# 脉冲神经元模型的分岔分析框架

Zhiwei Li、Shi-Li Zhang、Chenyu Wen

摘要—神经形态计算以人工脉冲神经元为核心，旨在实现高能效的事件驱动信息处理。人工神经元器件与电路具有多种工作模式，并会产生依赖区域的非线性动力学行为，而传递函数、傅里叶/拉普拉斯变换、波特图等线性系统的系统分析方法无法对其进行描述。因此，需要新的工具来评估神经元的非线性行为，并指导人工神经元实现的设计与优化。本文基于非线性动力系统理论，提出了一种通用的分岔分析框架。选取互补金属氧化物半导体轴突–丘脑神经元、忆阻器神经元和FitzHugh–Nagumo生物神经元模型进行演示。我们评估了霍普夫分岔条件，以定义系统参数空间中的静息与放电区域，并预测起始附近放电率。随后，将结果与数值模拟进行比较。该框架统一了对各种神经元模型和物理实现的分析。它为神经形态计算系统中的人工神经元提供了实用的设计与优化指南，包括使神经元放电/静息的参数组合，以及控制相应放电特性的参数组合，例如放电率和振幅。

索引词— 神经元动力学、Hopf分岔、动力系统、放电行为、相图

## I. 引言

人工智能（AI）目前主要以软件形式运行于冯·诺依曼架构的计算机上。在这类计算机中，存储器与处理单元在物理上彼此分离，导致数据传输需要付出高昂的电功率和时间成本 [1], [2], [3]。当前 AI 与人脑之间的计算效率差距十分显著：超级计算机要实现与大脑相当的浮点运算吞吐量，需要消耗 20 MW 的电功率，比人脑高出 6 个数量级 [4], [5]。这一差距促使神经形态计算应运而生，其目标是通过用类神经元处理单元网络取代时钟控制的算术流水线，缩小这一差距

本研究部分由乌普萨拉大学的学院经费资助。（通讯作者：Chenyu Wen）。Zhiwei Li 任职于瑞典乌普萨拉 SE-751 21 乌普萨拉大学电气工程系固态电子学部。Shi-Li Zhang 曾任职于瑞典乌普萨拉 SE-751 21 乌普萨拉大学电气工程系固态电子学部。Chenyu Wen 任职于瑞典乌普萨拉 SE-751 21 乌普萨拉大学电气工程系固态电子学部（电子邮箱：chenyu.wen@angstrom.uu.se）。本文一幅或多幅图的彩色版本可在线查阅：http://ieeexplore.ieee.org

处理单元和分布式存储器 [6], [7], [8], [9]。

神经形态计算的一个定义性特征是，信息编码在电脉冲序列（即脉冲序列）中，而不是通过连续的电压/电流水平[10], [11]进行编码。在此类系统中，尖峰的时序和频率承载信息，将数字事件发生的特征与模拟脉冲间隔相结合，并支持存内计算和事件驱动操作 [12]。这些特性有望显著提升能效和可扩展性。在硬件层面，实现具有良好可控动力学的大规模脉冲神经元网络，是实现神经形态计算上述优势的关键；而这又要求在电路与器件层级对人工神经元进行复杂的设计与优化[13]。

在此背景下，神经形态硬件旨在在器件和电路约束下，实现频率、振幅和能量均可控的类神经元尖峰放电 [14], [15],[16], [17], [18]。一般而言，神经元网络由神经元和突触这两种基本构件组成，采用 CMOS 电路实现，并且越来越多地采用各种新兴器件，例如存储器件或忆阻器 [9], [19], [20], [21], [22]。在神经元层面，电路设计人员必须在兼顾器件非理想性和制造变异的同时，设计尖峰起始、尖峰波形和放电动力学[23]。要系统地实现这些目标，需要能够将实现方案与动态行为联系起来的分析工具，而不是依赖临时的参数扫描和专家经验。

关于神经元模型，早期研究主要聚焦于紧凑的现象学抽象（例如积分发放模型、FitzHugh–Nagumo 模型（FHN）和 Morris–Lecar 模型）以及模拟超大规模集成电路（VLSI）实现。这些研究证明了其可行性，但对工程目标 [24], [25] 的指导有限。随着神经形态器件的兴起，电路—器件协同设计已成为主导范式：非线性、增益和时间常数分布在放大器、电容器、晶体管和存储器件中 [26]。传统的小信号电路分析技术（例如傅里叶变换、拉普拉斯变换、波特图、根轨迹等）本质上仅适用于线性系统。非线性电路必须通过局部线性模型进行近似。因此，极限环的生成与终止等全局行为，以及对噪声和器件特性变化的鲁棒性，都无法直接描述。这一局限促使研究者转而采用动力系统工具，以半定量的拓扑方式处理非线性系统。神经元是振荡器

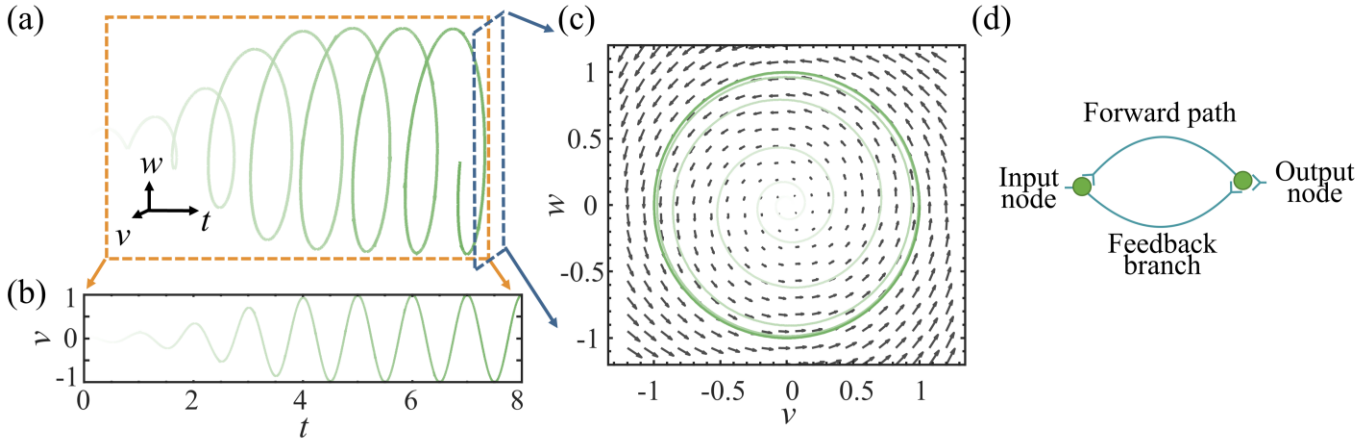


图1. 放电神经元的动力系统视角。(a) 三维状态—时间视图，展示轨迹随时间的演化。(b) 代表性状态变量 $v$ 在时域中的演化。(c) 相图描绘了不含显式时间的状态空间投影。(d) 脉冲神经元的系统框图。

其状态（静息态或放电）由系统的不动点以及控制方程的分岔决定。

如图 1 所示，简单的放电神经元可建模为一个二维（2D）系统，其状态（$v, w$）可表示为状态平面上的点。图 1(a) 展示了状态随时间 $t$ 演化的示例，图 1(b) 则展示了变量$v(t)$在时域中的脉冲序列。从另一个角度看，系统的状态演化可投影为状态空间中的轨迹，称为相图，如图 1(c) 所示。状态空间中的向量场表示状态在相应点随时间变化的方向和趋势，即状态的“速度”。这种从时域波形转向状态空间轨迹的视角转换，构成了动力系统方法的基础：从系统的常微分方程（ODEs）出发，通过相图、零流线和分岔结构分析状态演化，以确定不动点及其稳定性、放电域和轨迹。大量研究已采用这一方法分析神经元动力学，以及不同人工神经元的脉冲特性对模型参数的依赖性 [27], [28],[29], [30]。然而，迄今得出的结论仍局限于具体个例，因为相关分析通常针对单个模型或实现开展。此外，这些分析通常通过数值求解神经元模型来进行。尽管数值解能够捕捉神经元的关键动力学特征，却掩盖了神经元模型/电路非线性结构的整体面貌。神经元电路中的非线性通常主要源于放大器饱和、晶体管工作模式转换以及忆阻器状态迁移。大多数现有动力学分析并未明确讨论器件/系统在状态空间中的相关工作区域转换，因此掩盖了振荡在这些转换边界附近产生或消失的机制 [31], [32], [33]。此外，不同平台上的模型参数很少进行归一化或基准化，这阻碍了比较不同神经元模型之间的差异，也使设计见解难以迁移 [34]。总的来说，这些局限妨碍了对器件与电路参数选择和优化的系统探索，阻碍了对脉冲特性的系统调节，并使可迁移的硬件设计更加复杂 [35], [36], [37], [38]。

本文基于动力系统分析，构建了一种通用的神经元行为分析框架，直接应对上述局限。从方法上说，该框架基于动力系统理论，包括Hopf分岔；其构建不依赖任何特定的电路结构或人工神经元实现。我们首先介绍基于具有前向路径和反馈支路的共用二维系统的多种神经元实现。给定二维系统及器件相应的工作模式，该框架将（i）划分状态空间中的工作区域；（ii）严格在各工作区域内计算不动点及其稳定性；（iii）根据雅可比矩阵识别Hopf分岔起始点及起始附近放电率；同时（iv）将放电率与数值模拟结果进行比较。这一工作流程以系统级视角取代了当前缺乏结构的参数扫描分析，不受底层实现方式的限制，并直接关联器件和电路参数与神经元的动态行为。

该框架的一个核心目标，是以对硬件工程师有用的方式回答神经元设计中的问题。通过对电路/器件参数进行归一化，该方法揭示了状态空间中各工作区域内慢变和快变节点的动力学如何相互作用，并决定脉冲发放的出现及其稳健性。该方法还揭示了某些器件/组件（例如引入反馈电容、将延迟元件从前向路径移至反馈支路，或改变漏电导）如何改变、影响或重塑工作区域、尖峰起始、尖峰波形及其频率。

本文其余部分安排如下：第2节介绍分析流程、模型构建、归一化及分岔条件。第3节展示

该流程在三种代表性应用中的实例，分别是轴突丘神经元、忆阻器神经元和FHN模型。第4节总结本文，并探讨将该方法和流程扩展至其他应用的可能性。

## II. 方法

### 2.1 分岔分析流程

关于神经元的行为，如图 1(d) 示意所示，可将其建模为一个双节点系统，该系统接收刺激信号作为输入，并产生尖峰作为输出。输入通常为电流，它会为作为输入节点的“细胞膜”电容充电。该节点对输入进行时间积分，并通过电容上的电压体现出来，记为 $v$。当 $v$ 达到阈值时，神经元会从输出节点发出一个尖峰，其电势为 $w$。随后，反馈支路使电容器放电，并重置输入节点的状态，从而重新开始积分。这种积分发放行为可用关于 $v$ 和 $w$ 的常微分方程数学描述如下：

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= f(v,w,\theta)\\ \frac{dw}{dt} &= g(v,w,\theta)\end{aligned} \tag{1}$$

其中，$\theta$ 汇集了系统的可调参数（例如偏置电流、电导、电容、阈值等）。在各种可能的架构中，两个状态变量足以描述尖峰生成和恢复。此处，$v$ 在输入节点处充当类似细胞膜的变量，而输出节点的$w$ 则控制反馈。在硬件实现中，式 (1) 通常采用分段定义，因为放大器、晶体管和存储器件会在不同工作模式之间切换，而这些工作模式分别由不同的数学函数描述。

在（$v,w$）平面上，式（1）的 $v$ 和 $w$ 零流线定义如下，

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_v&: f(v,w,\theta) = 0\\ \mathcal{N}_w&: g(v,w,\theta) = 0\end{aligned} \tag{2}$$

在曲线$v$ 上，相对于时间瞬时静止，即在零流线上，$dy/dt$ 或$dw/dt$ 为零。它们的交点 $x^* = (v^*, w^*)$ 是两个导数均为零的不动点；相图则通过状态空间中的轨迹，显示系统状态如何从初始状态趋近不动点或远离不动点。

为刻画系统在固定点 $x^* = (v^*, w^*)$ 邻域内的行为，我们在 $x^*$ 附近对系统进行线性化。假设 $f$ 和 $g$ 光滑，且 $x^*$ 处雅可比矩阵的特征值实部均不为零，则线性化（Hartman–Grobman）定理 [39] 保证，在 $x^*$ 的某个邻域内，线性化系统与原系统在定性上等价。换言之，在不动点附近，原系统可以用线性化系统近似。在实践中，这意味着雅可比矩阵的特征值描述了轨迹如何在 $x^*$ 的有限邻域内趋近（稳定）或远离（不稳定）该不动点，以及轨迹是单调变化还是以振荡方式变化。轨迹的性质可以根据在 $x^*$ 处计算的雅可比矩阵推断，

$$J = \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w}\\ \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w}\end{bmatrix} \tag{3}$$

除了了解各个不动点的局部分类之外，还需要理解当 $\theta$ 中的参数变化时，系统行为在定性（拓扑）上如何改变。这类定性变化称为分岔：当参数变化改变不动点或周期轨道的数量或稳定性类型时，就会发生分岔。在此处研究的神经元模型中，主要关注的局部分岔是霍普夫分岔（也称为庞加莱–安德罗诺夫–霍普夫分岔） [40]。在霍普夫分岔点，雅可比矩阵的一对共轭复特征值穿过虚轴，不动点随之改变稳定性，并出现或消失一条称为极限环的周期轨迹。对于神经元，改变偏置电流、漏电导和反馈特性等系统参数可能引发霍普夫分岔，这表明系统在静息工作点与持续重复放电之间发生转变。

在发生 Hopf分岔的条件下（具体条件见第2.5节），可以推导出使神经元放电或处于静息态的参数组合。此外，还可以估算放电起始附近的放电频率。这些结果能够明确回答神经元设计与优化中的相关问题。例如，对于给定的电路拓扑，哪些参数组合只会产生静息态（即参数空间中的静息域 RD），哪些会诱发稳定的脉冲发放（即参数空间中的放电域 FD），以及起始附近的放电率如何随关键电路/器件参数变化。通过追踪 FD 如何随反馈电容的添加或负载电导的改变等因素而变化，可以从系统层面深入了解拓扑结构和参数如何塑造神经元行为。

### 2.2 神经元模型的常微分方程

这里以最常用的 CMOS 轴丘神经元[图 2(a)] 为例，演示上述框架中的分析过程。值得注意的是，也可以采用类似的流程分析其他神经元器件、电路或系统。在“结果与讨论”部分，将展示使用此方法对忆阻器神经元模型和生物神经元模型进行分析的结果。根据输入节点的基尔霍夫电流定律和反馈回路的基尔霍夫电压定律，可将二维模型写为：

$$(C_{\mathrm{mem}}+C_{\mathrm{f}})\frac{dv}{dt}=I_{\mathrm{in}}-g_{\mathrm{L}}v+\frac{C_f}{\tau_A}[w_\infty(v,\theta_A)-w]-I_{fb}(v,w,\theta_T) \quad (4)$$

$$\tau_{\mathrm{A}}\frac{dw}{dt}=w_\infty(v,\theta_{\mathrm{A}})-w$$

As previously defined, is the input current and is the membrane voltage. $I_{\mathrm{in}}$ $v$ 输出节点电压，$w$ 处的总电容为$C_{\mathrm{mem}}+C_{\mathrm{f}}$。$g_{\mathrm{L}}$ 为漏电导，定义为$g_{\mathrm{L}}=\frac{1}{R_{\mathrm{L}}}$；$I_{\mathrm{in}}$ 为施加电流驱动，$\tau_{\mathrm{A}}$ 为放大器的延迟时间，$\theta_{\mathrm{A}}$ 和$\theta_{\mathrm{T}}$ 分别为放大器和晶体管的参数集。值得注意的是，延迟部分也可以设置在反馈支路中，这与此处所示的放大器延迟配置等效，因此可以采用类似的方法进行分析。式（4）的推导详见补充信息（SI）中的注释1。

MOS场效应晶体管的输出特性由 [41], 描述

$$I_{\mathrm{fb}}(v,w,\theta_{\mathrm{M}})=\begin{cases}0, & w<V_{\mathrm{gth}}\\ \frac{k}{2}(w-V_{\mathrm{gth}})^2, & w>V_{\mathrm{gth}},v>w-V_{\mathrm{gth}}\\ k(w-V_{\mathrm{gth}})v-\frac{k}{2}v^2, & w>V_{\mathrm{gth}},v<w-V_{\mathrm{gth}}\end{cases} \quad (5a)$$

where and are effective transconductance parameter, $k$, $V_{\mathrm{gth}}$ 阈值电压，相应的特性如补充信息的图 S1 所示。

