关于拓扑化　　双循环幺半群子半群的拓扑化

ADRIANA CHORNENKA 和 OLEG GUTIK

Abstract. 我们证明，若双循环幺半群 $\mathscr{C}(p,q)$ 的子半群 S 含有无穷多个幂等元，则 S 只容许离散豪斯多夫移位连续拓扑。此外，我们还证明，半群 $\mathscr{C}_+(a,b)$（$\mathscr{C}_-(a,b)$）上的每个右连续（左连续） 豪斯多夫贝尔拓扑都是离散的；同样的结论也适用于双循环幺半群。

arXiv:2601.02100v1 [math.GR] 5 Jan 2026

本文沿用 [2,3,5,6,10,15,20]中的术语。我们用 ω和 $\mathbb{N}$分别表示非负整数集和正整数集。

半群 S 称为逆半群，如果对任意元素 $x \in S$，存在唯一的 $x^{-1} \in S$，使得$xx^{-1}x = x$ 且 $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$。元素 x^{-1} 称为 $x \in S$的逆元。如果 S 是逆半群，那么函数 inv: $S \to S$ 将 S 中的每个元素 x 映射到其逆元 x^{-1}，称为求逆映射。在逆半群 S 上，半群运算确定如下偏序关系 $\preccurlyeq$: 当且仅当存在 $e \in E(S)$ 使得 $s = te$时， $s \preccurlyeq t$ 成立。此偏序称为 S上的自然偏序。

定义 1. 设 X、Y 和 Z 为拓扑空间。映射 $f\colon X \times Y \to Z, (x,y) \mapsto f(x,y)$，称为

(i) 右 [左] 连续，如果它关于右侧 [左侧] 变量连续；也就是说，对于每个固定的 $x_0 \in X$ $[y_0 \in Y]$，映射 $Y \to Z, y \mapsto f(x_0,y)$ $[X \to Z, x \mapsto f(x,y_0)]$连续；($ii$) 分别连续，如果它既左连续又右连续；($iii$) 联合连续，如果它作为从乘积空间 $X \times Y$ 到空间 Z 的映射连续。

定义 2 ([2, 20]**).** 设 S 是一个非空拓扑空间，并赋予结合乘法（半群运算） $\mu\colon S \times S \to S, (x,y) \mapsto \mu(x,y) = xy$。则有序对 (S,μ) 称为

(i) 若映射 μ 是右连续的，即所有内部左平移 $\lambda_s\colon S \to S, x \mapsto sx$ 都是连续映射， $s \in S$，则称其为右拓扑半群；(ii) 若映射 μ 是左连续的，即所有内部右平移 $\rho_s\colon S \to S, x \mapsto xs$ 都是连续映射， $s \in S$，则称其为左拓扑半群；(iii) 若映射 μ分别连续，则称其为半拓扑半群；(iv) 若映射 μ 联合连续，则称其为拓扑半群。

我们通常省略对 μ 的提及，直接写作 S，而不写作 (S, μ)。不言而喻，每个拓扑半群也是半拓扑半群，而每个半拓扑半群既是右拓扑半群，也是左拓扑半群。

半群 S 上的拓扑 τ 称为：

- 若 (S, τ) 是拓扑半群，则称其为半群拓扑；
- 逆半群拓扑，如果 (S, τ) 是一个求逆映射连续的逆拓扑半群；
- 移位连续拓扑，如果 (S, τ) 是一个半拓扑半群；
- 若 (S, τ) 是左拓扑半群，则称其为左连续拓扑；

日期：2026年1月6日。2020数学主题分类。22A15，54A10，54E52。关键词和短语。双循环幺半群、拓扑半群、半拓扑半群、左拓扑半群、右拓扑半群、贝尔、局部紧、离散。

• 若 $(S,\ \tau)$ 是右拓扑半群，则称其为右连续拓扑。

双循环幺半群 $\mathscr{C}(p,q)$ 是由两个元素 p 和 q 生成的、带有单位元 1 的半群，且仅满足条件 $pq=1$。$\mathscr{C}(p,q)$ 上的半群运算定义如下：

$$q^kp^l\cdot q^mp^n=\begin{cases}q^{k-l+m}p^n, & \text{if } l<m;\\ q^kp^n, & \text{if } l=m;\\ q^kp^{l-m+n}, & \text{if } l>m.\end{cases}$$

