arXiv:2601.02119v1 [math.GT] 5 Jan 2026

Khovanov 同调的计算复杂度

Tuomas Kelom¨aki 和 Dirk Sch¨utz

2026年1月6日

摘要

已知计算一般链环图的琼斯多项式是 #P-困难的，而将计算限制在固定股数的辫子闭包上，则可以使用多项式时间算法。我们研究了计算辫子 Khovanov 同调的多项式时间算法，并证明存在适用于三股辫的此类算法。相反，我们证明 Bar-Natan 扫描算法在限制于某些简单的三股辫类时，需要指数时间。对于更一般的辫子，我们得到扫描算法的一种变体，它能在多项式时间内计算有限个同调次数上的 Khovanov 同调。我们还证明了 Khovanov 同调群的秩的上界和下界。

1 引言

Khovanov 最初的构造给出了一个链环不变量——Khovanov 同调。理论上，对于任意链环图 [Kho00], ，都可以计算出它；但所需步骤数会随着交叉点数量呈指数级增长。几年后，Bar-Natan 关于辫结的研究使得实际计算具有 50 个或更多交叉点的链环的 Khovanov 同调成为可能 [BN07], ，而仅凭定义进行计算则是不可能的。算法的这一进展为四维拓扑开辟了新的途径：在 [FGMW10] 中，人们提出了一种可能的（但尚未实现的）方案，试图推翻光滑四维庞加莱猜想；而在 [Pic20] 中，计算机计算帮助证明了 Conway 纽结不是光滑切片的。

链环的琼斯多项式 $J_L(q)$ 可以很容易地从其 Khovanov 同调 Kh(L) 中恢复，因此计算 Khovanov 同调至少与计算琼斯多项式一样困难。通过将链环图 L 的琼斯多项式计算转化为求值一个相关平面图的 Tutte 多项式，Jaeger、Vertigan 和 Welsh 证明，计算 $J_L(q)$ 是关于 L [JVW90] 中交叉点数量的 #P-困难问题。因此，存在一种多项式时间算法，能够根据给定的链环图 L 计算其 Khovanov 同调 Kh(L)，这种可能性微乎其微。另一方面，Morton 和 Short 证明，对于股数固定的闭合辫子，其琼斯多项式可以在多项式时间内计算 [MS90]。这引出了以下猜想，也是本文的主要动机。

猜想 1.1 (Przytycki, Silvero [PS24])。 对于具有固定股数的闭辫子，其 *Khovanov* 同调的计算相对于交叉点数量具有多项式时间复杂度。

目前计算 Khovanov 同调的最先进方法是 Bar-Natan 扫描算法[BN07]。然而，存在一些相对简单的链环，会使该算法运行得非常缓慢。

定理 1.2。 *[BN07]*的扫描算法和分治算法对于链环图中的交叉点数量而言，其运行时间呈指数增长；即使将其限制在正3辫子或交错3辫子上，情况仍然如此。

这些算法运行缓慢的原因在于，存在一些三股辫，其总贝蒂数会随着交叉点数量的增加而呈指数增长。因此，任何在链复形上使用基的算法，其运行时间都必然是指数级的。与经典算法一样，较大的贝蒂数在近期对 Khovanov 同调量子算法的研究中也发挥了重要作用 [SRZ+25]。指数级增长的贝蒂数使得 [SRZ+25] 的主要算法无法在多项式时间内准确估算三股辫的 Khovanov 同调。对于其他标准量子同调算法 [SRZ+25, §3] 较大的贝蒂

数似乎是有利因素，尽管目前尚不清楚如何将其应用于 Khovanov 同调。尽管贝蒂数呈指数级增长，我们仍对 3 股辫的情形给出了猜想 1.1 的肯定回答。

定理 1.3。 猜想 *1.1* 对3股辫子成立。

第 3 节中用于证明定理 1.3 的算法，基于第二作者先前的工作 [Sch25b], 。该工作表明，闭 3 股辫子的整数 Khovanov 同调，要么可由 [CLSS22]，中的一个公式描述，要么大致分解为环面链环 $T(3,\ 3k)$ 与一个交错链环的 Khovanov 同调的直和。 [CLSS22] 也计算了同调群 $\mathrm{Kh}(T(3,\ 3k))$；而交错链环的 Khovanov 同调则可根据其琼斯多项式和签名求得。这些交错链环本身也是辫子闭合，因此可以使用 Morton 和 Short 的多项式时间算法。

链环图 L 的 Khovanov 复形 $\mathrm{CKh}(L)$ 是由有限多个有限秩 $\mathbb{Z}$-模构成的双重分次复形。将支撑 $\mathrm{CKh}(L)$ 的最小分次方块记为 $[i_{\min}, i_{\max}] \times [q_{\min}, q_{\max}]$。作为猜想 1.1 的证据，Przytycki 和 Silvero 给出了一种多项式时间算法，用于计算 4-辫子的 $\mathrm{Kh}^{*,\ q_{\min}}(L)$（以及利用对称性计算 $\mathrm{Kh}^{*,\ q_{\max}}(L)$）。$\mathrm{CKh}(L)$ 的构造给出 $i_{\min} = -n_-(L)$ 和 $i_{\max} = n_+(L)$，其中 $n_+(L)$ 和 $n_-(L)$ 分别表示 L的正交叉点数和负交叉点数。我们证明，对于任意股数的辫子，在靠近 $i_{\min}$ 和 $i_{\max}$ 的任意多个同调分次上的 Khovanov 同调，都可以在多项式时间内求得。

定理 1.4。 对于每个 k、$t \geq 0$，存在一个算法 $\mathcal{B}_{k,\ t}$ 该算法以一个在 t 股上的辫子 b 为输入，并输出该辫闭包 L_b 在同调次数$i \leq -n_-(L_b) + k$和 $i \geq n_+(L_b) - k$中的整系数 ***Khovanov*** 同调 $\mathrm{Kh}^{i,\ *}(L_b)$ 。算法 $\mathcal{B}_{k,\ t}$ 关于 b的长度在多项式时间内运行。

算法 $\mathcal{B}_{k,\ t}$ 只是 Bar-Natan 扫描算法的一个小变体。在扫描过程中，可以截断辫结的中间复形，而不会丢失与极端同调次数相关的信息。类似的技巧曾用于快速计算 s-不变量[Sch21]。即使在未截断的次数中，Khovanov超立方体复形的秩也可能呈指数增长，因此我们必须确保扫描算法中的高斯消元能够消去‘大多数’直和项。由于中间复形包含整数系数 c，需要将其存储在内存中，因此我们还需要某个多项式 p，使得对于我们所处理的所有 c，$\log_2(c) \leq p(n(L_b))$。作为证明的副产物，我们得到以下上界，其中 $n(L) = n_+(L) + n_-(L)$:

命题 1.5. 对于连通链环图 L 以及域 $\mathbb{F}$

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Kh}^{i,*}(L;\mathbb{F})) \leq 2\binom{n(L)}{i + n_-(L)}.$$

命题 1.5 的界在渐近意义下是严格的，具体而言:

命题 1.6. 设 L_t 是$(\sigma_1\sigma_3\sigma_2^4)^t\sigma_1\sigma_3$的辫闭包。对于每个 $k \geq 0$，都存在 $\varepsilon > 0$，使得

$$\liminf_{t\to\infty}\left(\frac{\mathrm{rank}(\mathrm{Kh}^{n(L_t)-k,*}(L_t))}{\binom{n(L_t)}{n(L_t)-k}}\right) \geq \varepsilon.$$

命题 1.6 是一个非消失结果，因此要证明它，我们需要构造大量不同的同调循环。为此，我们取 L_t 的 Khovanov 复形，并在其上采用第一作者早期工作 [Kel25] 中的 Morse 匹配。由此得到一个链同伦等价的 Morse 复形，其中有足够多份 $\mathbb{Z}$ 分裂出来。对于奇 Khovanov 同调，也证明了相同的渐近下界。

猜想 1.1 是否成立? 正如 [PS24], 所述，证明猜想 1.1 将彻底改变关于 Khovanov 同调的猜想提出与检验方式。尽管定理 1.3 让人对这一猜想成立抱有希望，但其证明高度依赖于三股辫的特殊结构，似乎很难轻易推广到更多股。此外，该证明揭示出，任意闭 3 股辫子的 Khovanov 同调大致分解为两部分：一部分来自交替辫词，另一部分来自环面链词。即使在 4-辫的情形下，其一般结构似乎也复杂得多。例如， [MPS+18] 构造出了含有 3 阶挠元的正 4-辫

其 Khovanov 同调中还存在其他含有阶数高达 2^k （对于 k 而言）23 的挠元的例子。此外，计算表明，四股辫环面链环的 Khovanov 同调比其三股对应物复杂得多。

要否定猜想 1.1，就需要构造一个归约，将其归约到一个已知的 NP困难问题。作者尚未发现任何有希望的此类归约候选。

致谢： 作者谨此感谢 Qiuyu Ren 陈述命题 8.4 的证明，感谢 Ilmo Salmenper¨a 分享他对量子算法的见解，并感谢 Marithania Silvero 对极端同调提出的意见。TK 得到了芬兰科学与文学学院 V¨ais¨al¨a 基金的资助。

2 预备知识

本节将确定 Khovanov 复形及其若干变体的记号，并说明关于辫子和代数离散 Morse 理论的约定。

称交换环 R 上的一个 ***Frobenius*** 代数 A，是指一个包含R作为子环的交换环 A，并配备一个 R-模映射 $\varepsilon\colon A \to R$ 以及一个 A- 双模映射 $\Delta\colon A \to A \otimes_R A$；后者满足余结合性和余交换性，且 $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id}$。