放大器的传输特性近似为

$$w_\infty(v,\theta_{\mathrm{A}})=\begin{cases}V_1, & v<V_{\mathrm{th1}}\\ \frac{v-V_{\mathrm{th1}}}{(V_{\mathrm{th2}}-V_{\mathrm{th1}})}V_{\mathrm{dd}}, & V_{\mathrm{th1}}<v<V_{\mathrm{th2}}\\ V_2, & v>V_{\mathrm{th2}}\end{cases} \quad (5b)$$

where, and are, respectively, the lower and upper $V_1$, $V_2$ 界输出电平。当 $v$ 小于 $V_{\mathrm{th1}}$ 时，输出为 $V_1$；而当 $v$ 大于 $V_{\mathrm{th2}}$时，输出为 $V_2$。在 $V_{\mathrm{th1}}$ 和 $V_{\mathrm{th2}}$之间，输出从 $V_1$ 线性增至 $V_2$。如补充信息的图 S2 所示，一种典型的取值为 $(V_1,V_2)=(0,V_{\mathrm{dd}})$。值得注意的是，为了获得不动点的闭式解析解，放大器特性采用线性分段函数，而非 S 形曲线（例如 Sigmoid函数）。这样，不动点便可明确表示为关于 $w$ 和 $v$ 的多项式方程组的解，且多项式阶数低于三阶。然而，这种近似可能会导致误差，因此多项式阶数不宜过低，后文将对此进行讨论。

直线 $v=V_{\mathrm{th1}}$、 $v=V_{\mathrm{th2}}$、 $w=V_{\mathrm{gth}}$ 和 $v=w-V_{\mathrm{gth}}$ 定义了（$v,w$）平面上的边界。它们将状态空间划分为 9 个不同区域，这些区域由放大器的三种工作模式 $w\in(-\infty,V_1]$、$(V_1,V_2)$、$[V_2,\infty)$ 与晶体管的三种工作状态——关断、饱和和线性——组合而成。每个区域均采用相应的 $w_\infty(v,\theta_{\mathrm{A}})$ 和 $I_{\mathrm{fb}}(v,w,\theta_{\mathrm{M}})$ 表达式。

放大器由（4）的第二个公式建模为一阶延迟，它使其驱动 趋向平衡值 。就-

$w$ $w$ $w_\infty-v$ $\frac{1}{\tau}$

节点而言，其贡献为$c_{\mathrm{fA}}()$，由反馈电容$C_{\mathrm{f}}$产生。另一个反馈支路由共源极n型MOSFET实现，其电流由（5a）给出。

在这 9 个区域中的每一个区域内，向量场 $f(v,w,\theta)$ 和 $g(v,w,\theta)$ 均为光滑函数。在这些区域的边界处，向量场连续。因此，系统状态的轨迹整体上是光滑的。

## 2.3 归一化与无量纲化

为使参数无量纲化，各变量分别按电压 $V_{\mathrm{dd}}$、时间 $\tau_{\mathrm{A}}$ 和单位电荷 $q$ （$1.6\times10^{-19}$ C）进行归一化。因此，$\hat{v}=\frac{v}{V}$dd、$\widehat{w}=\frac{w}{V}$dd、$\hat{t}=\frac{t}{\tau}$A、$\widehat{C_f}=\frac{C_f}{\tau_A}$dd $q$、$\widehat{I_{\mathrm{in}}}=\frac{I_{\mathrm{in}}\tau_A}{q}$、$\widehat{g_{\mathrm{L}}}=g_{\mathrm{L}}\frac{\tau_A}{C_{\mathrm{mem}}}$dd $q$、$\widehat{V_{\mathrm{th1}}}=\frac{V_{\mathrm{th}}}{V}$dd、$\widehat{V_{\mathrm{th2}}}=\frac{V_{\mathrm{th}}}{V}$dd、$\widehat{V_{\mathrm{gth}}}=\frac{V_{\mathrm{gth}}}{V}$dd 和 $\hat{k}=\frac{k\tau_A}{q}V_{\mathrm{dd}}^2$。在该模型中，无量纲参数为 $\hat{\theta}=\{\widehat{I_{\mathrm{in}}},\widehat{g_{\mathrm{L}}},\hat{k},\hat{C}_{\mathrm{f}},\widehat{V_{\mathrm{th1}}},\widehat{V_{\mathrm{th2}}},\widehat{V_{\mathrm{gth}}}\}$。以下推导以放大器处于 $\widehat{V_{\mathrm{th1}}}<\hat{v}<\widehat{V_{\mathrm{th2}}}$、晶体管设为线性模式 $\hat{v}<\hat{w}-\widehat{V_{\mathrm{gth}}}$ 的工作区域为例。其他区域也可采用相同方法处理，详见补充信息中的注释1。根据式（4），该区域内归一化后的系统常微分方程为：

$$\frac{d\hat{v}}{d\hat{t}}=\frac{1}{2\hat{C}_f}\left[\widehat{I_{in}}-\widehat{g_L}\hat{v}-\left(\hat{k}(\hat{w}-\widehat{V_{gth}})\hat{v}-\frac{\hat{k}}{2}\hat{v}^2\right)+\hat{C}_f\left(\frac{\hat{v}-\widehat{V_{th1}}}{(\widehat{V_{th2}}-\widehat{V_{th1}})}-\hat{w}\right)\right] \quad (6a)$$

$$\frac{d\hat{w}}{d\hat{t}}=\frac{\hat{v}-\widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{(\widehat{V_{\mathrm{th2}}}-\widehat{V_{\mathrm{th1}}})}-\hat{w} \quad (6b)$$

这样，不同的参数选择、工作区域和物理实现便可通过一致的方式进行比较和解读。

## 2.4 不动点与线性化

Likewise, the nullclines of the system from (2) are,

$$\widehat{\mathcal{N}_v}:\widehat{I_{\mathrm{in}}}-\widehat{g_{\mathrm{L}}}\cdot\hat{v}+\hat{C}_{\mathrm{f}}\cdot(\widehat{w_{\mathrm{A}}}-\hat{w})-\widehat{I_{\mathrm{fb}}}(\hat{v},\hat{w},\widehat{\theta_{\mathrm{M}}})=0$$
$$\widehat{\mathcal{N}_{\mathrm{w}}}:\widehat{w_\infty}(\hat{v},\widehat{\theta_{\mathrm{A}}})-\hat{w}=0 \quad (7)$$

which give immediate geometric insights: increasing shifts $I_{\mathrm{in}}$ $\widehat{\mathcal{N}_v}$ 向上，而增大$\widehat{g_{\mathrm{L}}}$会使$\widehat{\mathcal{N}_v}$的负斜率变得更陡（参见图 2(b)）。

此处，不动点是由以下曲线 $\widehat{\mathcal{N}_v}$ 和$\widehat{\mathcal{N}_w}$ 给出的交点：

$$\widehat{I_{\mathrm{in}}}-\widehat{g_{\mathrm{L}}}\hat{v}^*-\left(\hat{k}(\hat{w}^*-\widehat{V_{\mathrm{gth}}})\hat{v}^*-\frac{\hat{k}}{2}\hat{v}^{*2}\right)=0$$
$$\frac{\hat{v}^*-\widehat{V_{th1}}}{(\widehat{V_{th2}}-\widehat{V_{th1}})}-\hat{w}^*=0 \quad (8)$$

Solving (8) yields

$$\hat{v}^* = \left\{ \hat{k}\left(\frac{\widehat{V_{th1}}}{\Delta\hat{V}} + \widehat{V_{gth}}\right) - \widehat{g_L} \pm \sqrt{\left[\widehat{g_L} - \hat{k}\left(\frac{\widehat{V_{th1}}}{\Delta\hat{V}} + \widehat{V_{gth}}\right)\right]^2 + 4\hat{k}\left(\frac{1}{\Delta\hat{V}} - \frac{1}{2}\right)\widehat{I_{in}}} \right\} / 2\left(\frac{\hat{k}}{\Delta\hat{V}} - \frac{\hat{k}}{2}\right)$$

$$\hat{w}^* = \frac{\hat{v}^* - \widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{\Delta\hat{V}}$$

where $\Delta\hat{V} = \widehat{V_{\mathrm{th2}}} - \widehat{V_{\mathrm{th1}}}$。根据这些计算得到的不动点的位置作出，这些点应位于相应的工作区域内。

Additional validation should be

在 $(\hat{v}^*, \hat{w}^*)$ 处计算式 (6) 的雅可比矩阵即可确定局部稳定性：

$$J(\hat{v}^*, \hat{w}^*) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\hat{C}_\mathrm{f}}\left(-\widehat{g_\mathrm{L}} + \frac{\hat{C}_\mathrm{f}}{\left(\widehat{V_{\mathrm{th2}}} - \widehat{V_{\mathrm{th1}}}\right)}\right) & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\left(\widehat{V_{\mathrm{th2}}} - \widehat{V_{\mathrm{th1}}}\right)} & -1 \end{bmatrix}_{(\hat{v}^*, \hat{w}^*)} \quad (9)$$

The fixed point is stable if $Re(\lambda_{1,2}) < 0$，即至少有一个特征值满足 $Re(\lambda_{1,2}) > 0$, and unstable 其中 $\lambda_{1,2}$ 是 $J(\hat{v}^*, \hat{w}^*)$ 的特征值。

## 2.5 局部分岔及判据

雅可比矩阵的迹和行列式分别为

$$Tr = \frac{1}{2\hat{C}_\mathrm{f}}\left(-\widehat{g_\mathrm{L}} + \frac{\hat{C}_\mathrm{f}}{\left(\widehat{V_{\mathrm{th2}}} - \widehat{V_{\mathrm{th1}}}\right)}\right) - 1$$
$$\Delta = \frac{-1}{2\hat{C}_\mathrm{f}}\left(-\widehat{g_\mathrm{L}} + \frac{\hat{C}_\mathrm{f}}{\left(\widehat{V_{\mathrm{th2}}} - \widehat{V_{\mathrm{th1}}}\right)}\right) + \frac{1}{2\left(\widehat{V_{\mathrm{th2}}} - \widehat{V_{\mathrm{th1}}}\right)} \quad (10)$$

In 2D linearized systems, 固定点 [39] 的局部（全维）分岔。二维系统中的常见情形有：

- 鞍结分岔：$\Delta = 0$ 和 $Tr \neq 0$ （一般非退化条件）。
- Hopf分岔：$Tr = 0$ and $\Delta > 0$，其中 $dTr/d\theta_i \neq 0$ 对于某些参数 $\theta_i \in \{\widehat{I_{\mathrm{in}}}, \widehat{g_\mathrm{L}}, \hat{k}, \hat{C}_\mathrm{f}, \widehat{V_{\mathrm{th1}}}, \widehat{V_{\mathrm{th2}}}, \widehat{V_{\mathrm{gth}}}\}$。

对于表明振荡起始的超临界 Hopf 分岔 [39] ，还需要第一 Lyapunov 系数 [39]

$$Lv = \frac{1}{16}(f_{vvv} + f_{vww} + g_{vvv} + g_{www}) + \frac{1}{16\omega}(f_{vw}(f_{vv} + f_{ww}) - g_{vw}(g_{vv} + g_{ww}) - f_{vv}g_{vv} + f_{ww}g_{ww}),$$

为负，其中， $\omega = Im(\lambda_{1,2})$和 $f_{vw} = \frac{\partial\, f}{\partial v \partial w}$ （其他偏导数的定义类似）。由此会产生一个极限环，且起始附近的振荡周期满足，

$$T(\theta_0) \approx \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (11)$$

其中， $\pm i\omega 0$是在分岔点处式 (9) eigenvalues of中的$J(\hat{v}^*, \hat{w}^*)$, $\theta_\mathrm{i} = \theta_{\mathrm{i},0}$。

总之，神经元通过 Hopf分岔放电时，系统必须满足以下条件这些参数通常称为 Hopf 条件，即：

1. 计算系统在（$v, w$）平面各分段中的所有不动点。至少应存在一个不动点。

2. 计算这些不动点处的雅可比矩阵，且至少有一个不动点应具有一对共轭复特征值$a \pm i\omega$。然后，$Tr = 2a$ 和$\Delta = a^2 + \omega^2$。

3. 对于依赖于$a$ 的某个参数$\theta_\mathrm{i}$ ，改变该参数，使$a$ 改变符号，即由正变负或由负变正。求出使$a = 0$成立的临界值$\theta_\mathrm{i} = \theta_{\mathrm{i},0}$，即$Tr = 0$；这可能是Hopf分岔的一个临界点。

4. 计算 $\Delta$ 在 $\theta_\mathrm{i} = \theta_{\mathrm{i},0}$处，并确保其取正值。

5. 计算 $dTr/d\theta_\mathrm{i}$ 在 $\theta_\mathrm{i} = \theta_{\mathrm{i},0}$处，并确保其非零。

6. 计算 $Lv$ 在 $\theta_\mathrm{i} = \theta_{\mathrm{i},0}$处，并确保其取负值。

这些条件给出了使神经元放电的一组参数不等式（更多详情请参见补充信息中的注释2）。此外，参数空间中的每个工作区域都对应一种唯一的器件工作模式，并由一组不等式约束条件指定（详情请参见补充信息中的注释1）。参数空间中的分岔图进一步受各工作区域边界的限制。因此，系统参数空间中的总分岔图是各工作区域对应分岔图的并集。

## 2.6 周期轨道：仿真与验证

为验证理论预测，我们使用 MATLAB 对系统进行了数值模拟（仿真脚本见补充信息）。在仿真中，当连续两次返回之间的差异小于预设容差时，即状态失配的范数小于 $\varepsilon$ ，且返回时间的相对变化也小于 $\varepsilon$，便将轨迹判定为周期性。周期定义为两次连续截面穿越之间的时间差，即 $T$。因此，放电率为 $f = 1/T$。振幅为 $A = \max_{t\in[0,T]} \hat{v}(t) - \min_{t\in[0,T]} \hat{v}(t)$。

通过仿真验证了两点：1）随着相应参数变化，系统从静息态转变为放电态的过程是否与理论预测一致；2）在放电态下，放电率是否与理论预测一致。

# III. 结果与讨论

## 3.1 互补金属氧化物半导体轴突–丘脑神经元

将电路参数的典型值代入模型后，计算得到轴突丘神经元的零流线和不动点，如图 2(b) 所示。此处使用的参数典型值为： $C_\mathrm{f} = 1\ \mathrm{nF}$， $k = 1 \times 10^{-5}\ \mathrm{A/V^2}$， $V_{\mathrm{th1}} = 0.5\ \mathrm{V}$， $V_{\mathrm{th2}} = 1.0\ \mathrm{V}$， $V_{\mathrm{dd}} = 3.0\ \mathrm{V}$， $V_{\mathrm{gth}} = 1.5\ \mathrm{V}$， $g_\mathrm{L} = 1 \times 10^{-9}\ \mathrm{S}$， $T_\mathrm{A} = 0.4\ \mathrm{ms}$， $C_{\mathrm{mem}} = 1\ \mathrm{nF}$，以及 $I_{\mathrm{in}} = 5.15\ \mu\mathrm{A}$。放大器和晶体管的三种不同工作模式将

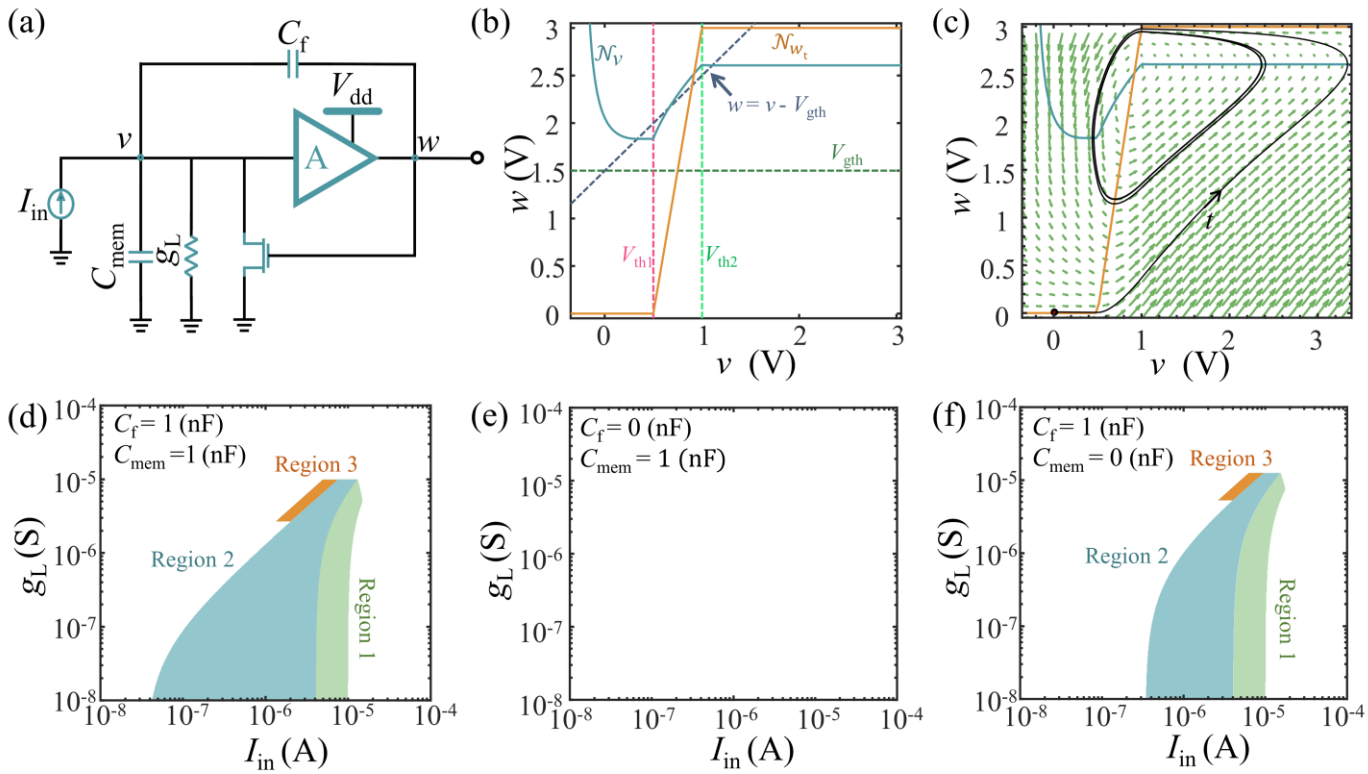


图 2. CMOS轴丘神经元的动态行为。(a) 使用CMOS器件实现的神经元电路示意图。(b)（$v, w$）状态平面中的$v$和$w$零流线（实线）以及工作区域边界（虚线）。(c) 从标记起点出发的相图轨迹；箭头表示向量场（向量场箭头），黑色曲线为轨迹。(d–f) 在不同$C_{\mathrm{mem}}$ 和$C_{\mathrm{f}}$取值下，（$I_{\mathrm{in}}, g_{\mathrm{L}}$）平面中的放电域。不同工作区域对应的放电域以不同颜色显示。各工作区域的条件见补充信息中的注释 S1。其余所有参数均与正文中使用的参数相同。

