期刊名称

Crossmark

收稿日期dd Month yyyy修订日期dd Month yyyy

论文

成像算子的信息几何

Charles Wood[1]

[1]未来技术中心，电气与机械工程学院，朴茨茅斯大学，PO1 3HE，英国

电子邮箱： charles.wood@port.ac.uk

关键词： 信息几何、成像算子、奇异值谱、Fisher–Rao 度量、算子复合、信息论

arXiv:2601.02111v1 [cs.IT] 5 Jan 2026

摘要

成像系统被表示为线性算子，其奇异值谱描述了在算子层面可恢复的结构。本文基于基于算子的信息论框架，引入一种由成像算子的归一化奇异谱诱导的最小几何结构。通过将谱等价类视为概率单纯形上的点，并为该空间赋予费希尔–拉奥信息度量，可以得到一种定义良好的黎曼几何，该几何在酉变换和全局缩放下保持不变。所得几何具有距离和测地线的闭式表达式，并且具有恒定的正曲率。在明确的限制条件下，复合通过秩约束限定边界面；而在带有既定理想化假设的对齐模型中，复合会对谱状态施加非线性重新加权。只有在谱均匀情形下，Fisher–Rao距离才得以保持。该构造是抽象的、处于算子层面的，不引入任何优化原理、随机模型或模态特定假设。其旨在为后续分析成像流程中的信息流与约束提供固定的几何背景。

1 引言

本文介绍了由成像算子诱导的一种最简几何结构，并通过其归一化奇异谱来表征。本文将奇异值谱用作一种基于固定离散化、与基底和尺度无关的线性模态加权概述。

本文中，“可恢复”一词仅用于这种受限的算子层面含义：奇异值量化算子对其奇异模态的放大或抑制程度。这里并不暗示任何依赖任务、噪声或估计器的可恢复性概念，也不涉及性能理论意义上的可恢复性。

基本假设。 成像系统被建模为由固定离散化所诱导的、有限维希尔伯特空间之间的有界线性算子。该算子的奇异值平方用于描述其作用如何在各模态间分配能量，这种描述与基底和尺度无关。本文不假设任务模型、噪声模型或重建模型；“可恢复”一词仅用于谱分配这一算子层面的含义，而非决策理论、估计理论或性能理论意义上的含义。

本研究的目标有意保持有限。我们既不在完整的线性算子空间上构建几何，也不引入优化原理、随机模型、算法考量或模态特定假设。相反，我们确定一个与谱等价类相关的约化状态空间，并为其赋予典范信息几何。随后，我们对这一几何进行抽象分析，包括考察其在算子复合下的行为。

本文旨在确立一个结构要素：谱算子状态上的度量几何。后续研究将以这一固定结构为基础，而非对其加以修改。

这项工作在数学上是自洽完整的，并且属于一项更广泛的努力，旨在建立成像算子的信息论描述。

1.1 诱导几何的抽象解释

上述构造仅依据成像算子的归一化奇异谱，为其等价类赋予了精确的几何结构。在这一抽象层次上，这种几何结构可根据形式化结果直接加以诠释，而无需参考任何成像模态或实验。

每个算子都由一个点表示 $\lambda \in \Delta^{N-1}$，该点编码其总平方奇异值在各模态间的分布。因此， $\Delta^{N-1}_{>0}$ 上的 Fisher–Rao 几何依据相对谱分配而非绝对尺度或依赖基底的结构，量化算子之间的差异。当且仅当两个算子的奇异能量在各模态间分布相似时，它们在几何上才彼此接近，而不论这些模态是如何实现的。

该几何中的测地线表示两个算子类别之间谱权重尽可能平滑的重新分配。测地线的显式形式表明，谱质量通过平方根坐标连续传输，确保沿内部路径不会有任何模态消失或产生。这使该几何如何表示谱分配的连续变化得以形式化，与离散的秩损失相对。

Fisher–Rao 流形具有恒定的正曲率，因此谱状态空间本质上是非欧几里得的。只有在平凡情形下，线性插值才具有特殊性；典型的插值路径会在单纯形中弯曲。这种曲率体现了一个根本的不相容性：无法同时保持所有谱比例并实现线性叠加；这一性质与任何特定的算子实现方式无关。