在 A作为 R上的秩为 2 的自由模的情形下，Khovanov [Kho06] 证明，对于链环图 L，可以在 R 上定义上链复形 $C(L)$，其同调是一个链环不变量。导出 Khovanov 原始链环同调 [Kho00]的 Frobenius 代数为 $A = \mathbb{Z}[X]/(X^2)$，其中 $\varepsilon(1) = 0$、$\varepsilon(X) = 1$，且 $\Delta(1) = 1 \otimes X + X \otimes 1$。这里可以通过 $|1|_q = 1$ 和 $|X|_q = -1$为 A 赋予 q分次，从而将***Khovanov*** 复形 $\mathrm{CKh}(L)$变为双分次上链复形。我们用 $\mathrm{CKh}^{i,j}(L)$表示同调分次和 q分次，并用 $\mathrm{Kh}^{i,j}(L)$表示相应的同调群。如果要表示环 R中的系数，也可以省略分次，或写作 $\mathrm{Kh}^{i,j}(L;R)$。

对于辫结 T，也有 Khovanov 复形；我们主要采用 Bar-Natan 的点标记版本[BN05]。设 $B \subset \mathbb{R}^2$ 为紧曲面，$\dot{B} \subset \partial B$ 为与空集余边的定向零维紧流形。我们用 $\mathcal{C}ob_\bullet(B,\ \dot{B})$ 表示这样一个范畴：其对象是紧致光滑的一维子流形 $S \subset B$，并在 $\partial S = \dot{B}$中与 ∂B 横截相交。对象 S_0 与 S_1 之间的态射是连接 $S_0 \times \{0\}$ 和 $S_1 \times \{1\}$、嵌入于 $B \times [0,1]$ 中的点标记协边的同痕类，且在 $B \times [0,1]$ 附近为乘积余边。这里的“点标记”是指协边内部有有限个指定点，这些点可以在其中自由移动。

若 R 是一个交换环，我们用 $\mathcal{C}ob^R_{\bullet/l}(B,\ \dot{B})$ 表示如下加性范畴：其对象是有限生成的自由且带基的 R-模，其中基元素是对象 $q^j S$，且 S 是 $\mathcal{C}ob_\bullet(B,\ \dot{B})$ 中的一个对象，并且 $j \in \mathbb{Z}$。这里，q^j 表示 q-分次中的移位。态射由矩阵 (M_{nm}) 给出，其中每个矩阵项 M_{nm} 是由 S_n 与 S_m 之间的态射集生成的自由 R-模中的一个元素，该态射集取自 $\mathcal{C}ob_\bullet(B,\ \dot{B})$，并模去图 1 中的关系。范畴 $\mathcal{C}ob^R_{\bullet/l}(B,\ \dot{B})$ 具有一个去环同构，见图 2；它是我们许多计算的核心。

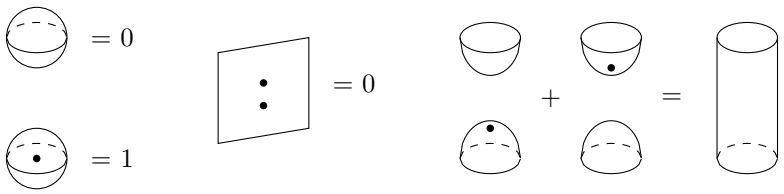


图 1：$\mathcal{C}ob^{\mathbb{Z}}_{\bullet/l}(B,\ \dot{B})$ 的点关系。我们将最左边的两个称为球面关系，中间的称为双点关系，右边的称为割颈关系。

对于定向交叉 $c \in \{\nwarrow\!\!\nearrow, \nearrow\!\!\nwarrow\}$，我们将 c 的缠结复形（即 c 的 Bar-Natan 复形）记为 $[\![c]\!]$，其定义如下：

$$[\![\nwarrow\!\!\nearrow]\!] = \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow u^0q^1\,)\,(\ \xrightarrow{\text{saddle}}\ u^1q^2 \asymp \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

$$[\![\nearrow\!\!\nwarrow]\!] = \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow u^{-1}q^{-2} \asymp \xrightarrow{\text{saddle}}\ u^0q^{-2}\,)\,(\ \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

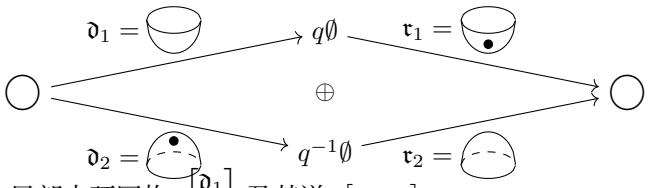


图 2：局部去环同构 $\begin{bmatrix}\mathfrak{d}_1\\ \mathfrak{d}_2\end{bmatrix}$ 及其逆 $\begin{bmatrix}\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2\end{bmatrix}$。

取值于加性范畴 $\mathcal{C}ob^R_{\bullet/l}(B, \dot{B})$ 上，其中 $\dot{B}$ 是四个点，其定向由 c 诱导。这里，u^i 表示同调次数，q^j 表示 q 次数。

范畴 $\mathcal{C}ob^R_{\bullet/l}(B,\ \dot{B})$ 的复合性质良好，参见 [BN05, §5], ，这使我们能够在复形 $[\![c_1]\!]$ 和 $[\![c_2]\!]$之间构造张量积，进而得到定义在 $\mathcal{C}ob^R_{\bullet/l}(B,\ \dot{B})$ 上的缠结复形 $[\![T]\!]$ ，其中 $\dot{}$任何嵌入于 B 、端点由 B给出的切络图 T 均适用。

给定字母表 $\{\sigma_i, \sigma_i^{-1} \mid 1 \le i \le n-1\}$ 上的一个单词 w （其中 $n \ge 2$），我们为每个 $\sigma_i^{\pm}$ 取一个标准缠结，如图 3 所示，并将它们从上到下叠放，由此得到缠结 T_w。这样便得到一个由 n股组成的辫子，它可以闭合成一个链环。

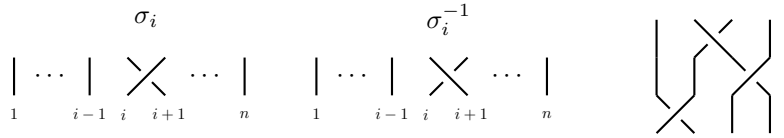


图 3： σ_i、 σ_i^{-1} 和 $\sigma_1\sigma_3\sigma_2^{-1}$对应的辫结。

我们注意到，我们对辫子图的约定会得到[Mur74]中辫子图的镜像。我们采用这一约定的原因是，希望正辫子词产生的链环，其 Khovanov 同调集中在非负同调次数上。

此外，切络图 T_w 位于一个矩形内，矩形底边有 n 个点，顶边有 n 个点。对于定义 Khovanov 复形所依据的相应范畴，我们简记为 $\mathcal{C}ob^R_{\bullet/l}(B^n_n)$。在后续章节中，紧曲面 $B \subset \mathbb{R}^2$ 就是一个圆盘，其 $\dot{B}$ 由 $2n$ 个点组成。届时，我们将 $\mathcal{C}ob^R_{\bullet/l}(2n)$简记为 $\mathcal{C}ob^R_{\bullet/l}(B, \dot{B})$。

2.1 高斯消元与代数离散 Morse 理论 y

下面这个标准引理是简化组合链复形的关键工具，无论从理论角度还是算法角度来看都是如此。

引理 2.1（高斯消元）。设 (C, d) 是加性范畴 $\mathfrak{C}$ 上的链复形。假设对于 n，链空间 $C^n = C_1^n \oplus C_2^n$ 和 $C^{n+1} = C_1^{n+1} \oplus C_2^{n+1}$ 以及微分 d^{n-1}、 d^n 和 d^{n+1} 存在分解，使得

$$C = \quad \cdots \to C^{n-1} \xrightarrow{\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}} C_1^n \oplus C_2^n \xrightarrow{\begin{bmatrix}\varphi & \delta\\ \gamma & \varepsilon\end{bmatrix}} C_1^{n+1} \oplus C_2^{n+1} \xrightarrow{\begin{bmatrix}\mu & \nu\end{bmatrix}} C^{n+2} \to \cdots.$$

如果 $\varphi\colon\ C_1^n \to C_1^{n+1}$ 是同构，那么 C 与复形 C' 链同伦等价，该复形在同调次数 $[n-1, n+2]$ 上定义为

$$C' = \quad \cdots \to C^{n-1} \xrightarrow{\beta} C_2^n \xrightarrow{\varepsilon - \gamma\varphi^{-1}\delta} C_2^{n+1} \xrightarrow{\nu} C^{n+2} \to \cdots$$

在这些次数之外， C' 与 C 一致。

对大型链复形 C 应用一次高斯消元通常不够，还需要反复应用引理 2.1，才能得到对 C的合理描述。由于高斯消元

会在剩余直和项之间引入新的态射，因此，在经过若干次其他高斯消元后， C 的同构是否仍可消去，并非显而易见。代数离散 Morse 理论 [Sk¨o06]提供了一个框架，给出了反复应用引理 2.1 的充分条件，并描述了由此得到的复形。

基链复形是加性范畴 $\mathfrak{C}$ 上的链复形 $(C,\ d)$，并且在每个链空间 C^i上都有一个固定的直和分解 $C^i = \bigoplus_k C^i_k$。链空间的分解也给出了微分的分解：我们将这些映射称为

$$d_{C^{i+1}_k, C^i_j} \colon C^i_j \to C^{i+1}_k, \quad d_{C^{i+1}_k, C^i_j} = \pi d^i \iota$$

