带偏好强度的度量失真

Mehrad Abbaszadeh[1],Ali Ansarifar[2],Mohamad Latifian[3],和 Masoud Seddighin[4]

[1] 佐治亚理工学院，美国[2] 谢里夫理工大学，伊朗
[3] 爱丁堡大学，英国[4] 德黑兰高等研究院，伊朗

arXiv:2601.02095v1 [cs.GT] 5 Jan 2026

摘要。在使用排序选票的投票中，每位代理人提交一个形式为$a \succ b \succ c \succ d$ 的备选项严格排序，投票规则根据这些排序决定获胜者。尽管这种选票格式具有理想的特性，但它是否足以表达代理人的偏好仍是一个问题。Kahng 等人 [26] 通过在排序中加入强度来解决这一问题。他们提出了带强度排序选票格式，代理人可以在排序中使用“$\succcurlyeq$”和“ $\succ$”，以表达排序中相邻备选项之间的强烈偏好和普通偏好。虽然他们着重在功利扭曲框架下分析这种选票格式，但在本文中，我们从度量失真的角度探讨使用这种选票格式的潜力。我们设计了一类称为位置计分匹配 规则的投票规则，可用于度量情境中的不同问题，并表明通过求解一个零和博弈，可以找到适用于我们问题的该类别中的最优规则。这一规则会考虑强度，并实现低于 3 的失真。此外，通过证明忽略强度的代价的一个界限，我们表明，不考虑强度可能会在失真方面造成巨大损失。

关键词： 社会选择、投票、失真、选票设计

1 引言

计算社会选择领域关注聚合多个代理人的个体意见，以达成影响所有代理人的集体决策。这一过程通常包含两个阶段：信息 *elicitation* ，即获取代理人的偏好；以及聚合 这些偏好，从而确定最终结果。信息 elicitation 阶段的一个关键要素是用于记录代理人偏好的选票格式 。选票设计至关重要，因为它决定了代理人如何报告其偏好，并且这种设计会从根本上限制所收集的信息，进而可能影响投票结果，导致所作决策无法准确反映代理人的真实偏好。例如，排序选票和批准投票是投票机制中通常使用的两种最著名的选票格式。尽管这些选票格式直观易懂，能够记录代理人对期望结果的不同程度的信息，但哪种格式最为合适仍不明确。在不同的集体决策场景中，代理人可能能够提供不同类型的信息，而其他信息 elicitation 方法或许更为适用。因此，选票格式的选择仍然取决于具体情境，评估标准格式能否准确表达代理人的偏好至关重要。

本文聚焦于单胜者投票，以及一种对排序选票的实用改进，它能够更详细地反映代理人的偏好。在标准排序选票中，每位代理人都会提交一份对备选项的完整排序，聚合规则则根据这些排名选出获胜者。然而，在许多现实情境中，代理人不仅会对备选项排序，其偏好强度也各不相同。他们可能强烈偏好某些选项，对另一些选项无所谓，或积极反对某些选择。简单的序数排序将所有相邻位置都视为间距相等，因而掩盖了这些差异。例如，在科技公司的实习生选拔中，团队负责人通常会将候选人划分为“顶尖”“可接受”和“不合适”等宽泛层级。这些类别反映了简单排序无法体现的偏好差距。忽略这类信息可能导致不理想的结果。同样，在研发评估中，委员会成员通常会使用评分量表（例如 0–100）为提案排序。尽管这些分数比简单排序传达了更丰富的信息，但要获取精确的数值往往并不现实。为此，人们提出了多种方法来捕捉和获取偏好强度 [18, 25, 34, 19]。

一种自然且可行的想法是，为排序选票增添偏好强度这一概念，让投票者不仅能够表达排序，还能表达偏好的强弱。传统排序选票要求对备选项进行严格排序，却无法区分轻微偏好与强烈偏好。设想一群人要从披萨（p）、牛排（s）或汉堡（b）中选择吃什么。爱丽丝可能提交 $p \succ s \succ b$ ，表示她稍微偏好披萨。鲍勃是素食者，他可能提交相同的排序，尽管披萨是他唯一可行的选择，因此他的偏好要强烈得多。无法区分偏好强度可能导致次优结果。为了解决这一局限，Kahng 等人 [26] 提出了带偏好强度的排序选票格式。该格式扩展了传统排序，允许代理人使用“$\succcurlyeq$”或“$\succ$”来表示更强或更弱的偏好。例如，鲍勃可以提交 $p \succcurlyeq b \succ s$，更准确地表达自己的偏好；投票规则随后便能利用这些额外信息，做出更高效的决策。

文献中有多种比较投票规则的方法。有些研究根据公理性质进行比较，但评估决策效率需要定量指标。近年来备受关注的一种方法是 Procaccia 和 Rosenschein [33]提出的失真概念。失真通过比较基于报告偏好的结果与完全信息下的理想结果，衡量投票过程中的效率损失。失真主要在两种框架下得到研究：功利主义框架和度量框架。

在 Procaccia 和 Rosenschein [33], 提出的功利主义框架中，假设每位代理人对各备选项都有一个主观的单位和效用函数，并据此报告自己的排序。目标是利用报告的信息，选出使社会福利最大化的备选项。在此背景下，规则的失真定义为可实现的最大社会福利与该规则所选备选项带来的社会福利之比的最坏情况比率。Kahng 等人 [26] 分析了一些采用带偏好强度的排序选票格式的规则所产生的功利扭曲，并通过引入忽略强度的代价这一概念，展示忽略强度会如何影响功利扭曲。

Anshelevich 等人最早研究的度量失真框架 [4],假设代理人和备选项嵌入在一个度量空间中，代理人根据距离远近提交偏好（距离较近的备选项更受偏好）。这一框架的一个应用背景是设施选址问题 [7, 20],，其目标是选择设施位置，以尽量降低服务客户的总距离或成本。在此背景下，失真定义为所选备选项的社会成本与可能达到的最低社会成本之比的最坏情况。Anshelevich 等人 [4] 证明，任何确定性投票规则的度量失真下界为 3。他们还证明，Copeland规则的度量失真为 5。最终，Gkatzelis 等人 [22]提出$PluralityMatching$ 规则，将这一差距缩小至 3 的失真。

针对各种选票格式，人们都研究过度量失真和功利失真。有关这些结果的全面综述，请参阅 Anshelevich 等人 [5] 的调查。本文研究带偏好强度的排序投票格式所能达到的度量失真极限，并将其与采用简单排序选票的规则进行比较。我们通过分析一般情形和线度量下的失真，并给出忽略强度的代价界限，勾勒出完整图景。

1.1 相关工作

失真由 Procaccia 和 Rosenschein [33] 提出，此后受到广泛关注；全面综述请参见 Anshelevich 等人 [5] 。本文概述与我们研究最相关的工作。

一般而言，我们研究的问题是基于排序偏好的单胜者投票。在这种情境下，功利主义情境中可实现的最优失真为 $\Theta(m^2)$，其中 m表示备选项的数量，而多数制规则保证了这一界限 [13, 14]。在度量情境中，任何基于排序偏好的确定性单一获胜者投票规则，其失真下界均为 3。随着时间推移，后续研究逐步降低了最优度量失真的上界，从 5 [4] 降至 4。236 [32], 最终降至 3 [22, 28]。此外，Gkatzelis 等人[23] 提出了一种投票规则，可同时实现渐近最优的功利主义失真和度量失真。

一些研究表明，额外信息可以显著降低失真。这些附加信息可能来自对选举情境、代理人行为或选票格式的假设。例如，在两项连续的研究中，Cheng 等人 [16, 17] 考察了从代理人群体中随机抽取备选项的情形，从而改善了各种投票规则的失真界。Seddighin 等人 [35] 研究了代理人可以根据行为模型选择弃权的情形。他们表明，对于两个备选项而言，该模型可以降低度量失真。Anshelevich 和 Postl [6] 引入了 α-决定性度量，其中每个代理人到其最近备选项的距离至多为其到次近备选项距离的 α 倍。α-决定性度量已在许多后续研究中得到考察 [24, 22]。我们的框架与这一设定密切相关，因为它允许代理人指定，在任意两个相邻备选项之间，他们是否具有 α-决定性。

Amanatidis 等人 [3]研究了功利主义情境下的确定性规则，除代理人的偏好列表外，还允许进行数量有限的价值查询。他们表明，每个代理人进行一次查询可得到 $O(m)$ 的失真，进行 $O(\log m)$ 次查询可得到 $O(\sqrt{m})$ 的失真，而 $O(\log^2 m)$ 次查询足以实现常数级失真。更广泛地说，Mandal 等人 [30] 以及 Mandal 等人 [31] 专注于投票算法的通信复杂度。他们建立了一个框架，在不了解代理人偏好的情况下，从代理人处收集有限信息，并优化失真与从每个代理人处获得的信息量之间的权衡。

最后，失真的概念已扩展到更一般的场景，包括委员会选举[15, 9, 8], 参与式预算编制 [10, 21], 以及不同的选票格式 [1, 2, 29, 11, 12]。

1.2 我们的贡献

在这项工作中，我们假设代理人和备选项嵌入在一个度量空间中，其距离函数为 d，并使用参数 $\alpha \in [0, 1]$ 来刻画偏好强度。具体而言，如果某代理人到 a的距离小于其到 b的距离的 α 倍，那么该代理人就强烈偏好备选项 a而非 b，记作 $a \succcurlyeq b$。我们分析方法随 α变化的表现。

偏好强度下的度量失真可以在两种情形下进行分析：强制和自愿 elicitation偏好强度。在前一种情形中，当且仅当代理人的距离存在差距时，他们才会使用“$\succcurlyeq$”；而在后一种情形中，即使代理人的距离存在差距，他们仍可能使用“$\succ$”。

显然，自愿情境下的最优失真为 3（与带排序选票时的失真上界相同），因为代理人可能决定不报告任何强度。然而，强制设定下的失真上界尚不明确。我们首先证明度量失真的下界。我们的主要技术贡献是引入一个确定性规则，并分析其在此情境下的失真。我们首先分析至多适度的k偏好这一类别；在这类偏好剖面中，每位代理人都会在第 k^{th}位置报告其第一个强烈偏好。为此，我们将多数匹配规则推广到一类称为位置评分匹配规则的规则。我们分析了这一类别中各成员的失真，并证明，在其中寻找最优规则等价于求解一个双人零和博弈的值。我们相信，这类规则在度量情境以及其他情境中都可能有不同的用途，而用于分析它们的框架也可能会引起未来研究的兴趣。

下一步是利用这一分析为一般情形设计一条规则，其失真取决于 $\ell_{\max}$，即所有代理人均为至多-ℓ中等偏好时的最大 $\ell \in [m-1]$。我们证明，当 $\ell_{\max}$ 较小时，这条规则的失真远低于 3（见图 2 和图 3）。我们还证明了这一界限具有稳健性：如果少部分代理人对于任何 $k \leqslant \ell_{\max}$都不是至多-k 中等偏好，我们的界限也不会发生显著变化。

为了更好地理解我们的结果，值得一提的是，有理由相信，在现实世界选举中，大多数代理人对于较小的 k 都是至多-k 中等偏好：代理人往往会将备选项划分为一小部分理想结果和一大部分不理想结果。认可投票正是基于这一原则。此外，代理人会投入更多认知和情感资源来了解排名靠前的选项，因为他们认为这些选项涉及的利害关系更大；因此，他们通常对排名最靠前的少数选项有强偏好，而对其余选项则不然。

在第 4 节中，我们考虑度量空间为直线这一特殊情形。我们为包含两个备选项的实例，在强制设定下证明了失真的下界为 $\max\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}, 2\alpha+1\right)$。我们还针对两个备选项的情形提出了一条规则，并推测该规则能达到与此下界相近的失真。此外，我们还给出了另一个下界 $\frac{1+3\alpha^{-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}{3+\alpha^{-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}$，表明在线度量下，失真仍可接近 3，与不受限制的情形类似。

在第 5 节中，我们研究了<style id='1'>忽略强度的代价（POII），该指标衡量了在强度信息可用时使用简单排序选票所造成的效率损失。我们证明，在

强制设定下，POII 至少为

$$\frac{3\left(\alpha^{\lfloor m \rfloor_{\text{even}}}+1\right)}{1+2\alpha^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}-\alpha^{\lfloor m \rfloor_{\text{even}}}}.$$

在本节中，我们还证明了自愿情境下 POII 的下界 $\frac{3}{-2\alpha^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1}$。为证明这些下界，我们仔细分析了特定实例中各种可能的结果。这需要将问题表述为线性规划，并进行原始-对偶分析。我们调整了 Kempe [27] 提出的技术，使其适用于我们的情境。

2 预备知识

对于 $t \in \mathbb{N}$，令 $[t]=\{1,\ldots,t\}$；对于集合 S，令 $\Delta(S)$ 表示 S 上的分布集合。一个选举 $\mathcal{E}=(N, A, \boldsymbol{\sigma})$ 涉及一组代理人 n N、一组选项 m A，以及一个经引出的偏好档案 $\boldsymbol{\sigma}$。我们用 i, j 表示代理人，用 a, b, c 表示选项。

偏好引出。本文关注通过带偏好强度的排序投票格式引出的偏好档案。在这种选票格式中，每个代理人 i 提交一个偏好 $\sigma_i=(\pi_i, \bowtie_i)$，其中 $\pi_i:[m]\to A$ 是一个一一对应函数，表示该代理人对选项的排序；$\bowtie_i$: $[m-1]\to\{\succ,\succ\!\!\succ\}$ 则表示偏好强度。具体而言，$\bowtie_i(j)=$ '$\succ$' 表示代理人 i 相较于 $\pi_i(j+1)$ 更偏好 $\pi_i(j)$；而 $\bowtie_i(j)=$ '$\succ\!\!\succ$' 表示代理人 i 强烈偏好 $\pi_i(j)$，而非 $\pi_i(j+1)$。

令 $S(A)$ 表示关于 A 的所有可能的带强度排序集合，$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1、\ldots\ldots、\sigma_n)$ 表示所有代理人的偏好档案。此外，定义 $\mathsf{rank}_i(a)$ 为备选项 a 在代理人 i 的排序中的名次，$\mathrm{Plu}(a)$ 为将 a 排为首选候选项的代理人数。

投票规则。采用带偏好强度的排序投票格式的单一获胜者投票规则 f 是一个函数 $f:S(A)^n\to A$，它以偏好档案为输入，并选出一个获胜备选项。我们还考虑仅访问排序的投票规则。在这种情况下，排序档案定义为 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_1、\ldots\ldots、\pi_n)$，投票规则使用该档案来确定获胜者。

度量框架。我们假设所有代理人和备选项都嵌入在一个度量空间中，该空间由距离函数 $d:(N\cup A)^2\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 刻画。距离函数为正、对称，满足三角不等式，并且对于任意 $x\in A\cup N, d(x,x)=0$。备选项 $a\in A$ 相对于度量 d 的社会成本定义为 $\mathsf{sc}_d(a):=\sum_{i\in N} d(i,a)$，最优候选项为 $\mathsf{opt}_d:=\arg\min_{a\in A}\mathsf{sc}_d(a)$。如果上下文已明确 d，我们便将其从下标中省略。若排序档案 $\boldsymbol{\pi}$ 与度量 d 一致，记作 $\boldsymbol{\pi}\rhd d$，则对于每个代理人 $i\in N$ 和备选项 $a,b\in A$，$a\succ_i b$ 蕴含 $d(i,a)\leqslant d(i,b)$。这意味着代理人按照备选项与自身距离由近到远的顺序对其排序。

强度的解释。代理人报告的强度可以有两种不同的解释方式：强制征询和自愿 elicitation。对于固定的 $\alpha\in[0,1]$，带有强度的偏好档案 $\boldsymbol{\sigma}$ 在强制征询下与度量 d 是 α-一致的，记作 $\boldsymbol{\sigma}\rhd_\alpha d$，当且仅当对任意代理人 $i\in N$ 和 $j\in[m-1]$，以下条件成立：如果 $\bowtie_i(j)=$ '$\succ$'，那么 $d(i,\pi_i(j+1))\geqslant d(i,\pi_i(j))>\alpha\cdot d(i,\pi_i(j+1))$；并且如果 $\bowtie_i(j)=$ '$\succ\!\!\succ$'，那么 $d(i,\pi_i(j))\leqslant\alpha\cdot d(i,\pi_i(j+1))$。换言之，代理人 i 在 j^{th} 位置表达强偏好，当且仅当其 j^{th} 和 $j+1^{\text{th}}$ 备选项之间的距离存在一个 α 差距。