算子复合通过在 Δ^{N-1} 上诱导传输映射，作用于这一几何结构。形式化结果表明，只有谱均匀阶段才是等距变换；所有非平凡阶段都会扭曲距离，并且通常也会改变谱状态所感受到的曲率。秩亏阶段还会产生进一步的几何效应，将状态强制映射到单纯形的边界面上，而这些边界面在度量意义下是奇异的。这些效应共同表明，复合通常会重塑算子类别之间的几何关系，而不仅仅是对其进行平移。

最后，不可能性结果明确了这种表示的适用范围。由于 λ 会舍弃奇异向量信息，这种几何结构有意不考虑算子对齐、可交换性和空间结构。因此，所得几何结构并非算子本身的几何结构，而是仅由谱内容决定的信息等价类 的几何结构。

以上所有解释性陈述，都是这一约化过程以及单纯形上 Fisher–Rao 度量固有性质的结果。这种抽象解释仅用于阐明形式几何所编码的内容及其必然排除的内容。在这一阶段，不会引入任何额外假设或建模选择。

1.2 本文构造的范围与局限

本文构建的几何框架刻意保持精简。其目的在于以严谨的数学方式确立：成像算子通过归一化奇异谱表示时，会诱导出非平凡的信息几何。为避免形式体系过度扩展，本文明确不涉及以下若干问题和方向：

首先，本文并不试图在完整的线性算子空间上定义几何。因此，本文不对算子交换性、模态的空间局域化或奇异子空间的几何作出任何论断。保留方向信息或向量信息的几何扩展将留待后续研究。

其次，该构造以固定离散化和固定谱维数 N 为前提。本文不主张该构造在分辨率、采样或离散化方式改变时保持不变。

最后，本文并不试图穷尽该构造所带来的几何后果。具体而言，我们不研究高阶几何不变量、单纯形结构之外的全局拓扑性质，也不探讨向无限维极限的扩展。这些方向是当前框架的自然延续。

总之，本文在谱上建立了一种定义严谨且具有不变性的信息几何。 1

成像算子的等价类，并分析其在复合下的基本行为。涉及额外算子结构、随机性、优化或物理解释的扩展有意留待后续研究。

2 算子谱状态

本文始终采用由离散化所导出的有限维设定。所有希尔伯特空间均为有限维空间，所有算子均为有界算子。

固定谱维数。 本文余下部分均假设采用固定离散化和固定谱维数 N。因此， $\mathcal{S} = \Delta^{N-1}$ 中比较的所有算子都以相同的方式表示

$$N = \min\{\dim \mathcal{H}_{\mathrm{obj}}, \dim \mathcal{H}_{\mathrm{data}}\}$$

（离散化之后）。当考虑多个阶段时（例如，第6节），我们将讨论范围限定为谱状态位于这一共同 N单纯形中的算子族。这确保所有算子共享同一个状态空间和同一个信息几何。

维数变化的细化不在本文讨论范围之内，且本文不主张对离散化变化或 N 具有不变性。

2.1 成像算子与奇异谱

设 $\mathcal{H}_{\mathrm{obj}}$ 和 $\mathcal{H}_{\mathrm{data}}$ 分别为表示物体域和数据域的有限维希尔伯特空间。成像系统由一个线性算子表示

$$O : \mathcal{H}_{\mathrm{obj}} \to \mathcal{H}_{\mathrm{data}}.$$

我们将 $\{\sigma_i(O)\}_{i=1}^{N}$ 记作 O 的奇异值，并按如下方式排序：

$$\sigma_1(O) \geq \sigma_2(O) \geq \cdots \geq \sigma_N(O) \geq 0,$$

其中 $N = \min\{\dim \mathcal{H}_{\mathrm{obj}}, \dim \mathcal{H}_{\mathrm{data}}\}$。

奇异谱被视为算子层面上可恢复结构的载体。此处“可恢复”仅指谱意义上的可恢复。除线性和有界性外，不对 O 的物理来源作任何假设。

2.2 谱状态的定义

定义 2.1（算子谱状态）。 设 O 是一个奇异值为 $\{\sigma_i(O)\}_{i=1}^{N}$的非零成像算子。 O 的谱状态是向量

$$\lambda(O) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N), \qquad \lambda_i = \frac{\sigma_i(O)^2}{\sum_{j=1}^{N} \sigma_j(O)^2}.$$