C 的矩阵元，其中 ι和 π 是与 C^i_j 和C^{i+1}_k 相关联的典范嵌入和投影。基复形 C 诱导出一个有向图 $G(C) = (V,\ E)$，其顶点 V是直和项，而有向边 E 是 C 的非零矩阵元。反转边的一个子集 $M \subset E$，可得到另一个图 $G(C,\ M) = (V',\ E')$，其中有 $V' = V$，并且

$$E' = (E \setminus M) \cup \{b \to a \mid (a \to b) \in M\}.$$

我们称 M 为 C上的 ***Morse*** 匹配，当且仅当

1. M 是有限的。
2. M 是一个匹配，即其边两两不相邻。
3. 对于每条边 $f \in M$，相应的矩阵元 f 在 $\mathfrak{C}$ 中是一个同构。
4. $G(C,\ M)$ 没有有向环。

图 $G(C,\ M)$ 可以视为一个范畴，其对象和态射分别是 $G(C,\ M)$ 的顶点和有向路径。由此，我们可以定义一个函子 $R\colon\ G(C,\ M) \to \mathfrak{C}$，其在顶点上的定义为 $R(C^i_k) = C^i_k$。对于单条边，如果 $f \notin M$，则令 $R(f) = f$；如果 $g \in M$，则令 $R(g) = -g^{-1}$；对于更长的路径，我们将 R 函子性地延拓。若 M 是 C 上的 Morse 匹配，则可以定义基于 ***Morse*** 复形 $(M(C)\ \partial)$，其直和项是 C 中未被 M 匹配的直和项。微分 ∂^i 通过其矩阵元描述如下

$$\partial^i_{B,A} = \sum_{p \in \{\text{paths: } A \to B\}} R(p)$$

其中， A 和 B 分别是 C^i 和 C^{i+1} 的未匹配胞腔。

定理 2.2 (Sk¨oldberg [Sk¨o06])。 若 M 是 C上的 ***Morse*** 匹配，则 $C \simeq M(C)$。

证明思路。 对 M的同构归纳地应用引理 2.1。条件 4 确保经过 k 次消去后，第$k+1$个同构仍然是同构。 □

Morse 匹配的四个条件中，证明 (2) 通常很容易，而且它大大简化了 $G(C,\ M)$ 的组合结构。若 (2) 成立，则不存在能够下降两个同调次数的路径；要证明 (4)，只需证明不存在在两个相邻同调次数之间曲折往返的环。类似地，对 Morse 复形 $M(C)$ 的微分 ∂ 有贡献的所有路径，都必须在相邻的同调次数之间曲折往返。

3 三股辫的 Khovanov 同调多项式 ti me

3 股辫群记作 $\mathbf{B}_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle$。我们将元素记为$\Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$，因此 Δ^2 生成了$\mathbf{B}_3$的中心。

我们算法的第一步是将单词 $w \in \mathbf{B}_3$ 转化为其 Murasugi 标准形。回顾一下，共轭类的 Murasugi 标准形由以下形式给出

$$\Omega_0 = \{\Delta^{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\},$$
$$\Omega_1 = \{\Delta^{2k}\sigma_1\sigma_2 \mid k \in \mathbb{Z}\},$$
$$\Omega_2 = \{\Delta^{2k}(\sigma_1\sigma_2)^2 \mid k \in \mathbb{Z}\},$$
$$\Omega_3 = \{\Delta^{2k+1} \mid k \in \mathbb{Z}\},$$
$$\Omega_4 = \{\Delta^{2k}\sigma_1^{-p} \mid k, p \in \mathbb{Z}, p > 0\},$$
$$\Omega_5 = \{\Delta^{2k}\sigma_2^{q} \mid k, q \in \mathbb{Z}, q > 0\},$$
$$\Omega_6 = \{\Delta^{2k}\sigma_1^{-p_1}\sigma_2^{q_1}\cdots\sigma_1^{-p_r}\sigma_2^{q_r} \mid k, r, p_i, q_i \in \mathbb{Z}, r, p_i, q_i > 0\}.$$

文献 [Mur74, Prop.2.1] 证明，任意单词 $w \in \mathbf{B}_3$ 都共轭于 $\Omega_0 \cup \cdots \cup \Omega_6$中的一个元素。我们首先要确保能够在关于 w 长度的多项式时间内求得这种标准形。我们用 $|w|$ 表示单词 w 的长度。

命题 3.1. 存在一个算法 $\mathcal{A}_{Mnf}$，它将单词 $w \in \mathbf{B}_3$ 转换为其 *Murasugi* 标准形 $N(w)$，且其运行时间相对于 w 的长度为线性时间。此外，$N(w)$ 作为 Δ、σ_1、σ_2 中的单词，其长度关于 $|w|$ 呈线性有界。

证明。我们紧密沿用 [Mur74，命题 2.1]，的证明，并将其转化为具有所需性质的算法。

辫群 $\mathbf{B}_3$ 与 $G = \langle a, b \mid a^2 = b^3\rangle$ 同构，该同构 $\varphi\colon G \to \mathbf{B}_3$ 由 $\varphi(a) = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$ 和 $\varphi(b) = \sigma_1\sigma_2$ 给出。其逆映射满足 $\varphi^{-1}(\sigma_1) = b^{-1}a$ 和 $\varphi^{-1}(\sigma_2) = a^{-1}b^2$。记 $c = a^2 = b^3$ 为生成 G 中心的元素。于是

$$\varphi^{-1}(\sigma_1) = c^{-1}b^2a, \quad \varphi^{-1}(\sigma_1^{-1}) = c^{-1}ab, \quad \varphi^{-1}(\sigma_2) = c^{-1}ab^2, \quad \varphi^{-1}(\sigma_2^{-1}) = c^{-1}ba,$$

于是我们得到 $\varphi^{-1}(w) = c^{-|w|}v_1\cdots v_{|w|}$，其中每个 $v_i \in \{b^2a, ab, ab^2, ba\}$。$a, b, c$ 中 $\varphi^{-1}(w)$ 的长度至多为 $4|w|$。有些 v_iv_{i+1} 可能包含 a^2 或 b^3，在这种情形下，我们用 c 替换它们，并将其移到最前面。也就是说，我们可以将 $\varphi^{-1}(w)$ 写成

$$c^n, c^na, c^nb^l, \text{ or } c^na^{\varepsilon_1}b^{l_1}ab^{l_2}\cdots ab^{l_m}a^{\varepsilon_2}, \tag{1}$$

其中有 $n \in \mathbb{Z}$, $l, l_1, \ldots, l_m \in \{1, 2\}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}$。此外，这个单词在 a, b, c 中的长度仍至多为 $4|w|$，并且这种形式可以在关于 $|w|$ 的线性时间内得到。

我们希望得到 $\varphi^{-1}(w)$ 与其中一个共轭

$$c^n, c^na, c^nb^l, \text{ or } c^nab^{l_1}ab^{l_2}\cdots ab^{l_m}, \tag{2}$$

也就是说，在 (1) 中最后一个单词的情形下，$\varepsilon_1 = 1$ 和 $\varepsilon_2 = 0$。我们来检查这个单词的其他情形。如果 $\varepsilon_1 = 0$ 和 $\varepsilon_2 = 1$，则有

$$c^nb^{l_1}ab^{l_2}\cdots ab^{l_m}a \sim c^nab^{l_1}\cdots ab^{l_m},$$

其中 $\sim$ 表示共轭关系。后者具有形式 (2)。

若 $\varepsilon_1 = 0 = \varepsilon_2$，则有

$$c^nb^{l_1}ab^{l_2}\cdots ab^{l_m} \sim c^nab^{l_2}\cdots ab^{l_m+l_1}$$

其中 $l_m + l_1 \in \{2, 3, 4\}$。若 $l_m + l_1 = 2$，则其具有形式 (2)。若 $l_m + l_1 = 4$，我们会得到一个额外的 c，但它也具有形式 (2)。若 $l_m + l_1 = 3$，我们会得到另一个 c，并得到情形 $\varepsilon_1 = 1 = \varepsilon_2$，但其中 m被 $m-2$替换。注意，我们可以假设 $m \geq 2$，因为对于 $m = 1$，原词为 c^nb^l。此外，若$m = 2$，现在得到单词 $c^{n+1}a^2 = c^{n+2}$，它也具有形式 (2)。

因此，现在若 $\varepsilon_1 = 1 = \varepsilon_2$，则有

$$c^nab^{l_1}\cdots ab^{l_m}a \sim c^na^2b^{l_1}\cdots ab^{l_m} = c^{n+1}b^{l_1}\cdots ab^{l_m},$$

这使我们回到了情形 $\varepsilon_1 = 0 = \varepsilon_2$。不过，至多经过 m 步，我们就能使 $\varphi^{-1}(w)$具有形式 (2)。

注意，$\varphi(c) = \Delta^2$, $\varphi(ab) = \Delta^2\sigma_1^{-1}$和 $\varphi(ab^2) = \Delta^2\sigma_2$，因此将 φ 应用于（2）中的单词，会得到 $\Omega_0, \ldots, \Omega_6$，中的某一个，这就是所需的标准形 $N(w)$。 □

对于 Ω_0,Ω_1,Ω_2 和 Ω_3 中的单词，相应辫子的辫闭包的整系数 Khovanov 同调已在 [CLSS22, Cor.5.7] 中明确给出。对于 Ω_4 和 Ω_5，，整系数 Khovanov 同调可以通过 [Kel24, Alg.1] 得到。我们将采用一种略有不同的方法，使用 [Sch25b]，，并用环面链环的 Khovanov 同调和 w 的辫闭包的 Khovanov 同调来表示 $\Delta^{2k}w \in \Omega_4 \cup \Omega_5 \cup \Omega_6$ 的辫闭包的 Khovanov 同调。