众所周知，双循环幺半群 $\mathscr{C}(p,q)$ 是一个双单（因而也是单的）组合 E- 单位逆半群，并且 $\mathscr{C}(p,q)$ 上的每个非平凡同余都是群同余 [5]。

众所周知，拓扑代数研究对象的拓扑性质对其代数性质的影响，以及对象的代数性质对其拓扑性质的影响。拓扑代数有两个主要问题：非离散拓扑化问题，以及嵌入到具有某些拓扑代数性质的对象中的问题。

在数学文献中，Markov 提出了群的非离散（豪斯多夫）拓扑化问题 [17]。Pontryagin 给出了群的单位元处的基满足何种条件才能使其具有非离散拓扑化的著名判据（见 [18] 的定理 3.9）。在 [19] 中，Ol'shanskiy 构造了一个无限可数群 G，使得 G上的每个豪斯多夫群拓扑都是离散的。Taimanov 在 [21] 中提出了一个交换半群 $\mathfrak{T}$，它只容许离散豪斯多夫半群拓扑，并在 [22]中给出了交换半群具有非离散半群拓扑的充分条件。在 [11]中证明了，$\mathfrak{T}$ 上的每个带有连续平移的 T_1-拓扑都是离散的。双循环幺半群只容许离散的豪斯多夫半群拓扑 [9]。Bertman 和 West 在 [1] 中将这一结果推广到了豪斯多夫半拓扑半群的情形。

在本文 [4] 中，我们在双循环幺半群 $\mathscr{C}(p,q)$ 上构造了两种非离散的逆半群 T_1-拓扑，以及一种紧致的逆移位连续 T_1-拓扑。此外，我们给出了使 T_1-拓扑τ在 $\mathscr{C}(p,q)$ 上成为离散拓扑的条件。特别地，我们证明：如果 τ是$\mathscr{C}(p,q)$ 上的逆半群 T_1-拓扑，且满足以下条件之一：τ是贝尔空间、τ是拟正则的，或 τ是半正则的，那么 τ 就是离散的。

文献 [7,8,16]研究了双循环幺半群的子半群。在 [16] 中，研究了以下双循环幺半群的反同构子半群

$$\mathscr{C}_+(a,b)=\left\{b^ia^j\in\mathscr{C}(a,b)\colon i\leqslant j,\ i,j\in\omega\right\}$$

and

$$\mathscr{C}_-(a,b)=\left\{b^ia^j\in\mathscr{C}(a,b)\colon i\geqslant j,\ i,j\in\omega\right\}$$

。文献 [12] 研究了半群 $\mathscr{C}_+(a,b)$ 和 $\mathscr{C}_-(a,b)$ 的拓扑化。特别是，文献 [12] 证明了 $\mathscr{C}_+(a,b)$（$\mathscr{C}_-(a,b)$）上的每个 Hausdorff 左连续（右连续）拓扑都是离散的，并且存在一个紧 Hausdorff 拓扑幺半群 S，它包含作为子幺半群的 $\mathscr{C}_+(a,b)$（$\mathscr{C}_-(a,b)$）。此外，还给出了半群 $\mathscr{C}_+(a,b)$（$\mathscr{C}_-(a,b)$）上的一种非离散右连续（左连续）拓扑 $\tau_+^p(\tau_-^p)$，但该拓扑并非左连续（右连续）。文献 [13] 证明，幺半群 $\mathscr{C}_+(a,b)$（分别为 $\mathscr{C}_-(a,b)$）包含一个族 $\{S_\alpha\colon\ \alpha\in\mathfrak{c}\}$，其中有连续统多个子半群，且具有以下性质：$(i)$ 其上的每个左连续（分别为右连续）Hausdorff 拓扑都是离散的；(ii) 每个半群 S_α 都允许一种非离散的右连续（分别为左连续）Hausdorff 拓扑，但该拓扑并非左连续（分别为右连续）。