本文主要关注强制设定，但也会在某些部分考察强度的自愿 elicitation。若强度偏好剖面 $\boldsymbol{\sigma}$ 在强度自愿 elicitation 下与度量 d 是 α- 一致的，则称其满足该条件，记作 $\boldsymbol{\sigma} \rhd_\alpha^v d$；当 $\boldsymbol{\pi} \rhd d$ 且对任意代理人 $i \in N$ 和任意 $j \in [m-1]$，若 $\bowtie_i(j) = \text{`}\succcurlyeq\text{'}$，则有 $d(i, \pi_i(j)) \leqslant \alpha \cdot d(i, \pi_i(j+1))$。换言之，如果代理人 i 在 j^{th} 位置表达强偏好，那么排名为 j^{th} 和 $j+1^{\text{th}}$ 的备选项之间的距离存在一个乘法 α 差距。然而，如果没有报告强度，是否存在乘法 α 差距仍不确定。

度量失真。 失真是衡量投票规则效率的定量指标。对于$\alpha \in [0,1]$，选举 $\mathcal{E} = (N, A, \boldsymbol{\sigma})$中备选项 a 的 α-失真，定义为 a 的社会成本与最优候选项的社会成本之比的最坏情况，其中最坏情况取遍所有与 $\boldsymbol{\sigma}$一致的度量，即

$$\mathsf{dist}_\alpha(a, \mathcal{E}) := \sup_{d:\boldsymbol{\sigma} \rhd_\alpha d} \frac{\mathsf{sc}_d(a)}{\min_{b \in A} \mathsf{sc}_d(b)}.$$

We 当上下文中 N, A 明确时，有时使用记号 $\mathsf{dist}_\alpha(a, \boldsymbol{\sigma})$.
规则 f 的度量失真定义为其输出在所有可能选举实例中的最坏情况失真，即 $\mathsf{dist}_\alpha(f) := \sup_{\mathcal{E}} \mathsf{dist}_\alpha(f(\boldsymbol{\sigma}), \mathcal{E})$。请注意，此定义假设强制征询强度。自愿征询下也有类似定义，称为自愿扭曲（dist_α^v），其形式化定义见第 5 节。

3 扭曲界

本节探讨在强制征询强度的假设下，将失真降至 3 以下的可能性。在此情境中，如果代理人在强度报告中不使用“$\succcurlyeq$”符号，则表示其排序中相邻备选项之间的距离之比不超过 α。相较于简单的排序选票，这些额外信息使得通过确定性规则突破失真阈值 3 成为可能。本节首先证明失真的下界，随后给出一个上界，该上界取决于代理人偏好中第一个“$\succcurlyeq$”的位置。请注意，本节所说的失真是指假设强制征询强度时的度量失真。

3.1 下界

我们首先建立采用带强度的排序偏好选票格式的确定性规则的失真下界。该下界由两个互补的界共同构成。

定理1。 采用带强度的排序偏好选票格式、参数为 $\alpha \in [0,1]$ 且假设强制征询偏好强度的任何投票规则 f，其度量失真至少为 $1 + 2$ 最大值 $\left(\alpha, \frac{1-\alpha^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}{1+\alpha^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}\right)$.

如前所述，为了证明这个下界，我们给出两个不同的实例。引理 1 得出的下界在 α取较小值时效果更好，而引理 2 得出的界在 α 趋近于 1 时会变得更紧。图 1 展示了对于$m \in \{5, 10, 15, 25\}$ 的实例，这两个界的形状。

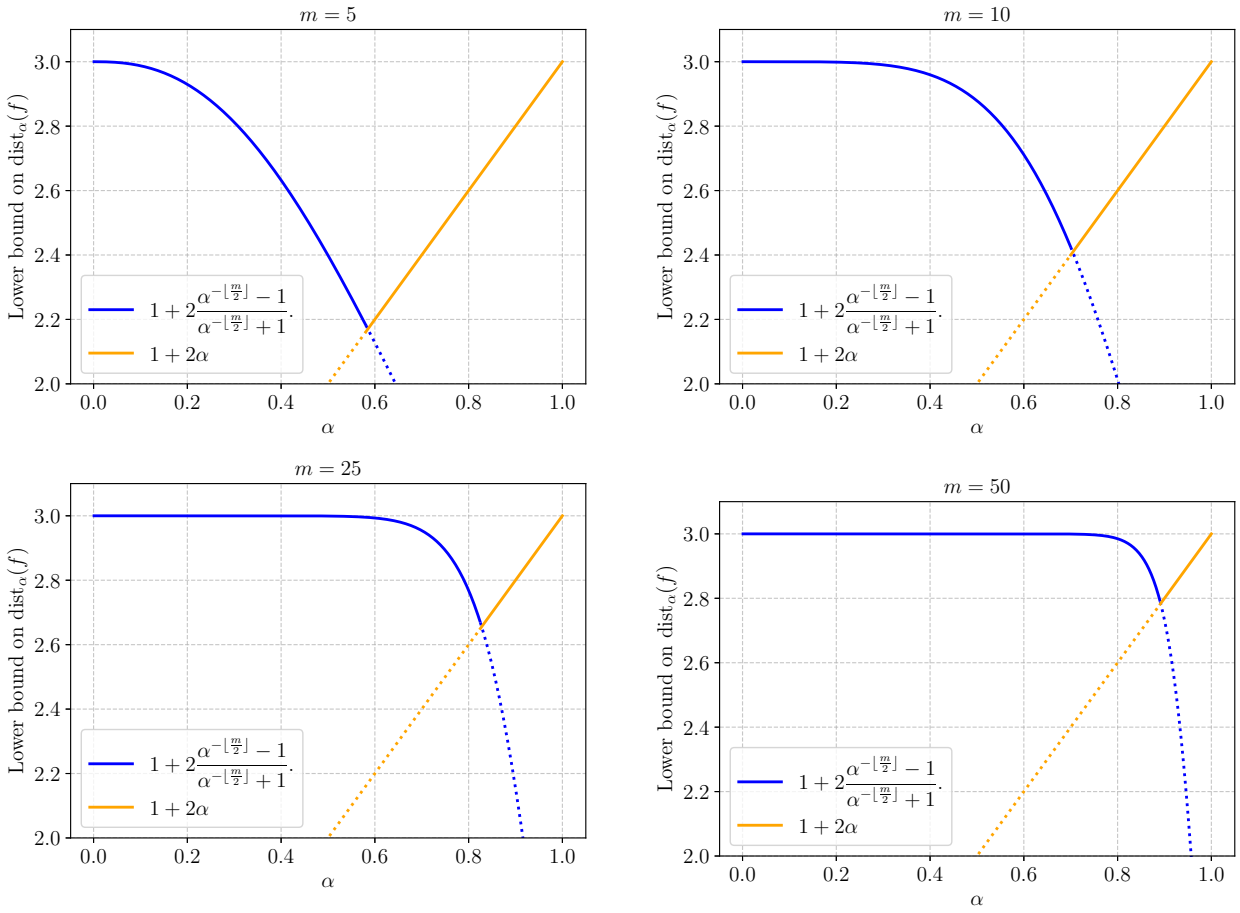


图 1：引理 1 和引理 2 对 5、10、25 和 50 个备选项所建立的下界示意图。

引理 1. 对于任何采用带强度的排序偏好选票格式的投票规则 f，其度量失真至少为 $1 + 2\frac{1-\alpha^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}{1+\alpha^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}$.

证明。首先，请注意，当 $\alpha = 1$ 时，根据失真的定义，下界 1 显然成立。此外，我们将单独考虑 $\alpha = 0$ 的情况。因此，不妨假设 $0 < \alpha < 1$。

考虑一个包含两名代理人和 m 个备选项的实例，其中第一名代理人提交的选票为 $a_1 \succ a_2 \succ \cdots \succ a_m$，第二名代理人则以相反的顺序提交选票，即 $a_m \succ a_{m-1} \succ \cdots \succ a_1$。接着，假设规则 f 选出备选项 a，且不失一般性，a 位于第一名代理人排序的前半部分。现在，考虑度量空间 d，其中备选项与代理人 1 之间的距离均为单位距离，但对于 $b \in A$,

$$d(2, b) = \alpha^{-\min(\mathsf{rank}_2(b)-1, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)} \cdot \frac{2}{\alpha^{-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} - 1}.$$

我们声称，该距离函数满足三角不等式，并且与 $\boldsymbol{\sigma}$ 具有一致性。关于一致性，对于第二个代理人，$\frac{1}{\alpha} d(2, \pi_2(i)) = d(2, \pi_2(i+1))$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 成立。因此，可以直接验证 d 与 σ_1 具有一致性。因此，我们只需确保 d 满足三角不等式，这意味着对于每个 $b \neq c$ 和 $i \neq j$,

$$d(i, b) \leqslant d(i, c) + d(j, c) + d(j, b). \tag{1}$$

注意，$d(i,c)+d(j,c)+d(j,b)\geqslant 1+1+\frac{2}{\alpha^{-\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}-1}=\alpha^{-\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\cdot\frac{2}{\alpha^{-\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}-1}$，这是 $d(i,b)$ 的最大可能值。这意味着 d 满足三角不等式。因此，$\boldsymbol{\sigma}\rhd_\alpha d$。

现在，我们使用这个度量给出失真的一个界：

$$\begin{aligned}\mathsf{dist}_\alpha(a,\mathcal{E})\geqslant\frac{\mathsf{sc}(a)}{\mathsf{sc}(a_m)}=\frac{d(1,a)+d(2,a)}{d(1,a_m)+d(2,a_m)}&\geqslant\frac{1+d(2,a_{\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor})}{1+d(2,a_m)}\quad\left(\text{Since }\mathsf{rank}_1(a)\leqslant\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor\right)\\&=\frac{1+\frac{2\alpha^{-\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}{\alpha^{-\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}-1}}{1+\frac{2}{\alpha^{-\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}-1}}=\frac{3+\frac{2}{\alpha^{-\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}-1}}{1+\frac{2}{\alpha^{-\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}-1}}=1+2\frac{1-\alpha^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}{1+\alpha^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}.\end{aligned}$$

因此，$\mathsf{dist}_\alpha(f)$ 至少为 $1+2\frac{1-\alpha^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}{1+\alpha^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}$。

现在，假设 $\alpha=0$。考虑一个包含两名代理人 $\{1,2\}$ 和两个备选项 $\{a,b\}$的实例。第一名代理人提交 $a\succ b$，第二名代理人提交 $b\succ a$。不失一般性，假设 f选择 a 作为获胜者。现在，考虑度量 d，使得 $d(1,a)=d(1,b)=1$，且$d(2,b)=0,d(2,a)=2$。显然，d满足三角不等式和强度约束。此外，$\mathsf{sc}(a)\ \mathsf{sc}(b)=3$。因此，$f$ 的失真至少为 3，证毕。 □

引理 2. 任何采用带强度的排序偏好选票格式的投票规则 f，其度量失真至少为 $1+2\alpha$。

证明。固定 k和 m，使得$k\leqslant\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$，并考虑一个包含两名代理人和 m 个备选项的选举。代理人仅报告其偏好中处于 k^{th} 位置的强度。第一名代理人提交其选票为 $a_1\succ a_2\succ\ldots\succ a_k\succcurlyeq a_{k+1}\succ\ldots\succ a_m$，第二名代理人则以相反顺序提交其选票，即 $a_m\succ a_{m-1}\succ\ldots\succ a_{m-k+1}\succcurlyeq a_{m-k}\succ\ldots\succ a_1$。

令 f为一个确定性社会选择规则，并定义 $a:=f(\boldsymbol{\sigma})$。关于偏好，至少对于一名代理人而言，$a$ 出现在“$\succcurlyeq$”之后。不失一般性，我们可以假设这对第一名代理人而言成立。考虑如下度量：

$$d(1,b)=\begin{cases}0&\mathsf{rank}_1(b)\leqslant k\\1+\alpha^{-1}&\mathsf{rank}_1(b)>k\end{cases},\ \text{and}\ d(2,b)=\begin{cases}1&\mathsf{rank}_2(b)\leqslant k\\\alpha^{-1}&\mathsf{rank}_2(b)>k\end{cases}.$$

由于$k\leqslant\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$ 度量仅有四个不同的取值，因此可以直接验证 d满足三角不等式，此外还满足 $\boldsymbol{\sigma}\rhd_\alpha d$。

注意，$\mathsf{sc}(a_1)=d(1,a_1)+d(2,a_1)=\alpha^{-1}$，并且 $\mathsf{sc}(a)=d(1,a)+d(2,a)=1+\alpha^{-1}+d(2,a_l)\geqslant 2+\alpha^{-1}$。因此，我们有：

$$\mathsf{dist}_\alpha(a,\mathcal{E})\geqslant\frac{\mathsf{sc}(a)}{\mathsf{sc}(a_1)}\geqslant\frac{2+\alpha^{-1}}{\alpha^{-1}}=1+2\alpha.$$

因此，$\mathsf{dist}_\alpha(f)$ 至少为 $1+2\alpha$。 □

3.2 上界

为了补充我们的下界，本节将介绍一种失真小于 3 的投票规则。为此，我们先分析适度至 k 偏好的特殊情形。

定义 1. 如果偏好 $\sigma=(\pi,\bowtie)$ 在 $k+1^{th}$位置呈现第一种强度，即 $\bowtie(k+1)=$‘$\succcurlyeq$’且 $\forall i\in[k]:\bowtie(i)=$‘$\succ$’，则称其为 *moderate-up-to-*$k$ 偏好。如果 $\bowtie$ 中没有出现‘$\succcurlyeq$’，则该偏好被视为 *moderate-up-to-*$(m-1)$。如果所有代理人都具有 *moderate-up-to-*k 偏好，则称该偏好档案为 *moderate-up-to-*k。

我们的首要目标是证明 moderate-up-to-k偏好档案下最优度量失真的上界。定义

$$w_k = \begin{cases} \frac{\alpha+1}{3\alpha+1} & k=1 \\ 1-\frac{2\alpha}{(1-\alpha)t_{k-1}+2w_{k-1}+2\alpha} & k>1 \end{cases}, \text{ and} \tag{2}$$

$$t_k = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{3\alpha+1} & k=1 \\ w_k+(1-w_k)t_{k-1} & k>1 \end{cases}. \tag{3}$$

现在，我们可以将主定理表述如下：

定理 2。 存在一个规则 f，对于 $k \in [m-1]$，给定一个适度至 k 的偏好档案，可以找到一个度量失真至多为 $2+\max(\alpha、\ t_k)$的备选项。

为证明该定理，我们采用 Gkatzelis 等人 [22] 所使用的方法，以确立存在一种度量失真为 3 的确定性规则。他们的方法涉及 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$-支配图，该图针对每个备选项定义如下。

定义 2。 给定一个选举、 $\mathcal{E}=(N、\ A、\ \boldsymbol{\sigma})$以及向量 $\boldsymbol{p} \in \Delta(N)$ 和 $\boldsymbol{q} \in \Delta(A)$，备选项 a 的$(\boldsymbol{p}、\ \boldsymbol{q})$−支配图是该顶点加权二分图

$$G^{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}(a) = (N, A, E_a, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}),$$

其中，$(i、\ c) \in E_a$ 当且仅当 $a \succ_i c$。与 $i \in N$ 对应的顶点权重为 $p(i)$，而顶点 $c \in A$ 的权重为 $q(c)$。

定义 *3.* 我们称$G^{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}(a)$存在分数完美匹配，如果存在一个权重函数$w: E_a \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$，使得与每个顶点相连的边的总权重等于该顶点的权重；也就是说，对于每个 $i \in N$，都有 $\sum_{c:(i,c)\in E_a} w(i,c) = p(i)$，并且对于每个 $c \in A$，都有 $\sum_{i:(i,c)\in E_a} w(i,c) = q(c)$。

Gkatzelis 等人 [22]通过证明以下定理（即排序-匹配引理），表明这样的匹配存在。这构成了证明存在一种度量失真为 3 的投票规则的核心。

定理 3. （排序-匹配引理）对于任意选举 $\mathcal{E}=(N, A, \boldsymbol{\sigma})$以及向量 $\boldsymbol{p} \in \Delta(N)$和 $\boldsymbol{q} \in \Delta(A)$，存在一个备选项 a，使得其 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$−支配图 $G^{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}(a)$ 存在分数完美匹配。