参数平面划分为 9 个不同的工作区域，其边界以图 2(b) 中的虚线表示。此外，可以计算$w$- 和 $v$- 零流线（图 2(b) 中的实线），两者的交点确定了一个位于 (0.92, 2.52) 的不动点。使用式 (9) 计算该点处的雅可比矩阵，可得矩阵的特征值为 2250.5 $\pm 8073i$。由于实部大于零，该不动点不稳定，表明系统可能发生振荡，即放电。以 (0.1, 0.1) 为初始点，由系统向量场所决定的系统演化轨迹显示出放电态，如图 2(c) 所示。

在电路设计和优化过程中，选择一组能使神经元按预期放电的参数至关重要。例如，对于给定的神经元电路，输入偏置$I_{\mathrm{in}}$ 和漏电导$g_{\mathrm{L}}$ 取何种组合才能支持放电，而不是使神经元处于静息态？按照分析框架，可以将$I_{\mathrm{in}}$ 和$g_{\mathrm{L}}$ 设为自由变量，同时固定其余参数。随后，霍普夫条件（见上文第2.5节）中的不等式组与工作区域边界共同确定参数空间（$I_{\mathrm{in}}, g_{\mathrm{L}}$）中的分岔图（FD），如图 2(d) 所示。分岔图中的所有$I_{\mathrm{in}}$ 和$g_{\mathrm{L}}$ 组合都能确保神经元放电。

此外，神经元设计中的一个重要问题是：反馈电容 $C_{\mathrm{f}}$ 对神经元放电是否必不可少？如果是，其电容值以及膜电容 $C_{\mathrm{mem}}$ 将如何影响分岔图。可以观察到，若移除反馈电容 $C_{\mathrm{f}} = 0$，研究范围内的参数组合均无法诱发神经元放电。在这种情况下，系统动力学处于静息态，轨迹收敛于一个内部不动点（见补充信息中的图 S3）。然而，若移除膜电容（$C_{\mathrm{mem}} = 0$），部分参数组合会出现脉冲发放，但参数空间中的分岔图范围会比保留膜电容时更小（参见图 2(e)）。

引入有限的$C_{\mathrm{f}}$ 可恢复双时间尺度结构：输入节点对输入信号进行积分。对于较小的$C_{\mathrm{mem}}$，该系统在（$I_{\mathrm{in}}, g_{\mathrm{L}}$）平面上存在一个狭窄的分岔图区域，在此区域内系统呈现稳定极限环（图 2(f)）。在该区域之外，动力学会回归不动点。随着$C_{\mathrm{mem}}$ 增大（例如增至 1 nF），分岔图区域会拓宽，并向较低的输入偏置移动（图 2(d)）。从动力学角度看，较大的电容器意味着更大的延迟时间常数，这会延长相图中与$v$相关的轨迹段，使膜电容能够以维持放电的方式充电和放电，从而在更宽的（$I_{\mathrm{in}}, g_{\mathrm{L}}$）范围内持续放电。图 2(e–f)以及补充信息中的图 S4 展示了改变（$C_{\mathrm{f}}, C_{\mathrm{mem}}$）时分岔图的这些变化。此外，还可以在其他参数平面上计算并呈现分岔图，例如（$k, V_{\mathrm{gth}}$）、（$I_{\mathrm{in}}, C_{\mathrm{f}}$）或（$C_{\mathrm{f}}, C_{\mathrm{mem}}$）；相关结果见补充信息中的图 S5 和 S6。

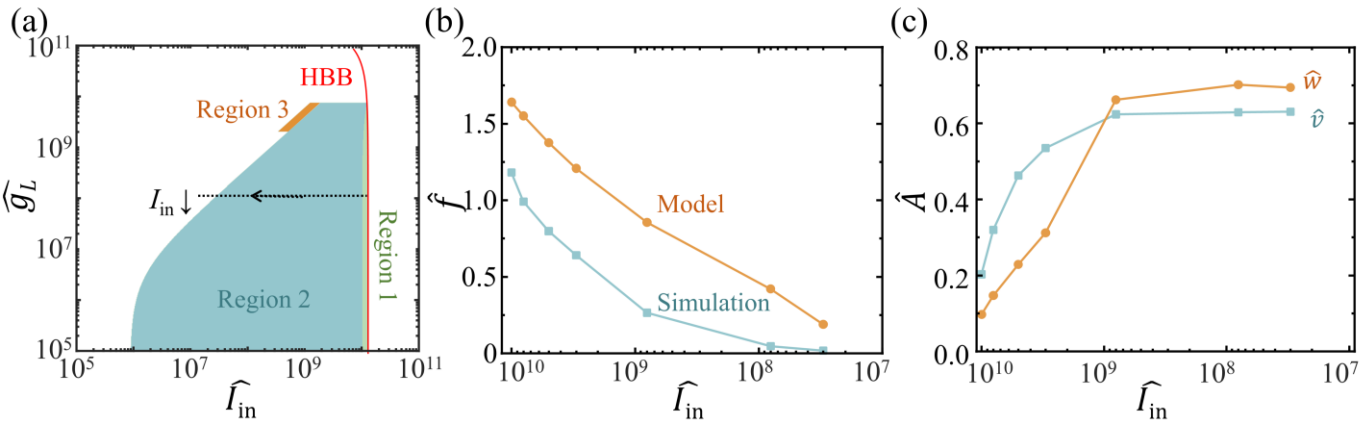


图 3. CMOS轴丘神经元的放电特性。(a) 虚线标示了用于评估$\widehat{I_{\rm in}}$对放电特性影响的所选参数：$\widehat{I_{\rm in}}$从 HBB 向内部递减，而$\widehat{g_{\rm L}}$保持不变（$\widehat{g_{\rm L}}=10^8$）。红色曲线标示 HBB。所有其他参数均与正文中使用的参数相同。(b) 模型和仿真所得的放电率沿$\widehat{I_{\rm in}}$的变化。(c) $\hat{v}$ 和$\hat{w}$ 的振幅沿$\widehat{I_{\rm in}}$的变化。

图 3 展示了分岔图中（$\widehat{I_{\rm in}},\widehat{g_{\rm L}}$）平面上选定点处的尖峰振幅$\hat{A}$ 和放电率$\hat{f}$ 随$\widehat{I_{\rm in}}$ 变化的情况。选取靠近由$\widehat{Tr}=0$定义的 Hopf分岔边界（HBB）的点作为关注点，如图 3(a) 所示。通过减小$\widehat{I_{\rm in}}$ 远离该边界，会使$\hat{A}$ 增大、放电率降低。轨迹会经过状态空间中向量场较弱的区域。因此，系统在慢恢复过程上耗时更长，波形也变得更不对称，表现为上升沿更陡、衰减更缓。由此，平均放电率降低。

图 3(b) 对比了数值模拟得到的放电率与理论模型预测的起始附近放电率。在 HBB 附近，两者吻合良好，证实局部线性化能够有效近似仿真系统，并捕捉起始时的放电率。随着$\widehat{I_{\rm in}}$ 递减，轨迹进入向量场较弱的区域，模拟得到的放电率比基于理论模型的线性化系统预测值上升得更快；该预测值为放电率提供了一个下界。

这种偏差本身能够反映非线性和边界对放电减慢的影响。最后，图 3(c) 展示了输入和输出节点的振幅 $\hat{v}$ 和 $\hat{w}$如何随 $\widehat{I_{\rm in}}$ 减小而变化。接近 HBB 时，归一化电压 $\hat{v}$ 和 $\hat{w}$ 几乎成正比变化，这反映出动力学受不动点处的局部线性化控制。进一步减小 $\widehat{I_{\rm in}}$ 时，$\hat{w}$ 的增长速度快于 $\hat{v}$，因为输入节点 v 在放电周期中更早达到饱和，从而使尖峰的上升沿变陡并增大尖峰振幅。

### 3.2 忆阻器神经元

为展示该框架的通用性，我们将其应用于一种忆阻器神经元，其中延迟反馈由易失性扩散型忆阻器实现，如图 4(a) 所示。在这一实现中，输出节点的电压仍是系统变量 $w$，而忆阻器的电导由忆阻器的内部状态 $x\in[0,1]$ 表示，该状态充当慢变变量。系统的常微分方程为：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-u(x)-qw\\ \tau\frac{dw}{dt}&=V_{ext}-\left[1+\frac{R_{\rm ext}}{R(x)}\right]w\end{aligned}\tag{13}$$

其中，$q>0$ 表示由电压引起的电导变化，$\tau=R(x)C_{\rm f}$ 定义的前向路径的特征时间尺度，而 $V_{\rm ext}$ 和 $R_{\rm ext}$ 分别表示输入电压和负载电阻。忆阻器的泄漏由 $u(x)$ 表示，可用阈值为 $x_{\rm th1}$ 和 $x_{\rm th2}$的分段函数描述，

$$u(x)=\begin{cases}xk_1+x_{\rm u0}\,,x<x_{\rm th1}\\(x-x_{\rm th1})k_2+x_{\rm th1}k_1+x_{\rm u0},x_{\rm th1}<x<x_{\rm th2}\\(x-x_{\rm th2})k_3+(x_{\rm th2}-x_{\rm th1})k_2+x_{\rm th1}k_1+x_{\rm u0},x_{\rm th2}<x\end{cases}\tag{14}$$

The resistance of the memristor, $R(x)$, is defined as a $x$具有阈值 $x_{\rm rth1}$ 和 $x_{\rm rth2}$的分段函数，

$$R(x)=\begin{cases}xk_{\rm r1}+1,x<x_{\rm th1}\\(x-x_{\rm rth1})k_{\rm r2}+x_{\rm rth1}k_{\rm r1}+1,x_{\rm th1}<x<x_{\rm th2}\\(x-x_{\rm rth2})k_{\rm r3}+(x_{\rm rth2}-x_{\rm rth1})k_{\rm r2}+x_{\rm rth1}k_{\rm r1}+x_{\rm u0}\\\quad,x_{th2}<x\end{cases}\tag{15}$$

The plots of ( ) and ( ) can be found in Fig. S2 of th $x$ e补充信息。(器件模式{ , , } in Fig. S2) 的边界在系统的状态空间中定义了 5 个不同的工作区域（详情见补充信息的注释 3）。该模型总共包含 15 个参数，$\theta=\{x_{\rm th1},x_{\rm th2},$ $x_{\rm u0}$ $q$ $\tau$ $x_{\rm rth1}$ $x_{\rm rth2}$ $,k_1,k_2,k_3,,,$ $V_{\rm ext},R_{\rm ext},,,k_{\rm r1},k_{\rm r2},k_{\rm r3}\}$。除非另有说明，忆阻器神经元模型采用以下基准参数，$x_{\rm th1}=0\,1$ $x_{\rm th2}=0\,95$ $x_{\rm u0}=$。 $,.,$ s , $-8$ $^{-1}$ $k_1=80$ $^{-1}$ $k_2=-0\,2353$ $^{-1}$ $k_3=200$ $^{-1}$ s , . s , s , $q=$。V s , $1\,265$ $^{-1}$ $^{-1}$ $\tau=30$ $V_{\rm ext}=0\,5$ $R_{\rm ext}=600\,\Omega$ s, . V, , $x_{\rm rth1}=$。 $,.$ k , , $0\,5$ $x_{\rm rth2}=0\,8$ , $_{\rm r1}=62\,\Omega$ $k_{\rm r2}=1200\,\Omega$ $k_{\rm r3}=$ 以及 8440 Ω。在每个工作区域内，向量场连续，跨越边界的转换保持

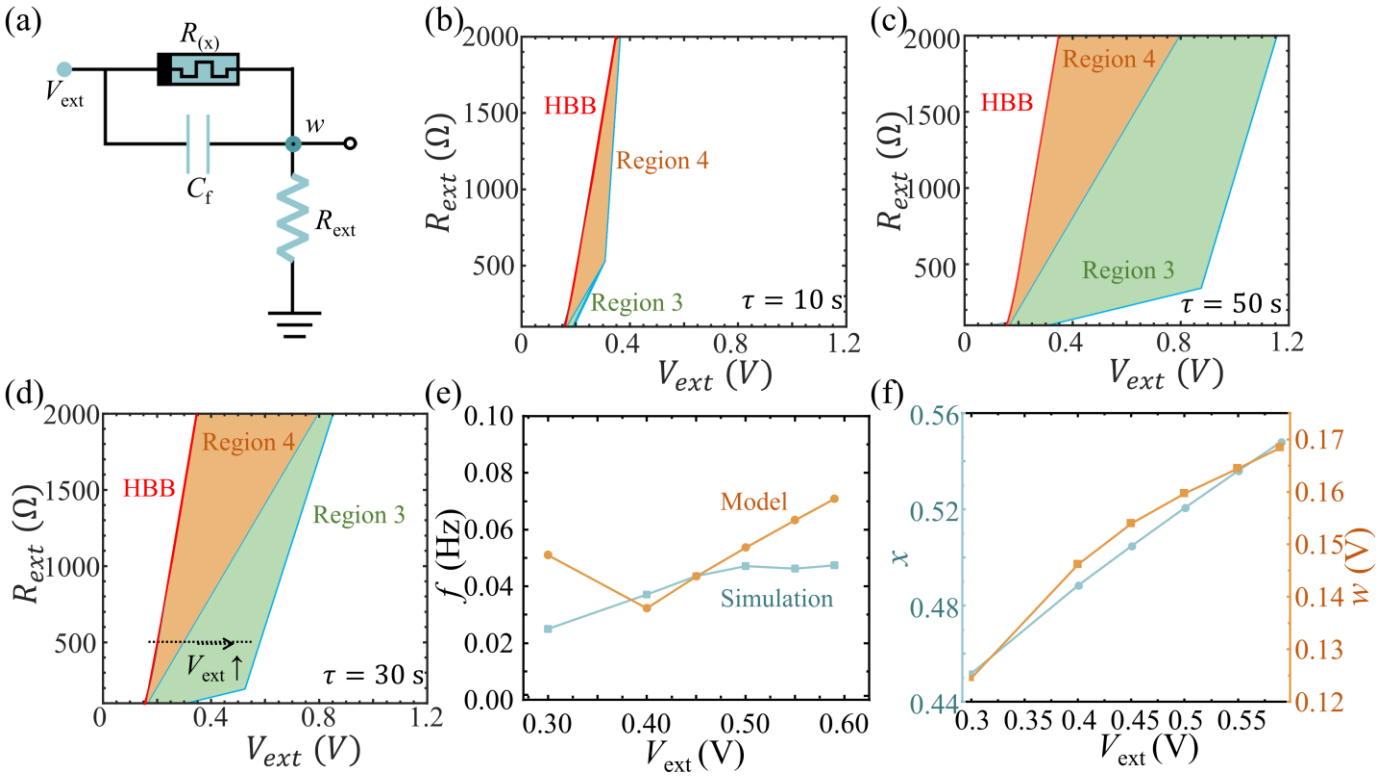


图 4. 忆阻器神经元的动态行为。（a）由引入忆阻器实现的神经元电路示意图。（b–d）在 $(V_{ext}, R_{ext})$ 平面中，分别对应 $\tau = 10$ s （b）、$\tau = 50$ s （c）和 $\tau = 30$ s （d）的放电域。所有其他参数均与正文中使用的参数相同。不同工作区域的放电域以不同颜色表示。各工作区域的条件见补充信息中的注 S3。红线表示 HBB，蓝线表示由工作区域定义的边界。（d）中的虚线表示用于评估 $V_{ext}$ 对放电特性影响的所选参数，其中 $V_{ext}$ 从 HBB 向内部增加，同时 $R_{ext}$ 保持不变（$R_{ext} = 500\ \Omega$）。（e）模型和仿真中沿 $V_{ext}$ 的放电率变化。（f）$x$ 和 $w$ 的振幅沿 $V_{ext}$ 的变化。

