中 $\widetilde{C}_3$、$\widetilde{C}_4$ 仅依赖于 d 以及厚集的几何数据。证明至此完成。□

备注3. 我们说明，定理 3.1 中指数对 $|\ell|_1$ 与磁尺度乘积的二次依赖不可避免。首先假设 B 具有满秩 $2m = d$；秩为 $B < d$ 的情形可通过在零空间方向上添加一个无关紧要的高斯包络来处理，这不会影响下文的尾部行为。

令 Ψ 表示式 (4.10) 中的归一化基态，并令 $C_{\min} := \min_{1\leq j\leq m} C_j > 0$。固定 $\rho \in (0,1)$，并选取 $L > 2r > 0$ 使得周期性孔洞集

$$S^c = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^d} B_r(Lk), \qquad S = \mathbb{R}^d \setminus S^c,$$

满足 $\rho = 1 - \omega_d (r/L)^d$，其中 $\omega_d = |B_1(0)| = \pi^{d/2}/\Gamma(\frac{d}{2}+1)$表示 $\mathbb{R}^d$中单位球的体积。对于满足 $\ell_i \asymp L$的轴平行向量 $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_d)$，集合 S是 (ℓ, ρ)–厚集，并且 $r \asymp L \asymp |\ell|_1$。将原点置于一个孔洞的中心，并令 $f = \Psi_0$，得到

$$\|f\|^2_{L^2(S)} = 1 - \int_{S^c} |\Psi_0|^2 \leq 1 - \int_{|z|<r} |\Psi_0|^2 = \int_{|z|\geq r} |\Psi_0|^2\, dz.$$

由标准的高斯函数尾部估计可得

$$\int_{|z|\geq r} |\Psi_0|^2\, dz \leq C\, r^{d-2} \exp\Big(-\tfrac{C_{\min}}{4}\, r^2\Big).$$

由于 $r \asymp |\ell|_1$，我们得到

$$\|f\|^2_{L^2(S)} \leq C'\, |\ell|_1^{d-2} \exp\big(-c\, C_{\min} |\ell|_1^2\big),$$

其中存在仅依赖于 d 和 ρ 的常数 $C', c > 0$。将谱不等式应用于f，其中$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$，可得

$$\left(\tfrac{C_1}{\rho}\right)^{C(\ell,E_0,B)} \gtrsim \exp\big(c\, C_{\min} |\ell|_1^2\big),$$

取对数后，我们得到

$$C(\ell, E_0, B) \log\Big(\frac{C_1}{\rho}\Big) \geq \frac{c}{2}\, C_{\min} |\ell|_1^2 - \frac{d-2}{2} \log|\ell|_1 - \log C'^{1/2}.$$

因此，当 $|\ell|_1$ 较大时，指数 $C(\ell, E_0, B)$ 至少必须以 $C_{\min}|\ell|_1^2/\log(C_1/\rho)$ 的速度增长。特别是，二次项 $|\ell|_1$ 不可避免。

Appendix A. Proofs of the Regularity Lemma

引理 2.2 的证明。固定 $E>0$，令 $P_E := 1_{(-\infty,E]}(H_B)$。取 $f \in$ 值域 P_E；则 $f = P_E f$且 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$。由于 P_E 与 H_B 对易，且 H_B 在值域 P_E 上的谱包含于$[0,E]$中，因此有

$$H_B^j f \in L^2(\mathbb{R}^d), \qquad \|H_B^j f\|_{L^2} \le E^j \|f\|_{L^2} \quad (j=0,1,2,\dots).$$

我们对 k 进行向下归纳以证明

$$H_B^k f \in W_B^{2(N-k),2}(\mathbb{R}^d) \qquad (k=0,1,\dots,N).$$

对于 $k=N$，这显然成立，因为 $H_B^N f \in L^2$。假设它对 $k+1$成立。由于 $H_B^{k+1} f \in W^{2(N-k-1),\ B}{}^{2}$，将引理 2.1（Sj¨ostrand 椭圆估计）应用于 $u = H_B^k f$，并令 $m = 2(N-k-1)$，可得

$$H_B^k f \in W_B^{2(N-k-1)+2,2} = W_B^{2(N-k),2}.$$

因此归纳法得以完成。取 $k=0$，我们得到 $f \in W^{2N,\ B}{}^{2}$ 对每个 $N \in \mathbb{N}$均成立。于是

$$f \in \bigcap_{N\ge 1} W_B^{2N,2}(\mathbb{R}^d) = W_B^{\infty,2}(\mathbb{R}^d). \qquad \square$$