Gkatzelis 等人 [22] 将定理 3 应用于 $\boldsymbol{p}=(1/n, \ldots\ldots, 1/n)$ 和 $q(a)=\text{Plu}(a)/n$，以证明多数匹配规则的失真为 3。然而，为了证明定理 2，我们需要对他们的结果进行推广。为此，我们引入一类新的投票规则，称为**位置评分匹配规则**。这类规则使用长度为 m 的计分向量，并根据各备选项的排序计算其总分。我们根据备选项的总分定义 $\boldsymbol{q}$，并令 $\boldsymbol{p}$ 为均匀分布，然后找出一个备选项，使其 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$-支配图存在分数完美匹配。这类新规则的定义与分析也可能对未来研究具有独立的价值。

定义 4. 给定一个单位和评分向量 $\boldsymbol{s}=(s_1, s_2, \ldots, s_m)$，位置评分匹配规则 $\text{PSM}_{\boldsymbol{s}}$ 定义如下：对于一次选举 $\mathcal{E}=(N, A, \boldsymbol{\sigma})$，设定 $\boldsymbol{p}=(1/n, \ldots, 1/n)$。对于每个$a \in A$，计算 $q(a)=\sum_{i\in N} s_{\mathsf{rank}_i(a)}/n$。随后，该规则选择满足以下条件的备选项 a^*：$G^{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}(a^*)$存在分数完美匹配。

请注意，根据定理 3，这样的备选项总是存在。还需指出，多数匹配规则是首个实现失真为 3 的确定性规则，它属于这一类，其中 $\boldsymbol{s} = (1, 0, \ldots, 0)$。现在，我们分析该类规则应用于 moderate-up-to-k 偏好档案时的失真。

引理 3。 对于任意长度为 m 的单位和权重向量 $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_{k+1}, 0, \ldots, 0)$ 以及中等至 k 偏好档案 $\boldsymbol{\sigma}$，$\mathsf{dist}_\alpha(\mathrm{PSM}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\sigma})$ 的上界为

$$2 + \max\left(\alpha, \max_{j \in [k+1]} \left(\sum_{i \in [k+1] \wedge i \neq j} r_i \max\left(1, \alpha^{j-i}\right) \right) - r_j \right).$$

证明。 令 $\boldsymbol{p}$ 为均匀概率分布，对N中的每个代理人赋予概率 $1/n$。对于任意度量 d，我们定义 $a := \mathrm{PSM}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\sigma})$和 $b := \mathsf{opt}_d$。回顾一下，$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 与 $\mathrm{PSM}_{\boldsymbol{r}}$相关，而 a 是这样一个备选项：其 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$-支配图存在分数完美匹配，权重函数为 w。对于$G^{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}(a)$中的每个顶点 $x \in N \cup A$，我们用 $R(x)$表示在$G^{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}(a)$的无向版本中与 x 相邻的顶点集合。于是有：

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in N} d(i,a) &\leqslant \sum_{i \in N} \sum_{c \in R(i)} \frac{w(i,c)}{\sum_{c' \in R(i)} w(i,c')} d(i,c) && (d(i,a) \leqslant d(i,c) \text{ for all } c \in R(i)) \\
&= \sum_{c \in A} \sum_{i \in R(c)} \frac{w(i,c)}{\sum_{c' \in R(i)} w(i,c')} d(i,c) && \text{(rearranging the sum)} \\
&= \sum_{c \in A} \sum_{i \in R(c)} \frac{w(i,c)}{1/n} d(i,c) && \left(\sum_{c \in R(i)} w(i,c) = p(i) = \frac{1}{n}\right) \\
&\leqslant \sum_{c \in A} \sum_{i \in R(c)} \frac{w(i,c)}{1/n} \left(d(i,b) + d(b,c)\right) && \text{(triangle inequality)} \\
&= \sum_{c \in A} \sum_{i \in R(c)} \frac{w(i,c)}{1/n} d(i,b) + \sum_{c \in A} \sum_{i \in R(c)} n\, w(i,c)\, d(b,c) \\
&= \sum_{i \in N} \sum_{c \in R(i)} \frac{w(i,c)}{1/n} d(i,b) + \sum_{c \in A} \sum_{i \in R(c)} n\, w(i,c)\, d(b,c) && \text{(rearranging the first sum)} \\
&= \sum_{i \in N} d(i,b) + \sum_{c \in A} \sum_{i \in R(c)} n\, w(i,c)\, d(b,c) && \left(\sum_{c \in R(i)} w(i,c) = p(i) = \frac{1}{n}\right) \qquad (4) \\
&= \mathsf{sc}(b) + \sum_{c \in A} n\, q(c)\, d(b,c) && \left(\sum_{i \in R(c)} w(i,c) = q(c)\right) \\
&= \mathsf{sc}(b) + \sum_{c \in A} \sum_{i \in N} r_{\mathsf{rank}_i(c)}\, d(b,c) && \left(q(c) = \sum_{i \in N} \frac{r_{\mathsf{rank}_i(c)}}{n}\right) \\
&= \mathsf{sc}(b) + \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{k+1} r_j\, d(b, \pi_i(j)). && \text{(rearranging the sum)}
\end{aligned}$$

现在，我们根据 b 在各代理人偏好中的位置，将对所有代理人的求和拆分为若干个单独的和：

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in N} d(i,a) &\leqslant \mathsf{sc}(b) + \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\substack{i:\\ \pi_i(l)=b}} \sum_{j=1}^{k+1} r_j\, d(b,\ \pi_i(j)) + \sum_{\substack{i:\\ \mathsf{rank}_i(b)\geqslant k+2}} \sum_{j=1}^{k+1} r_j\, d(b,\ \pi_i(j)) \\
&= \mathsf{sc}(b) + \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\substack{i:\\ \pi_i(l)=b}} \sum_{j=1}^{l-1} r_j\, d(b,\ \pi_i(j)) + \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\substack{i:\\ \pi_i(l)=b}} \sum_{j=l+1}^{k+1} r_j d(b, \pi_i(j)) \\
&\quad + \sum_{\substack{i:\\ \text{排名}_i(b)\geqslant k+2}} \sum_{j=1}^{k+1} r_j d(b,\ \pi_i(j)) && (d(b,b)=0) \\
&\leqslant \mathsf{sc}(b) + \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\substack{i:\\ \pi_i(l)=b}} \sum_{j=1}^{l-1} r_j \left(d(i,\ b) + d(i,\ \pi_i(j))\right) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\substack{i:\\ \pi_i(l)=b}} \sum_{j=l+1}^{k+1} r_j \left(d(i,\ b) + d(i,\ \pi_i(j))\right) \\
&\quad + \sum_{\substack{i:\\ \text{排名}_i(b)\geqslant k+2}} \sum_{j=1}^{k+1} r_j \left(d(i,\ b) + d(i,\ \pi_i(j))\right) && \text{(triangle inequality)} \\
&\leqslant \mathsf{sc}(b) + \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\substack{i:\\ \pi_i(l)=b}} \sum_{j=1}^{l-1} 2r_j\, d(i,\ b) && (\pi_i(j) \succ_i b) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\substack{i:\\ \pi_i(l)=b}} \sum_{j=l+1}^{k+1} r_j \left(1 + \frac{1}{\alpha^{j-l}}\right) d(i,\ b) \\
&\quad + \sum_{\substack{i:\\ \mathsf{rank}_i(b)\geqslant k+2}} \sum_{j\neq 1}^{k+1} r_j (1+\alpha)\ d(i,\ b) && (\text{`}\succ\text{' and `}\succcurlyeq\text{' constraint}) \\
&= \mathsf{sc}(b) + \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\substack{i:\\ \pi_i(l)=b}} \left(\sum_{j=1}^{l-1} 2r_j\, d(i,\ b) + \sum_{j=l+1}^{k+1} r_j \left(1 + \frac{1}{\alpha^{j-l}}\right) d(i,\ b)\right) \\
&\quad + (1+\alpha) \sum_{\substack{i:\\ \text{排名}_i(b)\geqslant k+2}} d(b,\ i) && \left(\sum_{i=1}^{k+1} r_i = 1\right) \\
&= \mathsf{sc}(b) + (1+\alpha) \sum_{\substack{i:\\ \text{排名}_i(b)\geqslant k+2}} d(i,\ b) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\substack{i:\\ \pi_i(l)=b}} d(b,i) \sum_{\substack{j:j\neq l\\ 1\leqslant j\leqslant k+1}} r_j \left(1 + \alpha^{\min(0,l-j)}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \mathsf{sc}(b) + (1+\alpha) \sum_{\substack{i: \\ \mathsf{rank}_i(b) \geqslant k+2}} d(i,b)$$
$$+ \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\substack{i: \\ \pi_i(l)=b}} d(i,b) \left(1 - r_l + \sum_{\substack{j: j \neq l \\ 1 \leqslant j \leqslant k+1}} r_j \, \alpha^{\min(0, l-j)} \right).$$

如果我们选择 β 使得

$$\max_{l \in [k+1]} \sum_{\substack{j: j \neq l \\ 1 \leqslant j \leqslant k+1}} r_j \, \alpha^{\min(0,l-j)} - r_l = \max_{l \in [k+1]} \sum_{\substack{j: j \neq l \\ 1 \leqslant j \leqslant k+1}} r_j \max\left(1, \alpha^{l-j}\right) - r_l = \beta, \tag{5}$$

那么我们有：

$$\begin{aligned} \mathsf{sc}(a) &\leqslant \mathsf{sc}(b) + \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\substack{i: \\ \pi_i(l)=b}} d(i,b)\,(1+\beta) + (1+\alpha) \sum_{\substack{i: \\ \mathsf{rank}_i(b) \geqslant k+2}} d(i,b) \\ &\leqslant \mathsf{sc}(b) + (1 + \max(\beta, \alpha)) \sum_{i \in N} d(i,b) \leqslant (2 + \max(\beta, \alpha))\, \mathsf{sc}(b). \end{aligned}$$

因此， a 的失真至多为 $2 + \max(\beta, \alpha)$。 □

通过这项分析，我们可以优化计分向量 $\boldsymbol{r}$ 以降低失真。我们可以将优化问题表述如下：

$$\underset{\boldsymbol{r} \in \Delta([k+1])}{\text{minimize}} \max_{j \in [k+1]} \left(\sum_{i \in [k+1] \wedge i \neq j} r_i \, \max\left(1, \alpha^{j-i}\right) \right) - r_j,$$

用矩阵形式可写为

$$\underset{\boldsymbol{r} \in \Delta([k+1])}{\text{minimize}} \max_{j \in [k+1]} \left(\boldsymbol{r}^{\mathsf{T}} M\right)_j, \tag{6}$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\alpha^k} & \frac{1}{\alpha^{k-1}} & \dots \frac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix}.$$

优化目标 (6) 类似于求解一个双人零和博弈中第二位玩家的支付矩阵 M。假设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别表示第一位（行）玩家和第二位（列）玩家的混合策略，那么 $\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} M \boldsymbol{y}$ 表示第二位玩家的支付。在引理 4 中，我们介绍了该博弈的一个均衡及其对应的支付。

引理 4。对于每个 $k \in [m-1]$，考虑混合策略 $\boldsymbol{r}^k = (w_k, \; w_{k-1}(1-w_k) \dots, \; w_1 \Pi_{j=2}^k (1-w_j) \, \Pi_{j=1}^k (1-w_j))$。那么，$(\boldsymbol{r}^k, \; (\boldsymbol{r}^k)^R)$ 是支付矩阵为 M 的零和博弈的一个均衡，该均衡的支付（等于目标 6 的最优值）为 t_k （ r^R 是向量 r，其指标顺序相反）。

证明。我们将对应于犹豫至多-k 偏好的支付矩阵记为 M^k M。首先，我们用归纳法证明 $(\boldsymbol{r}^k)^\intercal M^k = t_k\mathbf{1}^\intercal$，其中$\mathbf{1}$ 是所有分量均为 1 的向量。容易验证基础情形显然成立。因此，我们假设 $(\boldsymbol{r}^{k-1})^\intercal M^{k-1} = t_{k-1}\mathbf{1}^\intercal$，并试图证明当 k 时等式成立。注意，矩阵 M^k 具有以下形式：

$$M^k = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{1}^\intercal \\ \boldsymbol{\alpha}^k & M^{k-1} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

其中， $\boldsymbol{\alpha}^k$ 是一个向量，其 i^{th} 个元素等于$\frac{1}{\alpha^i}$。此外，根据 $\boldsymbol{r}^k$的定义，我们有：

$$(\boldsymbol{r}^k)^\intercal = [w_k \;\; (1-w_k)(\boldsymbol{r}^{k-1})^\intercal]. \tag{8}$$

现在，对于每个 $2 \leqslant i \leqslant k+1$，我们可以写作（$M_i^k$是 M^k的第 i^{th}列）：

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{r}^k)^\intercal M_i^k &= w_k + (1-w_k)(\boldsymbol{r}^{k-1})^\intercal M_{i-1}^{k-1} && \text{(Equations (7) and (8))} \\
&= w_k + (1-w_k)t_{k-1} && \text{(Induction hypothesis)} \\
&= t_k. && \text{(Equation (3))}
\end{aligned}$$

因此，$(\boldsymbol{r}^k)^\intercal M^k$ 中从第二个到第$k+1$个$^{\text{th}}$ 的元素都等于 t_k。所以，我们只需检查它的第一个元素，即$(\boldsymbol{r}^k)^\intercal M_1^k$。注意，我们可以将 M^k的第一列写成如下形式（$\boldsymbol{e_i}^\intercal$ 是一个只有第 i^{th} 个元素非零且该元素等于一的向量）：

$$(M_1^k)^\intercal = [-1 \quad \frac{1}{\alpha}(M_1^{k-1})^\intercal + \frac{2}{\alpha}\boldsymbol{e_1}^\intercal]. \tag{9}$$

我们有：

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{r}^k)^\intercal M_1^k &= -w_k + (1-w_k)\frac{1}{\alpha}(\boldsymbol{r}^{k-1})^\intercal M_1^{k-1} + \frac{2}{\alpha}(1-w_k)w_{k-1} && \text{(Equations (8) and (9))} \\
&= -w_k + (1-w_k)(\frac{1}{\alpha}t_{k-1} + \frac{2}{\alpha}w_{k-1}) && \text{(Induction hypothesis)} \\
&= w_k + (1-w_k)t_{k-1} - 2 + (1-w_k)((\frac{1}{\alpha}-1)t_{k-1} + \frac{2}{\alpha}w_{k-1} + 2) \\
&= w_k + (1-w_k)t_{k-1} && \text{(Equation (2))} \\
&= t_k. && \text{(Equation (3))}
\end{aligned}$$

现在，我们证明（$\boldsymbol{r}^k$，$(\boldsymbol{r}^k)^R$）是支付矩阵为 M^k的零和博弈的一个均衡。注意 M^k的一个关键性质：对于每个 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k+1$，$M^k(i,\ j) = M^k(k+2-j,\ k+2-i)$。这意味着 M^k 关于其副对角线对称。对于这样的矩阵，我们可以推得$(\boldsymbol{r}^k)^\intercal M^k = (M^k(\boldsymbol{r}^k)^R)^R$.但我们已经知道$(\boldsymbol{r}^k)^\intercal M^k = t_k\mathbf{1}^\intercal$。因此，$M^k(\boldsymbol{r}^k)^R = t_k\mathbf{1}$。现在，如果第一位玩家选择 $\boldsymbol{r}^k$，第二位玩家选择$(\boldsymbol{r}^k)^R$，那么双方都不会愿意改变自己的策略，因为对于每个 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \Delta([k+1])$，我们有：

$$(\boldsymbol{r}^k)^\intercal M^k \boldsymbol{y} = t_k\mathbf{1}^\intercal \boldsymbol{y} = t_k,$$

$$\boldsymbol{x} M^k (\boldsymbol{r}^k)^R = \boldsymbol{x} t_k \mathbf{1} = t_k.$$

因此，$(\boldsymbol{r}^k,\ (\boldsymbol{r}^k)^R)$ 构成该博弈的一个均衡，而 t_k 是博弈值，正如所期望的那样。

□

现在我们可以证明定理 2 了。

定理 *2* 的证明。令 $\boldsymbol{s} = (r_1^k, \ldots, r_{k+1}^k, 0, \ldots, 0)$，其中 $\boldsymbol{r}^k = (r_1^k, \ldots, r_{k+1}^k)$ 是我们在引理 4 中找到的最优向量，并考虑规则 $\mathrm{PSM}_{\boldsymbol{s}}$。应用引理 3 可得 $\mathrm{dist}_\alpha(\mathrm{PSM}_{\boldsymbol{s}})$ 的一个上界，而引理 4 将此上界简化为 $2 + \max(\alpha, t_k)$。 □