轨迹连续性与平滑性。对于忆阻器神经元电路，

一个重要的设计问题是，器件特性（例如忆阻器的易失速度）如何体现为 $\tau$，并影响参数空间（$V_{ext}, R_{ext}$）中的分岔图。按照所建立的分析框架，$\tau$ 被设定为 10 s、30 s 和 50 s 三个值，同时保持其他所有参数不变，以便计算（$V_{ext}, R_{ext}$）平面上的分岔图。分岔图结果如图 4(b)-(d) 所示。图 4(b)-(d) 中以红线标示了由 HBB 确定的一条分岔图边界。其余边界由相应的器件模式定义，并以蓝线标示。随着 $\tau$ 增大，可以清楚地看到分岔图在所研究范围内扩展。其他参数组合对应的参数平面上的分岔图见补充信息的图 S8。

在 $\tau = 10$ s 时（图 4(b)），忆阻器状态迅速弛豫。因此，状态变量 $x$ 无法以忆阻器模式 $R(x)$，沿最陡斜率（$x_{th1} < x < x_{th2}$）变化。于是，放电被限制在 HBB 附近狭窄的 $V_{ext}$ 范围内。如果 $\tau$ 较小，状态轨迹会趋近于 $w = V_{ext}$、$x = 0$ 或 $x = 1$，神经元便无法继续放电。

将 $\tau$ 增加到 50 s（图 4(c)）会减慢忆阻器的松弛过程，从而使轨迹能够在 $x$ 较大值的范围内停留更长时间。忆阻器得以充分松弛。因此，（$V_{ext}$，$R_{ext}$）中的相应分岔图覆盖了更广泛的驱动条件范围。自然地，随着 $\tau$ 增加，放电率会降低（见补充信息中的图 S9）。

在 $\tau = 30$ s 时，研究了尖峰特性对 $V_{ext}$ 的依赖关系。正如模型所预测的那样，从 HBB 向分岔图内部移动时，随着 $V_{ext}$ 减小，放电率也随之降低，如图 4(e) 中的蓝色点线所示。同一图中还以橙色点线给出了仿真结果，以供比较。在 HBB 附近，仿真得到的放电率与模型结果吻合良好，证实了在不动点附近对模型进行线性化能够捕捉放电率。然而，远离 HBB 时，仿真得到的放电率增长速度快于模型预测。轨迹在相图中向量场较弱、运动较慢的区域停留更久，因此会趋近系统允许状态的边界。随着状态远离相应的不动点，线性化系统的行为逐渐偏离原系统。因此，随着 $V_{ext}$ 减小，轨迹会越来越远离不动点，从而导致更大的偏差。

图 4(f) 展示了状态 $x$ 和输出电压 $w$ 随变化的 $V_{ext}$ 所对应的尖峰幅度。靠近 HBB 时，在不动点处的局部线性化系统控制下，随着 $V_{ext}$ 增加，这两个振幅近乎成比例地变化。当 $V_{ext}$ 进一步减小时，电压摆幅的增长速度略快于状态摆幅

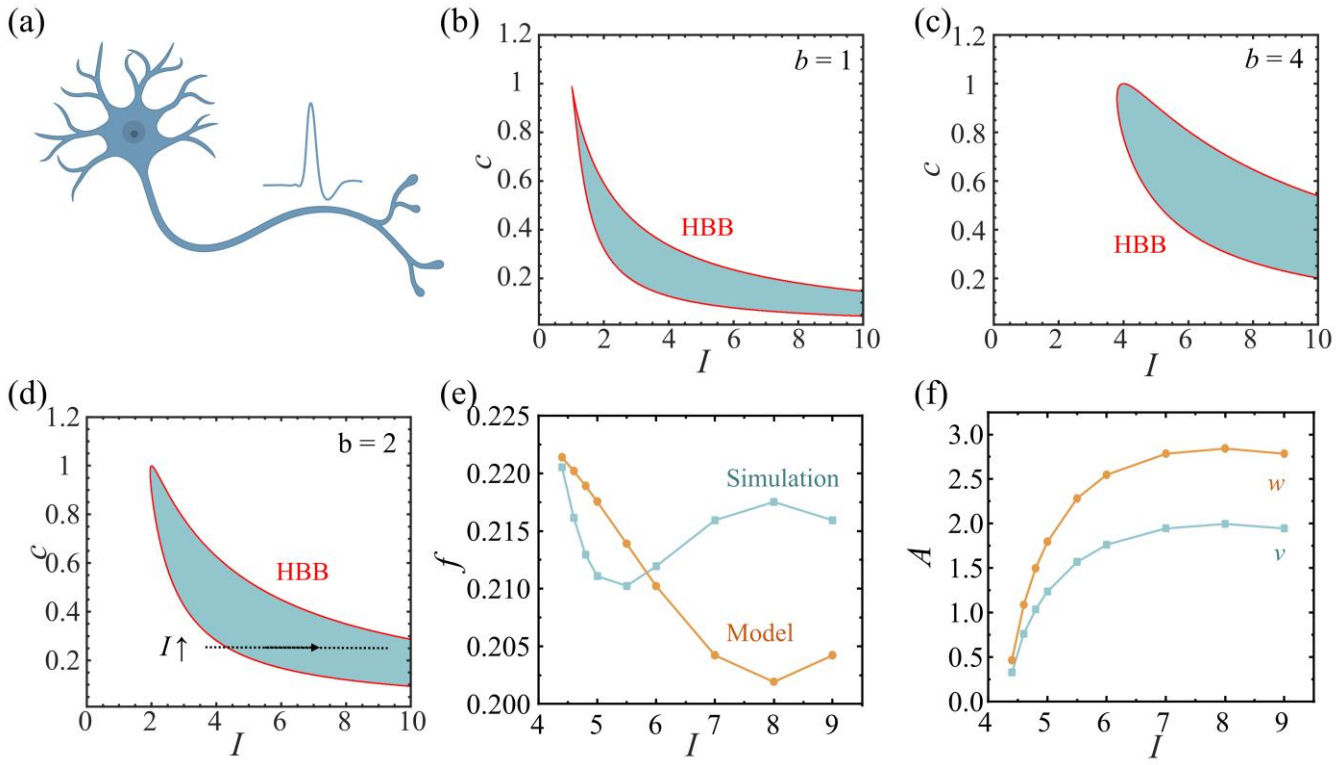


图5. 生物神经元FHN模型的动态行为。(a) 放电生物神经元示意图。(b–d) 在$(I, c)$平面上的放电域，分别对应$b = 1$、$b = 4$和$b = 2$。其余参数均与正文中使用的参数相同。红色曲线标示HBB。(d)中的虚线标示所选参数，用于评估I对放电特性的影响：I从HBB向内部增大，同时保持$c$ 不变（$c = 0.25$）。(e) 模型和仿真所得放电率随I的变化。(f) $v$ 和$w$ 的振幅随I的变化。

，因为负载 $R_{\text{ext}}$ 通过状态依赖电阻 $R(x)$放大了 $w$ 对 $x$ 的敏感性。特别是，一旦 $x$ 穿过大斜率区段（即 $x_{\text{th1}} < x < x_{\text{th2}}$），有效增益 $|dw/dx|$ 就会增加，从而导致 $w$相对较大幅度的增加。

### 3.3 生物神经元

下面采用无量纲FHN模型应用相同的分析框架，

$$\frac{dv}{dt} = v(a - v)(v - 1) - w + I$$
$$\frac{dw}{dt} = bv - cw \qquad (16)$$

其中，$v$ 表示生物neurons. Here, is the membrane potential，$w$ 表示恢复变量，代表钠钾通道活动；$I$ 表示驱动电流；$a$、$b$和$c$分别表示偏移量、恢复增益和时间尺度比。FHN模型涉及的参数总计为$\theta = \{a, b, c, I\}$（更多详情见补充信息注释4）。

在参数空间中，如图 5(b)-(d) 所示，通过改变 $I$ 和 $c$ 并保持其余参数不变，可以确定 $(I, c)$ 平面上的分岔图（FD）。由于系统不包含不同工作模式的组成部分，因此只有一个工作区域。因此，参数空间中的分岔图完全由 Hopf 分岔条件决定，其边界也就只有 HBB，在图 5(b)-(d) 中以红色标出。参数空间中分岔图的下边界定义为不动点失去稳定性的条件，而上边界则定义为不动点再次变得稳定的条件。

随着 b 增大，分岔图在 $(I, c)$ 平面上向较大的 $I$ 移动，见图 5(b)-(d) 中的连续变化。这种移动是由于增大 $b$ 使 $w$-零流线发生倾斜，导致放电起始所需的 I 升高（另见补充信息中的图 S10）。尖峰产生后，更强的反馈会使膜电位更快地恢复到初始状态的水平，这可能是这种移动所反映的现象。

为评估放电率和尖峰波形对 I 的依赖性，在沿穿过 HBB 的直线上改变 $I$ 时，保持 $a = 2$、$b = 2$ 和 $c = 0.25$ 不变。随着 I 增大，放电率降低，因为轨迹此时会在系统状态空间中缓慢演化区域内停留更长时间。模型预测的放电率与仿真结果的比较见图 5(e)。与上述人工神经元的分析类似，当 $I$ 接近 HBB 时，模型预测的放电率与仿真结果更加吻合。当 $I$ 位于分岔图内部更深处时，仿真得到的放电率会远高于模型值。距离不动点越远，线性化系统与原系统之间的偏差越大。此外，从 HBB 减小 $I$ 会使周期轨迹扩大，因此尖峰振幅增大，如图 5(f)所示。

### 3.4 讨论

通过对三种神经元实现，即 CMOS 轴丘、忆阻器和生物神经元的展示，所提出的框架统一了模型分析，并对脉冲动力学给出一致的解释。尽管这些系统的物理起源不同，但它们的放电均由现象学上相似的元素产生：具有负反馈的快变节点和慢变节点（图 1(c)）。在轴突丘神经元中，慢变变量是输入节点电压 $v$，其特征弛豫主要由有效膜电容（$C_{\mathrm{mem}}+C_{\mathrm{f}}$）和漏电导 $g_{\mathrm{L}}$共同决定。快变变量是输出节点电压 $w$，它遵循放大器特性$w_{\infty}$ 进行弛豫，时间常数为 $\tau_{\mathrm{A}}$。负反馈通过从 $w$ 经由电容器 $C_{\mathrm{f}}$ 和反馈晶体管电流 $I_{\mathrm{fb}}$ 返回输入节点的反馈支路实现。在忆阻器神经元中，输出节点电压 $w$快速变化，而内部忆阻器状态 $x$缓慢变化并调制电导。输出电压通过数量为 $-qw$ 的量反馈至节点 $x$，如式（13）的第一项所示。在生物神经元的 FHN模型中，膜电位 $v$是快变变量，而恢复变量 $w$ 是慢变变量。数量为 $-w$ 的负反馈连接输入和输出节点，使神经元复极化，如式（16）的第一项所示。关于神经元总体结构的详细分析见补充信息的注释 5。

本文提出的分析框架采用分段低阶多项式函数来近似描述器件行为中通常十分复杂的函数，这可能会引入误差。不过，可以通过增加分段数量和/或多项式阶数来控制这些误差。这样的增加不一定会改变轨迹的拓扑结构（见补充信息图 S11）。值得注意的是，如果多项式近似函数的阶数选得过低，李雅普诺夫条件可能无法成立。

尖峰波形也会受到状态空间中工作区域划分的影响。尖峰振幅对应于系统状态的最大偏移，该状态由状态空间中的轨迹表示，并受向量场所允许。向量场强度越大，尖峰波形的上升沿和下降沿就越陡。在 CMOS 轴丘和忆阻器神经元中，器件参数 $\theta$ 定义了状态空间中不同工作区域的边界，也决定了零流线的斜率。因此，可以通过在相应电路中恰当选择这些参数来调节波形。

## IV. 结论

本研究提出了一种基于非线性动力系统分析构建的通用分岔分析框架。为获得解析结果，采用分段低阶多项式函数近似不同工作模式下器件/元件行为的复杂函数。由此，系统状态空间被划分为不同的工作区域，并分别在各区域内开展分析。通过评估每个不动点处的稳定性和 Hopf 分岔条件，可以定义参数空间中的分岔图和响应图。此外，数值模拟验证了模型所预测的放电特性，并进一步展示了状态空间中的系统轨迹及相应的时域波形细节。为证明该分析框架的通用性，研究将其应用于三个具有代表性的应用实例：轴突丘神经元、忆阻器神经元以及用于生物神经元的 FHN 模型。尽管所研究神经元案例的本质存在巨大差异，但该框架揭示了脉冲动力学的一致图景。通过纳入相应电路中所使用器件的噪声和特性变化，该分析框架还可扩展至更高维的神经元模型。

神经元模型的广义分岔分析框架，为各种神经元模型中放电的起始与终止、系统轨迹的演变以及尖峰波形提供了统一的解释。在实际应用中，该框架通过明确揭示复杂参数组合与神经元行为之间的联系，为器件/电路设计与优化中的参数选择提供指导。因此，它可以取代设计中传统的临时参数扫描方法。此外，该框架还有助于开发专用于神经元电路设计的电子设计自动化工具。

致谢

本研究部分由乌普萨拉大学院系经费资助。

参考文献

[1] W. Wan 等，“基于阻变随机存取存储器的存内计算芯片”，《自然》，第608卷，第7923期，第504–512页，2022年8月，doi：10.1038/s41586-022-04992-8。[2] D. S. Modha 等，“能源、空间与时间前沿的神经推理”，《科学》，第382卷，第6668期，第329–335页，2023年10月，doi：10.1126/science.adh1174。[3] J. Pei 等，“利用混合天机芯片架构迈向通用人工智能”，《自然》，第572卷，第7767期，第106–111页，2019年8月，doi：10.1038/s41586-019-1424-8。[4] D. Kudithipudi 等，“规模化神经形态计算”，《自然》，第637卷，第8047期，第801–812页，2025年1月，doi：10.1038/s41586-024- 08253-8。[5] M. Davies 等，“Loihi：一种具备片上学习功能的神经形态众核处理器”，IEEE Micro，第38卷，第1期，第82–99页，2018年1月，doi：10.1109/MM.2018.112130359。[6] Y. Ishisaki 等，“基于铁电电容器的模拟忆容器及其在脉冲神经形态系统中的应用”，IEEE电子器件汇刊，第71卷，第8期，第4626–4630页，2024年8月，doi：10.1109/TED.2024.3408783。[7] X. Ji、L. Zhu、C. Hu、Y. Han 和 D. Qi，“语义与句法增强神经形态计算系统及其在消费者情感分析中的应用”，IEEE消费者电子学汇刊，第1–1页，2024年，doi：10.1109/TCE.2024.3442882。[8] M. A. Alsakkal 和 J. Wijekoon，“Spiketrum：一种基于现场可编程门阵列的神经形态耳蜗实现”，IEEE电路与系统汇刊：规律论文，第72卷，第4期，第1648–1656页，2025年4月，doi：10.1109/TCSI.2025.3526585。[9] J. Ji 等，“单晶体管有机电化学神经元”，《Nature Communications》，第16卷，第1期，文章号4334，2025年5月，doi：10.1038/s41467- 025-59587-4。[10] L. Chen 等，“基于脉冲时序的编码赋能神经拟态触觉系统实现动态物体分类”，《科学》，第384卷，第6696期，第660–665页，2024年5月，doi：10.1126/science.adf3708。