本文证明了，如果双循环幺半群 $\mathscr{C}(p,q)$ 的子半群 S 包含无穷多个幂等元，那么 S 仅具有离散豪斯多夫移位连续拓扑。此外，我们还证明了，半群 $\mathscr{C}_+(a,b)$ $(\mathscr{C}_-(a,b))$ 上的每个右连续（左连续）豪斯多夫贝尔拓扑都是离散的，并且对于双循环幺半群，同样的结论也成立。

定理 1. 设 S是双循环半群 $\mathscr{C}(p,q)$的一个子半群。如果 S包含无穷多个幂等元，那么 S 上的每个平移连续豪斯多夫拓扑都是离散的。

证明。不失一般性，我们可以假设半群 S 是无限的。

任取 S中的一个元素 b^ia^j 。由于集合 $E(S)$是无限的，因此存在一个正整数 i_0，使得 $i_0 \geqslant \max\{i,j\}+1$。于是有等式

$$b^{i_0}a^{i_0}\cdot b^ka^l=\begin{cases} b^ka^l, & \text{if } i_0\leqslant k;\\ b^{i_0}a^{i_0-k+l}, & \text{if } i_0>k\end{cases}$$

and

$$b^ka^l\cdot b^{i_0}a^{i_0}=\begin{cases} b^ka^l, & \text{if } i_0\leqslant l;\\ b^{i_0}a^{i_0-l+k}, & \text{if } i_0>l,\end{cases}$$

其中 $b^ka^l\in S$，这意味着 $A_{i_0}=S\setminus(Sb^{i_0}a^{i_0}\cup b^{i_0}a^{i_0}S)$ 是 S 和 $b^ia^j\in A_{i_0}$的无限子集。此外，上述等式还意味着映射 $\lambda_{i_0}\colon S\to S$，$b^ka^l\mapsto b^ka^l\cdot b^{i_0}a^{i_0}$ 和 $\rho_{i_0}\colon S\to S$，$b^ka^l\mapsto b^{i_0}a^{i_0}\cdot b^ka^l$ 都是收缩，因此由 [10, 1.5.C] 可知，集合 A_{i_0} 在 S中是开集。这意味着点 b^ia^j在 S中有有限开邻域，因此它是该空间中的孤立点。定理得证。□

推论 1. 如果 S是双循环半群 $\mathscr{C}(p,q)$ 的逆子半群，那么 S 上的每个平移连续 *Hausdorff* 拓扑都是离散的。

证明。当 $S=E(S)$ 时，结论显然成立。因此我们假设 $S\neq E(S)$。任取一个 $b^ia^j\in S\setminus E(S)$。不失一般性，我们可以假设 $i<j$。由于半群S 是逆的，我们得到 $b^ja^i\in S$。于是，对任意正整数 n，双循环半群的半群运算表明

$$(b^ia^j)^n=b^ia^{i+n(j-i)}\in S\setminus E(S),$$
$$(b^ja^i)^n=b^{i+n(j-i)}a^i\in S\setminus E(S),$$

因此

$$(b^ja^i)^n\cdot(b^ia^j)^n=b^{i+n(j-i)}a^i\cdot b^ia^{i+n(j-i)}=b^{i+n(j-i)}a^{i+n(j-i)}$$

i对任意正整数 n，都是 S 的一个幂等元。接下来我们应用定理 1. □

我们需要以下命题。

命题 1. 设 S是双循环幺半群 $\mathscr{C}(a,b)$的一个无限子半群。若 S不包含无穷多个幂等元，则或者 $S\subset\mathscr{C}_+(a,b)$，或者 $S\subset\mathscr{C}_-(a,b)$。