到目前为止，我们的结果适用于具有中等至k 偏好档案的实例。然而，在一般情形下，代理人可能会在不同的排名中拥有其第一个“$\succ$”。令 ℓ_i 表示代理人 i的强度排名，即代理人 i 具有中等至ℓ_i的偏好。下面的定理将定理 2 的结果推广到强度排名各不相同的代理人。所给出的界取决于 $\ell_{\max}$，即所有代理人中的最大强度排名，也就是 $\ell_{\max} := \max_{i \in N} \ell_i$。请注意，定理 4 给出的界与 m无关。在图 2 和图 3 中，你可以找到针对 α 和 $\ell_{\max}$ 不同取值时定理 4 所给出的界的示意图。

定理 4。存在一个规则 f，使得对于任意偏好档案，都能找到一个度量失真至多为 $2 + \max(\alpha, t_{\ell_{\max}})$的备选项。

证明。令 N_h 表示强度排名为 h的代理人集合。此外，令 $H \subset \mathbb{N}$ 为满足 $\bigcup_{h \in H} N_h = N$的有限集。再令 $\boldsymbol{r}^{\ell_i}$ 表示针对 ℓ_i-犹豫不决选举的最优向量，我们将在引理 4 中给出该向量。令 $\boldsymbol{p}$ 表示均匀概率分布，该分布为 N中的每个代理人分配概率 $1/n$。此外，对于备选项 $c \in A$，我们定义：

$$q(c) = \sum_{i \in A} \frac{r^{l_i}{}_{\mathsf{rank}_i(c)}}{n}.$$

根据定理 3，存在一个备选项 a，其 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$-支配图存在分数完美匹配。现在，我们要证明 $\sum_{i \in N} d(i, a)$ 的一个上界。对于任意度量 d，我们定义 $b := \mathrm{opt}_d$。对于 $G^{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{q}}(a)$ 中的每个顶点 $x \in N \cup A$，我们用 $R(x)$ 表示在 $G^{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{q}}(a)$ 的无向版本中与 x 相邻的顶点集合。我们可以采用与引理 3 的证明中相似的论证，直到方程（4）。于是有：

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in N} d(i,a) &\leqslant \sum_{i \in N} d(i,b) + \sum_{c \in A} \sum_{i \in R(c)} n\, w(i,c)\, d(b,c) \\
&= \mathsf{sc}(b) + \sum_{c \in A} n\, q(c)\, d(b,c) && \left(\sum_{i \in R(c)} w(i,c) = q(c) \right) \\
&= \mathsf{sc}(b) + \sum_{c \in A} \sum_{i \in N} r^{l_i}{}_{\mathsf{rank}_i(c)} d(b,c) && \left(q(c) = \sum_{i \in N} \frac{r^{\ell_i}{}_{\mathsf{rank}_i(c)}}{n} \right) \\
&= \mathsf{sc}(b) + \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{l_i+1} r^{\ell_i}{}_j\, d(b, \pi_i(j)) && \text{（重新排列求和项）} \\
&\leqslant \mathsf{sc}(b) + \sum_{h \in H} \sum_{k=1}^{h+1} \sum_{\substack{i : \pi_i(k) = b \\ i \in N_h}} \sum_{j=1}^{h+1} r_j^h\, d(b, \pi_i(j)) \\
&\qquad + \sum_{h \in H} \sum_{\substack{i : i \in N_h \\ \mathsf{rank}_i(b) \geqslant h+2}} \sum_{j=1}^{h+1} r_j^h\, d(b, \pi_i(j)) \\
&= \mathsf{sc}(b) + \sum_{h \in H} \sum_{k=1}^{h+1} \sum_{\substack{i : \pi_i(k) = b \\ i \in N_h}} \sum_{j=1}^{k-1} r_j^h\, d(b, \pi_i(j))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{h\in H}\sum_{k=1}^{h+1}\sum_{\substack{i:\pi_i(k)=b\\ i\in N_h}}\sum_{j=k+1}^{i+1} r_j^h\, d(b,\pi_i(j)) \\
&+ \sum_{h\in H}\sum_{\substack{i:i\in N_h\\ \mathsf{rank}_i(b)\geqslant h+2}}\sum_{j=1}^{h+1} r_j^h\, d(b,\pi_i(j)) && (d(b,b)=0)\\
\leqslant\ & \mathsf{sc}(b) + \sum_{h\in H}\sum_{k=1}^{h+1}\sum_{\substack{i:\pi_i(k)=b\\ i\in N_h}}\sum_{j=1}^{k-1} r_j^h\,(d(i,b)+d(i,\pi_i(j))) \\
&+ \sum_{h\in H}\sum_{k=1}^{h+1}\sum_{\substack{i:\pi_i(k)=b\\ i\in N_h}}\sum_{j=k+1}^{h+1} r_j^h\,(d(i,b)+d(i,\pi_i(j))) \\
&+ \sum_{h\in H}\sum_{\substack{i:i\in N_h\\ \mathsf{rank}_i(b)\geqslant h+2}}\sum_{j=1}^{h+1} r_j^h\,(d(i,b)+d(i,\pi_i(j))) && \text{(triangle inequality)}\\
\leqslant\ & \mathsf{sc}(b) + \sum_{h\in H}\sum_{k=1}^{h+1}\sum_{\substack{i:\pi_i(k)=b\\ i\in N_h}}\sum_{i=1}^{k-1} 2r_j^h\, d(i,b) && (\pi_i(h)\succ_i b)\\
&+ \sum_{h\in H}\sum_{k=1}^{h+1}\sum_{\substack{i:\pi_i(k)=b\\ i\in N_h}}\sum_{j=k+1}^{i+1} r_j^h\left(1+\frac{1}{\alpha^{h-j}}\right) d(i,b) && (10)\\
&+ \sum_{h\in H}\sum_{\substack{i:i\in N_h\\ \mathsf{rank}_i(b)\geqslant h+2}}\sum_{j=1}^{h+1} r^h{}_j\,(1+\alpha)\, d(i,b) && (\text{`}\succ\text{'} \text{ and } \text{`}\succcurlyeq\text{'} \text{ constraints})\\
=\ & \mathsf{sc}(b) + \sum_{h\in H}\sum_{k=1}^{h+1}\sum_{\substack{i:\pi_i(k)=b\\ i\in N_h}}\left(\sum_{j=1}^{k-1} 2r_j^h\, d(i,b) + \right.\\
&\qquad\qquad \left. \sum_{j=k+1}^{h+1} r_j^h\left(1+\frac{1}{\alpha^{h-j}}\right) d(i,b)\right)\\
&+ (1+\alpha)\sum_{h\in H}\sum_{\substack{i:i\in N_h\\ \mathsf{rank}_i(b)\geqslant h+2}} d(i,b) && \left(\sum_{j=1}^{h+1} r^h{}_i = 1\right)\\
=\ & \mathsf{sc}(b) + (1+\alpha)\sum_{h\in H}\sum_{\substack{i:i\in N_h\\ \mathsf{rank}_i(b)\geqslant h+2}} d(i,b)\\
&+ \sum_{h\in H}\sum_{k=1}^{h+1}\sum_{\substack{i:\pi_i(k)=b\\ i\in N_h}} d(i,b)\sum_{\substack{j:j\neq k\\ 1\leqslant j\leqslant h+1}} r_j^h\left(1+\frac{1}{\alpha^{\max(0,j-k)}}\right).
\end{aligned}
$$

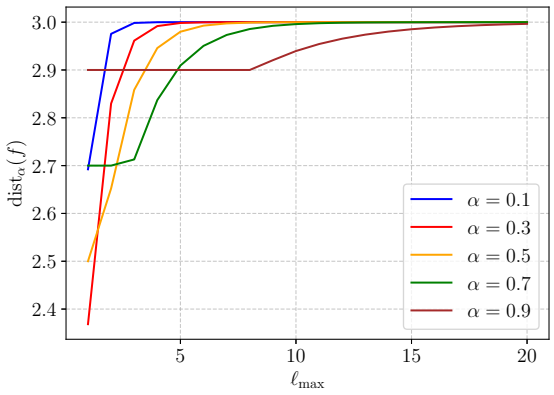


图 2：定理 4 中所述规则的失真随不同 α 而变化，横轴为 $\ell_{\max}$。

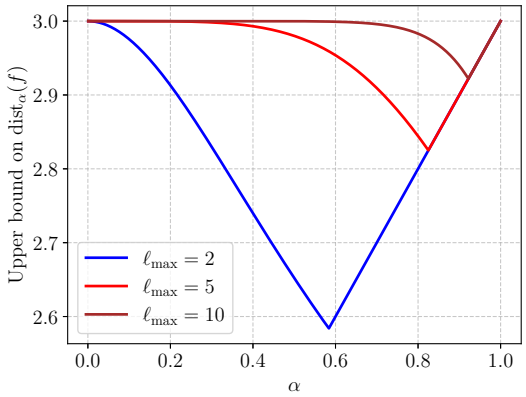


图 3：定理 4 中所述规则的失真随不同 $\ell_{\max}$ 而变化，横轴为 α。

由引理 4 的证明可知，对于每个 $k \in [h+1]$，$\sum_{j \,:\, j \neq k} r^i{}_j \left(1 + \frac{1}{\alpha^{max\{0, j-k\}}}\right) \leqslant$ $\underline{\qquad\qquad\qquad

证明。 将最大强度排名为 ℓ 的代理人记为 N_1，其余代理人记为 N_2。假设当给定代理人 N_1 的偏好档案时， f 输出 a。那么，我们将给定所有实例时 f_ℓ 的输出定义为 a。对于任意度量 d，我们定义 $b := \mathrm{opt}_d$。于是，我们有

$$\sum_{i\in N_1} d(i,a) \leqslant D_\ell \sum_{i\in N_1} d(i,b). \tag{11}$$

我们定义 $j := \arg\min_{i\in N_1}(d(i,b) + d(i,a))$. 因此，我们可以写成

$$\begin{aligned} d(j,b) + d(j,a) &\leqslant \frac{1}{|N_1|}\sum_{i\in N_1}(d(i,b)+d(i,a)) && (\text{ } j\text{的性质}) \\ &\leqslant \frac{1}{(1-\beta)\,n}\sum_{i\in N_1}(d(i,b)+d(i,a))\,. && ((1-\beta)\,n \leqslant |N_1|) \end{aligned} \tag{12}$$

现在，我们有

$$\begin{aligned} \sum_{i\in N_2} d(i,a) &\leqslant \sum_{i\in N_2}(d(i,b)+d(j,b)+d(j,a)) && (\text{triangle inequality}) \\ &\leqslant \sum_{i\in N_2} d(i,b) + \sum_{i\in N_2}\frac{1}{(1-\beta)\,n}\sum_{i'\in N_1}\big(d(i',b)+d(i',a)\big) && (\text{Inequality (12)}) \\ &\leqslant \sum_{i\in N_2} d(i,b) + \frac{\beta}{1-\beta}\sum_{i\in N_1}(d(i,b)+d(i,a))\,. && (|N_2| \leqslant \beta n) \end{aligned} \tag{13}$$

因此，我们可以得出

$$\begin{aligned} \sum_{i\in N} d(i,a) &= \sum_{i\in N_1} d(i,a) + \sum_{i\in N_2} d(i,a) \\ &\leqslant \sum_{i\in N_1} d(i,a) + \sum_{i\in N_2} d(i,b) + \frac{\beta}{1-\beta}\sum_{i\in N_1}(d(i,b)+d(i,a)) && (\text{Inequality (13)}) \\ &\leqslant D_\ell \sum_{i\in N_1} d(i,b) + \sum_{i\in N_2} d(i,b) + \frac{\beta}{1-\beta}(1+D_\ell)\sum_{i\in N_1} d(i,b) && (\text{Inequality (11)}) \\ &\leqslant \left(D_\ell + \frac{\beta}{1-\beta}(1+D_\ell)\right)\sum_{i\in N_1} d(i,b) + \left(D_\ell + \frac{\beta}{1-\beta}(1+D_\ell)\right)\sum_{i\in N_2} d(i,b) && (D_\ell \geqslant 1) \\ &= \left(D_\ell + \frac{\beta}{1-\beta}(1+D_\ell)\right)\sum_{i\in N} d(i,b). \end{aligned}$$

因此， a 的失真至多为 $D_\ell + \frac{\beta}{1-\beta}(1+D_\ell)$，正如所需。 □

4 线度量中的失真

为了全面了解强度如何影响度量失真，本节将考察线度量这一一般度量的重要且研究充分的特殊情形，旨在给出更精细的界。

我们首先考虑只有两个备选项的选举这一特殊情形。在假设必须征询强度的前提下，我们为这一情形的失真建立一个下界，

这一结果自然也构成了同一假设下任意线度量选举的下界。随后，我们分析这一情形下选举的结构，并据此提出一条我们推测具有最优失真的规则。图 4 展示了这一界的示意图。

定理 6. 在含有两个备选项的1维欧几里得空间中，对于任何采用带强度的排序偏好选票格式且参数为 $\alpha \in (0,1]$ 的投票规则 f，并假设强制征询偏好强度，其度量失真至少为 $\max\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}, 2\alpha+1\right)$.

证明。 我们通过两个非常相似的实例给出两个下界。考虑选举$\mathcal{E}=(N,A,\boldsymbol{\sigma})$ 和 $\mathcal{E}'=(N,A,\boldsymbol{\sigma}')$，其中 $N=\{1,2\}$ 且 $A=\{a_1,a_2\}$。代理人的偏好为

$$\sigma_i=\begin{cases} a_1 \succ a_2 & i=1 \\ a_2 \succ a_1 & i=2 \end{cases}, \text{ and } \sigma_i'=\begin{cases} a_1 \succcurlyeq a_2 & i=1 \\ a_2 \succcurlyeq a_1 & i=2 \end{cases}.$$

设 f 为一个确定性规则，不失一般性，假设 $a_1=f(\boldsymbol{\sigma})$。现在考虑图 5 所示的度量空间 d_1。在该度量中， a_1 与 a_2 之间的距离为 $\frac{2}{\alpha}+2$，代理人与备选项之间的距离如下：

$$\begin{aligned} d_1(1,a_1)=\frac{1}{\alpha}+1, d_1(2,a_1)=\frac{2}{\alpha}+2+\frac{2\alpha+2}{1-\alpha}, \\ d_1(1,a_2)=\frac{1}{\alpha}+1, d_1(2,a_2)=\frac{2\alpha+2}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

我们有：

$$\begin{aligned} \mathsf{dist}_\alpha(a_1,\mathcal{E}) &\geqslant \frac{\mathsf{sc}_{d_1}(a_1)}{\mathsf{sc}_{d_1}(a_2)}=\frac{d_1(1,a_1)+d_1(2,a_1)}{d_1(1,a_2)+d_1(2,a_2)} \\ &=\frac{\frac{1}{\alpha}+1+\frac{2}{\alpha}+2+\frac{2\alpha+2}{1-\alpha}}{\frac{1}{\alpha}+1+\frac{2\alpha+2}{1-\alpha}}=\frac{\frac{3}{\alpha^2}+\frac{2}{\alpha}-1}{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{2}{\alpha}+1}=\frac{3-\alpha}{1+\alpha}. \end{aligned}$$

对于第二次选举，同样不失一般性（由对称性），假设 $f(\boldsymbol{\sigma}')=a_1$，并考虑度量 d_2，其中 a_1 与 a_2 之间的距离为 $\frac{1}{\alpha}+1$。第一位代理人位于 a_1 和 a_2 之间，第二位代理人与 a_2 位于同一位置。代理人与备选项之间的距离如下：

$$d_2(1,a_1)=1, d_2(2,a_1)=1+\frac{1}{\alpha}, d_2(1,a_2)=\frac{1}{\alpha}, d_2(2,a_2)=0.$$

我们有：

$$\mathsf{dist}_\alpha(a_1,\mathcal{E}') \geqslant \frac{\mathsf{sc}_{d_2}(a_1)}{\mathsf{sc}_{d_2}(a_2)}=\frac{d_2(1,a_1)+d_2(2,a_1)}{d_2(1,a_2)+d_2(2,a_2)}=\frac{1+1+\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}+0}=2\alpha+1.$$