根据构造， $\lambda_i \geq 0$ 和$\sum_i \lambda_i = 1$。

2.3 不变性性质

命题 2.2（酉不变性）。 设 U 和 V 分别是作用于 $\mathcal{H}_{\mathrm{data}}$ 和 $\mathcal{H}_{\mathrm{obj}}$上的酉算子。则

$$\lambda(UOV) = \lambda(O).$$

命题 2.3（尺度不变性）。对于任意标量 $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\lambda(cO) = \lambda(O).$$

这些不变性意味着， $\lambda(O)$仅取决于 O 在酉变换和各向同性缩放下的等价类。

3 谱单纯形作为状态空间

3.1 状态空间的定义

定义 3.1（谱单纯形）。 设

$$\mathcal{S} = \Delta^{N-1} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \right\}.$$

我们将 $\mathcal{S}$ 称为谱单纯形。

每个非零成像算子都会诱导一个点 $\lambda(O) \in \mathcal{S}$。

3.2 内部和边界

命题 3.2 (秩对应)。 设 O 是一个秩为 r 的成像算子。

- 如果 $r = N$，那么 $\lambda(O)$ 位于 $\mathcal{S}$的内部。
- 如果 $r < N$，那么 $\lambda(O)$ 位于 $\mathcal{S}$ 的一个余维数为 $N - r$的边界面上。

3.3 谱等价

定义 3.3 （谱等价）。 若两个成像算子 O_1 和 O_2 满足以下条件，则称它们谱等价

$$\lambda(O_1) = \lambda(O_2).$$

上述构造确定了一种建模选择：将奇异值平方归一化，并解释为单纯形上的概率向量。我们并未声称这种选择是唯一的或必然的；相反，它提供了一种最简的算子不变状态描述，可在此基础上定义标准的信息几何。

4 谱单纯形上的信息几何

4.1 Fisher–Rao 度量

定义 4.1 （Fisher–Rao 度量）。 在谱单纯形的内部 $\mathcal{S}_{>0}$ 上，定义黎曼度量 [1]

$$g_{ij}(\lambda) = \frac{\delta_{ij}}{4\lambda_i}, \qquad \lambda_i > 0.$$

定义域约定。 本文中的所有几何陈述均在光滑内部流形 $\mathcal{S}_{>0}$上进行，其中对所有 i， $\lambda_i > 0$ 。讨论边界面（即对于某些 i， $\lambda_i = 0$ ）时，仅指内部量在 λ 趋近边界时的极限行为。边界点本身不属于黎曼流形，也不在其上定义度量张量。这是单纯形 [1]上的标准 Fisher–Rao 度量。

缩放约定。 因子 $1/4$ 是一个固定的归一化常数，其选取使平方根嵌入 $\phi(\lambda) = (\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_N})$ 得到命题 4.2 中的距离公式，其中前置因子为 2。以下所有几何陈述在度量经过常数缩放后保持不变，但距离和曲率尺度也会相应缩放。

4.2 距离与嵌入

命题 4.2 (费希尔–拉奥距离)。 由 g_{ij} 诱导的测地距离为 *[1]*

$$d_{\mathrm{FR}}(\lambda, \mu) = 2 \arccos\left(\sum_{i=1}^{N} \sqrt{\lambda_i \mu_i} \right).$$

命题 4.3 (等距嵌入)。 映射 $\phi : \mathcal{S}_{>0} \to S^{N-1}_{>0}$ 定义为 $\phi(\lambda) = (\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_N})$ 是从 $(\mathcal{S}_{>0}, g_{\mathrm{FR}})$ 到配备标准球面度量的单位球面 *[1]*的等距嵌入（差一个常数因子）。

4.3 测地线

命题 4.4 (测地线)。 对于 $\lambda, \mu \in \mathcal{S}_{>0}$，连接它们的唯一 *Fisher–Rao*测地线 $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{S}_{>0}$ 为

$$\gamma_i(t) = \frac{\left((1-t)\sqrt{\lambda_i} + t\sqrt{\mu_i}\right)^2}{\sum_j \left((1-t)\sqrt{\lambda_j} + t\sqrt{\mu_j}\right)^2}.$$