证明。反设存在双循环幺半群$\mathscr{C}(a,b)$的一个无限子半群 S，使得 $|E(S)|<\infty$、$(S\setminus E(S))\cap\mathscr{C}_+(a,b)\neq\varnothing$ 且 $(S\setminus E(S))\cap\mathscr{C}_-(a,b)\neq\varnothing$。那么，对于某些 $i,j,k,l\in\omega$，存在 $b^ia^{i+k}\in S\cap\mathscr{C}_+(a,b)$ 和 $b^{j+l}a^j\in S\cap\mathscr{C}_-(a,b)$，满足 $k,l>0$。由于 S是双循环幺半群 $\mathscr{C}(a,b)$的子半群，$\mathscr{C}(a,b)$的半群运算表明，对任意正整数 p，有

$$(b^ia^{i+k})^{lp}=b^ia^{i+klp}\in S\qquad\text{and}\qquad(b^{j+l}a^j)^{kp}=b^{j+klp}a^j\in S.$$

因此我们得到以下元素

$$b^ia^{i+klp}\cdot b^{j+klp}a^j=\begin{cases} b^ja^j, & \text{if } i<j;\\ b^ia^j, & \text{if } i=j;\\ b^ia^i, & \text{if } i>j\end{cases}$$

and

$$b^{j+klp}a^j\cdot b^ia^{i+klp}=\begin{cases} b^{i+klp}a^{i+klp}, & \text{if } j<i;\\ b^{j+klp}a^{i+klp}, & \text{if } j=i;\\ b^{j+klp}a^{j+klp}, & \text{if } j>i\end{cases}$$

是 S 的幂等元。此外，由上一个等式可得，半群 S 包含一个无限的幂等元子集 $\{b^{i+klp}a^{i+klp}\colon p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$，这就产生了矛盾。所得矛盾说明了该命题的结论。□

下面我们在整数集合 $\mathbb{Z}$ 上定义 p-进拓扑。固定任意一个正素数 p。对于任意整数 a 和任意正整数 k，置 $U_k(a) = a+p^k\mathbb{Z}$。由基 $\mathscr{B}_p = \{U_k(a) : a \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, 3, \ldots\}$ 生成的拓扑 τ_p 称为 $\mathbb{Z}$ 上的 p-进拓扑。众所周知，带有 p-进拓扑 τ_p 的整数加法群是一个非离散拓扑群 [18]。这意味着，带有从 $(\mathbb{Z}, \tau_p)$ 诱导的拓扑的非负（分别为正）整数加法半群 $(\omega, +)$（分别为 $(\mathbb{N}, +)$）是一个非离散豪斯多夫拓扑半群，我们将其记为 τ_p。显然，族 $\mathscr{B}_p = \{V_k(a) : a \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, 3, \ldots\}$ 是拓扑 τ_p 在 $(\omega, +)$（$(\mathbb{N}, +)$）上的一个拓扑基，其中 $V_k(a) = a + p^k\omega$。

我们注意到，在半群 $\mathscr{C}_+(a, b)$ ($\mathscr{C}_-(a, b)$) 上存在一种非离散的右连续（左连续）拓扑 τ_p^+(τ_p^-)，但它不是左连续（右连续）的 [12]。拓扑 τ_p^+on$\mathscr{C}_+(a, b)$ 按如下方式构造。半群 $\mathscr{C}_+(a, b)$ 的半群运算意味着，对于任意非负整数 n that

$$\mathscr{C}_+^n(a, b) = \left\{b^n a^{n+i} : i \in \omega\right\}$$

是 $\mathscr{C}_+(a, b)$ 的子半群。此外，半群 $\mathscr{C}_+^n(a, b)$ 通过映射 $\mathfrak{I}_n : \omega, \to \mathscr{C}_+^n(a, b)$，$i \mapsto b^n a^{n+i}$ 与非负整数加法半群 $(\omega, +)$ 同构。于是，对于任意 $b^n a^{n+i} \in \mathscr{C}_+(a, b)$，映射 $\mathfrak{I}_n$ 以拓扑 τ_p^+ 在点 $b^n a^{n+i}$ 处的拓扑基 $\mathscr{B}_p(i)$ 在拓扑 τ_p 的点 i [12]处的像为其生成该点处的拓扑基。半群 $\mathscr{C}_-(a, b)$ 上的拓扑 τ_p^- 以对偶方式构造。

定理1 和命题1 促使我们提出以下问题。

问题1。设 S 是幺半群 $\mathscr{C}_+(a, b)$ 的一个子半群，且其幂等元不是无限多个。S 是否存在移位连续的（半群）Hausdorff 拓扑?