定理 3.2。设 L 是与单词 $\Delta^{2k}\sigma_1^{-l}$对应的辫闭包，其中 k、$l \geq 1$。那么

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kh}^{4k,12k-l\pm1}(L) &= \mathbb{Z}\\
\mathrm{Kh}^{4k-1,12k-l-1}(L) &= \begin{cases} \mathbb{Z} & l=1,\\ 0 & l\geq 2,\end{cases}\\
\mathrm{Kh}^{4k-1,12k-l-3}(L) &= \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & l=1,\\ 0 & l\geq 2,\end{cases}\\
\mathrm{Kh}^{4k-2,12k-l-3}(L) &= \begin{cases} 0 & l=1,\\ \mathbb{Z}^2 & l=2,\\ \mathbb{Z} & l\geq 3,\end{cases}\\
\mathrm{Kh}^{4k-2,12k-l-5}(L) &= \begin{cases} \mathbb{Z} & l=1,\\ \mathbb{Z}^2 & l=2,\\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & l\geq 3,\end{cases}\\
\mathrm{Kh}^{4k-3,12k-l-7}(L) &= \begin{cases} 0 & l\leq 2,\\ \mathbb{Z} & l\geq 3,\end{cases}\\
\mathrm{Kh}^{4k-4,12k-l-7}(L) &= \begin{cases} \mathbb{Z} & l\leq 3,\\ \mathbb{Z}^3 & l=4,\\ \mathbb{Z}^2 & l\geq 5,\end{cases}\\
\mathrm{Kh}^{4k-4,12k-l-9}(L) &= \begin{cases} \mathbb{Z} & l\leq 3,\\ \mathbb{Z}^2 & l=4,\\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & l\geq 5.\end{cases}
\end{aligned}$$

对于任意整数 j，我们有

$$\mathrm{Kh}^{4k-5,j}(L) = \mathrm{Kh}^{4k-5,j+l}(T(3,3k)) \oplus \mathrm{Kh}^{-5,j-12k+1}(T(2,-l)),$$

对于任意整数 $i \leq 4k-6$ 和 j，我们有

$$\mathrm{Kh}^{i,j}(L) = \mathrm{Kh}^{i,j+l}(T(3,3k)) \oplus \mathrm{Kh}^{i-4k,j-12k+1}(T(2,-l)) \oplus \mathrm{Kh}^{i-4k,j-12k-1}(T(2,-l)).$$

若 $k=1$，我们还有

$$\mathrm{Kh}^{0,12-l-5}(L) = \begin{cases} 0 & l\leq 3,\\ \mathbb{Z} & l\geq 4,\end{cases}$$

若 $k \geq 2$，我们还有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kh}^{4k-3,12k-l-3}(L) &= \mathbb{Z}\\
\mathrm{Kh}^{4k-3,12k-l-5}(L) &= \begin{cases} \mathbb{Z} & l\leq 3,\\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & l\geq 4.\end{cases}
\end{aligned}$$

在所有其他双分次下，同调群均为0。

我们将此定理的证明推迟到下一节。

定理 3.3. 设 L 是对应于单词 $\Delta^{2k}\sigma_2^l$ 的辫闭包，其中 k、$l \geq 1$。对于 $i < 4k$，我们有

$$\mathrm{Kh}^{i,j}(L) = \mathrm{Kh}^{i,j-l}(T(3,3k)).$$

对于 $i > 4k+1$，我们有

$$\mathrm{Kh}^{i,j}(L) = \mathrm{Kh}^{i-4k,j-12k+1}(T(2,l)) \oplus \mathrm{Kh}^{i-4k,j-12k-1}(T(2,l)).$$

其他非零同调群由下式给出

$$\begin{aligned}\mathrm{Kh}^{4k,12k+l-3}(L) &= \mathbb{Z},\\ \mathrm{Kh}^{4k,12k+l-1}(L) &= \mathbb{Z}^2,\\ \mathrm{Kh}^{4k+1,12k+l+1}(L) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\\ \mathrm{Kh}^{4k+1,12k+l+3}(L) &= \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

该定理可直接由 [Sch25b，定理 6.4] 得出。

定理 3.4。设 $w = \sigma_1^{-p_1}\sigma_2^{q_1}\cdots\sigma_1^{-p_r}\sigma_2^{q_r}$ 的正整数为 r、p_1、q_1、.....、p_r、q_r，设 L_w 是与 w 对应的辫闭包，L 是与 $\Delta^{2k}w$ 对应的辫闭包，且 $k \geq 1$。那么，对于整数 $i \neq 4k$、$4k+1$ 和 j，有

$$\mathrm{Kh}^{i,j}(L) = \mathrm{Kh}^{i,j-t}(T(3,3k)) \oplus \mathrm{Kh}^{i-4k,j-12k}(L_w), \tag{3}$$

with

$$t = q_1 + \cdots + q_r - (p_1 + \cdots + p_r).$$

其余非零同调群为

$$\begin{aligned}\mathrm{Kh}^{4k,12k+t-1}(L) &= \mathrm{Kh}^{0,t-1}(L_w),\\ \mathrm{Kh}^{4k,12k+t+1}(L) &= \mathrm{Kh}^{0,t+1}(L_w)/\mathbb{Z},\\ \mathrm{Kh}^{4k+1,12k+t+1}(L) &= \mathrm{Kh}^{1,t+1}(L_w) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\\ \mathrm{Kh}^{4k+1,12k+t+3}(L) &= \mathrm{Kh}^{1,t+3}(L_w) \oplus \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

注意，$\mathrm{Kh}^{0,\,t+1}(L_w)$ 至少包含一个 $\mathbb{Z}$ 的直和项；这里，$\mathrm{Kh}^{0,\,t+1}(L_w)/\mathbb{Z}$ 指的是去掉该 $\mathbb{Z}$ 直和项后的同调群。该定理的证明也推迟到下一节。

在这三种情形中，同调的表现都与 (3) 中相同，但有少数例外双次数。或许令人惊讶的是，与 Ω_6 对应的情形相比，与 Ω_4 对应的情形有更多例外。这是因为辫子词 σ_1^{-l} 的闭包是一个可分链环，其 Khovanov 同调不像 Ω_6 中所用交错词对应的 Khovanov 同调那样薄。

定理 3.2–3.4 假设 $k \geq 1$。对于负的 k，注意到辫词取逆会交换集合 Ω_4 和 Ω_5，，而 $\Delta^{2k}\sigma_1^{-p_1}\sigma_2^{q_1}\cdots\sigma_1^{-p_r}\sigma_2^{q_r}$的逆与 $\Delta^{-2k}\sigma_1^{-q_r}\sigma_2^{p_r}\cdots\sigma_1^{-q_1}\sigma_2^{p_1}$ 共轭。因此，我们可以通过对镜像的 Khovanov 同调进行对偶化，得到 Khovanov 同调。

$T(3,\ 3k)$ 和 $T(2,\ \pm l)$ 的 Khovanov 同调已在 [CLSS22, Cor.5.7] 和[Kho00, §6.2]，中明确给出，因此唯一尚缺的要素是$\sigma_1^{-p_1}\sigma_2^{q_1}\cdots\sigma_1^{-p_r}\sigma_2^{q_r}$的辫闭包的 Khovanov 同调。它似乎没有简单的公式，但由于这些链环是交错且不可分的，我们可以由琼斯多项式和符号推导出该同调，参见 [Shu21]。我们的辫闭包的符号为 $t = q_1 + \cdots + q_r - (p_1 + \cdots + p_r)$，参见 [Sch25b, Cor.8.3]。为方便读者，也为了说明推导 Khovanov 同调所需的时间是多项式时间，我们现在给出拟交替有向链环 L的 Khovanov 同调的显式公式，其中已知琼斯多项式和符号 $s = s(L)$。

首先要注意，琼斯多项式通常表示为变量 $t^{\frac{1}{2}}$ 的劳朗多项式。为了更贴近 Khovanov 同调，我们采用代换 $q = t^2$，并将 L 的琼斯多项式写作

$$J_L(q) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j q^j.$$

值得注意的是，$a_j = 0$，除非 $j \in 1 + |L| + 2\mathbb{Z}$，且只有有限多个 a_j 非零。约化 Khovanov 同调群可由系数 a_j 轻易得到。具体而言，根据 [MO08]，这些同调群是自由阿贝尔群，且只有在双次数 $(j,\ s+2j)$ 上的群非零，其贝蒂数为

$$\tilde{b}^{j,s+2j} = |a_{s+2j}|.$$

表达未约化 Khovanov 同调稍微困难一些。我们使用系数为 $\mathbb{Z}$ 的约化 Bar-Natan–Lee–Turner谱序列；对于拟交替链环，该谱序列在 E_2 页退化，其同调群为自由阿贝尔群，总秩为 $2^{|L|-1}$，参见 [Sch25a]。

特别地，存在一个同态 $d\colon \widetilde{\mathrm{Kh}}^{j,s+2j}(L) \to \widetilde{\mathrm{Kh}}^{j+1,s+2j+2}(L)$，满足 $d^2=0$，且相应的同调群 E^j，${}_2{}^{s+2j}$ 为自由阿贝尔群。我们将这些同调群的贝蒂数记为 $\tilde{b}^{j,s+2j}$ BLT (L)。于是 $0 \le \tilde{b}^{j,s+2j}$ BLT $(L) \le \tilde{b}^{j,s+2j}(L)$。这些数的确切值可以利用链环数确定，但目前我们只需注意到，对于奇数 j，有 $\tilde{b}^{j,s+2j}$ BLT $(L) = 0$，且 $\tilde{b}^{0,s}$ BLT$(L) \ge 1$。定义

$$\overline{b}^j = \tilde{b}^{j,s+2j}(L) - \tilde{b}^{j,s+2j}_{\mathrm{BLT}}(L).$$