4.4 曲率

命题 4.5 (常曲率)。 根据命题 *4.3*，$(\mathcal{S}_{>0}, g_{\mathrm{FR}})$ （除度量定义中的固定缩放因子外）与圆球面的正正交象限等距。特别是， $\mathcal{S}_{>0}$ 上的 *Fisher–Rao* 度量具有常正截面曲率*[1]*。

5 信息论泛函

令 $H(\lambda) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i$ 表示香农熵。

命题 5.1 (熵界)。 对于 $\lambda \in \mathcal{S}$ [2, 3],

$$0 \le H(\lambda) \le \log N.$$

命题 5.2 (不可识别性)。 映射 $O \mapsto \lambda(O)$ 不是单射；奇异向量信息未被保留。

6 复合诱导几何

设 $A : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1$ 和 $B : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ 是满足 $BA \neq 0$ 的非零算子。

本节采用的传输模型。本节中，关于 $\mathcal{S}$ 上“复合诱导传输”的表述，均应作狭义理解。我们分析（i）适用于所有线性映射的秩效应（命题 6.1–6.2），以及（ii）一种理想化对齐传输模型，在该模型中，只有在奇异值分解对齐的条件下，复合才会在谱状态上定义阶段局部映射（定义 6.3 和命题 6.4）。在此对齐情形之外， $\lambda(BA)$ 是有定义的，但映射 $A \mapsto \lambda(BA)$ 通常不能通过 $\lambda(A)$ 分解。换言之，不存在仅由 B 决定的阶段局部映射 $\Phi_B : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$，使得对于所有算子 A ，在不保留奇异向量信息的情况下，均有 $\lambda(BA) = \Phi_B(\lambda(A))$。因此，本节中任何涉及“传输”“压缩”或“诱导映射”的表述，都严格限于上述对齐模型，不应被理解为关于一般算子复合的论断。

命题 6.1 （秩单调性）。

$$\operatorname{rank}(BA) \le \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}.$$

命题 6.2 （边界吸引）。 若 $\operatorname{rank}(B) = r_B < N$，则 $\lambda(BA)$ 位于 $\mathcal{S}$ 的一个面上，其余维数至少为 $N - r_B$。

定义 6.3 （奇异值分解对齐）。 若算子 A 和 B 的奇异值分解对齐，则 B 的右奇异向量与 A的左奇异向量重合。

命题 6.4 （对齐谱传输）。 在奇异值分解对齐且全支撑的条件下，

$$\lambda_i(BA) = \frac{\beta_i^2 \, \lambda_i(A)}{\sum_j \beta_j^2 \, \lambda_j(A)}, \qquad \beta_i = \sigma_i(B).$$

命题 6.5 （等距变换）。 在对齐情形下， Φ_B 是（$\mathcal{S}_{>0}$， g_{FR}）上的等距变换，当且仅当$\sigma_1(B) = \cdots = \sigma_N(B)$。

命题 6.6 （对齐传输下的距离畸变）。 在命题 6.4的对齐传输模型下，在 $\mathcal{S}_{>0}$ 上诱导的映射保持 *Fisher–Rao*距离，当且仅当 B 是谱均匀的（命题 6.5）。尤其是，若 B 不是谱均匀的，则对齐传输映射不是等距变换，因此会使 $\mathcal{S}_{>0}$上的 *Fisher–Rao*距离发生畸变。

7 示例

本节提供少量简单的示意性示例，仅用于说明在上述几何构造下，算子如何表示为谱单纯形中的点和路径 $\mathcal{S}$ 。

所有示例均为解析性和抽象性的。它们明确旨在示例说明，并不构成一般性结果、对该框架的验证，也不是实际系统典型行为的证据。本节不引入任何新定义或主张。

7.1 秩一算子

考虑一个恰有一个非零奇异值 O 的算子 $\sigma_1 > 0$ ，且 $\sigma_i = 0$ 对于 $i > 1$。其对应的谱状态为

$$\lambda(O) = (1, 0, \ldots, 0),$$

c对应于谱单纯形的一个顶点 例 $\mathcal{S}$。

这个例子说明了如何将秩亏算子表示为 $\mathcal{S}$ 的边界点。

如前所述，这些点位于光滑内部流形之外，而 Fisher–Rao 度量定义在该流形上。由 Fisher–Rao 度量定义的测地线始终位于 $\mathcal{S}_{>0}$ 中，适用于所有$t \in [0, 1]$，因此边界点仅被视为极限端点，而非黎曼流形中的点。这一几何位置之外，不暗示任何其他解释。