例 1. 任取 $n, m \in \omega$，使得 $m \leqslant n$。我们定义

$$\mathscr{C}_+^{[m,n]}(a, b) = \bigcup_{k=m}^{n} \mathscr{C}_+^k(a, b).$$

$\mathscr{C}_+(a, b)$ 的半群运算表明，$\mathscr{C}_+^{[m,n]}(a, b)$ 是 $\mathscr{C}_+(a, b)$ 的一个子半群。此外，显然，半群 $\mathscr{C}_+^{[m,n]}(a, b)$ 与幺半群 $\mathscr{C}_+^{[0,n-m]}(a, b)$ 通过映射$b^s a^{s+i} \mapsto b^{s-m} a^{s-m+i}$同构。

对于任意正素数 p，我们按以下方式在 $\mathscr{C}_+^{[m,n]}(a, b)$ 上定义拓扑 $\tau^{m}_{,p}{}^{n}$。对于任意满足 $i + j \leqslant n$ 的 $b^i a^{i+j} \in \mathscr{C}_+^{[m,n]}(a, b)$，点 $b^i a^{i+j}$ 在 $(\mathscr{C}_+^{[m,n]}(a, b)\ \tau^{m}_{,p}{}^{n})$ 中是孤立点。若$i + j > n$，则族

$$\mathscr{B}_p^{m,n}(b^i a^{i+j}) = \left\{V_s(b^i a^{i+j}) : s \in \mathbb{N}\right\},$$

其中，$V_s(b^i a^{i+j}) = \{b^i a^{i+j+t} : t \in p^s\omega\}$ 是点 $b^i a^{i+j}$ 处拓扑 $\tau^{m}_{,p}{}^{n}$ 的拓扑基。显然，$\tau^{m}_{,p}{}^{n}$ 是 $\mathscr{C}_+^{[m,n]}(a, b)$ 上的豪斯多夫非离散拓扑。

命题 2. $\tau^{m}_{,p}{}^{n}$ 是 $\mathscr{C}_+^{[m,n]}(a, b)$ 上的半群拓扑。

证明。任取 $b^{i_1} a^{i_1+j_1}, b^{i_2} a^{i_2+j_2} \in \mathscr{C}_+^{[m,n]}(a, b)$。于是有

$$b^{i_1} a^{i_1+j_1} \cdot b^{i_2} a^{i_2+j_2} = \begin{cases} b^{i_2-j_1} a^{i_2+j_2}, & \text{if } i_1 + j_1 < i_2; \\ b^{i_1} a^{i_2+j_2}, & \text{if } i_1 + j_1 = i_2; \\ b^{i_1} a^{i_1+j_1+j_2}, & \text{if } i_1 + j_1 > i_2. \end{cases}$$

我们考虑所有可能的情形。

假设 $i_1 + j_1 \leqslant n$ 和 $i_2 + j_2 \leqslant n$。那么 $b^{i_1} a^{i_1+j_1}$ 和 $b^{i_2} a^{i_2+j_2}$ 是拓扑空间 $(\mathscr{C}_+^{[m,n]}(a,\ b)\ \tau^{m}_{,p}{}^{n})$中的孤立点，因此在这种情况下，半群运算是连续的。

假设 $i_1+j_1\leqslant n$和 $i_2+j_2>n$。那么 $b^{i_1}a^{i_1+j_1}$是 $(\mathscr{C}_+^{[m,n]}(a,\ b)\ \tau^{m,\ p\ n})$中的孤立点。简单验证可知，对于任意正整数 s，我们有