引理 3.5。设 L为一个符号为 s 的拟交替有向链环。非约化 *Khovanov* 同调的贝蒂数为

$$b^{j,s+2j-1}(L) = \sum_{i=j_{\min}}^{j} (-1)^{j+i}\overline{b}^i + \tilde{b}^{j,s+2j}_{\mathrm{BLT}}(L),$$
$$b^{j,s+2j+1}(L) = \sum_{i=j_{\min}}^{j-1} (-1)^{j+i+1}\overline{b}^i + \tilde{b}^{j,s+2j}_{\mathrm{BLT}}(L).$$

其中 $j_{\min} =$ 最小值$\{j \in \mathbb{Z} \mid \tilde{b}^{j,s+2j} \neq 0\}$。其他所有贝蒂数均为 0。任何挠元的阶均为2，且唯一可能非零的挠系数为

$$t_2^{j,s+2j-1}(L) = \sum_{i=j_{\min}}^{j-1} (-1)^{j+i+1}\overline{b}^i.$$

证明。我们有长正合序列

$$0 \xrightarrow{} \mathrm{Kh}^{j,s+2j+1}(L) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Kh}}^{j,s+2j}(L) \xrightarrow{\delta} \widetilde{\mathrm{Kh}}^{j+1,s+2(j+1)}(L) \longrightarrow \mathrm{Kh}^{j+1,s+2(j+1)-1}(L) \longrightarrow 0,$$

根据 [Sch25a, Lm.5.6]，有 $\delta = 2d$。由此可得

$$b^{j,s+2j-1} = \tilde{b}^{j,s+2j} - \tilde{b}^{j-1,s+2(j-1)} + b^{j-1,s+2(j-1)+1}, \tag{4}$$

由于约化 Khovanov 同调是无挠的，因此我们有

$$b^{j,s+2j+1} = \operatorname{rank}\ker(d\colon \widetilde{\mathrm{Kh}}^{j,s+2j}(L) \to \widetilde{\mathrm{Kh}}^{j+1,s+2(j+1)}(L)).$$

注意，这里我们省略了贝蒂数中对 L 的引用。记 d^j 表示 d 定义域的同调次数。由于 $(\mathrm{Kh}^{j,s+2j}(L)$ $d^j)$ 构成一个上链复形，其同调由 $\tilde{b}^j$ BLT 确定，因此我们有

$$b^{j,s+2j+1} = \tilde{b}^j_{\mathrm{BLT}} + \operatorname{rank}(d^{j-1}) = \tilde{b}^j_{\mathrm{BLT}} + \tilde{b}^{j-1} - b^{j-1,s+2(j-1)+1}. \tag{5}$$

该陈述可通过对 j 进行归纳法得到，起始于 $j_{\min}$，并利用（4）和（5）。我们将细节留给读者。

关于挠系数的陈述，注意 $\mathrm{Kh}^{j,s+2j+1}(L)$ 是一个挠自由阿贝尔群的子群，因此是无挠的。由于 $\delta = 2d$ 且约化整系数 BLT 谱序列的第二页是无挠的，挠系数 ${t^j}_{,2}{}^{s+2j-1}$ 与秩(d^{j-1}) 相同。因此，该陈述由（5）得出。 □

定理 *1.3* 的证明。设 w 是 $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}\}$ 中的一个辫子词。由命题 3.1，我们可以在线性时间内得到 w 的 Murasugi 标准形 $N(w)$。若 $N(w) \in \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3,$，则根据 [CLSS22，推论 5.7]，可以直接得出 $L_w = L_{N(w)}$ 的 Khovanov 同调。若 $N(w) \in \Omega_4 \cup \Omega_5$，且满足 $k \neq 0$，则可根据定理 3.2 和 3.3，结合 [Kho00，第 6 节2]，得出 Khovanov 同调。若 $k = 0$，则 L_w 是一个二股环面链环与一个平凡结的分裂并，因此可根据 [Kho00，第 6 节2]，得出其 Khovanov 同调。

若 $N(w) \in \Omega_6,$，则写作 $N(w) = \Delta^{2k}v$，其中 $k \in \mathbb{Z}$ 且 $v = \sigma_1^{-p_1}\sigma_2^{q_1}\cdots\sigma_1^{-p_r}\sigma_2^{q_r}$。根据 [MS 90],，$L_v$ 的琼斯多项式可在多项式时间内求得，因此，根据引理 3.5，我们可以在多项式时间内求得 L_v 的 Khovanov 同调。注意，要计算 $\tilde{b}^j$ BLT(L_v)，我们需要确定 L_v 的连通分支数以及链环数之差。由于连通分支至多有三个，这可以在线性时间内完成。若 $k \neq 0$，则使用定理 3.4 直接读出 L_w 的 Khovanov 同调。 □

算法 1：求 3 股辫 Khovanov 同调的多项式时间算法 输入：字母表 $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}\}$ **上的辫子词** w **输出：辫闭包 Kh(**L_w**) 的 Khovanov 同调 1：求出** w **的 Murasugi 标准形** $\triangle^{2k} v \leftarrow$ **2：如果** $\triangle^{2k} v \in \mathbf{\Omega}_0 \cup \mathbf{\Omega}_1 \cup \mathbf{\Omega}_2 \cup \mathbf{\Omega}_3$ **，则 3：从** [**CLSS22, Cor.5.**7] **中读出 Kh(**L_w**)。 4：结束 if 5：如果** $\triangle^{2k} v \in \mathbf{\Omega}_4 \cup \mathbf{\Omega}_5$ **，则 6：通过对辫子取镜像并旋转来满足** $k \geq 0$ **。 7：如果** $k = 0$**，则** $L_w = T(2, l)$ $\sqcup$ **(平凡结)，并使用** [**Kho00, §6.**2] **求得 Kh(**L_w**)。 8：否则，使用** [**Kho00, §6.**2], [**CLSS22, Cor.5.**7], **、定理 3.2 和定理 3.3 求得 Kh(**L_w**)。 9：结束 if 10：如果** $\triangle^{2k} v \in \mathbf{\Omega}_6$ **，则 11：通过对辫子取镜像并旋转来满足** $k \geq 0$ **。 12：使用** [**MS**90] **的多项式时间算法计算** $J_L(q)$**，其中** $L = L_v$ **。 13：计算** L_v **的符号。 14：计算链环数，并由此求出** L_v **的 BLT 生成元。 15：使用引理 3.5 将上述结果合并，得到 Kh(**L_v**)。 16：如果** $k = 0$ **，则 Kh(**L_w**)** $=$ **Kh(**L_v**)。 17：如果** $k > 0$ **，则使用 Kh(**L_v**)、** [**CLSS22, Cor.5.**7], **和定理 3.4 求得 Kh(**L_w**)。 18：结束 if**

Morton 和 Short[MS90] 提出的用于求辫闭包琼斯多项式的算法，运行时间为立方时间。尤其是对于三股辫，该算法非常快。另一方面，Bar-Natan 的算法 [BN07]在处理某些三股辫时可能非常慢。无需考察该算法的细节，就能看出原因。主要原因在于，Bar-Natan 扫描算法和分治算法都会为一个与 Khovanov 复形链同伦等价的上链复形生成特定的基。由于有些链环的总贝蒂数呈指数级增长，这些算法处理它们时需要指数时间。

一类非常简单的此类链环是三股编织链环。对于正整数 n，编织链环 $W(3,\ n)$ 是辫子词 $(\sigma_1^{-1}\sigma_2)^n$ 所对应的三股辫的闭包。 $W(3,\ n)$ 的行列式为

$$\det(W(3,n)) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2, \tag{6}$$

参见 [JNP23，定理 2.2]。由于这些编织链环是交错的，行列式等于约化 Khovanov 同调的贝蒂数总和。

例如， $W(3,\ 20)$ 的行列式为 228,826,125；它是一个有 40 个交叉点的纽结。尝试对这个纽结运行扫描算法几乎肯定会导致内存溢出，而计算琼斯多项式则几乎瞬间就能完成。

定理 1.2 的证明。 对 $W(3,\ n)$ 应用 Bar-Natan 扫描算法或分治算法，会得到一个含有多于 det($W(3,\ n)$) 个元素的基，由此可通过标准线性代数方法确定 Khovanov 同调。由于该基按照 (6) 中的 n by 指数增长，完成此过程所需的步骤数会随着 $W(3,\ n)$ 的交叉点数呈指数增长。

现在考虑正词 $v = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^2$。那么

$$v = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1^{-1}\sigma_2 = \Delta^2\sigma_1^{-1}\sigma_2.$$

特别地， $v^n = \Delta^{2n}(\sigma_1^{-1}\sigma_2)^n$ 有 $6n$ 个交叉点，根据定理 3.4，其总贝蒂数随n 呈指数增长。

□

An另一族具有指数级大贝蒂数的链环将在第 7 节中构造 .