[11] J. Park、Y. Yun、M. Kim 和 S.-Y. Lee，“面向脉冲神经网络的IGZO神经形态系统仿真与优化”，IEEE电子器件学会期刊，第12卷，第228– 235页，2024年，doi：10.1109/JEDS.2024.3373889。[12] Q. Xu、Y. Wang、H. H.-C. Iu、N. Wang 和 H. Bao，“局部活性忆阻器神经形态电路：放电模式与硬件实验”，IEEE电路与系统汇刊：规律论文，第70卷，第8期，第3130–3141页，2023年8月，doi：10.1109/TCSI.2023.3276983。[13] M. El-Masry、T. Werner、A. Zjajo 和 R. Weigel，“面向模拟脉冲神经网络设计空间探索的高效系统级模块”，IEEE电路与系统汇刊：规律论文，第71卷，第8期，第3538–3549页，2024年8月，doi：10.1109/TCSI.2024.3406522。[14] K. Roy、A. Jaiswal 和 P. Panda，“借助神经形态计算迈向基于脉冲的机器智能”，《自然》第575卷，第7784期，第607–617页，2019年11月，doi：10.1038/s41586-019-1677-2。[15] C. Mead，“我们如何创造神经形态工程”，《Nature Electronics》，第3卷，第7期，第434–435页，2020年7月，doi：10.1038/s41928-020-0448- 2。[16] D. Ham、H. Park、S. Hwang 和 K. Kim，“通过复制和粘贴大脑实现神经形态电子学”，《Nature Electronics》，第4卷，第9期，第635–644页，2021年9月，doi：10.1038/s41928-021-00646-1。[17] J. E. Pedersen 等，“神经形态中间表示：面向可互操作脑启发计算的统一指令集”，《Nature Communications》，第15卷，第1期，文章号8122，2024年9月，doi：10.1038/s41467-024-52259-9。[18] M. Yao 等，“基于脉冲的动态计算与采用异步感知计算的神经形态芯片”，《Nature Communications》，第15卷，第1期，文章号4464，2024年5月，doi：10.1038/s41467-024-47811-6。[19] S. Ke 等，“用于构建均匀脉冲发放漏积分发放神经元的高均匀性银离子忆阻器，具有超低漏电流”，IEEE电子器件汇刊，第71卷，第12期，第7911–7915页，2024年12月，doi：10.1109/TED.2024.3480892。[20] E. J. Fuller 等，“用于可扩展神经形态计算的离子浮栅存储阵列并行编程”，《科学》，第364卷，第6440期，第570–574页，2019年5月，doi：10.1126/science.aaw5581。[21] Z. Yin、H. Tian、G. Chen 和 L. O. Chua，“什么是忆阻器、忆容器和忆感器？”IEEE电路与系统汇刊第二辑：简报，第62卷，第4期，第402–406页，2015年4月，doi：10.1109/TCSII.2014.2387653。[22] Y. Zhang 等，“用于多尺度传感器内储备池计算的稳健仿生范德华异质结构视觉神经形态器件”，ACS Nano，2025年11月，doi：10.1021/acsnano.5c14569。 [23] Q. Xu、X. Chen、B. Chen、H. Wu、Z. Li 和 H. Bao，“采用无乘法器实现的改进型FitzHugh–Nagumo神经元模型动力学分析”，《非线性动力学》，第111卷，第9期，第8737–8749页，2023年5月，doi：10.1007/s11071-023-08274-4。[24] Maryada、S. Soldado-Magraner、M. Sorbaro、R. Laje、D. V. Buonomano 和 G. Indiveri，“利用兴奋性与抑制性可塑性实现异构神经形态计算系统中的稳定循环动力学”，《Nature Communications》，第16卷，第1期，文章号5522，2025年7月，doi：10.1038/s41467-025-60697-2。[25] H. Greatorex 等，“具备片上学习功能、面向超越CMOS器件集成的神经形态处理器”，《Nature Communications》，第16卷，第1期，文章号6424，2025年7月，doi：10.1038/s41467-025-61576-6。[26] D. R. Muir 和 S. Sheik，“神经形态技术迈向商业成功之路”，《Nature Communications》，第16卷，第1期，文章号3586，2025年4月，doi：10.1038/s41467-025-57352-1。[27] X. Jiang、J. Li、B. Li、W. Yin、L. Sun 和 X. Chen，“一种新型四维忆阻器系统的分岔、混沌与电路实现”，《国际非线性科学与数值模拟期刊》，第24卷，第7期，第2639– 2648页，2023年11月，doi：10.1515/ijnsns-2021-0393。[28] C. Liu、X. Liu 和 S. Liu，“Morris–Lecar神经元模型的分岔分析”，《生物控制论》，第108卷，第1期，第75–84页，2014年2月，doi：10.1007/s00422-013-0580-4。[29] O. De Feo、G. M. Maggio 和 M. P. Kennedy，“科尔皮兹振荡器：周期解族及其分岔”，《国际分岔与混沌期刊》，第10卷，第05期，第935–958页，2000年5月，doi：10.1142/s0218127400000670。[30] I. Kipelkin 等，“基于忆阻器非线性的神经元振荡器数学与实验模型”，《数学》，第11卷，第5期，文章编号5，2023年1月，doi：10.3390/math11051268。[31] K. A. Nirmal、D. D. Kumbhar、A. V. Kesavan、T. D. Dongale 和 T. G. Kim，“二维层状材料忆阻器的进展：释放其超越存储器的潜力”，《npj二维材料与应用》，第8卷，第1期，文章号83，2024年12月，doi：10.1038/s41699-024-00522-4。[32] R. Islam, Y. Shi, G. V. de Oliveira Silva, M. Sachdev 和 G.-X. Miao，《用于神经形态计算应用的锂掺杂 TiOx 易失性与非易失性可编程离子电子忆阻器》，ACS Nano，第 18 卷，第 33 期，页码 22045–22054，2024年8月，doi：10.1021/acsnano.4c05137。[33] X. Duan 等，《基于忆阻器的神经形态芯片》，《Advanced Materials》，第 36 卷，第 14 期，文章编号 2310704，2024年，doi：10.1002/adma.202310704。[34] D. J. W. Simpson，《分段光滑动力系统中的二十种类霍普夫分岔》，《Physics Reports》，第 970 卷，页码 1–80，2022年8月，doi：10.1016/j.physrep.2022.04.007。[35] Y. Ushakov, A. Akther, P. Borisov, D. Pattnaik, S. Savel’ev 和 A. G. Balanov，《扩散型忆阻器中脉冲发放的确定性机制》，《Chaos, Solitons & Fractals》，第 149 卷，文章编号 110997，2021年8月，doi：10.1016/j.chaos.2021.110997。[36] T. Sarkar 等，《用于原位神经形态感知和生物界面连接的有机人工脉冲神经元》，《Nature Electronics》，第 5 卷，第 11 期，页码 774–783，2022年11月，doi：10.1038/s41928-022-00859-y。[37] Q. Duan 等，《具有时空动力学和增益调制特性的脉冲神经元，用于单片集成忆阻神经网络》，《Nature Communications》，第 11 卷，第 1 期，2020年7月，doi：10.1038/s41467-020-17215-3。[38] D. P. Pattnaik 等，《扩散型忆阻器中应力诱导的人工神经元脉冲发放》，《Communications Engineering》，第 3 卷，第 1 期，文章编号 163，2024年11月，doi：10.1038/s44172-024-00315-z。[39] S. H. Strogatz，《非线性动力学与混沌：及其在物理学、生物学、化学和工程学中的应用》，第 3 版。纽约：Chapman and Hall/CRC，2024年。doi：10.1201/9780429398490。[40] A. Mees 和 L. Chua，《霍普夫分岔定理及其在电路与系统非线性振荡中的应用》，《IEEE电路与系统汇刊》，第 26 卷，第 4 期，页码 235–254，1979年4月，doi：10.1109/TCS.1979.1084636。[41] S. M. Sze 和 K. K. Ng，《半导体器件物理》，第 3 版。Wiley India Pvt. Limited，2008年。

Żhiwei Li 于2022年和2024年分别获得天津大学精密仪器专业理学学士和理学硕士学位。他目前正在瑞典乌普萨拉大学攻读博士学位。他的研究项目涉及用于神经形态计算和神经元动力学建模的新型电子器件。

Shi-Li Zhang 于1982年和1985年分别获得复旦大学物理学专业理学学士和理学硕士学位，并于1990年获得瑞典皇家理工学院（KTH）电子学博士学位。他是瑞典乌普萨拉乌普萨拉大学固态电子学讲席教授。他目前的研究兴趣包括用于基因组测序的纳米器件、基于二维半导体材料的柔性能量器件，以及面向纳米电子学与功率电子学的高能效互连。

Chenyu Wen 于2012年获得中国南京东南大学电子科学与技术理学学士学位，并于2019年获得瑞典乌普萨拉大学电子学博士学位。他现任瑞典乌普萨拉乌普萨拉大学固态电子学助理教授。其研究兴趣包括神经形态器件与电路、电子器件表征与建模、纳米孔传感器、电动与离子器件、气体传感器以及信号处理。

补充信息

# 脉冲神经元模型的分岔分析框架

Zhiwei Li[1], Shi-Li Zhang[1], Chenyu Wen[1]*

[1] 固态电子学部，电气工程系，乌普萨拉大学，SE-751 21 瑞典乌普萨拉

*通讯作者：chenyu.wen@angstrom.uu.se

目录：

补充说明1. 轴丘神经元模型的推导 补充说明 2. Hopf分岔条件 补充说明3. 忆阻器神经元模型的推导 补充说明4. FHN模型的细节 补充说明5. 神经元模型的统一系统级视角

图S1。轴突丘模型中晶体管的 $I_{\mathrm{fb}}(v, w, \theta_{\mathrm{T}})$ 图。

图S2。放大器的传递函数 $w_{\infty}(v, \theta_{\mathrm{A}})$ 图

Fi图S3。轴突丘模型在静息态下 $C_{\mathrm{f}} = 0$ nF 时的系统轨迹 e.

图 S4。轴突丘模型在 $C_{\mathrm{f}} = 1$ nF 放电态下的系统轨迹。

图 S5。轴突丘模型放电特性对（$\hat{k}, \widehat{V_{\mathrm{gth}}}$）平面的参数依赖性。

图 S6。轴突丘模型放电特性对（$\widehat{I_{\mathrm{in}}}, \widehat{C_{\mathrm{f}}}$）平面的参数依赖性。

图 S7. 忆阻器神经元模型中 $u(x)$ 和 $R(x)$ 的图。

图 S8. 在变化的 $\tau$ 和 $x_{\mathrm{rth1}}$ 条件下，忆阻器神经元模型在 $(I, c)$ 平面上的放电域。

图 S9. 忆阻器模型中，随着 $\tau$ 从 10 增加到 50 s，相图中显示放电态的系统轨迹。

图 S10. FHN模型中，随着 $b$ 从 1 增加到 4，相图中显示放电态的系统轨迹。

图 S11。在忆阻器模型相图中，对比原始模型与分段近似模型。

补充说明1：轴突–丘脑神经元模型的推导

在输入节点应用基尔霍夫电流定律，并沿反馈回路应用基尔霍夫电压定律，可得到二维轴丘模型：

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{mem}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= I_{\mathrm{in}} - g_{\mathrm{L}}\cdot v + C_{\mathrm{f}}\cdot\frac{\mathrm{d}(w-v)}{\mathrm{d}t} - I_{\mathrm{fb}}(v,w,\theta_{\mathrm{M}}) \\ \tau_{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= w_{\infty}(v,\theta_{\mathrm{A}}) - w \end{aligned} \tag{S1}$$

重新整理公式（S1），$\frac{d(w-v}{dt}=\frac{dw}{dt}-\frac{dv}{dt}$）可得，

$$\begin{aligned} (C_{\mathrm{mem}}+C_{\mathrm{f}})\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= I_{\mathrm{in}} - g_{\mathrm{L}}\cdot v + \frac{C_{\mathrm{f}}}{\tau_{\mathrm{A}}}\cdot(w_{\infty}(v,\theta_{\mathrm{A}})-w) - I_{\mathrm{fb}}(v,w,\theta_{\mathrm{M}}) \\ \tau_{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= w_{\infty}(v,\theta_{\mathrm{A}}) - w \end{aligned} \tag{S2}$$

为对参数进行无量纲化，我们使用电压 $V_{\mathrm{dd}}$、时间 $\tau_{\mathrm{A}}$ 和单位电荷 q（1.6×10$^{-19}$ [C]）对变量进行归一化。$\hat{v}=\frac{v}{V_{\mathrm{dd}}}$、$\hat{w}=\frac{w}{V_{\mathrm{dd}}}$、$\hat{t}=\frac{t}{\tau_{\mathrm{A}}}$、$\widehat{C_{\mathrm{f}}}=\frac{C_{\mathrm{f}}V_{\mathrm{dd}}}{q}$、$\widehat{I_{\mathrm{in}}}=\frac{I_{\mathrm{in}}\tau_{\mathrm{A}}}{q}$、$\widehat{g_{\mathrm{L}}}=\frac{g_{\mathrm{L}}\tau_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{dd}}}{q}$，

$\widehat{V_{\mathrm{th1}}}=\frac{V_{\mathrm{th1}}}{V_{\mathrm{dd}}}$, $\widehat{V_{\mathrm{th2}}}=\frac{V_{\mathrm{th2}}}{V_{\mathrm{dd}}}$, $\widehat{V_{\mathrm{gth}}}=\frac{V_{\mathrm{gth}}}{V_{\mathrm{dd}}}$, $\hat{k}=\frac{k\tau_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{dd}}^{2}}{q}$.

根据晶体管和放大器的三种工作模式将状态空间划分为不同的工作区域，每个工作区域均具有相应的约束条件，归一化分段模型为：

区域1：$\hat{v}\geq 0$、$\hat{v}\leq\hat{w}-\widehat{V_{\mathrm{gth}}}$、$\widehat{V_{\mathrm{th2}}}\geq\hat{v}\geq\widehat{V_{\mathrm{th1}}}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}\hat{t}}=\frac{1}{2\hat{C}_{\mathrm{f}}}\left(\widehat{I_{\mathrm{in}}}-\widehat{g_{\mathrm{L}}}\hat{v}-\left(\hat{k}\left(\hat{w}-\widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)\hat{v}-\frac{\hat{k}}{2}\hat{v}^{2}\right)+\hat{C}_{\mathrm{f}}\left(\frac{\hat{v}-\widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{\left(\widehat{V_{\mathrm{th2}}}-\widehat{V_{\mathrm{th1}}}\right)}-\hat{w}\right)\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{w}}{\mathrm{d}\hat{t}}=\frac{\hat{v}-\widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{\left(\widehat{V_{\mathrm{th2}}}-\widehat{V_{\mathrm{th1}}}\right)}-\hat{w}$$

固定（$\hat{v}^{*}$、$\hat{w}^{*}$）is

$$\hat{v}^{*}=\frac{\hat{k}\left(\frac{\widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{\Delta\hat{V}}+\widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)-\widehat{g_{\mathrm{L}}}\pm\sqrt{\left[\widehat{g_{\mathrm{L}}}-\hat{k}\left(\frac{\widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{\Delta\hat{V}}+\widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)\right]^{2}+4\hat{k}\left(\frac{1}{\Delta\hat{V}}-\frac{1}{2}\right)\widehat{I_{\mathrm{in}}}}}{2\left(\frac{\hat{k}}{\Delta\hat{V}}-\frac{\hat{k}}{2}\right)}$$

$$\hat{w}^{*}=\frac{\hat{v}^{*}-\widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{\Delta\hat{V}}$$

与 $\Delta\hat{V}=\widehat{V_{th2}}-\widehat{V_{th1}}$。

区域2：$\hat{w}\geq V_{\text{次g}}^{\frown}$，$\hat{v}>\hat{w}-V_{\text{次g}}^{\frown}$，$\widehat{V_{\mathrm{th2}}}\geq\hat{v}\geq\widehat{V_{\mathrm{th1}}}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}\hat{t}}=\frac{1}{2\hat{C}_{\mathrm{f}}}\left(\widehat{I_{\mathrm{in}}}-\widehat{g_{\mathrm{L}}}\hat{v}-\frac{\hat{k}}{2}\left(\hat{w}-\widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)^{2}+\hat{C}_{\mathrm{f}}\left(\frac{\hat{v}-\widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{\left(\widehat{V_{\mathrm{th2}}}-\widehat{V_{\mathrm{th1}}}\right)}-\hat{w}\right)\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{w}}{\mathrm{d}\hat{t}}=\frac{\hat{v}-\widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{\left(\widehat{V_{\mathrm{th2}}}-\widehat{V_{\mathrm{th1}}}\right)}-\hat{w}$$

固定点 $v$ ，$w$nt (^* ^*) is

$$\hat{v}^* = \frac{-\left[\frac{\hat{k}}{\Delta\hat{V}}\left(\widehat{V_{\mathrm{th1}}}+\widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)-\widehat{g_{\mathrm{L}}}\right]\pm\sqrt{\left[\frac{\hat{k}}{\Delta\hat{V}}\left(\widehat{V_{\mathrm{th1}}}+\widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)-\widehat{g_{\mathrm{L}}}\right]^2+\frac{2\hat{k}}{\Delta\hat{V}^2}\left[\widehat{I_{\mathrm{in}}}-\frac{\hat{k}}{2}\left(\widehat{V_{\mathrm{th1}}}+\widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)^2\right]}}{-\frac{\hat{k}}{\Delta\hat{V}^2}}$$

$$\hat{w}^* = \frac{\hat{v}^* - \widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{\Delta\hat{V}}$$

区域 3：$\hat{w} \geq 0, \hat{w} < \widehat{V_{\mathrm{gth}}}, \widehat{V_{\mathrm{th2}}} \geq \hat{v} \geq \widehat{V_{\mathrm{th1}}}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}\hat{t}} = \frac{1}{2\hat{C}_{\mathrm{f}}}\left(\widehat{I_{\mathrm{in}}} - \widehat{g_{\mathrm{L}}}\hat{v} + \hat{C}_{\mathrm{f}}\left(\frac{\hat{v}-\widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{\left(\widehat{V_{\mathrm{th2}}}-\widehat{V_{\mathrm{th1}}}\right)} - \hat{w}\right)\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{w}}{\mathrm{d}\hat{t}} = \frac{\hat{v}-\widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{\left(\widehat{V_{\mathrm{th2}}}-\widehat{V_{\mathrm{th1}}}\right)} - \hat{w}$$

不动点 $(\hat{v}^*, \hat{w}^*)$ is

$$\hat{v}^* = \frac{\widehat{I_{\mathrm{in}}}}{\widehat{g_{\mathrm{L}}}}$$

$$\hat{w}^* = \frac{\hat{v}^* - \widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{\Delta\hat{V}}$$

区域 4：$\hat{v} \geq 0, \hat{v} \leq \hat{w} - \widehat{V_{\mathrm{gth}}}, \hat{v} < \widehat{V_{\mathrm{th1}}}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}\hat{t}} = \frac{1}{2\hat{C}_{\mathrm{f}}}\left(\widehat{I_{\mathrm{in}}} - \widehat{g_{\mathrm{L}}}\hat{v} - \left(\hat{k}\left(\hat{w}-\widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)\hat{v} - \frac{\hat{k}}{2}\hat{v}^2\right) - \hat{C}_{\mathrm{f}}\hat{w}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{w}}{\mathrm{d}\hat{t}} = -\hat{w}$$

不存在有效的 fixed point in this region.