容易验证 $\boldsymbol{\sigma} \rhd_\alpha d_1$ 和 $\boldsymbol{\sigma}' \rhd_\alpha d_2$。根据定义， f 的失真至少为其在 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}'$ 中失真的最大值，因此，$\mathsf{dist}_\alpha(f)$ 至少为 $\max\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}, 2\alpha+1\right)$。 □

为了在这一受限设定中设计出失真良好的规则，我们先来看看这些实例的结构。在有两个备选项 $\{a_1,a_2\}$ 的选举中，代理人有四种可能的偏好： $a_1 \succ a_2$、 $a_2 \succ a_1$、 $a_1 \succcurlyeq a_2$ 和 $a_2 \succcurlyeq a_1$。令 $N_{a_1 \succ a_2}$、 $N_{a_2 \succ a_1}$、 $N_{a_1 \succcurlyeq a_2}$ 和 $N_{a_2 \succcurlyeq a_1}$ 分别表示持有这些偏好的代理人集合。我们的目标是根据给定的偏好档案 $\boldsymbol{\sigma}$，判断 a_1 和 a_2 中哪一个的失真更低。为作出这一判断，

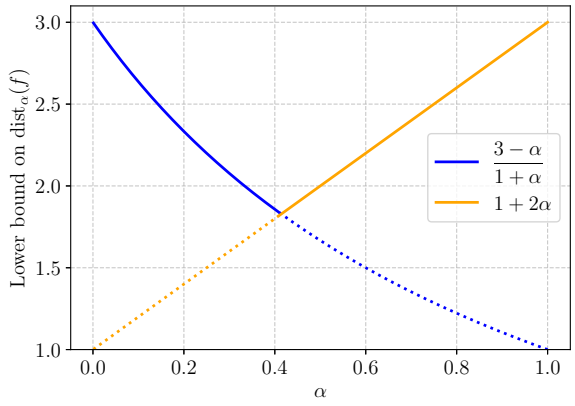


图 4：定理 6 中所确立下界的示意图。

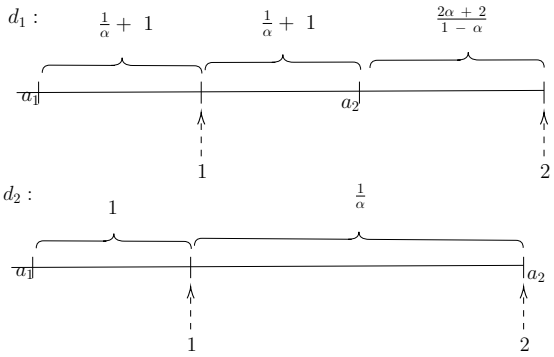


图 5：定理 6 的证明中使用的度量。

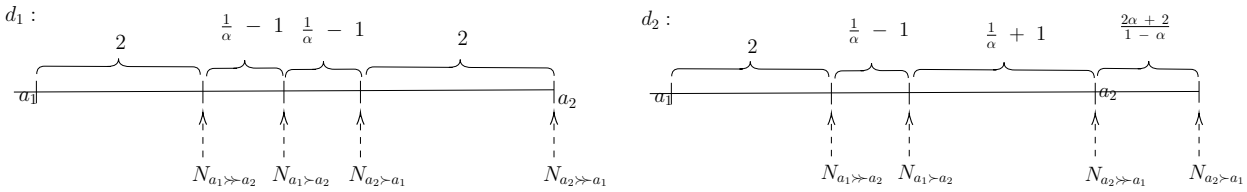


图 6：产生最坏失真的度量。

我们考虑与 $\boldsymbol{\sigma}$ 一致、且能使某个特定备选项的失真达到最大的度量。对于备选项 a_1，考虑图 6 所示的度量 d_1 和 d_2。在下面的引理中，我们证明这些度量使 a_1 的失真达到最大。

引理 5。 考虑一个有 $\mathcal{E}$ 两个备选项 $A = \{a_1, a_2\}$的选举，以及如图 6 所示的度量空间 d_1 和d_2，我们有：

$$\mathsf{dist}_\alpha(a_1, \mathcal{E}) = \max\left(\frac{\mathsf{sc}_{d_1}(a_1)}{\mathsf{sc}_{d_1}(a_2)}, \frac{\mathsf{sc}_{d_2}(a_1)}{\mathsf{sc}_{d_2}(a_2)}, 1\right).$$

证明。假设 d 是使 a_1 的社会成本与 a_2的社会成本之比最大的线度量。对于每个代理人，我们利用 $d(i, a_1)$ 和 $d(i, a_2)$分别出现在 $\mathsf{sc}_d(a_1)$ $\mathsf{sc}_d(a_2)$ 的分子和分母中的事实，为其在 d 中找到一个使其对失真的贡献最大的所在位置。我们必须考虑四类代理人。首先，让我们将 a_1 放在左侧，将 a_2 放在右侧。对于代理人 $i \in N_{a_2 \succcurlyeq a_1}$，如果 i 不在与 a_2相同的位置，它要么位于两个备选项之间，要么位于 a_2的右侧。如果它位于两者之间，将其向 a_2 移动可以减小 $d(i, a_2)$ 并增大 $d(i, a_1)$，从而使 $\mathsf{sc}_d(a_1)$ $\mathsf{sc}_d(a_2)$ 变大。在另一种情况下，如果将 i 向 ~~a_2~~移动，分母和分子都会同等程度地变小。然而，由于 a_1 的失真大于 1，该比值将变大。因此，在这两种情况下，我们都能使 $\mathsf{sc}_d(a_1)$ $\mathsf{sc}_d(a_2)$ 变大，这说明要使其对失真的贡献最大，i 必须位于与 a_2 相同的位置。

对于代理人 $i \in N_{a_1 \succ a_2}$，假设 $d(i, a_1) < d(i, a_2)$。如果 i 位于两个备选项之间，我们可以将其移向连接这两个备选项的线段中点（远离 a_1），从而使分子增大、分母减小。这会使失真增大。如果 i 位于 a_1 的左侧，我们就将其移到两个备选项之间线段的中点。这样一来，

分母会变小（$d(i,\ a_2)$ 至少与该线段的长度一样大），分子可能也会变小，但分子的变化幅度不会像分母那么大。因此，由于失真原本大于一，它会变得更大。因此，令 $d(i,\ a_1) = d(i,\ a_2)$，会使 i 对失真作出最大贡献。

对于 $i \in N_{a_1 \succ\!\!\succ a_2}$，首先假设 i 位于连接两个备选项的线段之外。通过与前一种情况类似的论证，我们可以轻易证明，如果将 i 移到两个备选项之间、满足 $d(i,\ a_1) \geqslant \alpha d(i,\ a_2)$ 的位置，就会得到更大的失真。因此，i 必须位于两个备选项之间。在此情况下，i 越接近 a_2，失真就越大。由于强度约束，i 最多只能位于满足 $d(i,\ a_1) = \alpha d(i,\ a_2)$ 的位置，而此处正是它对失真贡献最大的位置。

最后，对于 $i \in N_{a_2 \succ a_1}$，有两种可能的位置。如果 i 位于两个备选项之间，通过类似的论证可知，它必须位于尽可能靠近 a_2 的位置；由于强度约束，这个位置满足 $\alpha d(i,\ a_1) = d(i,\ a_2)$。如果 i 位于连接两个备选项的线段之外，将其移近 a_2，就能使分子和分母等幅减小，从而得到更大的失真。这意味着它必须位于尽可能靠近 a_2 的位置；由于强度约束，该位置满足 $\alpha d(i,\ a_1) = d(i,\ a_2)$。在这种情况下，$i$ 有两种可能的位置。现在我们可以得出结论：根据 $N_{a_2 \succ a_1}$ 中代理人的位置，使 a_1 的失真最大化的度量 d 与 d_1 或 d_2 相似，由此完成证明。

□

注意，我们可以通过分别改变 d_1 和 d_2 中 a_1 和 a_2 的位置并重新标记代理人，来定义使 a_2 的失真最大的度量 d_1' 和 d_2'。这一观察为我们提供了工具，用于在有两个备选项的选举中找出失真最小的备选项。

我们可以看到

$$\frac{\mathsf{sc}_{d_1}(a_1)}{\mathsf{sc}_{d_1}(a_2)} = \frac{(\frac{1}{\alpha}+1)n_{a_1 \succ a_2} + \frac{2}{\alpha} n_{a_2 \succ a_1} + 2n_{a_1 \succ\!\!\succ a_2} + (2+\frac{2}{\alpha}) n_{a_2 \succ\!\!\succ a_1}}{(\frac{1}{\alpha}+1)n_{a_1 \succ a_2} + 2n_{a_2 \succ a_1} + \frac{2}{\alpha} n_{a_1 \succ\!\!\succ a_2}}$$

其中 $n_X := |N_X|$。类似地，我们有

$$\frac{\mathsf{sc}_{d_2}(a_1)}{\mathsf{sc}_{d_2}(a_2)} = \frac{(\frac{1}{\alpha}+1)n_{a_1 \succ a_2} + \frac{2+\frac{2}{\alpha}}{1-\alpha} n_{a_2 \succ a_1} + 2n_{a_1 \succ\!\!\succ a_2} + (2+\frac{2}{\alpha}) n_{a_2 \succ\!\!\succ a_1}}{(\frac{1}{\alpha}+1)n_{a_1 \succ a_2} + \frac{2\alpha+2}{1-\alpha} n_{a_2 \succ a_1} + \frac{2}{\alpha} n_3}.$$

为方便起见，令

$$D_\alpha(n_1, n_2, n_3, n_4) = \max\left(\frac{(\frac{1}{\alpha}+1)n_1 + \frac{2}{\alpha} n_2 + 2n_3 + (2+\frac{2}{\alpha}) n_4}{(\frac{1}{\alpha}+1)n_1 + 2n_2 + \frac{2}{\alpha} n_3}, \frac{(\frac{1}{\alpha}+1)n_1 + \frac{\frac{2}{\alpha}(1+\frac{1}{\alpha})}{\frac{1}{\alpha}-1} n_2 + 2n_3 + (2+\frac{2}{\alpha}) n_4}{(\frac{1}{\alpha}+1)n_1 + \frac{2(1+\frac{1}{\alpha})}{\frac{1}{\alpha}-1} n_2 + \frac{2}{\alpha} n_3} \right).$$

这意味着

$$\mathsf{dist}_\alpha(a_1, \mathcal{E}) = D_\alpha(n_{a_1 \succ a_2}, n_{a_2 \succ a_1}, n_{a_1 \succ\!\!\succ a_2}, n_{a_2 \succ\!\!\succ a_1}).$$

用同样的论证，我们可以证明

$$\mathsf{dist}_\alpha(a_2, \mathcal{E}) = D_\alpha(n_{a_2 \succ a_1}, n_{a_1 \succ a_2}, n_{a_2 \succ\!\!\succ a_1}, n_{a_1 \succ\!\!\succ a_2}).$$

这意味着，投票规则只需计算 $D_\alpha(n_{a_1 \succ a_2},\ n_{a_2 \succ a_1},\ n_{a_1 \succ\!\!\succ a_2},\ n_{a_2 \succ\!\!\succ a_1})$ 和 $D_\alpha(n_{a_2 \succ a_1},\ n_{a_1 \succ a_2},\ n_{a_2 \succ\!\!\succ a_1},\ n_{a_1 \succ\!\!\succ a_2})$，若前者较小则选择 a_1，否则选择 a_2。对于给定的 α，我们将此规则称为 f_α^{tal}，因为当直线上有两个代理人时，它表现良好。

定理 7. 给定 1 维欧几里得空间中的一次选举 $\mathcal{E}=(N,\{a_1,a_2\},\boldsymbol{\sigma})$ 以及参数 $\alpha\in(0,1]$，我们有

$$\mathsf{dist}_\alpha\left(f_\alpha^{\mathsf{tal}}(\boldsymbol{\sigma}),\mathcal{E}\right)=\min\begin{Bmatrix}D_\alpha(n_{a_1\succ a_2},\ n_{a_2\succ a_1},\ n_{a_1\succcurlyeq a_2},\ n_{a_2\succcurlyeq a_1}),\\ D_\alpha(n_{a_2\succ a_1},\ n_{a_1\succ a_2},\ n_{a_2\succcurlyeq a_1},\ n_{a_1\succcurlyeq a_2})\end{Bmatrix}$$

注意，该规则会输出实例最优备选项。此外，利用定理 7，我们可以给出该规则失真的以下界。$\mathsf{dist}_\alpha(f_\alpha^{\mathsf{tal}})=\max_{n_1,n_2,n_3,n_4}(\min(D_\alpha(n_2,n_1,n_4,n_3),D_\alpha(n_1,n_2,n_3,n_4)))$，其中在此方程中，失真是在两个备选项的选举以及一维欧几里得度量空间中定义的。尽管我们无法通过代数方法简化该规则的最坏情况失真，但我们猜想，在最坏情况下，该规则的失真与定理 6 中的下界相匹配。

猜想 *1.* 考虑只有两个备选项的选举，并假设度量仅限于一维欧几里得度量空间，则有

$$\mathsf{dist}_\alpha(f_\alpha^{\mathsf{tal}})=\max\left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha},2\alpha+1\right).$$

尽管我们无法通过代数方法证明这一猜想，但模拟结果支持该猜想。实际上，对于所有总和为 1000 的n_1,n_2,n_3,n_4 可能取值，我们都计算了 $\min(D_\alpha(n_2,n_1,n_4,n_3),D_\alpha(n_1,n_2,n_3,n_4))$ 的值。

我们通过给出线度量下投票规则失真度的一般下界来结束本节。回顾一下，在引理 1 和引理 2 中，我们建立了失真的一个下界，但由于证明中使用的度量更为一般，该下界并不能推出线度量下的任何下界。这意味着我们需要针对这一设置给出一个新的下界。

定理 8。 在1-欧几里得空间中，任何使用带有强度的排名偏好选票格式、参数为 $\alpha\in(0,1]$ 并假设强制征询强度的投票规则 f 的度量失真至少为

$$\frac{1+3\alpha^{-\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}{3+\alpha^{-\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}}.$$

证明。 首先，我们假设 m 为偶数。考虑选举 $\mathcal{E}=(N,\ A,\ \boldsymbol{\sigma})$，其中 $N=\{i_1,i_2\}$ 且 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_{\frac{m}{2}},b_1,b_2,\ldots,b_{\frac{m}{2}}\}$。代理人的偏好如下：

$$\sigma_{i_l}=\begin{cases}a_1\succ a_2\succ\ldots\succ a_{\frac{m}{2}}\succ b_1\succ b_2\succ\ldots\succ b_{\frac{m}{2}} & l=1\\ b_1\succ b_2\succ\ldots\succ b_{\frac{m}{2}}\succ a_1\succ a_2\succ\ldots\succ a_{\frac{m}{2}} & l=2\end{cases}$$

设 f 是一个确定性社会选择规则，并定义 $c:=f(\boldsymbol{\sigma})$。注意，$c$ 要么是某个$1\leqslant l\leqslant m/2$ 对应的 a_l，要么是某个 $1\leqslant j\leqslant m/2$对应的 b_j。由于对称性，不失一般性，假设 c 是 a_l。

考虑以下度量 d：候选人 a_1、a_2、.....、$a_{m/2}$ 位于同一位置。代理人 i_1 位于 a_1右侧、距离为 $\left(\frac{1}{\alpha^{\frac{m}{2}}}+1\right)$ 的位置，而 i_2 位于 i_1右侧、距离为 $\left(\frac{1}{\alpha^{\frac{m}{2}}}-1\right)$的位置。候选人 b_1、b_2、.....、$b_{\frac{m}{2}}$从左到右排列，从 i_2右侧开始，使得 b_1 到 i_2 的距离为 2，并且对于$1\leqslant j\leqslant\frac{m}{2}-1$，$b_j$ 与 b_{j+1} 之间的距离为$\left(\frac{2}{\alpha^j}\right)-2$。图 7 展示了该度量的示意图。

我们需要验证 $\boldsymbol{\sigma} \rhd_\alpha d$。首先，显然，对于所有 $1 \leqslant j \leqslant \frac{m}{2}$，$d(i_2, b_j) = \frac{2}{\alpha^{(j-1)}}$，且 $d(i_2, a_j) = \frac{2}{\alpha^{\frac{m}{2}}}$。因此，$i_2$ 满足强度约束。对于 $d(i_1, b_j)$，若 $1 \leqslant j \leqslant \frac{m}{2} - 1$，则有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} d(i_1, b_j) &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\alpha^{\frac{m}{2}}} - 1 + \frac{2}{\alpha^{(j-1)}}\right) = \frac{1}{\alpha^{\frac{m}{2}+1}} - \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^j} \\ &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\alpha^{\frac{m}{2}}} - 1\right) + \frac{2}{\alpha^j} \geqslant \frac{1}{\alpha^{\frac{m}{2}}} - 1 + \frac{2}{\alpha^j} = d(i_1, b_{j+1}).\end{aligned}$$