4 定理 3.2 和 3.4 的证明

与定理 3.3 一样，这两个定理都将由 [Sch25b] 中的结果推出。不过，在这些情形下，我们需要补充更多细节。将链环视为基点链环会很有用。这样一来，我们可以将 Khovanov 复形视为 $A = \mathbb{Z}[X]/(X^2)$ 上的复形，尽管我们只将同调视为阿贝尔群。基点放置在与辫子词相对应的图的中间股上。

4.1 定理 3.2 的证明

设 $w = \Delta^{2k}\sigma_1^{-l}$满足 k，$l \geq 1$，并设 $T_{k,\ l}$ 为将最左侧股的两个端点连接后，由辫子词 w 得到的缠结。

那么，$q^{l-6k}[\![T_{k,\ l}]\!]$ 与图 4 所示的 $\mathcal{B}_k$ 的一个子复形链同伦等价。更确切地说，该子复形是通过从顶行删去所有形如 $q^{6k-2r+1}$（其中 $r > l$）的对象得到的。这由 [Sch25b，命题 7.3] 可得。

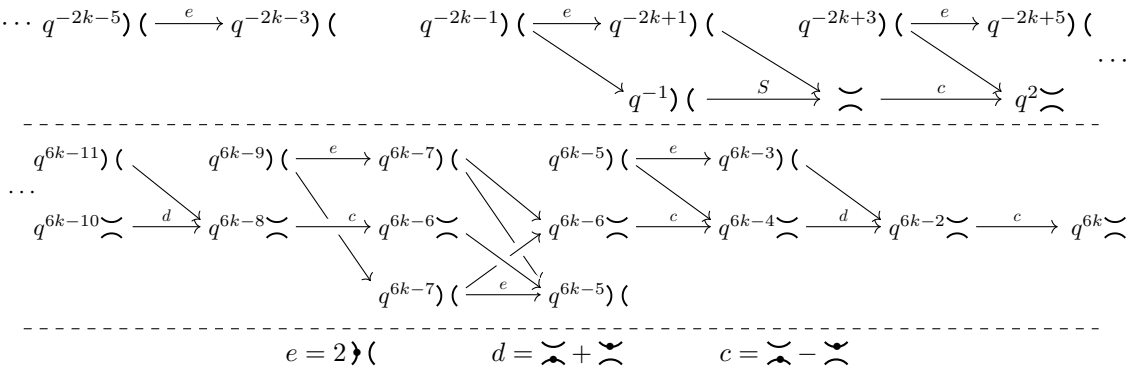


图 4：$\mathcal{B}_k$ 上的上链复形（$\mathcal{C}ob^{\mathbb{Z}}_{\bullet/l}(B_2^2)$）。分次平移为 q^{6k} 的对象位于同调次数 $4k$，分次平移为 q^{-1} 的对象位于同调次数 0。该复形通过由 e-态射连接的两个对象延伸至负同调次数。字母 S 表示两个平滑之间的手术，而 D 表示来回手术。

现在考虑函子 $G\colon \mathcal{C}ob^{\mathbb{Z}}_{\bullet/l}(B_2^2) \to \mathfrak{Mod}^q_A$，它由连接右侧的两个端点，并将 $\mathcal{C}ob^{\mathbb{Z}}_{\bullet/l}(B_1^1)$ 视为 $A = \mathbb{Z}[X]/(X^2)$ 上有限生成的自由 q-分次模而得到。于是 $G(c) = 0$，因此 $G(\mathcal{B}_k)$ 分解为若干相对较小的上链复形的直和。这些上链复形已在 [Sch25b 定理 7.4] 的证明中得到详细分析。特别地，$G(\mathcal{B}_k)$ 与图 5 中给出的复形 $\mathcal{C}_k$ 链同伦等价。此外，$G(q^{l-6k}[\![T_{k,\ l}]\!])$ 与从 $\mathcal{C}_k$ 中移除所有同调次数小于 $4k-l$ 的灰色对象后得到的子复形链同伦等价。

要证明定理 3.2，我们只需分析依赖于 l 的 $\mathcal{C}_k$ 的各种子复形。首先注意，$\mathcal{C}_k$ 在同调次数 $4k-2$ 与 $4k-1$、$4k-3$ 与 $4k-2$，以及 $4k-5$ 与 $4k-4$ 之间包含恒等态射（它们来自带有 $i=1$ 的 $(2X)^{i-1}$）。若要使这些恒等态射出现在子复形中，我们还需要第一个恒等态射满足 $l \geq 2$，第二个满足 $l \geq 3$，第三个满足 $l \geq 5$。如果可以消去，标记为 X 的态射就会消失；如果不能消去，标记为 X 的态射便不会出现在子复形中。

此外，图 5 中间部分标记为 $(2X)^i$ 的对角态射仅在 $i = 1$ 时才非零；即使在 $i = 1$ 的情况下，我们也可以通过基变换将其消去。这意味着，在同构意义下，复形 $\mathcal{C}_k$ 及其相关子复形同构于形如 $u^iq^jA \xrightarrow{2X} u^{i+1}q^{j+2}A$ 和 q^jA 的复形的直和。我们将前一种复形称为 骑士，并注意到其同调由 $u^iq^{j-1}\mathbb{Z} \oplus u^{i+1}q^{j+1}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus u^{i+1}q^{j+3}\mathbb{Z}$ 给出。后一种复形称为 兵。

灰色骑士复形类似于 $T(2,\ -l)$ 与一个平凡结的分裂并的 Khovanov 复形，而黑色骑士复形和兵复形给出了 $T(3,\ 3k)$ 的 Khovanov 同调，除了

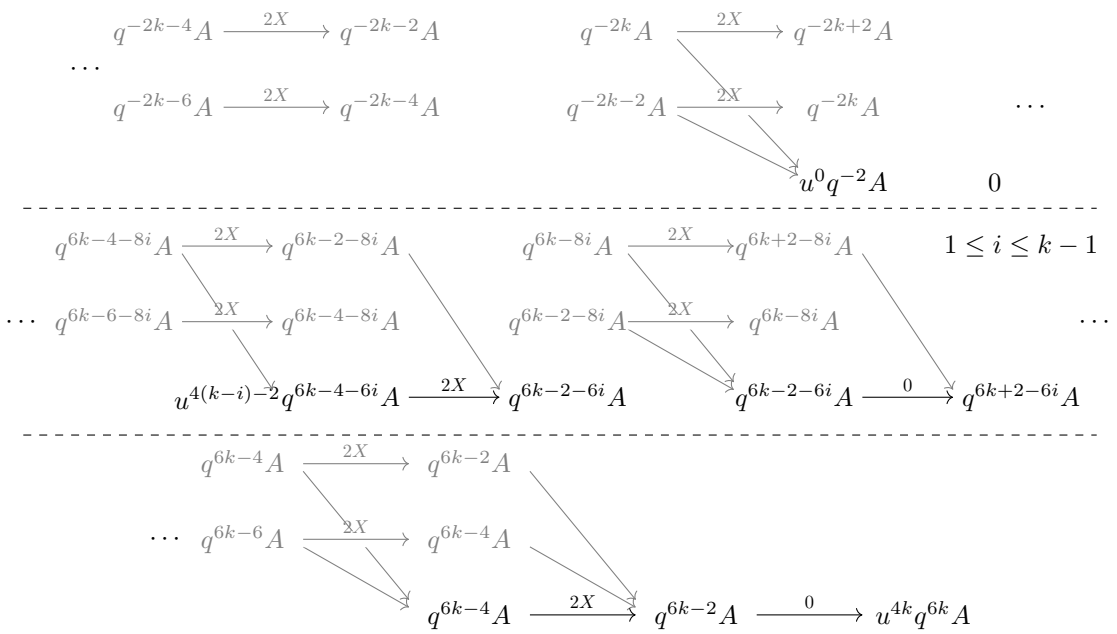


图 5：上链复形 $\mathcal{C}_k$。注意，对于 $i \geq 2$，$(2X)^i$ 为 0；对于 $i = 0$，其为 1。对于某些模，同调次数由 u^i 指示。

在靠近 $4k$ 的同调次数中。因此，在同调次数 $i \leq 4k-6$ 中，我们得到 $T(3,3k)$ 的 Khovanov 同调以及 $T(2,l)$ 与一个平凡结的分裂并的 Khovanov 同调的直和（相差分次平移）。

对于 $4k-5$ 与 $4k$ 之间的同调次数，我们需要检查各种情形，因为灰色部分与黑色部分之间存在一定的相互作用。特别地，l 的取值决定了我们可以进行哪些消去。除了区分 $k=1$ 与 $k \geq 2$ 外，我们还需要考虑 $l \in \{1,2,3,4\}$ 和 $l \geq 5$。虽然有几种情形需要检查，但它们都很直接，留给读者完成。

4.2 定理 3.4 的证明

设 $w = \sigma_1^{-p_1}\sigma_2^{q_1}\cdots\sigma_1^{-p_r}\sigma_2^{q_r}$，其中 $r, p_1, q_1, \ldots, p_r, q_r$ 为正整数。根据 [Sch25b，定理 9.2]，我们有

$$\mathrm{CKh}(L_{\Delta^{2k}w}) \simeq B_k \oplus D_w,$$

其中 B_k 是由骑士复形和兵复形直和而成的复形，集中在低于$4k-4$的同调次数上，其同调满足

$$H^{i,j-t}(B_k) \cong \mathrm{Kh}^{i,j}(T(3,3k))$$

对于 $i \leq 4k-5$和 $t = q_1 + \cdots + q_r - (p_1 + \cdots + p_r)$，且 D_w属于A-上链复形的短正合列

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow D_w \longrightarrow u^{4k}q^{12k}C_w \longrightarrow 0,$$

其中 $C_w \oplus q^tA \simeq \mathrm{CKh}(L_w)$ 作为 A-上链复形，并且

$$T \cong \begin{cases} u^{4k-4}q^{12k+t-8}A \oplus u^{4k-3}q^{12k+t-4}A \oplus u^{4k-2}q^{12k+t-4}K \oplus u^{4k}q^{12k+t}K & k \geq 2 \\ q^{t+4}A \oplus u^2q^{t+8}K \oplus u^4q^{t+12}K & k = 1 \end{cases}$$