区域 5：$\hat{w} \geq \widehat{V_{\mathrm{gth}}}, \hat{v} > \hat{w} - \widehat{V_{\mathrm{gth}}}, \hat{v} < \widehat{V_{\mathrm{th1}}}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}\hat{t}} = \frac{1}{2\hat{C}_{\mathrm{f}}}\left(\widehat{I_{\mathrm{in}}} - \widehat{g_{\mathrm{L}}}\hat{v} - \frac{\hat{k}}{2}\left(\hat{w}-\widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)^2 - \hat{C}_{\mathrm{f}}\hat{w}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{w}}{\mathrm{d}\hat{t}} = -\hat{w}$$

不存在有效的不动 point in this region.

区域 6：$\hat{v} \geq 0, \hat{w} < \widehat{V_{\mathrm{gth}}}, \hat{v} < \widehat{V_{\mathrm{th1}}}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}\hat{t}} = \frac{1}{2\hat{C}_{\mathrm{f}}}\left(\widehat{I_{\mathrm{in}}} - \widehat{g_{\mathrm{L}}}\hat{v} - \hat{C}_{\mathrm{f}}\hat{w}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{w}}{\mathrm{d}\hat{t}} = -\hat{w}$$

其中不存在有效的不动点 this region.

区域 7：$\hat{v} \geq 0$、 $\hat{v} \leq \hat{w} - \widehat{V_{\mathrm{gth}}}$、 $\hat{v} > \widehat{V_{\mathrm{th2}}}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}\hat{t}} = \frac{1}{2\hat{C}_{\mathrm{f}}}\left(\widehat{I_{\mathrm{in}}} - \widehat{g_{\mathrm{L}}}\hat{v} - \left(\hat{k}\left(\hat{w} - \widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)\hat{v} - \frac{\hat{k}}{2}\hat{v}^2\right) + \hat{C}_{\mathrm{f}}(1-\hat{w})\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{w}}{\mathrm{d}\hat{t}} = 1 - \hat{w}$$

固定点（$\hat{v}^*$、nt$\hat{w}^*$） is

$$\hat{v}^* = \frac{\left[\widehat{g_{\mathrm{L}}} + \hat{k}\left(1 - \widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)\right] \pm \sqrt{\left[\widehat{g_{\mathrm{L}}} + \hat{k}\left(1 - \widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)\right]^2 - 2\hat{k}\widehat{I_{\mathrm{in}}}}}{\hat{k}}$$

$$\hat{w}^* = 1$$

区域 8：$\hat{w} \geq \widehat{V_{\mathrm{gth}}}$ , $\hat{v} > \hat{w} - \widehat{V_{\mathrm{gth}}}$, $\hat{v} > \widehat{V_{\mathrm{th2}}}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}\hat{t}} = \frac{1}{2\hat{C}_{\mathrm{f}}}\left(\widehat{I_{\mathrm{in}}} - \widehat{g_{\mathrm{L}}}\hat{v} - \frac{\hat{k}}{2}\left(\hat{w} - \widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)^2 + \hat{C}_{\mathrm{f}}(1-\hat{w})\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{w}}{\mathrm{d}\hat{t}} = 1 - \hat{w}$$

不动点（$\hat{v}^*, \hat{w}^*$ ) is

$$\hat{v}^* = \frac{\widehat{I_{\mathrm{in}}} - \frac{\hat{k}}{2}\left(1 - \widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)^2}{\widehat{g_{\mathrm{L}}}}$$

$$\hat{w}^* = 1$$

区域 9：$\hat{v} \geq 0, \hat{w} < \widehat{V_{\mathrm{gth}}}, \hat{v} > \widehat{V_{\mathrm{th2}}}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}\hat{t}} = \frac{1}{2\hat{C}_{\mathrm{f}}}\left(\widehat{I_{\mathrm{in}}} - \widehat{g_{\mathrm{L}}}\hat{v} + \hat{C}_{\mathrm{f}}(1-\hat{w})\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{w}}{\mathrm{d}\hat{t}} = 1 - \hat{w}$$

不动点（$\hat{v}^*$， $\hat{w}^*$）为

$$\hat{v}^* = \frac{\widehat{I_{\mathrm{in}}}}{\widehat{g_{\mathrm{L}}}}$$

$$\hat{w}^* = 1$$

补充说明 2：Hopf 分岔条件

考虑以向量形式表示的二维神经元模型

$$\dot{x} = F(x, \theta)$$

with $x = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, F(x,\theta) = \begin{bmatrix} f(x,\theta) \\ g(x,\theta) \end{bmatrix}, \dot{x} = \begin{bmatrix} dv/dt \\ dw/dt \end{bmatrix}$,

其中，$\theta$ 表示系统参数集合。由于模型在$(v, w)$状态空间中按工作区域分段定义，因此需在每个区域内，对位于相应工作区域中的每个不动点分别检验以下 Hopf 分岔条件。

1. 对于每个工作区域，通过求解零流线交点条件$\mathcal{N}_v = 0$ 和$\mathcal{N}_w = 0$，计算不动点$x^* = (v^*, w^*)$。区域$\Omega_k, k = 1...9$.中必须至少存在一个有效不动点。

2. 在相应区域的每个不动点处，构造雅可比矩阵

$$J(x^*, \theta) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x^*}$$

Hopf 分岔要求$J(x^*, \theta)$具有一对共轭复特征值

$$\lambda_{1,2} = a(\theta) \pm i\omega(\theta), \omega \neq 0$$

对于二维系统，迹和行列式满足

$$Tr = tr(J) = 2a, \Delta = \det(J) = a^2 + \omega^2$$

3. 令 $\theta_i$ 为选定用于延拓的参数。通过求解可得到一个候选 Hopf 点 $\theta_i = \theta_{i,0}$

$$Tr(\theta_i) = 2a(\theta_i) = 0$$

满足

$$\Delta(\theta_{i,0}) > 0$$

其中 这确保在 Hopf分岔 $\theta_i = \theta_{i,}$处具有纯虚特征值 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ $_0$.

4. 为确保发生 Hopf分岔而非退化情形，特征值必须随着 $\theta_i$ 变化以非零“速度”穿过虚轴，

$$\left.\frac{dRe(\lambda)}{d\theta_i}\right|_{\theta_i=\theta_{i,0}} = \left.\frac{da}{d\theta_i}\right|_{\theta_i=\theta_{i,0}} \neq 0$$

5. 为确定 Hopf分岔是否会产生稳定的小振幅振荡，我们计算 $\theta_i = \theta_{i,0}$处的第一 Lyapunov 系数 $Lv$，并要求 $Lv < 0$。

$$Lv = \frac{1}{16}(f_{vvv} + f_{vww} + g_{vvw} + g_{www}) + \frac{1}{16\omega}(f_{vw}(f_{vv} + f_{ww}) - g_{vw}(g_{vv} + g_{ww}) - f_{vv}g_{vv} + f_{ww}g_{ww})$$

6. 总而言之，这些条件给出了一组使神经元放电的参数不等式

$$x^* \in \Omega_k$$
$$Tr\big(J(x^*,\theta_{i,0})\big)=0$$
$$\Delta\big(J(x^*,\theta_{i,0})\big)>0$$
$$\left.\frac{dRe(\lambda)}{d\theta_i}\right|_{\theta_i=\theta_{i,0}} \neq 0$$
$$Lv(x^*,\theta_{i,0})<0.$$

作为示例，我们以 CMOS 轴丘神经元模型中的区域1为例。若将$\widehat{I_{\mathrm{in}}}$ 选为感兴趣的参数，则区域1中的有效不动点 $\hat{x}^*=(\hat{v}^*,\hat{w}^*)$为

$$\hat{v}^*=\frac{\hat{k}\left(\frac{\widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{\Delta\hat{V}}+\widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)-\widehat{g_{\mathrm{L}}}\pm\sqrt{\left[\widehat{g_{\mathrm{L}}}-\hat{k}\left(\frac{\widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{\Delta\hat{V}}+\widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)\right]^2+4\hat{k}\left(\frac{1}{\Delta\hat{V}}-\frac{1}{2}\right)\widehat{I_{\mathrm{in}}}}}{2\left(\frac{\hat{k}}{\Delta\hat{V}}-\frac{\hat{k}}{2}\right)}$$
$$\hat{w}^*=\frac{\hat{v}^*-\widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{\Delta\hat{V}}$$

因此，实值不动点的存在要求：

$$\left[\widehat{g_{\mathrm{L}}}-\hat{k}\left(\frac{\widehat{V_{\mathrm{th1}}}}{\Delta\hat{V}}+\widehat{V_{\mathrm{gth}}}\right)\right]^2+4\hat{k}\left(\frac{1}{\Delta\hat{V}}-\frac{1}{2}\right)\widehat{I_{\mathrm{in}}}>0$$

在区域1中，有效的不动点满足

$$\hat{v}^*\geq 0$$
$$\hat{v}^*\leq\hat{w}^*-\widehat{V_{\mathrm{gth}}}$$
$$\widehat{V_{\mathrm{th2}}}\geq\hat{v}^*\geq\widehat{V_{\mathrm{th1}}}$$

定义放电区域的 Hopf 分岔条件不等式为：

$$Tr\big(J(\hat{x}^*,\widehat{I_{\mathrm{in}}})\big)=\frac{-\widehat{g_{\mathrm{L}}}-\hat{k}\big(\hat{w}^*-\widehat{V_{\mathrm{gth}}}\big)+\hat{k}\hat{v}^*+\frac{\hat{c}_{\mathrm{f}}}{\Delta\hat{V}}}{2\hat{c}_{\mathrm{f}}}-1>0$$

$$\Delta\big(J(\hat{x}^*,\widehat{I_{\mathrm{in}}})\big)=-\frac{-\widehat{g_{\mathrm{L}}}-\hat{k}\big(\hat{w}^*-\widehat{V_{\mathrm{gth}}}\big)+\hat{k}\hat{v}^*+\frac{\hat{c}_{\mathrm{f}}}{\Delta\hat{V}}}{2\hat{c}_{\mathrm{f}}}-\frac{-\hat{k}\hat{v}^*-\hat{c}_{\mathrm{f}}}{2\Delta\hat{V}\hat{c}_{\mathrm{f}}}>0$$

$$\left.\frac{dRe(\lambda)}{d\theta_i}\right|_{\theta_i=\widehat{I_{\mathrm{in}}}}=\frac{d\dfrac{-\widehat{g_{\mathrm{L}}}-\hat{k}\big(\hat{w}^*-\widehat{V_{\mathrm{gth}}}\big)+\hat{k}\hat{v}^*+\frac{\hat{c}_{\mathrm{f}}}{\Delta\hat{V}}}{2\hat{c}_{\mathrm{f}}}}{d\widehat{I_{\mathrm{in}}}}\neq 0$$

$$Lv\big(\hat{x}^*,\widehat{I_{\mathrm{in}}}\big)=\frac{1}{16\omega^*}\frac{-1}{4\hat{c}_{\mathrm{f}}^{\,2}}<0$$

补充说明3：忆阻器神经元模型的推导

忆阻器神经元的常微分方程写为:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -u(x) - qw$$
$$\tau\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = V_{\mathrm{ext}} - \left(1 + \frac{R_{\mathrm{ext}}}{R(x)}\right)w$$

在物理约束 $x_{\mathrm{th1}} < x_{\mathrm{rth1}} < x_{\mathrm{rth2}} < x_{\mathrm{th2}}$ 下，状态空间在（$x, w$）中被划分为五个工作区域。在每个区域中，常微分方程中的 $u(x)$ 和 $R(x)$ 由相应的表达式给出。

区域1：$x < x_{\mathrm{th1}}$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -(xk_1 + x_{\mathrm{u0}}) - qw$$
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau}V_{\mathrm{ext}} - \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{R_{\mathrm{ext}}}{xk_{\mathrm{r1}} + 1}\right)w$$

不动点（$x^*, w^*$）为

$$x^* = \frac{-A_1 \pm \sqrt{{A_1}^2 - B_1}}{2\frac{k_{\mathrm{r1}}k_1}{q}}$$
$$w^* = \frac{V_{\mathrm{ext}}}{\left(1 + \frac{R_{\mathrm{ext}}}{x^*k_{\mathrm{r1}} + 1}\right)}$$

With

$$A_1 = V_{\mathrm{ext}}k_{\mathrm{r1}} + (1 + R_{\mathrm{ext}})\frac{k_1}{q} + \frac{k_{\mathrm{r1}}x_{\mathrm{u0}}}{q}$$
$$B_1 = 4\frac{k_{\mathrm{r1}}k_1}{q}(V_{\mathrm{ext}} + \frac{(1 + R_{\mathrm{ext}})x_{\mathrm{u0}}}{q})$$

区域2：$x_{th1} < x < x_{rth1}$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -[(x - x_{\mathrm{th1}})k_2 + x_{\mathrm{th1}}k_1 + x_{\mathrm{u0}}] - qw$$
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau}V_{\mathrm{ext}} - \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{R_{\mathrm{ext}}}{xk_{\mathrm{r1}} + 1}\right)w$$

不动点 $(x^*, w^*)$ 为

$$x^* = \frac{-A_2 \pm \sqrt{{A_2}^2 - B_2}}{2\frac{k_{\mathrm{r1}}k_2}{q}}$$

$$w^* = \frac{V_{\mathrm{ext}}}{\left(1 + \frac{R_{\mathrm{ext}}}{x^* k_{\mathrm{r1}} + 1}\right)}$$

With

$$m_1 = x_{\mathrm{th1}}k_1 + x_{\mathrm{u0}} - x_{\mathrm{th1}}k_2$$

$$A_2 = V_{\mathrm{ext}}k_{\mathrm{r1}} + (1 + R_{\mathrm{ext}})\frac{k_2}{q} + \frac{k_{\mathrm{r1}}m_1}{q}$$

$$B_2 = 4\frac{k_{\mathrm{r1}}k_2}{q}(V_{\mathrm{ext}} + \frac{(1 + R_{\mathrm{ext}})m_1}{q})$$

区域 3：$x_{rth1} < x < x_{rth2}$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -[(x - x_{\mathrm{th1}})k_2 + x_{\mathrm{th1}}k_1 + x_{\mathrm{u0}}] - qw$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau}V_{\mathrm{ext}} - \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{R_{\mathrm{ext}}}{(x - x_{\mathrm{rth1}})k_{\mathrm{r2}} + x_{\mathrm{rth1}}k_{\mathrm{r1}} + 1}\right)w$$

不动点（$x^*, w^*$）

$$x^* = \frac{-A_3 \pm \sqrt{{A_3}^2 - B_3}}{2\frac{k_{\mathrm{r2}}k_2}{q}}$$

$$w^* = \frac{V_{\mathrm{ext}}}{\left(1 + \frac{R_{\mathrm{ext}}}{x^* k_{\mathrm{r2}} + m_2}\right)}$$

With

$$m_2 = -x_{\mathrm{rth1}}k_{\mathrm{r2}} + x_{\mathrm{rth1}}k_{\mathrm{r1}} + 1$$

$$A_3 = V_{\mathrm{ext}}k_{\mathrm{r2}} + (m_2 + R_{\mathrm{ext}})\frac{k_2}{q} + \frac{k_{\mathrm{r2}}m_1}{q}$$

$$B_3 = 4\frac{k_{\mathrm{r2}}k_2}{q}(V_{\mathrm{ext}}m_2 + \frac{(m_2 + R_{\mathrm{ext}})m_1}{q})$$

区域 4：$x_{rth2} < x < x_{th2}$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -[(x - x_{\mathrm{th1}})k_2 + x_{\mathrm{th1}}k_1 + x_{\mathrm{u0}}] - qw$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\tau}V_{\mathrm{ext}}-\frac{1}{\tau}\left(1+\frac{R_{\mathrm{ext}}}{(x-x_{\mathrm{rth2}})k_{\mathrm{r3}}+(x_{\mathrm{rth2}}-x_{\mathrm{rth1}})k_{\mathrm{r2}}+x_{\mathrm{rth1}}k_{\mathrm{r1}}+1}\right)w$$