7.2 谱均匀算子

Let O 为一个奇异值为 $\sigma_1 = \cdots = \sigma_N > 0$的算子。相应的谱状态 is

$$\lambda(O) = \left(\tfrac{1}{N}, \ldots, \tfrac{1}{N}\right),$$

它是 $\mathcal{S}$ 的重心。

这个例子展示了单纯形的中心点，并为几何对称性提供了参照。如前所述，谱均匀算子在对齐复合下生成等距变换；此处不再推导这一性质，而仅通过状态位于几何中心的位置加以说明。

7.3 双模算子族

考虑一个具有两个非零奇异值的单参数族算子，

$$\sigma_1(t) = \cos t, \qquad \sigma_2(t) = \sin t,$$

with $t \in (0, -\frac{\pi}{2})$，其余所有奇异值均为零。归一化后，谱状态 is

$$\lambda(t) = \left(\cos^2 t, \sin^2 t, 0, \ldots, 0\right).$$

随着 t 变化， $\lambda(t)$沿着 $\mathcal{S}$ 的一维边界面描出一条曲线。这条曲线完全位于边界上，因此不构成内部几何中的 Fisher–Rao测地线。该示例仅用于直观展示受固定秩所诱导的低维面约束的运动。

7.4 满秩状态之间的内部测地线

设 $\lambda^{(0)}$， $\lambda^{(1)} \in \mathcal{S}_{>0}$ 为两个严格为正的谱状态。连接它们的 Fisher–Rao测地线由命题4.4明确给出。

该演示强调，内部测地线对所有 $t \in [0, 1]$ 都保持全支撑，因此表示谱权重的连续重新分配，而不发生秩变化。这里并未声称此类测地线对应于算子的物理或算法形变；它们仅作为状态空间中的几何路径展示。

7.5 对齐复合下的重新加权

考虑一个算子 A，其谱状态为 $\lambda(A) \in \mathcal{S}_{>0}$；另有一个对齐算子 B，其奇异值为 $\{\beta_i\}_{i=1}^N$，且均严格为正。在对齐复合模型下，所得谱状态为

$$\lambda_i(BA) = \frac{\beta_i^2 \, \lambda_i(A)}{\sum_j \beta_j^2 \, \lambda_j(A)}.$$

此例展示了复合如何对谱坐标进行平滑的非线性重新加权，随后再进行重新归一化。当 β_i 不全相等时，所得路径在 $\mathcal{S}_{>0}$ 中通常不是测地线，并且相对于 Fisher–Rao 度量会扭曲距离。此例仅用于直观展示：在特定的理想化对齐假设下，复合可能如何使谱状态在单纯形内移动。

7.6 秩亏阶段引起的边界吸引

设 B 是一个秩为 $r < N$的算子，并设 A 是任意满足 $BA \neq 0$的算子。如第 6 节所示，谱状态 $\lambda(BA)$ 位于 $\mathcal{S}$ 的一个面上，其余维数至少为 $N - r$。

本演示展示了秩约简的几何效应，即将其投影到单纯形的边界上。这里并未对这一效应的可逆性、典型性或物理解释作出任何断言；它仅作为秩约束所产生的示意性结果加以展示。

7.7 演示总结

上述示例旨在为本文提出的抽象构造提供几何直觉。它们展示了简单的算子族如何在谱单纯形中呈现为点、曲线和边界极限，以及在严格限制的假设下，复合如何在该空间内发挥传输作用。对于这些演示，不应据此推断任何一般行为、性能主张或经验验证。