这里 $K = (A \xrightarrow{2X} uq^2A)$ 是一个骑士复形。由此可直接推出

$$\mathrm{Kh}^{i,j}(L_{\Delta^{2k}w}) \cong \mathrm{Kh}^{i,j-t}(T(3,3k)) \oplus \mathrm{Kh}^{i-4k,j-12k}(L_w) \tag{7}$$

对于 $i \leq 4k-5$ 和 $i \geq 4k+2$。还需检查这对 $i \leq 4k-1$ 也成立；对于 $i \in \{4k, 4k+1\}$，我们得到定理 3.4 陈述中的公式。

记 $s=12k+t$，并考虑长正合序列

$$\cdots\longrightarrow \tilde{H}^{4k+i-1,s+2i-2}(D_w)\xrightarrow{\delta}\tilde{H}^{4k+i,s+2i}(D_w)\longrightarrow H^{4k+i,s+2i-1}(D_w)\longrightarrow\tilde{H}^{4k+i,s+2i-2}(D_w)\quad(8)$$

这里，H 指复形 $D_w\otimes_A\mathbb{Z}$的同调，其中 X 在 $\mathbb{Z}$上作用为 0。对于 $i\geq -5$，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{4k+i,s+2i}(D_w)&\cong\widetilde{\mathrm{Kh}}^{4k+i,s+2i}(L_{\Delta^{2k}w})\cong\tilde{H}^{i,t+2i}(C_w)\oplus\tilde{H}^{4k+i,s+2i}(T)\\ \tilde{H}^{4k+i,s+2i-2}(D_w)&\cong\widetilde{\mathrm{Kh}}^{4k+i,s+2i-2}(L_{\Delta^{2k}w})\cong 0,\end{aligned}$$

其中 $\tilde{H}^{i,j}(C_w)=\widetilde{\mathrm{Kh}}^{i,j}(L_w)$ 对于 $(i,j)\neq(0,t)$ 成立，而 $H^{0,t}(C_w)\oplus\mathbb{Z}\cong\widetilde{\mathrm{Kh}}^{0,t}(L_w)$ 由 [Sch25b, Cor.9.3] 得出。此外，δ 是 $L_{\Delta^{2k}w}$的 Khovanov 同调中约化/未约化长正合列的连接同态；根据 [Sch25a, Lm.5.6]，它等于约化整数BLT谱序列第一页微分的两倍。

注意，对于 $i=-4,-2,-1,0,1$，$\tilde{H}^{4k+i,s+2i}(T)\cong\mathbb{Z}$。我们还有 $\tilde{H}^{4k-3,s-6}(T)=0$，并且如果$k\geq 2$，我们有

$$\tilde{H}^{4k-3,s-4}(T)\cong\mathbb{Z}\cong\widetilde{\mathrm{Kh}}^{4k-3,s-4}(L_{\Delta^{2k}w}).$$

在约化整数BLT谱序列中，第一页上的微分在 $i=-2,0$ 时诱导同构$\tilde{H}^{4k+i,s+2i}(T)\cong\tilde{H}^{4k+i+1,s+2i+2}(T)$，而 $\mathbb{Z}\cong\tilde{H}^{4k-4,s-8}(T)$ 存活到第 E_2 页。此时，带有 $i=-4$ 的长正合序列 (8) 变为

$$\widetilde{\mathrm{Kh}}^{-5,t-10}(L_w)\xrightarrow{\delta}\widetilde{\mathrm{Kh}}^{-4,t-8}(L_w)\oplus\mathbb{Z}\longrightarrow\mathrm{Kh}^{4k-4,s-9}(L_{\Delta^{2k}w})\longrightarrow 0$$

而且，$\mathbb{Z}$ 的直和项嵌入 $\mathrm{Kh}^{4k-4,s-9}(L_{\Delta^{2k}w})$。特别地，

$$\mathrm{Kh}^{4k-4,s-9}(L_{\Delta^{2k}w})\cong\mathrm{Kh}^{-4,t-9}(L_w)\oplus\mathbb{Z}\cong\mathrm{Kh}^{-4,t-9}(L_w)\oplus\mathrm{Kh}^{4k-4,12k-9}(T(3,3k)).$$

完全相同的论证对 $i=-2$ 也成立，从而证明了 $(4k-2,s-5)$ 的 (7)；对于 $i=0$，我们得到

$$\mathrm{Kh}^{4k,s-1}(L_{\Delta^{2k}w})\cong H^{0,t-1}(C_w)\oplus\mathbb{Z},$$

但正如上文所指出的，$H^{0,t-1}(C_w)\oplus\mathbb{Z}\cong\mathrm{Kh}^{0,t-1}(L_w)$。

对于 $i=-3$，长正合序列 (8) 为

$$\widetilde{\mathrm{Kh}}^{-4,t-8}(L_w)\oplus\mathbb{Z}\xrightarrow{\delta}\widetilde{\mathrm{Kh}}^{-3,t-6}(L_w)\longrightarrow\mathrm{Kh}^{4k-3,s-7}(L_{\Delta^{2k}w})\longrightarrow 0,$$

$\mathbb{Z}$直和项位于 δ的核中。特别地，(7) 对 $(i,j)=(4k-3,s-7)$ 成立，因为环面链环对这个双分次不作贡献。

对于 $i=-1$，序列 (8) 为

$$\begin{array}{ccccccc}\widetilde{\mathrm{Kh}}^{4k-2,s-4}(L_{\Delta^{2k}w}) & \xrightarrow{\delta} & \widetilde{\mathrm{Kh}}^{4k-1,s-2}(L_{\Delta^{2k}w}) & \longrightarrow & \mathrm{Kh}^{4k-1,s-3}(L_{\Delta^{2k}w}) & \longrightarrow & 0\\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\ \widetilde{\mathrm{Kh}}^{-2,t-4}(L_w)\oplus\mathbb{Z} & \xrightarrow{\delta} & \widetilde{\mathrm{Kh}}^{-1,t-2}(L_w)\oplus\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{Kh}^{4k-1,s-3}(L_{\Delta^{2k}w}) & \longrightarrow & 0\end{array}$$

回忆一下，δ 是约化整系数 BLT 谱序列第一页微分的两倍，它消去了两个 $\mathbb{Z}$直和项。因此

$$\mathrm{Kh}^{4k-1,s-3}(L_{\Delta^{2k}w})\cong\mathrm{Kh}^{-1,t-3}(L_w)\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

其中$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\cong\mathrm{Kh}^{4k-1,12k-3}(T(3,3k))$。

$i=1$ 情形非常相似。主要区别在于 $\widetilde{\mathrm{Kh}}^{4k,s}(L_{\Delta^{2k}w})\cong\tilde{H}^{0,t}(C_w)\oplus\mathbb{Z}$。回忆一下，$\tilde{H}^{0,t}(C_w)\oplus\mathbb{Z}\cong\widetilde{\mathrm{Kh}}^{0,t}(L_w)$，其中 $\mathbb{Z}$ 的这个直和项位于 δ的核中。因此我们也得到

$$\mathrm{Kh}^{4k+1,s+1}(L_{\Delta^{2k}w})\cong\mathrm{Kh}^{1,t+1}(L_w)\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

这是定理 3.4 中的一个例外情形。仍需证明该定理在双分次 $(4k+i,s+2i+1)$（其中 $i=-4,\ldots,1$）以及 $(4k-3,s-3)$ 中成立。

在双次数 $(4k-3, s-3)$ 中，只有环面链环有贡献；当 $k \geq 2$ 时其贡献为 $\mathbb{Z}$，当 $k = 1$ 时贡献为 0。但这恰好就是 T 在此双次数中的贡献。

现在考虑长正合序列

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}^{4k+i,s+2i+2}(D_w) \longrightarrow H^{4k+i,s+2i+1}(D_w) \longrightarrow \tilde{H}^{4k+i,s+2i}(D_w) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}^{4k+i+1,s+2i+2}(D_w) \quad (9)$$

群 $\tilde{H}^{4k+i,\,s+2i+2}(D_w) = 0$ 除非 $i = -3$ 且 $k \geq 2$，在这种情形下，注入 $H^{4k-3,\,s-5}(D_w)$ 的是 $\mathbb{Z}$。然后

$$\tilde{H}^{4k-3,s-6}(D_w) \cong \widetilde{\mathrm{Kh}}^{4k-3,s-6}(L_{\Delta^{2k}w}) \cong \widetilde{\mathrm{Kh}}^{-3,t-6}(L_w).$$

δ 的核是约化整系数 BLT 谱序列中第一个微分的核。因此

$$\mathrm{Kh}^{4k-3,s-5}(L_{\Delta^{2k}w}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Kh}^{-3,t-5}(L_w),$$

从而对 $(4k-3,\ s-5)$ 建立了 (7)。注意，我们总有长正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Kh}^{i,t+2i+1}(L_w) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Kh}}^{i,t+2i}(L_w) \xrightarrow{\delta} \widetilde{\mathrm{Kh}}^{i+1,t+2i+2}(L_w) \longrightarrow \cdots$$

对于 i 的其他相关取值，我们有

$$\mathrm{Kh}^{4k+i,s+2i+1}(L_{\Delta^{2k}w}) \cong \ker(\delta\colon \tilde{H}^{4k+i,s+2i}(D_w) \to \tilde{H}^{4k+i+1,s+2i+2}(D_w)).$$