对于 $d(i_1, b_{\frac{m}{2}})$，我们有：

$$\frac{1}{\alpha} d(i_1, b_{\frac{m}{2}}) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\alpha^{\frac{m}{2}}} - 1 + \frac{2}{\alpha^{(\frac{m}{2}-1)}}\right) = \left(\frac{1}{\alpha^{(\frac{m}{2}+1)}} - \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^{\frac{m}{2}}}\right) \geqslant \frac{2}{\alpha^{\frac{m}{2}}} \geqslant \frac{1}{\alpha^{\frac{m}{2}}} + 1 = d(i_1, a_1).$$

此外，对于 $d(i_1, a_1)$，如果 $1 \leqslant j \leqslant \frac{m}{2}$，我们有：$d(i_1, a_1) = d(i_1, a_j)$。因此，$i_1$ 也满足强度约束。现在注意到 $\mathsf{sc}(a_1) \leqslant \mathsf{sc}(a_l)$，因为：

$$\begin{aligned}\mathsf{sc}(a_1) &= d(i_1, a_1) + d(i_2, a_1) \\ &\leqslant d(i_1, a_l) + d(i_2, a_l) \qquad\qquad (\text{since } a_1 \succ_{i_1} a_l,\ a_1 \succ_{i_2} a_l) = \mathsf{sc}(a_l).\end{aligned}$$

因此，f 的失真至少为：

$$\frac{\mathsf{sc}(a_l)}{\mathsf{sc}(b_1)} \geqslant \frac{\mathsf{sc}(a_l)}{\mathsf{sc}(b_1)} = \frac{d(i_1, a_1) + d(i_2, a_1)}{d(i_1, b_1) + d(i_2, b_1)} = \frac{1 + \frac{3}{\alpha^{\frac{m}{2}}}}{3 + \frac{1}{\alpha^{\frac{m}{2}}}} = \frac{1 + 3\alpha^{-\frac{m}{2}}}{3 + \alpha^{-\frac{m}{2}}}.$$

现在，假设 m 为奇数。考虑一次选举 $\mathcal{E} = (N, A, \boldsymbol{\sigma})$，其中 $N = \{i_1, i_2\}$ 且 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{m-1}{2}}, b_1, b_2, \ldots, b_{\frac{m-1}{2}}, c\}$。代理人的偏好如下：

$$\sigma_{i_l} = \begin{cases} a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_{\frac{m-1}{2}} \succ b_1 \succ b_2 \succ \ldots \succ b_{\frac{m-1}{2}} \succ\succ c & l = 1 \\ b_1 \succ b_2 \succ \ldots \succ b_{\frac{m-1}{2}} \succ a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_{\frac{m-1}{2}} \succ\succ c & l = 2. \end{cases}$$

由于 c 是每位代理人最不偏好的备选项，我们将其从选举中移除。现在，我们可以将针对 m 为偶数的情形所得到的度量 d 应用于剩余的备选项和代理人，并得到以下失真下界：

$$\frac{1 + 3\alpha^{-\frac{m-1}{2}}}{3 + \alpha^{-\frac{m-1}{2}}}.$$

要完成这一论证，我们必须确定 c 在线度量 d 中的位置。我们将 c 放置在与所有其他代理人和备选项相距很远的位置。现在很容易验证，这种放置满足强度约束和偏好约束。

□

为了更直观地了解这个界的表现，我们展示了 m 和 α 取不同值时该界的示例，见图 8 和图 9。

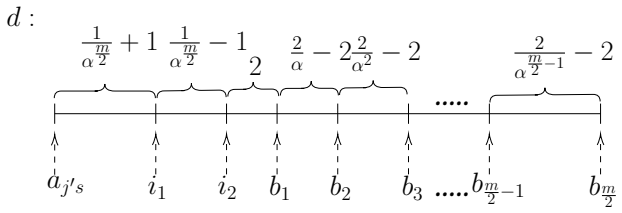


图7：定理 8 证明中使用的度量。

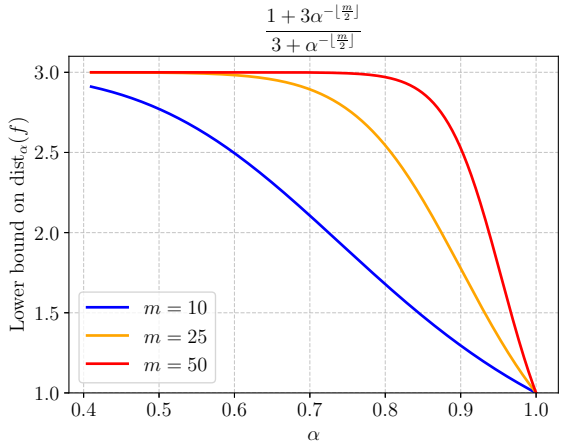


图8：图示定理 7 中针对 10、25、50 个备选项所建立的下界。

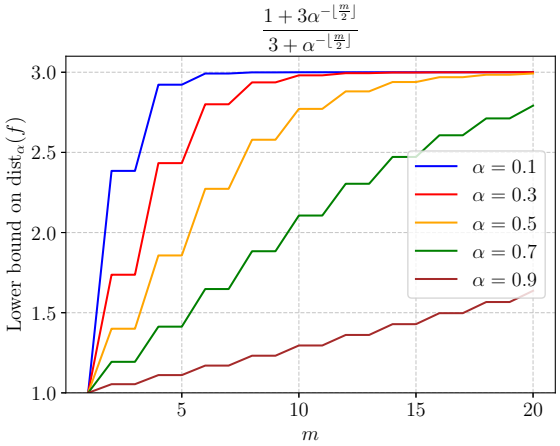


图9：图示定理 7 中根据备选项数量所建立的下界。

5 忽略强度的代价

在本节中，我们将探讨忽略强度的代价（*POII*）这一概念。它用于衡量不征询强度的规则所造成的效率损失。Kahng 等人 [26], 最初提出了这一概念，并将其定义为所有选举中，在完全不了解强度的情况下可达到的最优失真与已知强度时可达到的最优失真之比的最坏情况。粗略地说，忽略强度的代价衡量了强度未知时失真的增加程度。

为了正式定义 POII，我们必须先区分已知强度信息和未知强度信息时的最优候选项。我们借用了 Kahng 等人给出的以下定义 [26]。

定义5（强度感知最优方案）。对于选举 $\mathcal{E}=(N,A,\boldsymbol{\sigma})$，强度感知最优备选项 $\mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{aw}}(\mathcal{E})$ 是指在与 $\boldsymbol{\sigma}$ 保持 α 一致的度量中，最坏情况失真最小的备选项，即，

$$\mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{aw}}(\mathcal{E}) := \arg\min_{a\in A} \mathsf{dist}_\alpha(a,\mathcal{E}).$$

现在，我们定义选举中某个备选项的 POII。

定义6（忽略强度的代价）。对于固定的 $\alpha\in[0,1]$，我们将选举 $\mathcal{E}=$ 中备选项 $a\in A$ 忽略强度的代价（*POII*）定义为其 α-失真与强度感知最优备选方案的 a 失真之比，即

$$\mathsf{PoII}(a,\mathcal{E},\alpha) := \frac{\mathsf{dist}_\alpha(a,\mathcal{E})}{\mathsf{dist}_\alpha(\mathsf{opt}^{\mathsf{aw}}_\alpha(\mathcal{E}),\mathcal{E})}.$$

此外，仅给定排序偏好档案（不含强度） $\boldsymbol{\pi}$ 时，备选项 a 在 $\boldsymbol{\pi}$ 上的 *POII* 定义为 $\mathsf{PoII}(a,\boldsymbol{\pi},\alpha) = \max_{\mathcal{E}\rhd\boldsymbol{\pi}} \mathsf{PoII}(a,\mathcal{E},\alpha)$，其中对于 $\mathcal{E}=(N,A,\boldsymbol{\sigma})$，我们用 $\mathcal{E}\rhd\boldsymbol{\pi}$ 表示对于某个 $\bowtie$，有 $\boldsymbol{\sigma}=(\boldsymbol{\pi},\bowtie)$。这使我们能够将 $\mathcal{E}$ 中的强度无关最优备选项定义为

$$\mathsf{opt}^{\mathsf{ob}}_\alpha(\mathcal{E}) := \arg\min_{a\in A} \mathsf{PoII}(a,\boldsymbol{\pi},\alpha),$$

以及 $\mathcal{E}$ 上的 *POII*，定义为 $\mathsf{PoII}(\mathcal{E},\alpha) := \mathsf{PoII}(\mathsf{opt}^{\mathsf{ob}}_\alpha(\mathcal{E}),\mathcal{E},\alpha)$。由于 $\mathsf{opt}^{\mathsf{ob}}_\alpha(\mathcal{E})$ 不依赖于 $\bowtie$，因此当其他组成部分可由上下文明确推知时，稍微滥用记号，我们改用 $\mathsf{opt}^{\mathsf{ob}}_\alpha(\boldsymbol{\pi})$。我们关注所有 $\mathcal{E}$ 上的最坏情况，并将其称为 α-决定偏好的 *POII*：$\mathsf{PoII}(\alpha) = \max_{\mathcal{E}} \mathsf{PoII}(\mathcal{E},\alpha)$。

我们的目标是证明 POII 的下界。为此，我们使用以下两个引理。

引理 6。*([26])*。引理 *1)* 对于 $\alpha\in[0,1]$、任意选举 $\mathcal{E}$ 和备选项 $a\in A$，我们有：

$$\mathsf{PoII}(\mathcal{E},\alpha) \geqslant \frac{\mathsf{dist}_\alpha(\mathsf{opt}^{\mathsf{ob}}_\alpha(\mathcal{E}),\mathcal{E})}{\mathsf{dist}_\alpha(a,\mathcal{E})}.$$

引理7。考虑一个包含 m 个备选项的选举 $\mathcal{E}$，其中 m 是偶数，并有两个代理人，其偏好如下：$\sigma_1 = a_1 \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{\frac{m}{2}+1} \succ a_{\frac{m}{2}+2} \succ \cdots \succ a_m$，以及 $\sigma_2 = a_{\frac{m}{2}+1} \succ a_{\frac{m}{2}+2} \succ \cdots \succ a_m \succ a_1 \succ \cdots \succ a_{\frac{m}{2}}$。我们有 $\mathsf{dist}_\alpha(a_1,\mathcal{E}) = \frac{1+2\alpha^{\frac{m}{2}}-\alpha^m}{\alpha^m+1}$。此外，当 m 为奇数时，存在一个偏好档案 $\mathcal{E}'$，使得 $\mathsf{dist}_\alpha(a_1,\mathcal{E}') = \frac{1+2\alpha^{\frac{m-1}{2}}-\alpha^{m-1}}{\alpha^{m-1}+1}$。

证明。我们先概述证明思路。为了最大化失真，我们必须选择 $a_{\frac{m}{2}+1}$ 作为最优候选项。接着，我们按照 [27], 中的介绍，建立一个线性规划来最大化失真，并增加以下一组对应强度的约束：

$$\begin{aligned} d_{i,\pi_i(j)} &\leqslant \alpha d_{i,\pi_i(j+1)} && \forall i,j : \bowtie_i(j) = \text{`}\succcurlyeq\text{'} \\ \alpha d_{i,\pi_i(j+1)} &\leqslant d_{i,\pi_i(j)} && \forall i,j : \bowtie_i(j) = \text{`}\succ\text{'} \end{aligned}$$

接下来，我们写出线性规划的对偶，并证明对于这个实例，要最大化原始线性规划中的目标函数，所有变量都必须严格大于零。这样，我们就可以应用互补松弛条件，证明对偶线性规划中的所有不等式都必须取等号。因此，我们可以找到一个等于失真的对偶可行解，从而证明该定理。

以下分析假设 m 为偶数。我们将在最后讨论 m 为奇数的情况。我们希望确定一个度量 d，使得 $a_{\frac{m}{2}+1}$ 是最优候选项，并求比值

$$\frac{\mathsf{sc}_d(a_1)}{\mathsf{sc}_d(a_{\frac{m}{2}+1})}$$

达到最大值。需要注意的是，相对于a_1而言造成最高失真的备选项是$a_{\frac{m}{2}+1}$，因为对于任何其他备选项 b，要么 $d(1,\ b) \geqslant d(1,\ a_1)$，要么 $d(2,\ b) \geqslant d(2,\ a_{\frac{m}{2}+1})$。线性规划的形式如下：

线性规划 $\mathcal{P}$

$$
\begin{aligned}
\text{最大化} \quad & d_{1,a_1} + d_{2,a_1} \\
\text{满足约束} \quad & d_{i,a_j} \leqslant d_{i,a_{j'}} + d_{i',a_{j'}} + d_{i',a_j} && 1 \leqslant i \neq i' \leqslant 2,\ 1 \leqslant j \neq j' \leqslant m \quad \text{（三角不等式）} \\
& d_{i,\pi_i(j)} \leqslant d_{i,\pi_i(j+1)} && i \in \{1,2\},\ 1 \leqslant j \leqslant m-1 \quad \text{（偏好约束）} \\
& d_{i,\ \pi_i(j)} \leqslant \alpha d_{i,\ \pi_i(j+1)} && \forall i,\ \ j:\ \bowtie_i\ (j)\ = \text{‘}\succcurlyeq\text{’（强度约束）} \\
& \alpha d_{i,\ \pi_i(j+1)} \leqslant d_{i,\ \pi_i(j)} && \forall i,\ \ j:\ \bowtie_i (j) = \text{‘}\succ\text{’（强度约束）} \\
& d_{1,a_{\frac{m}{2}+1}} + d_{2,a_{\frac{m}{2}+1}} = 1 && \text{（归一化）} \\
& d_{1,a_j} + d_{2,a_j} \geqslant 1 && 1 \leqslant j \leqslant m,\ \ j \neq \frac{m}{2}+1 \quad (a_{\frac{m}{2}+1}\text{的最优性}) \\
& d_{i,a_j} \geqslant 0 && i \in \{1,2\},\ 1 \leqslant j \leqslant m-1。
\end{aligned}
$$

在线性规划 $\mathcal{P}$中，变量$d_{i,\ a_j}$ 表示代理人 i 与备选项a_j之间的距离。这些变量必须为非负数，满足三角不等式，并在强制设定下与给定的选举相容。假设成本已归一化，则有 $\mathrm{sc}_d(a_{\frac{m}{2}+1}) = 1$。

现在，让我们求线性规划 $\mathcal{P}$ 的对偶。该对偶包含四类变量：$\psi^{i,\ i'}_{a_j,\ a_{j'}}$ 是对应三角不等式约束的对偶变量，$\phi^i_{\pi_i(j)\ \pi_i(j+1)}$ 是偏好约束的对偶变量，$\beta^i_{\pi_i(j)\ \pi_i(j+1)}$ 是强度约束的对偶变量，而 t_{a_j} 是归一化/最优性约束的对偶变量。