8 几何所述及未述

本节明确界定本文所引入的信息几何的确切范围。其目的是避免对形式化结果作过度解读，并阐明：在该构造中哪些量具有意义，哪些性质具有不变性，以及哪些问题被明确排除。本节不引入新的数学内容。

8.1 几何所述

定义在谱单纯形 $\mathcal{S}$ 上的几何使以下陈述得以精确表述：

不变量。 该构造给出了成像算子在酉前后复合和全局缩放下的不变量。具体而言：

- 谱状态 $\lambda(O)$,
- 谱状态之间的 Fisher–Rao距离,
- $\mathcal{S}_{>0}$内部的测地线结构,
- 内部几何的曲率性质,

仅取决于算子的归一化奇异谱。因此，这些量刻画了在谱能量分布层面信息上不可区分的算子等价类。

有意义的比较。 费希尔–拉奥几何中的距离量化了相对谱分配的差异，并且不受基选择和整体缩放的影响。

秩结构与边界。 该几何在满秩算子和秩亏算子之间作了鲜明区分。满秩算子对应于 $\mathcal{S}$ 的内部点，并允许存在光滑测地线连接。秩亏算子位于边界面上，而这些边界面在度量上是奇异的。这一区分是几何本身固有的，不依赖于重建、离散化细化或算法选择。

复合的影响。 对于在固定离散化中表示的线性阶段，本文讨论了复合的两种不同后果。第一，秩单调性和边界吸引（命题 6.1–6.2）适用于任意线性映射。第二，在明确说明的 SVD 对齐传输模型（定义 6.3 和命题 6.4）下，复合会在 $\mathcal{S}_{>0}$ 上诱导非线性重新加权；当且仅当复合阶段谱均匀时，这种重新加权才是等距变换（命题 6.5）。对于一般的非对齐复合，本文不声称存在规范传输映射、压缩或曲率演化。

8.2 几何学并未说明什么

T该构造有意排除了一些可能被误以为包含在内的问题 d.

不涉及优化原理。 这种几何不定义最优算子、最优处理流程，也不规定偏好的演化方向。测地线描述的是所选度量下的最短路径，而非实际发生或理想的变换。本文并未声称成像系统会沿测地线演化，或应当按照这一原则进行设计。

不涉及性能或质量指标。 谱单纯形中的距离并不衡量图像质量、重建保真度或任务性能。在这种几何中，邻近程度反映的是谱分布的相似性，而非一个算子优于另一个算子。

没有随机解释。 尽管 Fisher–Rao 度量源于统计几何，但当前构造并不对噪声、不确定性或关于数据的概率分布进行建模。与随机映射相关的任何压缩性或单调性，都不对一般的算子复合作出断言。

不涉及奇异向量。 该几何有意忽略奇异向量结构。它不编码空间局域化、模态对齐、可交换性或方向信息。在归一化奇异谱一致的情况下，即使算子在对象空间上的作用存在显著差异，它们也可能在 S 中对应为同一点。

没有物理成像模态或测量机制。 该几何结构独立于成像模态、物理相互作用和测量机制。它完全源自通过奇异谱对算子进行的抽象表征，不应被解读为物理空间、传播或动力学的模型。

8.3 防止过度解读

本文构建的几何结构是一种结构约束，而不是对物理过程或算法的描述性模型。它的作用是明确算子在谱层面具有信息相似性、可变形性或奇异性的含义。任何试图直接根据这一几何结构推断优化策略、物理动力学或算法保证的做法，都超出了本文当前的论断范围。有关噪声模型、重建算法、物理设计、时空动力学或涌现行为的问题，需要额外的结构，留待后续研究讨论。因此，本文结果应被理解为建立了一种参考几何，可据此构建这些扩展，而不应被视为已经回答了这些问题。

9 讨论

本文旨在识别并确立由成像算子在其归一化奇异谱视角下所诱导的最小几何结构。这里的讨论综合了这一构造所带来的影响，不再重述定义或技术结果，并阐明为何该框架刻意追求最小化至关重要。

将成像算子归约为其谱等价类后，信息几何便不可避免地随之产生。谱单纯形提供了自然的状态空间，而 Fisher–Rao 度量则为该空间上的距离、曲率和测地线结构提供了规范的定义。这种几何在酉变换和全局缩放下保持不变，因此只取决于算子如何将能量分布于其奇异模态之上。从这个意义上说，该几何捕捉了算子所有表示形式的共同属性；这些表示在谱层面上无法通过信息加以区分。