$$\begin{aligned} b^{i_1}a^{i_1+j_1}\cdot V_s(b^{i_2}a^{i_2+j_2}) &= b^{i_1}a^{i_1+j_1}\cdot\left\{b^{i_2}a^{i_2+j_2+t}\colon t\in p^s\omega\right\}= \\ &= \begin{cases} \left\{b^{i_2-j_1}a^{i_2+j_2+t}\colon t\in p^s\omega\right\}, & \text{if } i_1+j_1<i_2; \\ \left\{b^{i_1}a^{i_2+j_2+t}\colon t\in p^s\omega\right\}, & \text{if } i_1+j_1=i_2; \\ \left\{b^{i_1}a^{i_1+j_1+j_2+t}\colon t\in p^s\omega\right\}, & \text{if } i_1+j_1>i_2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} V_s(b^{i_2-j_1}a^{i_2+j_2}), & \text{if } i_1+j_1<i_2; \\ V_s(b^{i_1}a^{i_2+j_2}), & \text{if } i_1+j_1=i_2; \\ V_s(b^{i_1}a^{i_1+j_1+j_2}), & \text{if } i_1+j_1>i_2. \end{cases} \end{aligned}$$

假设 $i_1+j_1>n$和 $i_2+j_2\leqslant n$。那么，$b^{i_2}a^{i_2+j_2}$是 $(\mathscr{C}_+^{[m,n]}(a,\ b)\ \tau^{m,\ p\ n})$ 中的孤立点，且 $i_2<i_1+j_1$。经过常规计算，对于任意正整数 s，我们得到

$$\begin{aligned} V_s(b^{i_1}a^{i_1+j_1})\cdot b^{i_2}a^{i_2+j_2} &= \left\{b^{i_1}a^{i_1+j_1+t}\colon t\in p^s\omega\right\}\cdot b^{i_2}a^{i_2+j_2}= \\ &= \left\{b^{i_1}a^{i_1+j_1+j_2+t}\colon t\in p^s\omega\right\}= \\ &= V_s(b^{i_1}a^{i_1+j_1+j_2}). \end{aligned}$$

假设 $i_1+j_1>n$和 $i_2+j_2>n$。那么 $i_2<i_1+j_1$。经过常规计算，对于任意正整数 s，我们有

$$\begin{aligned} V_s(b^{i_1}a^{i_1+j_1})\cdot V_s(b^{i_2}a^{i_2+j_2}) &= \left\{b^{i_1}a^{i_1+j_1+t_1}\colon t_1\in p^s\omega\right\}\cdot\left\{b^{i_2}a^{i_2+j_2+t_2}\colon t_2\in p^s\omega\right\}= \\ &= \left\{b^{i_1}a^{i_1+j_1+t_1+j_2+t_2}\colon t_1,t_2\in p^s\omega\right\}\subseteq \\ &\subseteq \left\{b^{i_1}a^{i_1+j_1+j_2+t}\colon t\in p^s\omega\right\}= \\ &= V_s(b^{i_1}a^{i_1+j_1+j_2}). \end{aligned}$$

上述论证蕴含了该命题的陈述。 □

我们回顾一下，若一个拓扑空间 X满足以下条件，则称其为贝尔空间：对于每个由 A_1、A_2、.....、A_i、.....组成的∞稠密开子集 X 序列，其交集 $\bigcap\limits_{i=1}A_i$ 是 X [14]的稠密子集。

定理 2。半群$\mathscr{C}_+(a,b)$（$\mathscr{C}_-(a,b)$）上的每个右连续(左连续) *Hausdorff* 贝尔拓扑 τ 都是离散的。

证明。 我们只需证明半群 $\mathscr{C}_+(a,b)$ 满足该定理的结论，因为半群 $\mathscr{C}_+(a,b)$ 和 $\mathscr{C}_-(a,b)$ 与之反同构 [12, 16]。

任取 $b^{i_0}a^{j_0}\in\mathscr{C}_+(a,b)$。由于 $(\mathscr{C}_+(a,b)\ \tau)$ 上的每个左平移都是连续的，且 $b^{i_0+1}a^{i_0+1}$ 是 $\mathscr{C}_+(a,b)$ 的一个幂等元，因此映射 $\lambda_{b^{j_0+1}a^{j_0+1}}\colon \mathscr{C}_+(a,b)\ \to \mathscr{C}_+(a,b),\ b^sa^t\mapsto b^{j_0+1}a^{j_0+1}\cdot b^sa^t$ 是一个连续收缩。由 [10, 1.5.C] ，收缩 $b^{j_0+1}a^{j_0+1}\mathscr{C}_+(a,b)$ 是拓扑空间 $(\mathscr{C}_+(a,b)\ \tau)$ 的闭子集。显然，$b^{i_0}a^{j_0}\notin b^{j_0+1}a^{j_0+1}\mathscr{C}_+(a,b)$。