线性规划 $\mathcal{D}$

$$
\begin{aligned}
\text{最小化} \quad & \sum_{j=1}^{m} t_{a_j} \\
\text{满足以下约束} \quad & \theta(i,j) \geqslant \begin{cases} 1 & \pi_i(j) = a_1 \\ 0 & \pi_i(j) \neq a_1 \end{cases} && i \in \{1,2\},\ 1 \leqslant j \leqslant m \\
& && (14) \\
& \psi^{i,i'}_{a_j,a_{j'}} \geqslant 0 && 1 \leqslant i \neq i' \leqslant 2,\ 1 \leqslant j \neq j' \leqslant m \\
& \phi^i_{\pi_i(j)\ \pi_i(j+1)} \geqslant 0 && i \in \{1,2\},\ 1 \leqslant j \leqslant m-1 \\
& \beta^i_{\pi_i(j)\ \pi_i(j+1)} \geqslant 0 && i \in \{1,2\},\ 1 \leqslant j \leqslant m-1 \\
& t_{a_j} \leqslant 0 && a_j \neq a_{\frac{m}{2}+1},
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\theta(i,j) = t_{\pi_i(j)} &+ (\mathbf{1}_{\{j \neq m\}})\phi^i_{\pi_i(j),\pi_i(j+1)} - (\mathbf{1}_{\{j \neq 1\}})\phi^i_{\pi_i(j-1),\pi_i(j)} \\
&+ \sum_{\substack{1 \leqslant i' \leqslant 2,\ 1 \leqslant j' \leqslant m \\ i' \neq i,\ \pi_{i'}(j') \neq \pi_i(j)}} \left(\psi^{i,i'}_{\pi_i(j),\pi_{i'}(j')} - \psi^{i,i'}_{\pi_{i'}(j'),\pi_i(j)} - \psi^{i',i}_{\pi_i(j),\pi_{i'}(j')} - \psi^{i',i}_{\pi_{i'}(j'),\pi_i(j)} \right)
\end{aligned}
$$

$$+\begin{cases}(\mathbf{1}_{\{j\neq m\}})\frac{1}{\alpha}\beta^i_{\pi_i(j),\pi_i(j+1)}-(\mathbf{1}_{\{j\neq 1\}})\beta^i_{\pi_i(j-1),\pi_i(j)} & i=1,j\leqslant\frac{m}{2}\\ -(\mathbf{1}_{\{j\neq 1\}})\beta^i_{\pi_i(j-1),\pi_i(j)}-(\mathbf{1}_{\{j\neq m\}})\frac{1}{\alpha}\beta^i_{\pi_i(j),\pi_i(j+1)} & i=1,j=\frac{m}{2}+1\\ (\mathbf{1}_{\{j\neq 1\}})\beta^i_{\pi_i(j-1),\pi_i(j)}-(\mathbf{1}_{\{j\neq m\}})\frac{1}{\alpha}\beta^i_{\pi_i(j),\pi_i(j+1)} & \text{otherwise.}\end{cases}$$

现在我们证明，要使失真最大化，必须有 $d(i,a_j)>0\ \forall i,j$。首先注意，如果对于某个 $b\in A$，$d(2,b)=0$，那么对于所有 $b\in A$，都有 $d(2,b)=0$。在这种情况下，为满足三角不等式，$d(1,b)$ 必须对所有 b 都相同，这会使失真为 1。因此，对于所有 $b\in A$，$d(2,b)>0$。现在，假设 i 是满足 $d(1,a_i)>0$ 的最小索引。注意，$1\leqslant i\leqslant\frac{m}{2}+1$，因为否则我们可以用类似的论证推得失真为 1。由于对于任意 $1\leqslant j\leqslant i-1$，左侧含有 $d(1,a_j)$ 的三角不等式均不取等号（因为我们已经知道 $d(2,b)>0$），我们可以取一个较小的数 ϵ，并对所有 $1\leqslant j\leqslant i-1$，将 $d(1,a_j)$ 增加 $\epsilon(\frac{1}{\alpha})^{j-1}$，同时仍满足三角不等式。容易验证，这些值的增加不会违反强度约束。如果 $i>1$，$d(1,a_1)$ 增加会导致失真增加 a_1。因此，$i=1$，我们可以推得 $d(i,a_j)>0\ \forall i,j$。这一事实与互补松弛条件表明，约束（14）必须取等号。我们利用这一点来引入线性规划 $\mathcal{D}$的可行解。

线性规划 $\mathcal{D}$ 的可行解 $(\psi,\ \phi,\ \beta,\ t)$ 中的非零变量如下：

$$\begin{aligned}
&\beta^2_{\pi_2(\frac{m}{2}-i),\pi_2(\frac{m}{2}+1-i)}=y\left(\frac{1}{\alpha}\right)^i && 0\leqslant i\leqslant\frac{m}{2}-1\\
&\beta^1_{\pi_1(\frac{m}{2}-i),\pi_1(\frac{m}{2}+1-i)}=y\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{m}{2}+i} && 0\leqslant i\leqslant\frac{m}{2}-1\\
&\psi^{i,i'}_{a_j,a_{j'}}=1-y && i=2,\ i'=1,\ ,a_j=a_1,\ a_{j'}=a_{\frac{m}{2}+1}\\
&t_{a_j}=y\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{m}{2}}-1\right)+1 && a_j=a_{\frac{m}{2}+1},
\end{aligned}$$

其中 $y=\frac{2}{(\frac{1}{\alpha})^m+1}$。我们可以验证这些变量满足约束（14）。因此，$(\psi,\ \phi,\ \beta,\ t)$ 是线性规划 $\mathcal{D}$ 的可行解，正如所需。

现在，我们介绍线性规划 $\mathcal{P}$ 的一个可行解。线性规划 $\mathcal{P}$ 的可行解 d 中的变量如下：

$$d_{i,\pi_i(j)}=\begin{cases}\frac{(\frac{1}{\alpha})^{\frac{m}{2}+j-1}+(\frac{1}{\alpha})^{j-1}}{(\frac{1}{\alpha})^m+1}, & i=2,\ 1\leqslant j\leqslant\frac{m}{2}+1\\ \frac{(\frac{1}{\alpha})^m+(\frac{1}{\alpha})^{\frac{m}{2}}}{(\frac{1}{\alpha})^m+1}, & i=2,\ \frac{m}{2}+2\leqslant j\leqslant m\\ \frac{(\frac{1}{\alpha})^{\frac{m}{2}+j-1}-(\frac{1}{\alpha})^{j-1}}{(\frac{1}{\alpha})^m+1}, & i=1,\ 1\leqslant j\leqslant\frac{m}{2}+1\\ \frac{(\frac{1}{\alpha})^m-(\frac{1}{\alpha})^{\frac{m}{2}}}{(\frac{1}{\alpha})^m+1}, & i=1,\ \frac{m}{2}+2\leqslant j\leqslant m.\end{cases}$$

此外，由于所有变量均非负，我们只需检查它们是否满足三角不等式。具体而言，对于每个 $1\leqslant i\neq i'\leqslant 2$ 和 $1\leqslant j\neq j'\leqslant m$，必须有：

$$d_{i,a_j}\leqslant d_{i,a_{j'}}+d_{i',a_{j'}}+d_{i',a_j}. \tag{15}$$

我们分三种情况考虑不等式（15）。首先，假设 $1\leqslant j\neq j'\leqslant\frac{m}{2}$。在这种情况下，如果不等式的右侧出现了 d_{2,a_j} 或 $d_{2,a_{j'}}$ 中的至少一个，由于二者都是 d 所能取的最大值，不等式显然成立。其次，假设

$-\frac{m}{2}+1 \leqslant j \neq j' \leqslant m$。如果 d_{1,a_j} 出现在不等式的左侧，由于 $d(1,a_j)$ 和 $d(1,a_{j'})$ 的值相同，而 $d(1,a_{j'})$ 出现在不等式的另一侧，因此不等式显然成立。如果二者都出现在不等式的右侧，则最坏情况发生在 $a_j=\pi_2(\frac{m}{2})$ 和 $a_{j'}=\pi_2(1)$ 时。我们有

$$\begin{aligned} d(2,\pi_2(\frac{m}{2})) &= \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^m+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{m}{2}}}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^m+1} \\ &\leqslant \frac{2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^m-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{m}{2}}+1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^m+1} \qquad \left(\text{since } \left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{m}{2}}-1\right)^2 \geqslant 0\right) \\ &= d(2,\pi_2(1))+d(1,\pi_2(1))+d(1,\pi_2(\frac{m}{2})). \end{aligned}$$

第三，假设要么 $1 \leqslant j \leqslant \frac{m}{2}$ 和 $\frac{m}{2}+1 \leqslant j' \leqslant m$，要么 $1 \leqslant j' \leqslant \frac{m}{2}$ 和 $\frac{m}{2}+1 \leqslant j \leqslant m$。在这种情况下，最坏情况出现在 $a_j=\pi_1(1)$ 和 $a_{j'}=\pi_2(1)$ 时。现在，我们有

$$d(2,\pi_1(1)) = \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^m+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{m}{2}}}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^m+1} = d(1,\pi_2(1))+d(2,\pi_2(1))+d(1,\pi_1(1)).$$

因此，d 满足三角不等式，是线性规划 $\mathcal{P}$的一个可行解。现在，注意到线性规划 $\mathcal{D}$ 的目标值由 $(\psi,\ \phi,\ \beta,\ t)$ 给出，其值为:

$$\sum_{j=1}^{m} t_{a_j} = t_{a_{\frac{m}{2}+1}} = \frac{2}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^m+1}\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{m}{2}}-1\right)+1 = 1+\frac{2\alpha^{\frac{m}{2}}-2\alpha^m}{\alpha^m+1}.$$

类似地，线性规划 $\mathcal{P}$ 的目标值由 d 给出，其值为:

$$d_{2,a_1}+d_{1,a_1} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^m+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{m}{2}}}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^m+1}+\frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{m}{2}}-1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^m+1} = 1+\frac{2\alpha^{\frac{m}{2}}-2\alpha^m}{\alpha^m+1}.$$

因此，$\mathsf{dist}_\alpha(a_1,\ \mathcal{E})$ 是线性规划 $\mathcal{D}$ 和线性规划 $\mathcal{P}$ 的最优值。现在，假设 m 是奇数。考虑选举 $\mathcal{E}'=(N,\ A,\ \boldsymbol{\sigma})$，其中 $N=\{1,2\}$ 和 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$。代理人的偏好如下:

$$\sigma_l = \begin{cases} a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_{\frac{m-1}{2}} \succ a_{\frac{m-1}{2}+1} \succ a_{\frac{m-1}{2}+2} \succ \ldots \succ a_m & l=1 \\ a_{\frac{m-1}{2}+1} \succ a_{\frac{m-1}{2}+2} \succ \ldots \succ a_{m-1} \succ a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_{\frac{m-1}{2}} \succ a_m & l=2. \end{cases}$$

我们从选举中剔除 a_m，因为对每位代理人来说，a_m 都是最不受偏好的备选项。现在，我们可以将针对 m 为偶数的情况所找到的度量 d 应用于剩余的备选项和代理人，并得到 a_1 的失真:

$$\mathsf{dist}_\alpha(a_1,\mathcal{E}') = \frac{1+2\alpha^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}-\alpha^{\lfloor m\rfloor_{\text{even}}}}{\alpha^{\lfloor m\rfloor_{\text{even}}}+1}.$$

为了完成这一论证，我们必须确定 $d(1,\ a_m)$ 和 $d(2,\ a_m)$。若设 $d(1,\ a_m)=d(1,\ \pi_1(m-1))$，并设 $d(2,\ a_m)=d(2,\ \pi_2(m-1))$，则不难验证，强度约束和偏好约束仍然成立。

□

定理 9. 对于每个 $\alpha \in [0,1]$，我们有

$$\mathsf{PoII}(\alpha) \geqslant \frac{3\left(\alpha^{\lfloor m \rfloor_{even}}+1\right)}{1+2\alpha^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}-\alpha^{\lfloor m \rfloor_{even}}},$$

其中 $\lfloor m \rfloor_{even}$ 是小于或等于 m 的最大偶整数。

证明。首先，假设 m 是偶数。考虑一个有两名代理人和 m 个备选项的选举 $\mathcal{E}$，其中 $\pi_1 = (a_1, \ldots, a_m)$ 且 $\pi_2 = \left(a_{\frac{m}{2}+1}, \ldots, a_m, a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{m}{2}}\right)$。我们根据 $\mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{ob}}(\boldsymbol{\pi})$ 在排名中的位置来确定强度。如果 $\mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{ob}}(\boldsymbol{\pi})$ 出现在第一名代理人排名的前半部分，则我们为第一名代理人设定 $a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_m$，为第二名代理人设定 $a_{\frac{m}{2}+1} \succcurlyeq a_{\frac{m}{2}+2} \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq a_m \succcurlyeq a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_m$。另一种情况下，我们为第一名代理人设定 $a_1 \succcurlyeq a_2 \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq a_{\frac{m}{2}} \succcurlyeq a_{\frac{m}{2}+1} \succ a_{\frac{m}{2}+2} \cdots \succ a_m$，为第二名代理人设定 $a_{\frac{m}{2}+1} \succ a_{\frac{m}{2}+2} \succ \ldots \succ a_m \succ a_1 \succ a_2 \succ \cdots \succ a_{\frac{m}{2}}$。

不失一般性，假设 $\mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{ob}}(\boldsymbol{\pi})$ 位于 π_1 的后半部分。根据引理6，我们有：

$$\mathsf{PoII}(\alpha) \geqslant \frac{\mathsf{dist}_\alpha(\mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{ob}}(\mathcal{E}), \mathcal{E})}{\mathsf{dist}_\alpha(a_1, \mathcal{E})}. \tag{16}$$

为了证明所需的界，我们计算不等式（16）右侧的精确值。考虑以下度量：

$$d(1,b) = \begin{cases} 0 & \mathsf{rank}_1(b) \leqslant \frac{m}{2} \\ 2 & \mathsf{rank}_1(b) > \frac{m}{2} \end{cases}, \text{ and } d(2,b) = 1.$$

容易验证，d 满足三角不等式和强度约束。现在注意到

$$\begin{aligned} \mathsf{dist}_\alpha(\mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{ob}}(\mathcal{E}), \mathcal{E}) &\geqslant \frac{\mathsf{sc}(\mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{ob}}(\mathcal{E}))}{\mathsf{sc}(a_1)} \\ &= \frac{d(1, \mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{ob}}(\mathcal{E})) + d(2, \mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{ob}}(\mathcal{E}))}{d(1,a_1)+d(2,a_1)} = 3 \qquad \left(\mathsf{rank}_1(\mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{ob}}(\mathcal{E})) > \frac{m}{2}\right). \end{aligned}$$

因此，$\mathsf{dist}_\alpha(\mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{ob}}(\mathcal{E}), \mathcal{E})$ 至少为 3。但我们也知道它的上界为 3。因此，它恰好等于 3。注意，引理7给出了 $\mathsf{dist}_\alpha(a_1, \mathcal{E})$ 的精确值，即 $\frac{1+2\alpha^{\frac{m}{2}}-\alpha^m}{\alpha^m+1}$。现在，利用不等式（16）即可得到 $\mathsf{PoII}(\alpha)$ 的所需下界。

当 m 为奇数时，我们可以使用一个有两位代理人和 m 个备选项的选举 $\mathcal{E}$，其中，$\pi_1 = (a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m)$ 且 $\pi_2 = \left(a_{\frac{m-1}{2}+1}, \ldots, a_{m-1}, a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{m-1}{2}}, a_m\right)$。现在，我们可以将 a_m 从选举中移除（因为 a_m 是两位代理人最不喜欢的备选项），并对其余代理人和备选项采用类似论证，从而得到所需的下界。

□

5.1 强度的自愿 elicitation

如预备知识中所述，我们可以对代理人如何报告其强度作出另一种假设。在这种设定下，我们允许代理人选择使用“$\succcurlyeq$”，但他们也可以决定不使用。当代理人不想报告强度，或者不确定距离之间是否存在 α-间隔时，就可能出现这种情况。回顾自愿假设（$\boldsymbol{\sigma} \rhd_\alpha^v d$）下偏好档案 $\boldsymbol{\sigma}$ 与度量空间 d 的 α-一致性定义。根据该定义，我们可以重新定义自愿情境下的失真：

$$\mathsf{dist}_\alpha^v(a, \mathcal{E}) := \sup_{d: \boldsymbol{\sigma} \rhd_\alpha^v d} \frac{\mathsf{sc}_d(a)}{\min_{b \in A} \mathsf{sc}_d(b)}.$$

请注意，在这种设定下，最优确定性失真仍为 3，因为如果所有代理人都决定不报告其强度，投票规则就只能依据经典排序偏好投票中可用的数据。不过，我们可以使用该定义，类似于强制设定，定义 $\mathsf{opt}_\alpha^{v-\mathsf{aw}}$，$\mathsf{opt}_\alpha^{v-\mathsf{ob}}$，$\mathsf{PoII}^v(a,\ \mathcal{E},\ \alpha)$，以及 $\mathsf{PoII}^v(\alpha)$，然后证明这一假设下 POII 的界限。这种设定下 POII 的界限表明，即使没有强制要求代理人报告强度，如果投票规则不将其纳入考量，我们也可能在效率方面蒙受巨大损失。

定理 10。 对于每个 $\alpha \in [0,1]$，我们有：

$$\mathsf{PoII}^v(\alpha) \geqslant \frac{3}{2\alpha^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}+1}.$$