References

[AS24] P. Alphonse 和 A. Seelmann。各向异性 Shubin 算子的定量谱不等式及其在零可控性中的应用。 *C. R. Math.*, 362(G12):1635–1659, 2024年11月。[BJPS21] K. Beauchard、P. Jaming 和 K. Pravda-Starov。有限个 Hermite 函数线性组合的谱估计及亚椭圆二次方程的零可控性。 *Stud. Math.*, 260(1):1–43, 2021。[BPS17] K. Beauchard 和 K. Pravda-Starov。亚椭圆二次微分方程的零可控性。 *J. Éc. polytech., Math.*, 5:1–43, 2017年11月。[Bro64] E Brown。均匀磁场中的布洛赫电子。 *Phys. Rev.*, 133(4A):A1038–A1044, 1964年2月。[CT25] M. Capoferri 和 M. T¨aufer。随机球形夹杂物高对比度介质中的安德森局域化，2025。arXiv:2512.02568 [math.SP]。[DSV24a] A. Dicke、A. Seelmann 和 I. Veseli´c’。幂增长势薛定谔算子的衰减密度传感器集上的谱不等式。 *Partial Differ. Equ. Appl.*, 5(2), 2024。[DSV24b] A. Dicke、A. Seelmann 和 I. Veseli´c。幂增长势薛定谔算子的衰减密度传感器集上的谱不等式。 *Partial Differ. Equ. Appl.*, 5(2), 2024年3月。[DWZ20] Y. Duan、L. Wang 和 C. Zhang。全空间中具有有界势的热方程的可观测性不等式。 *SIAM J. Control Optim.*, 58(4):1939–1960, 2020年1月。[DYZ26] Y. Duan、H. Yu 和 C. Zhang。$\mathbb{R}^d$中扩散方程在等分布集上的定量唯一延拓与可观测性。 *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 49(0):222–245, 2026年。[EMS24] M. Egidi、D. Mugnolo 和 A. Seelmann。斯图姆–刘维尔问题、小控制集给出的全局界及其在量子图中的应用。 *J. Math. Anal. Appl.*, 535(1):128101, 2024年7月。[ES21] M. Egidi 和 A. Seelmann。关于谱子空间的抽象 Logvinenko–Sereda 型定理。*J. Math. Anal. Appl.*, 500(1):125149, 2021。[EV18] M. Egidi 和 Ivan Veseli´c。热方程零可控性的尖锐几何条件及$\mathbb{R}^d$上的一致控制代价估计。 *Arch. Math.*, 111(1):85–99, 2018。[EV20] M. Egidi 和 I. Veseli´c。环面上的尺度无关唯一延拓估计与 Logvinenko–Sereda 定理。 *Ann. Henri Poincaré*, 21(12):3757–3790, 2020。[FLP25] R. L. Frank、S. Larson 和 P. Pfeiffer。拉普拉斯算子和朗道哈密顿量的改进半经典特征值估计。 *J. Spectr. Theory*, 2025。[Gof10] M. Goffeng。朗道能级的指标公式与电荷亏损。 *J. Math. Phys.*, 51 2 023509, 2010 ( ): 。[HJ12] R. A Horn 和 C. R Johnson。 *Matrix Analysis*。剑桥大学出版社，剑桥，英格兰，2012年6月。

[HKSY19] X. Huang、Y. Kian、 ´E. Soccorsi 和 M. Yamamoto。薛定谔方程的 Carleman估计及其在磁逆问题中的应用。 *J. Math. Anal. Appl.*, 474(1):116–142, 2019年6月。[Kac73] V. `E. Kacnel'son。整函数空间中的等价范数。 *Mat. Sb.*, 21 1 33 55, 1973 ( ): – 2月 。[Kov00] O. Kovrijkine。 *Some estimates of Fourier transforms*。ProQuest LLC，美国密歇根州安娜堡，2000年。博士学位论文——加利福尼亚理工学院。[Kov01] O. G. Kovrijkine。与 Logvinenko–Sereda 定理相关的一些结果。

Proc. Amer. Math. , : – 。[LM19] G. *Soc.* 129 3037 3047, 2001
Lebeau 和 I. Moyano。薛定谔算子的谱不等式。arXiv: 。math.AP。即将在 Anal. PDE. 发表，。[LR95] G. Lebeau 和 L. Robbiano。热方程的精确控制。