我们定义

$$A_{j_0+1}=\left\{b^ia^j\in\mathscr{C}_+(a,b)\colon i+j\leqslant 2(j_0+1)\right\}.$$

那么，A_{j_0+1}是 $\mathscr{C}_+(a,\ b)$ 的有限子集，并且 $b^{i_0}a^{j_0}\in A_{j_0+1}$。由于空间 $(\mathscr{C}_+(a,\ b)\ \tau)$ 是 Hausdorff 的，

$$S=\mathscr{C}_+(a,b)\setminus\left(A_{j_0+1}\cup b^{j_0+1}a^{j_0+1}\mathscr{C}_+(a,b)\right)$$

在 $(\mathscr{C}_+(a,\ b)\ \tau)$ 中是开集，因此根据 [14] 的命题 1.14，空间 S 是贝尔空间。根据 [14] 的命题 1.30，空间 S 在 S 中含有无穷多个孤立点，因为集合 S 是无限且可数的。于是存在一个非负整数 $x_0\leqslant j_0$，使得集合 $S_{x_0}=\{b^{x_0}a^y\colon\ y\geqslant x_0\}$ 含有 S 的无穷多个孤立点。这意味着存在一个正整数 y_0，使得

$y_0 - j_0 > x_0 \geqslant 0$，从而 $b^x a^{y_0+i_0-j_0} \in \mathscr{C}_+(a,\ b)$。$\mathscr{C}_+(a,\ b)$ 的半群运算意味着

$$b^{x_0} a^{y_0+i_0-j_0} \cdot b^{i_0} a^{j_0} = b^{x_0} a^{y_0},$$

因为 $y_0 + i_0 - j_0 > x_0 + i_0 > i_0$。由于 $(\mathscr{C}_+(a,\ b)\ \tau)$ 是一个左拓扑半群，我们有方程的解集 U

$$b^{x_0} a^{y_0+i_0-j_0} \cdot X = b^{x_0} a^{y_0}$$

是 $(\mathscr{C}_+(a,\ b)\ \tau$的一个开子集，且包含点 $b^{i_0}a^{j_0}$。根据 [9] 的引理 I.1.(ii)，集合 U是有限的。由于 $(\mathscr{C}_+(a,\ b)\ \tau$是一个 Hausdorff 空间，点 $b^{i_0}a^{j_0}$在 $(\mathscr{C}_+(a,\ b)\ \tau$中是孤立点。这就完成了定理的证明。□

拓扑空间 X 称为 局部紧，如果对任意点 $x \in X$，都存在一个开邻域 $U(x)$，使得 $\mathrm{cl}_X(U(x))$ $U(x)$ 的闭包是一个紧集 [10]。由于每个局部紧空间都是贝尔空间，定理2 推出以下推论。

推论 2. $\mathscr{C}_+(a,b)$ $\mathscr{C}_-(a,b))$ 半群上的每个右连续(左连续) *Hausdorff* 局部紧拓扑都是离散的。

备注 1. [12] 一种非离散非贝尔豪斯多夫拓扑 τ_p^+在半群 $\mathscr{C}_+(a,b)$ 上，使得 $(\mathscr{C}_+(a,b)$ τ_p^+构成一个可度量化右拓扑半群。