为了证明这个上界，我们使用与定理 9 的证明中相同的实例。不过，由于这两种情形下强度感知最优输出的失真不同，因此得到的上界也不同。造成这种差异的原因是，$\mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{aw}}$具有最优失真的实例类别，是 $\mathsf{opt}_\alpha^{v-\mathsf{aw}}$需要进行优化的实例的子集，因为 $\boldsymbol{\sigma} \rhd_\alpha d$ 对 d 的限制比 $\boldsymbol{\sigma} \rhd_\alpha^v d$更严格。与定理 9 的证明类似，我们用一个线性规划来描述这一情形，并写出其对偶线性规划。不过，在这种情况下，我们无法保证变量始终为正，因此互补松弛条件无济于事。在下面的证明中，我们给出一个对偶的可行解，并证明分母的一个上界。

证明。 我们只考虑 m 为偶数的情形。与定理 9 的证明类似，奇数情形可由偶数情形推出。

考虑一次选举 $\mathcal{E}$，其中有两位代理人和 m 个备选项，其中 $\pi_1 = (a_1, \ldots\ldots, a_m)$ 和 $\pi_2 = (a_{\frac{m}{2}+1}, \ldots\ldots, a_m, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{\frac{m}{2}})$。我们根据 $\mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{ob}}(\boldsymbol{\pi})$ 在排名中的位置来确定强度。如果 $\mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{ob}}(\boldsymbol{\pi})$ 出现在第一位代理人排名的前半部分，我们为第一位代理人设定 $a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_m$，为第二位代理人设定 $a_{\frac{m}{2}+1} \succ\!\!\succ a_{\frac{m}{2}+2} \succ\!\!\succ \ldots \succ\!\!\succ a_m \succ\!\!\succ a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_m$。反之，我们为第一位代理人设定 $a_1 \succ\!\!\succ a_2 \succ\!\!\succ \ldots \succ\!\!\succ a_{\frac{m}{2}} \succ\!\!\succ a_{\frac{m}{2}+1} \succ a_{\frac{m}{2}+2} \ldots \succ a_m$，为第二位代理人设定 $a_{\frac{m}{2}+1} \succ a_{\frac{m}{2}+2} \succ \ldots \succ a_m \succ a_1 \succ a_2 \succ \cdots \succ a_{\frac{m}{2}}$。
不失一般性，假设 $\mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{ob}}(\boldsymbol{\pi})$ 位于 π_1 的后半部分。根据引理 6，我们有：

$$\mathsf{PoII}(\alpha) \geqslant \frac{\mathsf{dist}_\alpha(\mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{ob}}(\mathcal{E}), \mathcal{E})}{\mathsf{dist}_\alpha(a_1, \mathcal{E})}. \tag{17}$$

注意，定理 9 的证明中给出的度量 d 也符合自愿情境下的强度约束。因此，我们可以得出 $\mathsf{dist}_\alpha(\mathsf{opt}_\alpha^{\mathsf{ob}}(\mathcal{E}), \mathcal{E}) = 3$。
接下来，我们旨在为 $\mathsf{dist}_\alpha(a_1, \mathcal{E})$ 找到一个上界。我们采用的技术与引理7的证明技术类似。我们写出一个线性规划，以找到使 $\mathsf{sc}_d(a_1)\mathsf{sc}_d(a_{\frac{m}{2}+1})$ 最大化的度量 d。

线性规划 $\mathcal{P}$

最大化	$d_{1,a_1} + d_{2,a_1}$	
满足约束条件	$d_{i,a_j} \leqslant d_{i,a_{j'}} + d_{i',a_{j'}} + d_{i',a_j}$	$1 \leqslant i \neq i' \leqslant 2,\ 1 \leqslant j \neq j' \leqslant m$ (三角不等式)
	$d_{i,\ \pi_i(j)} \leqslant \alpha d_{i,\ \pi_i(j+1)}$	$\forall i,\ \ j : \bowtie_i(j) = \text{`}\succcurlyeq\text{'}$(强度约束)
	$d_{i,\ \pi_i(j)} \leqslant d_{i,\ \pi_i(j+1)}$	$\forall i,\ \ j : \bowtie_i(j) = \text{`}\succ\text{'}$(强度约束)
	$d_{1,\ a_{\frac{m}{2}+1}} + d_{2,a_{\frac{m}{2}+1}} = 1$	(归一化)
	$d_{1,a_j} + d_{2,a_j} \geqslant 1$	$1 \leqslant j \leqslant m,\ j \neq \frac{m}{2}+1$ （$a_{\frac{m}{2}+1}$的最优性）
	$d_{i,a_j} \geqslant 0$	$i \in \{1,2\},\ 1 \leqslant j \leqslant m-1$。

请注意，在自愿情境中，当我们有 $\bowtie_i(j) = \text{`}\succ\text{'}$ 时，我们唯一能推断的是 $d_{i,\ \pi_i(j)} \leqslant d_{i,\ \pi_i(j+1)}$。

对偶包含三类变量：$\psi^i_{a_j,a_{j'}}$、$\phi^i_{\pi_i(j)\ \pi_i(j+1)}$ 是指代三角不等式约束的对偶变量，t_{a_j} 是强度约束的对偶变量，而 t_{a_j} 是归一化/最优性约束的对偶变量。其中

线性规划 $\mathcal{D}$

$$\text{最小化} \quad \sum_{j=1}^{m} t_{a_j}$$

$$\text{满足} \quad \theta(i,j) \geqslant \begin{cases} 1 & \pi_i(j) = a_1 \\ 0 & \pi_i(j) \neq a_1 \end{cases} \qquad i \in \{1,2\},\ 1 \leqslant j \leqslant m$$

$$\psi^{i,i'}_{a_j,a_{j'}} \geqslant 0 \qquad 1 \leqslant i \neq i' \leqslant 2,\ 1 \leqslant j \neq j' \leqslant m$$

$$\phi^i_{\pi_i(j)\ \pi_i(j+1)} \geqslant 0 \qquad i \in \{1,2\},\ 1 \leqslant j \leqslant m-1$$

$$t_{a_j} \leqslant 0 \qquad a_j \neq a_{\frac{m}{2}+1},$$

$$\theta(i,j) = t_{\pi_i(j)} + \sum_{\substack{1 \leqslant i' \leqslant 2,\ 1 \leqslant j' \leqslant m \\ i' \neq i,\ \pi_{i'}(j') \neq \pi_i(j)}} \left(\psi^{i,i'}_{\pi_i(j),\pi_{i'}(j')} - \psi^{i,i'}_{\pi_{i'}(j'),\pi_i(j)} - \psi^{i',i}_{\pi_i(j),\pi_{i'}(j')} - \psi^{i',i}_{\pi_{i'}(j'),\pi_i(j)} \right)$$

$$+ \begin{cases} (\mathbf{1}_{\{j \neq m\}}) \frac{1}{\alpha} \phi^i_{\pi_i(j),\pi_i(j+1)} - (\mathbf{1}_{\{j \neq 1\}}) \phi^i_{\pi_i(j-1),\pi_i(j)} & i = 1, j \leqslant \frac{m}{2} \\ (\mathbf{1}_{\{j \neq m\}}) \phi^i_{\pi_i(j),\pi_i(j+1)} - (\mathbf{1}_{\{j \neq 1\}}) \phi^i_{\pi_i(j-1),\pi_i(j)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

现在，我们为线性规划 $\mathcal{D}$ 引入一个可行解。该可行解的非零变量如下：

$$\phi^1_{\pi_2(\frac{m}{2}-i),\pi_2(\frac{m}{2}+1-i)} = x \left(\frac{1}{\alpha}\right)^i \qquad 0 \leqslant i \leqslant \frac{m}{2}-1$$

$$\psi^{i,i'}_{a_j,a_{j'}} = 1 \qquad i = 2,\ i' = 1,\ , a_j = a_1,\ a_{j'} = a_{\frac{m}{2}+1}$$

$$t_{a_j} = 1 + x \qquad a_j = a_{\frac{m}{2}+1},$$

其中 $x = 2\alpha^{\frac{m}{2}-}$。由该可行解得到的线性规划 $\mathcal{D}$ 的目标值为：

$$\sum_{j=1}^{m} t_{a_j} = t_{a_{\frac{m}{2}+1}} = 1 + 2\alpha^{\frac{m}{2}}.$$

因此，$\mathsf{dist}_\alpha(a_1,\ \mathcal{E})$ 的上界为 $1 + 2\alpha^{\frac{m}{2}}$。由此，我们得到

$$\mathsf{Poll}^v(\alpha) \geqslant \frac{3}{2\alpha^{\frac{m}{2}} + 1}.$$

□

6 讨论与未来工作

本文从度量失真的角度，研究了在采用排序选票的投票中加入强度对效率的影响。我们在要求代理人报告强度的情况下，得出了失真的上界和下界。结合这些结果以及 Kahng 等人 [26],的研究结果，下一步可以探究能否利用 Gkatzelis 等人 [23]提出的思路，同时获得功利主义和度量方面的最佳保证。

本文仅关注确定性规则。尽管在利害关系重大的选举中，确定性规则更受青睐，但在重复选举中，随机化规则已受到广泛关注，因为偶尔出现一次糟糕结果所付出的代价并不高。我们工作的一个直接延伸方向，是研究随机化如何帮助改善这一模型中的失真。

也可以考虑采用公理化方法研究带有强度的投票。与批准投票和排序偏好相比，这种选票格式提供了更多信息。一个有趣的方向是为这种投票方式找到一种有意义的公理定义方法，并探究理想的公理是否能够得到满足。

另一个研究方向是将这种选票格式应用于其他问题。在公平分配和匹配等其他场景中，失真已有明确的定义并得到广泛分析。未来一项有趣的研究是探讨强度如何改变这些问题中的失真。

致谢

本研究是在 Mehrad Abbaszadeh 就读于伊朗沙里夫理工大学期间完成的。
MohamadLatifian 得到了英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）项目 EP/Y003624/1 的资助。

参考文献

[1] Ben Abramowitz、Elliot Anshelevich 和 Wennan Zhu。2019。了解选民的热情可大幅降低度量社会选择的失真。载于*Web and Internet Economics*：第*15*届国际会议 *WINE 2019*，纽约，美国纽约州，*2019*年*12*月*10*日至*12*日，论文集第*15*卷。Springer，3–16。[2] Georgios Amanatidis、Georgios Birmpas、Aris Filos-Ratsikas 和 Alexandros A Voudouris。2021。窥探序数信息壁垒背后：通过基数查询改善失真。人工智能 296（2021），103488。[3] Georgios Amanatidis、Georgios Birmpas、Aris Filos-Ratsikas 和 Alexandros A Voudouris。2022。少量查询便能大有助益：匹配中的信息与畸变的权衡。人工智能研究杂志 74（2022），227–261。[4] Elliot Anshelevich、Onkar Bhardwaj、Edith Elkind、John Postl 和 Piotr Skowron。2018。在度量偏好下近似最优社会选择。人工智能 264（2018），27–51。[5] Elliot Anshelevich、Aris Filos-Ratsikas、Nisarg Shah 和 Alexandros A Voudouris。2021。社会选择问题中的失真：前15年及未来发展。载于第*30*届国际人工智能联合会议。4294–4301。[6] Elliot Anshelevich 和 John Postl。2017。度量偏好下的随机化社会选择函数。人工智能研究杂志 58（2017），797–827。[7] Elliot Anshelevich 和 Wennan Zhu。2021。在给定候选人位置的情况下，社会选择、匹配和设施选址问题的序数近似。*ACM*经济学与计算汇刊（*TEAC*）9，2（2021），1–24。[8] Mark Bedaywi、Bailey Flanigan、Mohamad Latifian 和 Nisarg Shah。2025。公益导向型参与式预算的失真。载于*AAAI*人工智能会议论文集，第39卷。13605–13613。[9] Gerdus Benade、Swaprava Nath、Ariel D Procaccia 和 Nisarg Shah。2021。参与式预算中的偏好征询。管理科学 67，5（2021），2813–2827。[10] Gerdus Benade、Swaprava Nath、Ariel D Procaccia 和 Nisarg Shah。2021。参与式预算中的偏好征询。管理科学 67，5（2021），2813–2827。[11]Nicholas Bishop、Hau Chan、Debmalya Mandal 和 Long Tran-Thanh。2022。序贯阻塞匹配。载于*AAAI*人工智能会议论文集，第36卷。4834–4842。[12] Allan Borodin、Daniel Halpern、Mohamad Latifian 和 Nisarg Shah。2022。前t位偏好投票中的失真。载于第*31*届国际人工智能联合会议（*IJCAI*）论文集。116–122。[13] Ioannis Caragiannis、Swaprava Nath、Ariel D Procaccia 和 Nisarg Shah。2017。通过隐式功利主义投票进行子集选择。人工智能研究杂志 58（2017），123–152。[14] Ioannis Caragiannis 和 Ariel D Procaccia。2011。尽管沟通受限，投票仍几乎能最大化社会福利。人工智能 175，9-10（2011），1655–1671。[15] Ioannis Caragiannis、Nisarg Shah 和 Alexandros A Voudouris。2022。多获胜者投票的度量失真。人工智能 313（2022），103802。[16] Yu Cheng、Shaddin Dughmi 和 David Kempe。2017。来自民众：有代表性的候选人能让投票更有效。载于*2017*年*ACM*经济学与计算会议论文集

[17] Yu Cheng、Shaddin Dughmi 和 David Kempe。2018。关于多个代表候选人选举中的失真。载于*AAAI*人工智能会议论文集，第32卷。[18] Wade D Cook 和 Moshe Kress。1985。带偏好强度的序数排名。管理科学 31，1（1985），26–32。[19] Peter H Farquhar 和 L Robin Keller。1989。偏好强度测量。运筹学年鉴 19，1（1989），205–217。[20] Aris Filos-Ratsikas 和 Alexandros A Voudouris。2021。分布式设施选址的近似机制设计。载于第*14*届国际算法博弈论研讨会（*SAGT*）论文集。49–63。[21] Bailey Flanigan、Ariel D Procaccia 和 Sven Wang。2023。公益投票下的失真。载于第*24*届*ACM*经济学与计算会议论文集。700–700。[22] Vasilis Gkatzelis、Daniel Halpern 和 Nisarg Shah。2020。解决最优度量失真假想。载于第*61*届*IEEE*计算机科学基础年会（*FOCS*）论文集。1427–1438。[23] Vasilis Gkatzelis、Mohamad Latifian 和 Nisarg Shah。2023。两种失真世界的最佳结果。载于第*24*届*ACM*经济学与计算会议论文集。738–758。[24] Stefan Gross、Elliot Anshelevich 和 Lirong Xia。2017。投票直到两人达成一致：低失真与低样本复杂度的机制。载于第*31*届*AAAI*人工智能会议论文集。544–550。[25] Charles M Harvey。1999。将个体偏好强度聚合为社会偏好强度。社会选择与福利 16，1（1999），65–79。[26] Anson Kahng、Mohamad Latifian 和 Nisarg Shah。2023。带偏好强度的投票。载于*AAAI*人工智能会议论文集，第37卷。5697–5704。[27] David Kempe。2020。基于线性规划对偶性的度量投票分析框架。载于*AAAI*人工智能会议论文集，第34卷。2079–2086。[28] Fatih Erdem Kizilkaya 和 David Kempe。2022。多数否决：实现最优度量失真的简单投票规则。载于第*31*届国际人工智能联合会议（*IJCAI*）论文集。349–355。[29] Thomas Ma、Vijay Menon 和 Kate Larson。2020。使用简单阈值查询改善单边匹配中的福利。*arXiv*预印本 *arXiv:2011.13977*（2020）。[30] Debmalya Mandal、Ariel D Procaccia、Nisarg Shah 和 David Woodruff。2019。以任何必要手段实现高效节俭投票。神经信息处理系统进展 32（2019）。[31]Debmalya Mandal、Nisarg Shah 和 David P Woodruff。2020。投票中的最优通信—失真权衡。载于第*21*届*ACM*经济学与计算会议论文集。795–813。[32] Kamesh Munagala 和 Kangning Wang。2019。改进确定性社会选择规则的度量失真。载于第*21*届*ACM*经济学与计算会议（*EC*）论文集。245–262。[33] Ariel D Procaccia 和 Jeffrey S Rosenschein。2006。投票中基数偏好的失真。载于国际合作信息代理研讨会。Springer，317–331。[34] Thomas L Saaty 和 Jen S Shang。2007。群体决策：人数统计与偏好强度。社会经济规划科学 41，1（2007），22–37。[35] Masoud Seddighin、Mohammad Latifian 和 Mohammad Ghodsi。2021。关于弃权选举的失真值。人工智能研究杂志 70（2021），567–595。