不动点 $(x^*,w^*)$ 为

$$x^*=\frac{-A_4\pm\sqrt{{A_4}^2-B_4}}{2\frac{k_{\mathrm{r3}}k_2}{q}}$$

$$w^*=\frac{V_{\mathrm{ext}}}{\left(1+\frac{R_{\mathrm{ext}}}{x^*k_{\mathrm{r3}}+m_3}\right)}$$

With

$$m_3=-x_{\mathrm{rth2}}k_{\mathrm{r3}}+(x_{\mathrm{rth2}}-x_{\mathrm{rth1}})k_{\mathrm{r2}}+x_{\mathrm{rth1}}k_{\mathrm{r1}}+1$$

$$A_4=V_{\mathrm{ext}}k_{\mathrm{r3}}+(m_3+R_{\mathrm{ext}})\frac{k_2}{q}+\frac{k_{\mathrm{r3}}m_1}{q}$$

$$B_4=4\frac{k_{\mathrm{r3}}k_2}{q}(V_{\mathrm{ext}}m_3+\frac{(m_3+R_{\mathrm{ext}})m_1}{q})$$

区域 5：$x_{\mathrm{th2}}<x$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-[(x-x_{\mathrm{th2}})k_3+(x_{\mathrm{th2}}-x_{\mathrm{th1}})k_2+x_{\mathrm{th1}}k_1+x_{\mathrm{u0}}]-qw$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\tau}V_{\mathrm{ext}}-\frac{1}{\tau}\left(1+\frac{R_{\mathrm{ext}}}{(x-x_{\mathrm{rth2}})k_{\mathrm{r3}}+(x_{\mathrm{rth2}}-x_{\mathrm{rth1}})k_{\mathrm{r2}}+x_{\mathrm{rth1}}k_{\mathrm{r1}}+1}\right)w$$

不动点（$x^*,w^*$）为

$$x^*=\frac{-A_5\pm\sqrt{{A_5}^2-B_5}}{2\frac{k_{\mathrm{r3}}k_3}{q}}$$

$$w^*=\frac{V_{\mathrm{ext}}}{\left(1+\frac{R_{\mathrm{ext}}}{x^*k_{\mathrm{r3}}+m_3}\right)}$$

With

$$m_4=-x_{\mathrm{th2}}k_3+(x_{\mathrm{th2}}-x_{\mathrm{th1}})k_2+x_{\mathrm{th1}}k_1+x_{\mathrm{u0}}$$

$$A_5=V_{\mathrm{ext}}k_{\mathrm{r3}}+(m_3+R_{\mathrm{ext}})\frac{k_3}{q}+\frac{k_{\mathrm{r3}}m_4}{q}$$

$$B_5=4\frac{k_{\mathrm{r3}}k_3}{q}(V_{\mathrm{ext}}m_3+\frac{(m_3+R_{\mathrm{ext}})m_4}{q})$$

补充说明4：FHN模型的详细信息

FHN模型为

$$\frac{dv}{dt} = v(a - v)(v - 1) - w + I$$
$$\frac{dw}{dt} = bv - cw \tag{15}$$

其中，$v$ 是表示钠钾通道活动的细胞膜potential，$w$ 是recovery variable，$I$ 是驱动电流，而$a$、$b$和$c$ 分别是偏移量、恢复增益和时间尺度比参数。FHN涉及的参数总计为$\theta = \{a, b, c, I\}$。不动点（$v^*$, $w^*$）为

$$v_k^* = \frac{a+1}{3} + e^{\frac{2}{3}i\pi k}\sqrt[3]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^3}} + e^{-\frac{2}{3}i\pi k}\sqrt[3]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^3}}, k = 0,1,2$$

$$w_k^* = \frac{b}{c}v_k^*, \qquad k = 0,1,2$$

With

$$p = -\frac{2(a+1)^3}{27} + \frac{(a+1)}{3}\left(a + \frac{b}{c}\right) - I$$
$$h = \left(a + \frac{b}{c}\right) - -\frac{(a+1)^3}{3}$$

补充说明5：神经元模型的统一系统级视角

为以统一且简洁的方式呈现这三种神经元实现，我们将每个模型分解为四个功能单元：(i) 时间常数弛豫项，(ii) 输入，(iii) 非线性前向通路，以及 (iv) 显式负反馈支路。在所有情况下，在这一结构下，快速和慢速状态变量之间的闭环相互作用都会引发脉冲发放。

- 轴突丘神经元

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\underbrace{\frac{g_{\mathrm{L}}}{\underbrace{C_{\mathrm{mem}}+C_{\mathrm{f}}}_{1/\text{time constant}}}}\ v + \underbrace{\frac{I_{\mathrm{in}}}{C_{\mathrm{mem}}+C_{\mathrm{f}}}}_{\text{input}} + \underbrace{\frac{C_{\mathrm{f}}}{\tau_{\mathrm{A}}(C_{\mathrm{mem}}+C_{\mathrm{f}})}(w_\infty(v,\theta_{\mathrm{A}})-w)}_{\text{capacitive feedback}} - \underbrace{\frac{I_{\mathrm{fb}}(v,w,\theta_{\mathrm{T}})}{(C_{\mathrm{mem}}+C_{\mathrm{f}})}}_{\text{transistor feedback}}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\underbrace{\frac{1}{\tau_{\mathrm{A}}}}_{1/\text{time constant}}\ w + \underbrace{\frac{w_\infty(v,\theta_{\mathrm{A}})}{\tau_{\mathrm{A}}}}_{\text{forward path}}$$

其中，$v$ 是变化缓慢的输入节点电压，其弛豫主要由$C_{\mathrm{mem}}+C_{\mathrm{f}}$ 和$g_{\mathrm{L}}$决定；而$w$ 是变化快速的输出节点电压，以时间常数$\tau_{\mathrm{A}}$向放大器特性$w_\infty$ 弛豫。从$w$ 到$v$ 的负反馈由与 $w_\infty(v,\theta_{\mathrm{A}})-w$ 成正比的电容项以及晶体管反馈电流$I_{\mathrm{fb}}(v,w,\theta_{\mathrm{T}})$实现。

- 忆阻器神经元

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\underbrace{u(x)}_{1/\text{time constant}} - \underbrace{qw}_{\text{feedback}}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\underbrace{\frac{1}{\tau}}_{1/\text{time constant}}\ w + \underbrace{\frac{V_{\mathrm{ext}}}{\tau}}_{\text{input}} - \underbrace{\frac{R_{\mathrm{ext}}}{\tau R(x)}w}_{\text{forward path}}$$

在这一实现中，$w$ 是变化快速的电压状态，而内部忆阻器状态$x$缓慢演化，并通过$R(x)$调制电导。$-qw$ 通过将输出活动耦合至慢状态来闭合负反馈回路，而$\dot{w}$ 中的前向路径贡献明确取决于$R(x)$。

- FHN模型

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = -\underbrace{a}_{1/\text{time constant}}\ v + (a+1)v^2 - v^3 - \underbrace{w}_{feedback} + \underbrace{I}_{input}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\underbrace{c}_{1/\text{time constant}}\ w + \underbrace{bv}_{forward\ path}$$

其中，$v$ 是快速变化的膜电位，$w$ 是缓慢变化的恢复变量。负反馈由$\dot{v}$中的$-w$ 项实现，而$\dot{v}$中的非线性前向通路提供兴奋性，$bv$ 耦合则推动$\dot{w}$中的恢复过程。

补充图

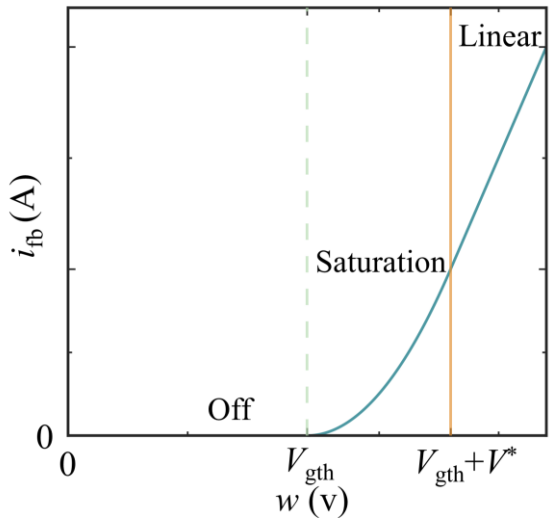


图 S1. 轴突丘模型中晶体管的 $I_{fb}(v, w, \theta_T)$ 图，显示了不同工作模式：关断、饱和和线性。该曲线使用的参数：$k$ =$10^{-5}$ A/V$^2$, $V_{gth} = 1.5$ V, $V_{dd} = 3.0$ V, $v = 0.9$ V。

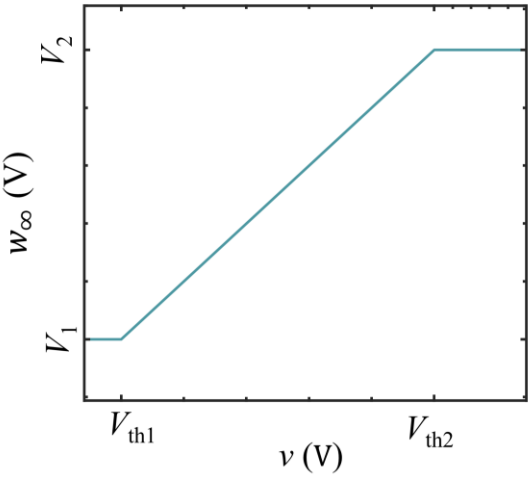


图 S2. 放大器分段传递函数 $w_\infty(v, \theta_A)$ 的图。该曲线使用的参数：$V_{th1} = 0.1$ V, $V_{th2} = 0.95$ V, $V_1 = 0.1$ V, $V_2 = 0.95$ V, $V_{dd} = 1.0$ V。

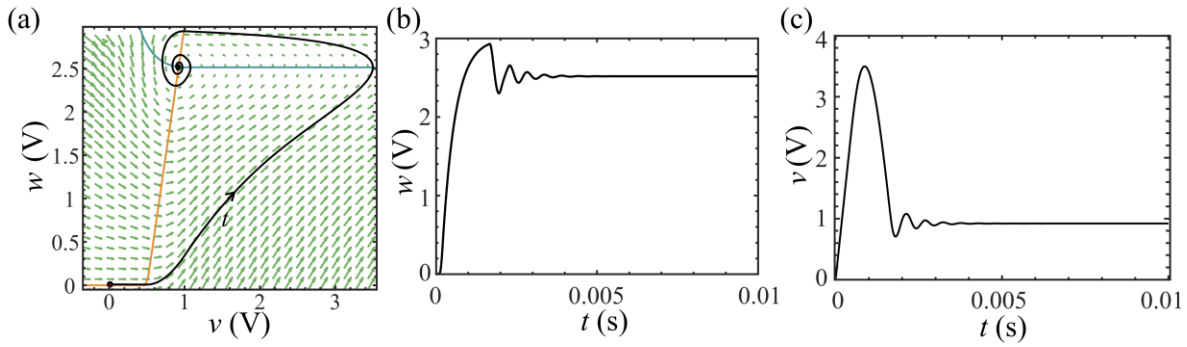


图 S3. $C_f = 0$ nF 的轴突丘模型相图，展示静息态。(a) $(v, w)$ 平面上的相图，显示趋向稳定不动点的轨迹（黑色曲线），以及相应的向量场（箭头）和零流线（蓝灰色和橙色曲线）。(b) 时域波形 $v(t)$。(c) 时域波形 $w(t)$。除非另有说明，所有参数均与正文中使用的参数相同。

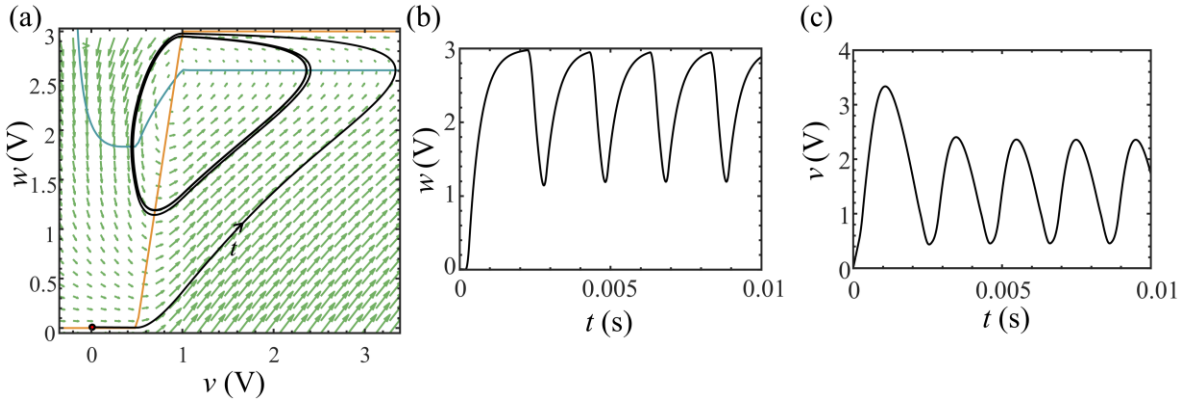


图 S4. 放电态下 $C_f = 1$ nF 的轴突丘模型相图。(a) $(v, w)$ 平面上的相图，显示稳定极限环，以及相应的向量场和零流线。黑色曲线为系统轨迹。蓝灰色和橙色曲线表示零流线，箭头表示向量场。(b) 代表性周期内的时域波形 $v(t)$。(c) 时域波形 $w(t)$，显示相应的输出节点演化。除非另有说明，所有参数均与正文中使用的参数相同。

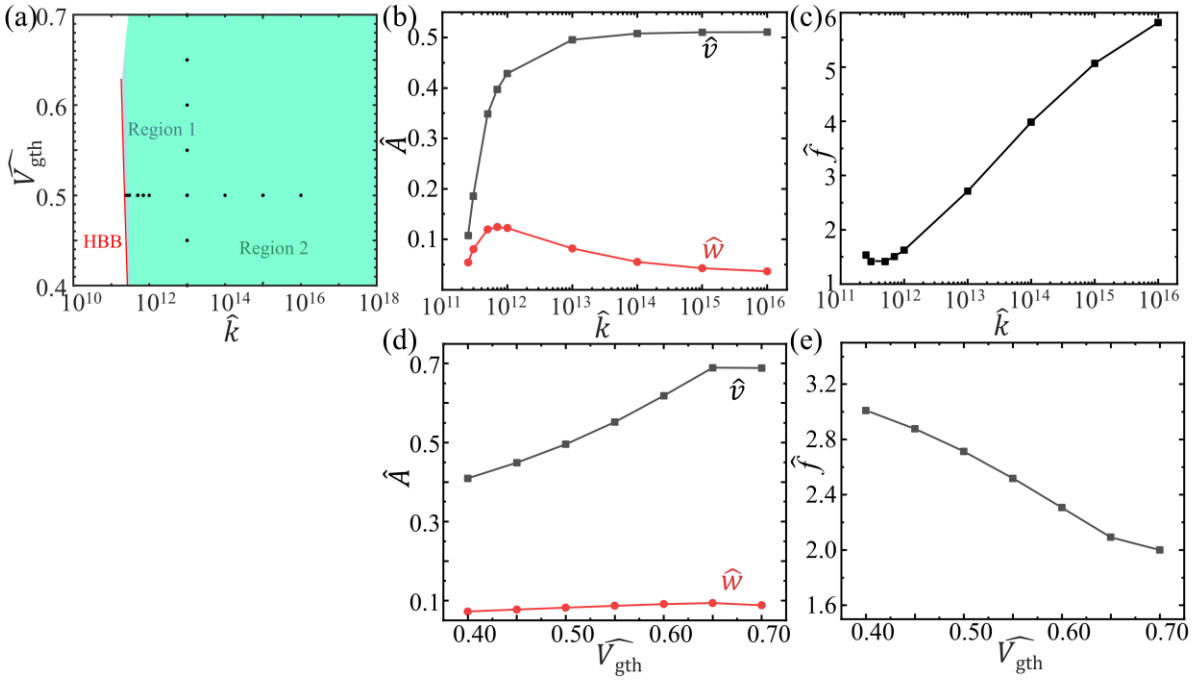


图 S5. 轴突丘模型放电的参数依赖性。(a) $(\hat{k}, \widehat{V_{\mathrm{gth}}})$ 平面上的放电域，标示产生持续尖峰放电的参数组合。不同工作区域对应的放电域以不同颜色表示。各工作区域的条件见补充信息中的注释1。红线表示 HBB。黑点表示所选参数，用于评估 $\hat{k}$ 和 $\widehat{V_{\mathrm{gth}}}$ 对放电特性的影响：$\hat{k}$ 从 HBB 向内部增加，同时 $\widehat{V_{\mathrm{gth}}} = 0.5$（水平点序列）；以及 $\widehat{V_{\mathrm{gth}}}$ 增加，同时 $\hat{k}$ 保持为 $10^{13}$ （垂直点序列）。(b, c) 沿 (a) 中标出的水平分布采样点，绘制尖峰振幅和放电率随 $\hat{k}$变化的函数关系。(d, e) 沿 (a) 中标出的垂直分布采样点，绘制尖峰振幅和放电率随 $\widehat{V_{\mathrm{gth}}}$变化的函数关系。除非另有说明，所有其他参数均与正文中使用的参数相同。