´ *Communications in Partial* , (-): – 。[LRL12] *Differential Equations* 20 1 2 335 356, 1995
J. Le Rousseau 和 G. Lebeau。关于椭圆和抛物算子的 Carleman 估计：唯一延拓与抛物方程控制的应用。

ESAIM Control Optim. Calc. , ( ): – 。[LS74] V. *Var.* 18 3 712 747, 2012
N. Logvinenko 和 J. F. Sereda。指数型整函数空间中的等价范数。 *Funkts. Funktsional. Anal. Prilozhen.*, 20:102–111, 1974。[LW13] Y. Li 和 C. Wu。具有四元数解析朗道能级的高维拓扑绝缘体。*Phys. Rev. Lett.*, 110(21), 2013年5月。[Mil04] L. Miller。小时间内热方程零可控代价增长率的几何界。 *J. Differ. Equations*, 204(1):202–226, 2004。[NTTV18] I. Naki´c、M. T¨aufer、M. Tautenhahn 和 I. Veseli´c。随机薛定谔算子的尺度无关唯一延拓原理、特征值抬升与韦格纳估计。 *Anal. PDE*, 11(4):1049–1081, 2018。[NTTV20a] I. Naki´c、M. T¨aufer、M. Tautenhahn 和 I. Veseli´c。大区域上热方程控制代价的尖锐估计与均匀化。 *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 26 54, 2020 : 。[NTTV20b] I. Naki´c、M. T¨aufer、M. Tautenhahn 和 I. Veseli´c。无界区域上薛定谔算子的唯一延拓与谱带边缘抬升（附录由 Albrecht Seelmann 撰写）。 *J. Spectr. Theory*, 10(3):843–885, 2020。[Pan61] B. P. Paneah。Paley–Wiener 型的一些定理。 *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 138:47–50, 1961。[PT25] P. Pfeiffer 和 M. T¨aufer。朗道算子的磁性伯恩斯坦不等式及厚集上的谱不等式。 *SIAM J. Contr. Optim.*, 63(4):2659–2685, 2025。[Sch12] K. Schm

¨ *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space* 265 *Graduate Texts* udgen。 *in Mathematics* 2012
¨ *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space* 265 *Graduate Texts* , 第 *in Mathematics* 2012
¨ *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space* 265 *Graduate Texts* 卷。Springer, *in Mathematics* 2012
Dordrecht, 。[Sj¨o91] J. Sj¨ostrand。周期磁薛定谔方程的微局部分析及相关问题。载于

Microlocal analysis and applications (Montecatini Terme, 1989) 1495 *Lecture* , 第 *Notes in Math.* 237 332 1991
Microlocal analysis and applications (Montecatini Terme, 1989) 1495 *Lecture* 卷，页码–。 *Notes in Math.* 237 332 1991
Springer，柏林，。[ST20] A. Seelmann 和 M. T

¨ *Ann.* aufer。超越正则 *Henri Poincaré* 21 7 2151 2166, 2020
Floquet 特征值的带边缘局域化。

¨ *Ann.* , ( ): – 。[Tha98] *Henri Poincaré* 21 7 2151 2166, 2020
S. Thangavelu。 *Harmonic Analysis on the Heisenberg Group*。Birkh¨auser Boston，1998。[TT11] G. Tenenbaum 和 M. Tucsnak。关于扩散方程的零可控性。 *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 17 4 1088 1100, 2011 , ( ): – 。[TT18]

M. Tautenhahn 和 M. T¨aufer。具有有界磁势的合金型哈密顿量的韦格纳估计与无序依赖性。 *Ann. Henri Poincaré*, 19(4):1151–1165, 2018 年 4 月。[TV15] M. T¨aufer 和 I. Veseli´c。标准随机呼吸子势的条件 Wegner 估计。 *J. Stat. Phys.*, 161(4):902–914, 2015。[WWZZ19] G. Wang、M. Wang、C. Zhang 和 Y. Zhang。$\mathbb{R}^d$中热方程的可观测集、可观测性、插值不等式与谱不等式。 *J. Math. Pures Appl.*, : – 。

.Sedef Ozcan, Dokuz Eylül University, Faculty of Science, Department of Mathematics, Izmir, Turkey.

Matthias Täufer CERAMATHS Université Polytechnique Hauts-de-France Le Mont Houy „ , , , 59313 Valenciennes Cedex 09 France; Matthias.Taufer@uphf.fr.