定理 3 将定理 1 的结果从 [4] 推广到 Hausdorff 右拓扑半群和左拓扑半群。

定理 3. 双循环半群 $\mathscr{C}(a,b)$ τ 上的每个右连续(左连续) *Hausdorff* 贝尔拓扑都是离散的。

定理的证明3 与定理2类似。

定理3 蕴含

推论 3。 双循环半群 $\mathscr{C}$（a,b）上的每个右连续（左连续）*Hausdorff* 局部紧拓扑都是离散的。

References

[1] M. O. Bertman 和 T. T. West，条件紧双循环半拓扑半群，《爱尔兰皇家科学院院刊》A76（1976），第21–23期，219–226页。（文献）[2] J. H. Carruth、J. A. Hildebrant 和 R. J. Koch，《拓扑半群理论》，第I卷，Marcel Dekker, Inc.，纽约和巴塞尔，1983。（文献），2[3] J. H. Carruth、J. A. Hildebrant 和 R. J. Koch，《拓扑半群理论》，第II卷，Marcel Dekker, Inc.，纽约和巴塞尔，1986。（文献）[4] A. Chornenka 和 O. Gutik，关于双循环幺半群的拓扑化，《利沃夫大学学报》，力学与数学辑，95（2023），46–56页。数字对象标识符：10.30970/vmm.2023.95.046-056（文献）[5] A. H. Clifford 和 G. B. Preston，《半群代数理论》，第I卷，美国数学会综述7，普罗维登斯，罗得岛州，1961。（文献）[6] A. H. Clifford 和G.B.Preston，《半群代数理论》，第II卷，美国数学会综述7，普罗维登斯，罗得岛州，1967。（文献）[7] L. Descal.co 和 N. Ruˇskuc，双循环幺半群的子半群，《国际代数与计算杂志》15（2005），第1期，37–57页。数字对象标识符：10.1142/S0218196705002098（文献）[8] L. Descal.co 和 N. Ruˇskuc，双循环幺半群子半群的性质，《捷克数学杂志》58（2008），第2期，311–330页。数字对象标识符：10.1007/s10587-008-0018-7（文献）[9] C. Eberhart 和 J. Selden，关于双循环半群的闭包，《美国数学会汇刊》144（1969），115–126页。数字对象标识符：10.1090/S0002-9947-1969-0252547-6（文献）[10] R. Engelking，《一般拓扑学》，第2版，Heldermann，柏林，1989。（文献）[11] O. Gutik，Taimanov 半群的拓扑性质，舍甫琴科科学学会数学通报13（2016），1–5页。（文献）[12] O. Gutik，关于不可拓扑化半群，《利沃夫大学学报》，力学与数学辑，96（2024），25–36页。数字对象标识符：10.30970/vmm.2024.96.025-036（文献），1[13] O. Gutik，关于仅允许离散左连续豪斯多夫拓扑的半群，预印本。（文献）

[14] R. C. Haworth 和 R. A. McCoy，贝尔空间，《数学论文集》，华沙，PWN，1977。第141卷。（文献）[15] M. Lawson，《逆半群：部分对称理论》，新加坡：世界科学出版社，1998。（文献）[16] S. O. Makanjuola 和 A. Umar，关于双循环半群的一个特定子半群，《代数通讯》25（1997），第2期，509-519页，数字对象标识符：10.1080/00927879708825870（文献）[17] A. A. Markov，关于自由拓扑群，《苏联科学院学报》9（1945），3—64页（俄文）；英文版见：《美国数学会译丛》8（1962），第1期，195—272页。（文献）[18] L. S. Pontryagin，《拓扑群》，Gordon & Breach，纽约等地，1966。（文献）[19] A. Yu. Ol'shanskiy，关于可数的非拓扑化群的注记，《莫斯科大学学报》，力学与数学辑39（1980），1034页（俄文）。（文献）[20] W. Ruppert，《紧半拓扑半群：内在理论》，《数学讲义》1079，施普林格，柏林，1984。数字对象标识符：10.1007/BFb0073675（文献），2[21] A. D. Taimanov，一个仅允许离散拓扑的半群示例，《代数与逻辑》12（1973），第1期，64–65页。数字对象标识符：10.1007/BF02218642（文献）[22] A. D. Taimanov，交换半群的拓扑化，《数学札记》17（1975），第5期，443–444页。数字对象标识符：10.1007/BF01155800（文献）

Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska 1, Lviv, 79000, Ukraine电子邮箱地址: adriana.chornenka@lnu.edu.ua, oleg.gutik@lnu.edu.ua, ogutik@gmail.com