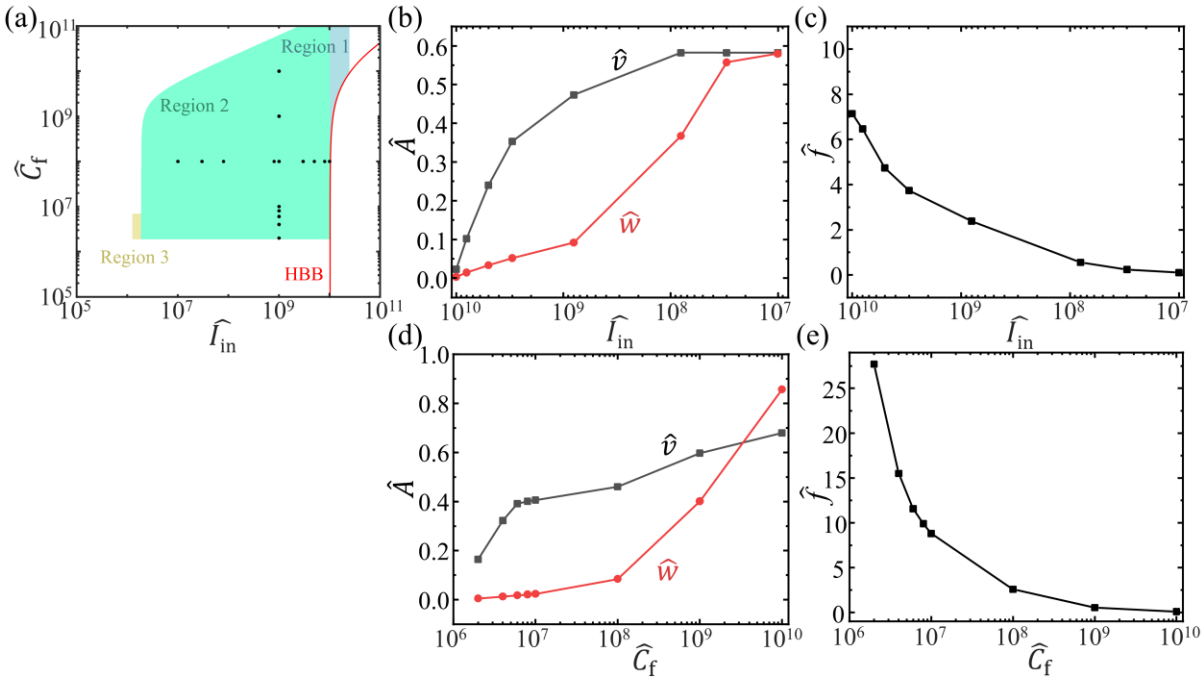


图 S6. 轴突丘模型的放电特性参数依赖性。(a) $(\widehat{I_{\mathrm{in}}}, \widehat{C_{\mathrm{f}}})$ 平面上的放电域，表示可产生持续尖峰放电的参数组合。不同工作区域的放电域以不同颜色表示。各工作区域的条件见补充信息中的注释1。红线标记 HBB。黑点标记用于评估 $\widehat{I_{\mathrm{in}}}$ 和 $\widehat{C_{\mathrm{f}}}$ 对放电特性影响的所选参数，其中 $\widehat{I_{\mathrm{in}}}$ 从 HBB 向内部递减，而 $\widehat{C_{\mathrm{f}}} = 10^8$ （水平点序列）和 $\widehat{C_{\mathrm{f}}}$ 递增，同时 $\widehat{I_{\mathrm{in}}}$ 保持 $10^9$ 不变（垂直点序列）。(b 、 c) 尖峰振幅和放电率随 $\widehat{I_{\mathrm{in}}}$ 的变化，沿 (a) 中标记的水平分布采样点进行评估。(d、e) 尖峰振幅和放电率随 $\widehat{C_{\mathrm{f}}}$ 的变化，沿 (a) 中标记的垂直分布采样点进行评估。除非另有说明，所有其他参数均与正文中使用的参数相同。

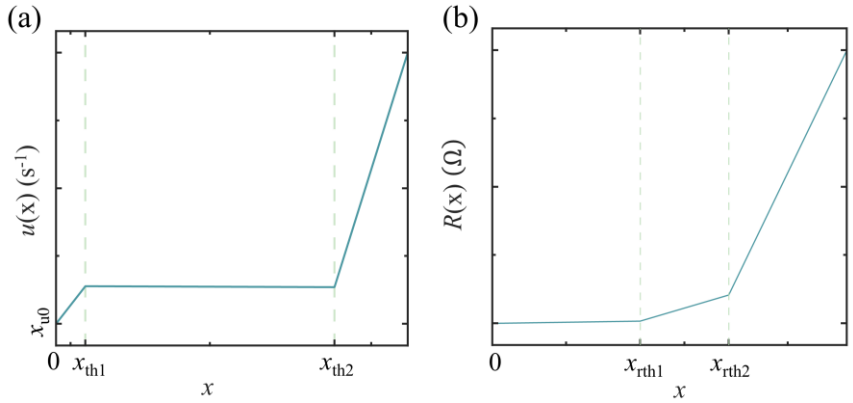


图 S7. 忆阻器神经元模型中 u(x) 和 R(x) 分段函数的曲线图。此曲线使用的参数：

$x_{\mathrm{th1}} = 0\,10$ 95 $k_2 = -0$ $k_3 =$ 。, $x_{\mathrm{th2}} = 0$。, $k_1 = 80$ V, . 200 $x_{\mathrm{u0}} = -8$ $x_{\mathrm{rth1}} = 0\,50$ $x_{\mathrm{rth2}} = 0\,80$ $k_1 = 62$ $k_2 = 1200$ $k_3 = 8440$ 2353 V, V, , ., ., ., V, V, V。

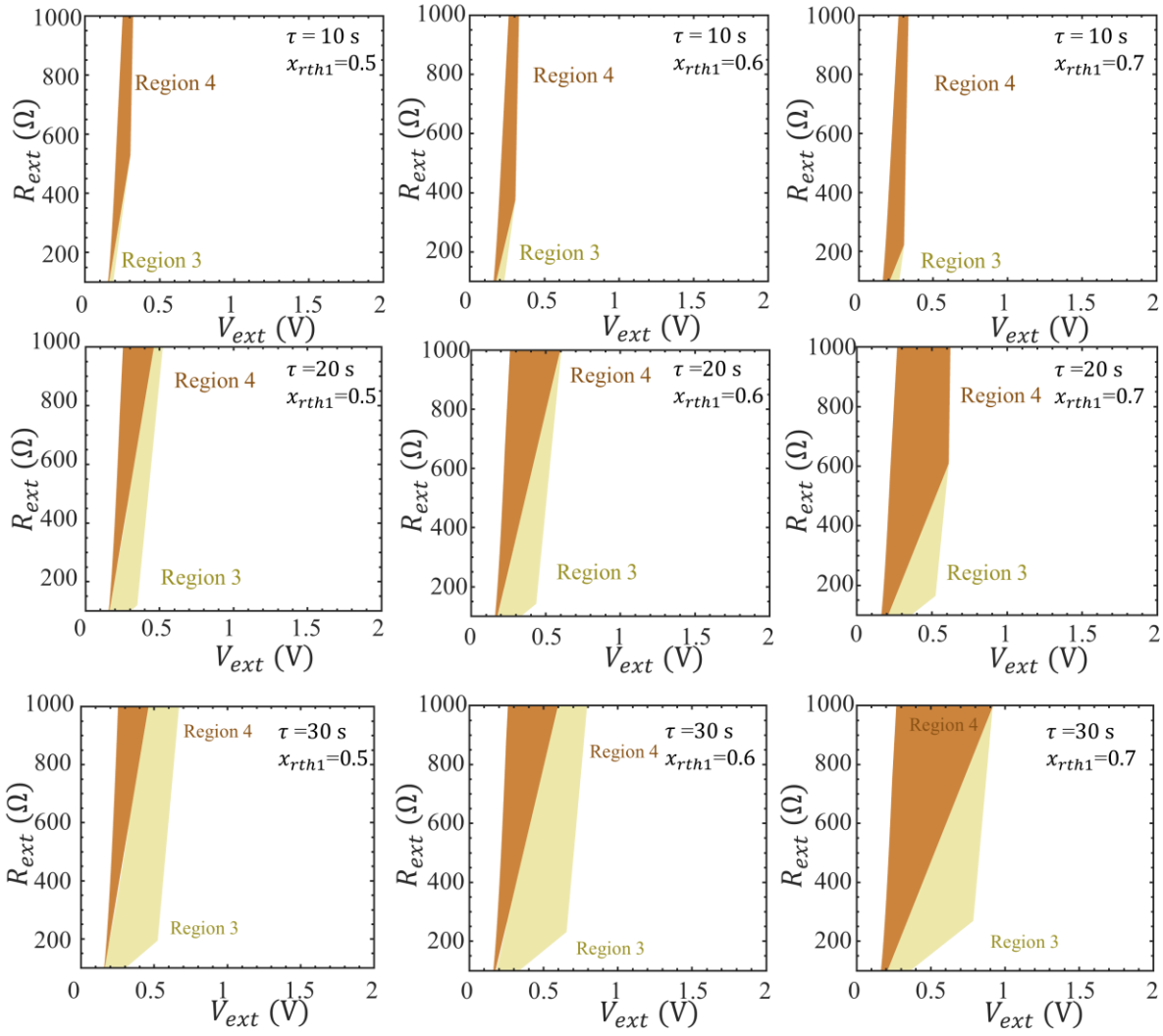


图 S8。在 $(I, c)$ 参数平面中，随 $\tau$ 和 $x_{\mathrm{rth1}}$ 变化的忆阻器神经元模型的放电域。不同工作区域的放电域以不同颜色表示。各工作区域的条件请参见补充信息中的注释 3。本组图所使用的其他参数：$x_{\mathrm{th1}} = 0\,1$ $x_{\mathrm{th2}} = 0\,95$ $x_{\mathrm{u0}} = -8$ $^{-1}$ $k_1 = 80$ $^{-1}$ $k_2 =$。、。、$-0\,2353$ $^{-1}$ $k_3 = 200$ $^{-1}$ $q = 1\,265$ $^{-1}$ $^{-1}$ $x_{\mathrm{rth2}} = 0\,8$，$_{\mathrm{r1}} = 62\ \Omega$ $k_{\mathrm{r2}} = 1200\ \Omega$ s、s、。s、s、。V s、。k、以及 $k_{\mathrm{r3}} = 8440\ \Omega$。

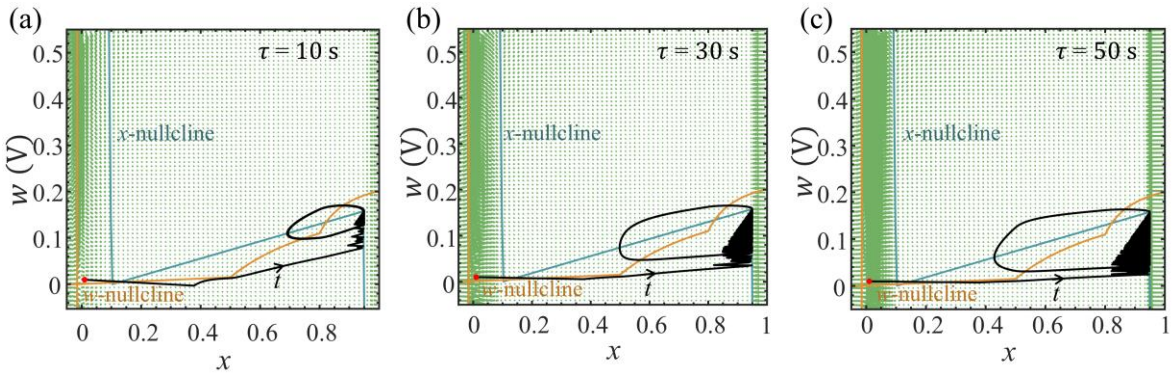


图 S9. 相图中的系统轨迹显示了忆阻器模型中随 $\tau$ 从 10 s（a）和 30 s（b）增加到 50 s（c）时的放电态。可以看出，轨迹在状态空间的右侧到达边界（$x = 0.95$），该边界由忆阻器器件可达到的 x 最大范围定义。除非另有说明，所有其他参数均与正文中使用的参数相同。

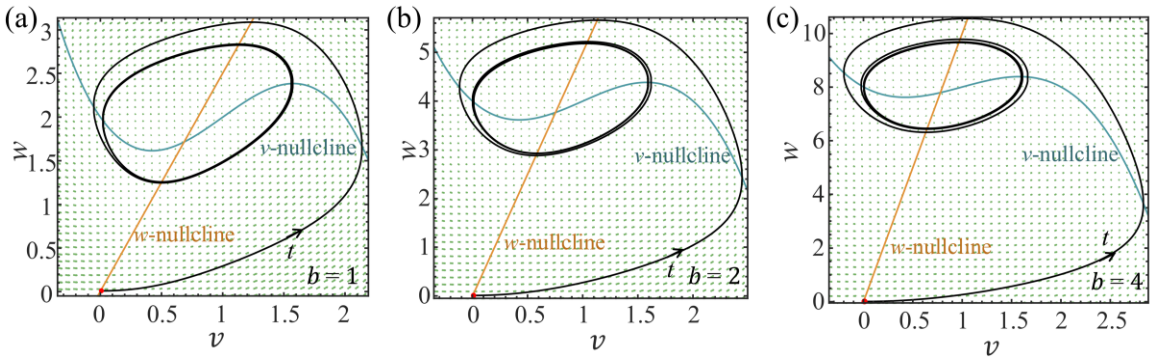


图 S10. 相图中的系统轨迹显示了 FHN模型中随 $b$ 从 1（a）和 2（b）增加到 4（c）时的放电态。该组图使用的其他参数为：$a = 2$、 $I = 2$和$c = 0.25$。

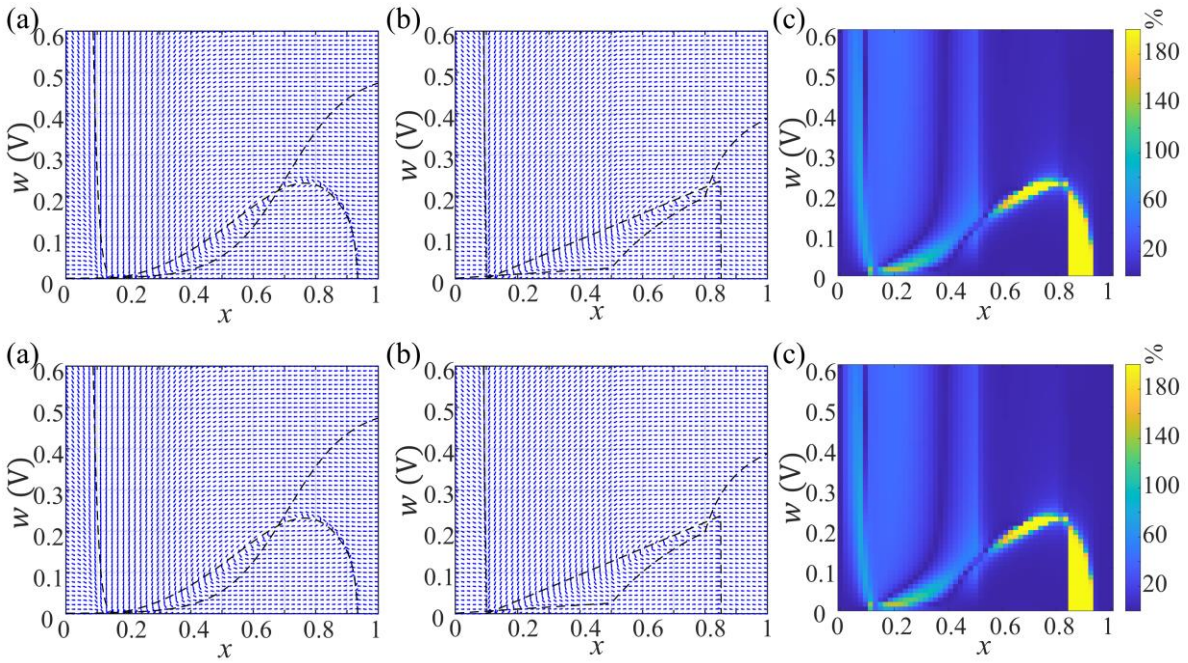


图 S11 忆阻器模型相图中原始模型与分段近似模型的比较。(a) 原始模型的相图，显示向量场 $f_o(v,w)$ 及相应的零流线。(b) 在相同参数设置和绘图范围下，分段模型的相图，显示向量场 $f_{pw}(v,w)$ 及相应的零流线。(c) 相量偏差逐点模值的热图，

$\|\Delta f\ (v,w)\| = \frac{\|f_{pw}(v,\ w)-f_o(v,\ w)\|}{\|f_o(v,\ w)\|} \times 100\%$，根据原始系统与分段系统的归一化向量场之间的相对差异计算得出。除非另有说明，所有其他参数均与正文中使用的参数相同。