最小化并非局限，而是一项结构性要求。通过仅关注归一化奇异谱，这一构造避免了嵌入有关噪声模型、重建算法、物理模态或优化准则的假设。因此，该几何分离出成像算子中由线性测量本身必然带来的那些特性。任何更丰富的描述（纳入奇异向量、随机效应、非线性或特定任务目标）都必须建立在这一结构之上，而非对其加以修改。因此，该几何充当固定的背景，便于在其基础上有意义地引入和比较其他结构。

这一最小构造的一个关键结果，是它明确区分了内部行为与边界行为。满秩算子位于谱单纯形的内部，并具有平滑的几何关系；而秩亏算子则位于度量奇异的边界面上。这种边界结构是几何本身固有的，反映了固定离散化下秩的代数性丧失，对应于谱坐标趋于零。复合过程中出现的边界吸引并非建模选择造成的假象，而是秩约简和模态消除在几何上的体现。此处“不可逆”一词仅用于表示这种代数意义：本文并未对数值有效秩、抗噪性、正则化，或应用成像系统中的实际可重建性作出任何论断。

对复合的分析进一步阐明了纯粹的谱几何能够以及不能够揭示什么。复合通常会引起度量畸变和曲率效应，只有在谱均匀情形下，它才构成等距变换。若无额外假设，一般而言，压缩、单调性或测地流性质均不成立。这种缺乏全局简化的现象本身就是一项结构性结果：它表明，在谱层面上，复合过程中的信息损失与重新分配通常无法用单一标量或单调量来概括。

通过明确界定谱状态之间距离和曲率的概念，本研究为抽象比较成像算子建立了共同的参照框架。重要的是，这种比较既不基于任务，也不基于性能。谱几何中的接近并不意味着重建质量或物理行为相似；它意味着信息在各模态间的分配方式相似。这一区分可避免过度解读，并确保几何被用作结构约束，而非优化或评估的替代指标。

总之，本文并未提出设计成像系统或分析数据的新方法。它确定了一种几何结构：一旦在奇异谱层面对算子进行比较，任何此类分析都必须遵循这一结构。该结构是最小的、不变的，并且在数学上是刚性的。其价值在于为算子比较提供一种共同的参考几何：通过排除偶然的建模选择，它明确指出了信息分配中哪些方面仅由算子结构决定。

10 结论

本文确立了一种由成像算子诱导的最小信息几何结构，该结构通过算子的归一化奇异谱来表示。我们将算子的谱等价类识别为概率单纯形上的点，并在该空间上赋予 Fisher–Rao 度量，从而确定了一种在酉变换和全局缩放下保持不变的规范几何结构。在这一框架下，距离、测地连接、曲率和边界行为等概念均有明确定义，且无需额外的建模假设即可得到。

通过固定这一几何背景，本文消除了在有关成像算子和信息流的讨论中常常被隐含保留的一种自由度。从此以后，对算子进行的任何比较、形变或谱层面分析，都必然参照同一底层几何结构。本研究计划的后续论文将在这一固定结构的基础上酌情引入额外的描述层次，但本文确立的几何基础将保持不变。

因此，本研究的贡献是奠基性的，而非扩展性的：它界定了一个精确且不变的情境，在其中可以比较并约束算子层面的信息，同时有意避免提出超出该情境范围的主张。

致谢无。

资助情况
本研究未获得专项经费资助 .

作者贡献
作者构思了本研究，建立了理论框架，设计并开展了分析，并撰写了手稿。

数据可用性
本理论研究未创建或分析任何新数据。

补充数据
未提供补充材料。

参考文献
[1] Amari S i 和 Nagaoka H 2000 信息几何方法 (数学专著译丛 第 191 卷)（普罗维登斯，罗得岛州：美国数学会）ISBN 9780821805302

[2] ShannonCE 1948 贝尔系统技术期刊 **27**379–423

[3] Cover T M and Thomas J A 2006 信息论基础 第2版（纽约：Wiley）ISBN 9780471241959