对于 $i = -4$，我们有 $\tilde{H}^{4k-4,\,s-8}(D_w) \cong \widetilde{\mathrm{Kh}}^{-4,\,t-8}(L_w) \oplus \mathbb{Z}$，其中 $\mathbb{Z} \cong \widetilde{\mathrm{Kh}}^{4k-4,\,12k-8}(T(3,\ 3k))$ 属于核 δ。因此

$$\mathrm{Kh}^{4k-4,s-7}(L_{\Delta^{2k}w}) \cong \mathrm{Kh}^{-4,t-7}(L_w) \oplus \mathbb{Z} \cong \mathrm{Kh}^{-4,t-7}(L_w) \oplus \mathrm{Kh}^{4k-4,12k-8}(T(3,3k)).$$

同样的论证适用于 $i = -1$，从而为 $(4k-1, s-1)$ 建立了 (7)。

对于 $i = -2$，我们有

$$\tilde{H}^{4k-2,s-4}(D_w) \cong \widetilde{\mathrm{Kh}}^{-2,t-4}(L_w) \oplus \mathbb{Z}.$$

这一次，$\mathbb{Z} \cong \widetilde{\mathrm{Kh}}^{4k-2,12k-4}(T(3,3k))$ 不属于核 δ。但是，由于 $\mathrm{Kh}^{4k-2,12k-3}(T(3,3k)) = 0$，我们仍然在双次数 $(4k-2, s-3)$ 中得到 (7)。

对于 $i = 0$，我们有

$$\tilde{H}^{4k,s}(D_w) \cong \tilde{H}^{0,t}(C_w) \oplus \mathbb{Z} \cong \widetilde{\mathrm{Kh}}^{0,t}(L_w),$$

但是，将 δ 限制在直和项 $\mathbb{Z}$ 上并不为 0（回想一下，$\mathrm{Kh}^{0,t}(L_w)$ 包含一个直和项 $\mathbb{Z}$，该直和项在约化的 BLT-谱序列中存活，但这里的行为有所不同）。因此

$$\mathrm{Kh}^{4k,s+1}(L_{\Delta^{2k}w}) \cong \mathrm{Kh}^{0,t+1}(L_w)/\mathbb{Z},$$

正如定理 3.4 所述。

对于剩余的情形 $i = 1$，注意到 $\tilde{H}^{4k+1,\,s+2}(D_w)$ 有一个额外的直和项 $\mathbb{Z}$，它来自 T 的同调，因此在 $\ker\ \delta$ 中产生了一个额外的生成元。

$$\mathrm{Kh}^{4k+1,s+3}(L_{\Delta^{2k}w}) \cong \mathrm{Kh}^{1,t+3}(L_w) \oplus \mathbb{Z},$$

如所述。

5 多项式时间内辫子的极端 Khovanov 同调

本节通过构造可处理链环图、并可特化为辫子算法的算法 $\mathcal{A}_k$ 来证明定理 1.4 $\mathcal{B}_{k,\ t}$。我们首先在 (5.1) 概述用于构造 $\mathcal{A}_k$ $\mathcal{B}_{k,\ t}$ 并加以运用的算法。在 (5.2) 中将更详细地描述这些算法 $\mathcal{A}_k$，并在 (5.3) 和 (5.4) 中证明其有效性及多项式运行时间。

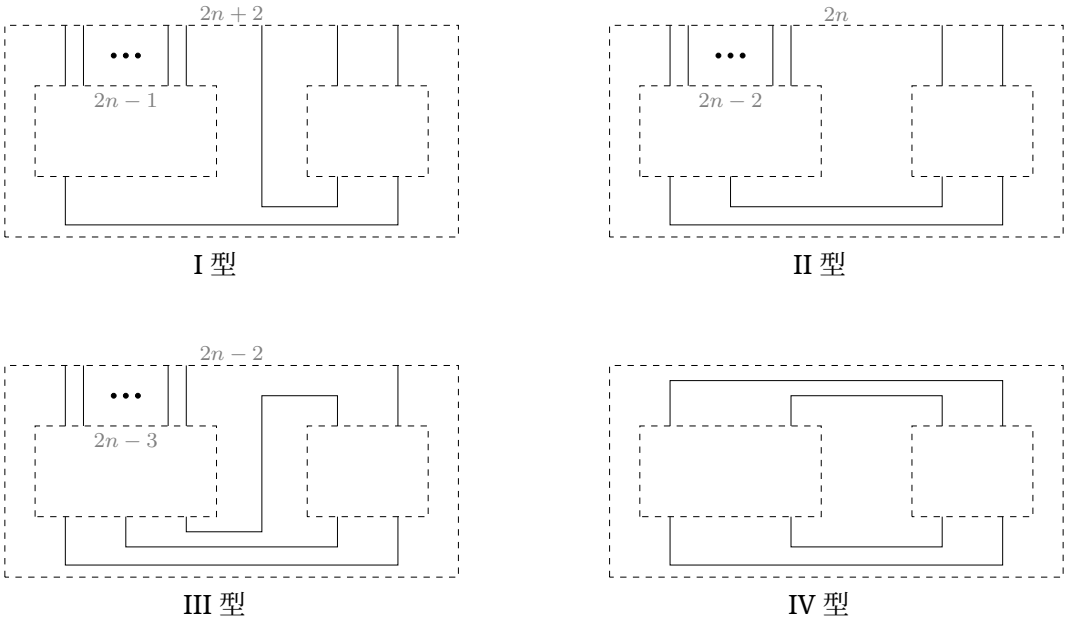


图 6：我们将使用的四种不同类型的简单平面弧图。I 型、II 型和 III 型简单平面弧图由 $n \geq 1$ 确定，而 IV 型是唯一的。平面弧图在保持边界的平面同痕下视为等价。

5.1 算法 $\mathcal{A}_k$ 概述

平面弧图 将“较小”的辫结粘合起来，生成“较大”的辫结，并最终得到链环。Bar-Natan 理论允许我们对“较小”辫结的局部 Khovanov 复形进行表述；这些复形本身也可以通过平面弧图组合，而构造“较大”复合复形的这两种方式彼此可交换 [BN05]。对于我们的目的，无需采用一般理论，只需引入无向的*I*、*II*、*III* 型简单平面弧图，以及*IV* 型即可，见图 6。

良好扫描序列 $\mathcal{S}$ 是一个具有 n 个交叉点的链环图 L 的三元序列

$$\mathcal{S} = ((T_1, \dots T_n), (c_1, \dots, c_n), (P_1, \dots, P_{n-1}))$$

其中， T_i 是 L的无定向子缠结图， c_i 是 L的无定向交叉， P_i 是用于 $i \leq n-2$ 的 I 型、II 型或 III 型简单平面弧图，而 P_{n-1} 是 IV 型图。此外，我们要求 $T_1 = c_1$、 $T_n = L$ 和 $T_i \otimes_{P_i} c_{i+1} = T_{i+1}$ 分别作为缠结图/链环图。 [BN07], 的扫描算法中也隐含地存在扫描序列，但我们只允许一个 IV 型图这一技术条件，是使我们的序列成为良好序列的额外要素。在引理 6.2 中，我们证明了对于合理的链环图，良好扫描序列总是存在。良好扫描序列的围长记为 girth($\mathcal{S}$)，定义为所有子缠结 T_i上的边界点数的最大值。

命题 5.1。 对于每个 $k \geq 0$ ，存在一个算法 $\mathcal{A}_k$ ，它以链环图 L 和 L 的良好扫描序列 $\mathcal{S}$ 作为输入，并输出 $\mathrm{Kh}^i, *(L)$ 以及 $i < -n_-(L) + k$ 和 $i > n_+(L) - k$。算法 $\mathcal{A}_k$ 的运行时间为 $\mathcal{O}(f(\mathrm{girth}(\mathcal{S})) \cdot p_k(n(L)))$ ，其中 f 是某个函数， p_k是多项式。

定理 1.4 可由命题 5.1 推出。

定理 1.4 的证明。算法 $\mathcal{B}_{k,t}$ 接收一个单词 w，并将算法 $\mathcal{A}_{k+t-1}$ 应用于这一对 $(L_b, \mathcal{S})$。链环图 L_b 是 $b = \sigma_1 \dots \sigma_{t-1} w \sigma_{t-1}^{-1} \dots \sigma_1^{-1}$ 的辫闭包，而 $\mathcal{S}$ 按照交叉点在 b 中出现的顺序扫描 L_b 的交叉点。在取辫闭包之前，用 $\sigma_1 \dots \sigma_{t-1}$ 共轭 w 不会改变链环的同痕类型，但能确保 $\mathcal{S}$ 是一个围长为 girth($\mathcal{S}$) $= 2t$ 的良好扫描序列。共轭还会增加 $t-1$ 个正交叉点和负交叉点，这就是我们需要将 $\mathcal{A}_{k+t-1}$ 应用于 L_b，以便在同调次数 $i \leq -n_-(L_w) + k = -n_-(L_b) + k + t - 1$ 和 $i \geq n_+(L_w) - k = -n_+(L_b) - k - t + 1$ 中得到 $\mathrm{Kh}^{i,*}(L_w) = \mathrm{Kh}^{i,*}(L_b)$ 的原因。 □

为了证明命题 5.1，只需描述一种算法，该算法可求得 $\mathrm{Kh}^{i,*}(L)$，其中 $i \leq -n_-(L) + k$。次数 $i > n_+(L) - k$ 可通过将同一算法应用于镜像图 $D^!$，并利用镜像链环的 Khovanov 同调由对偶复形得到这一事实来求得。为了尽量减少分次平移带来的麻烦，我们将使用未平移复形，并将平移推迟到最后。因此，对于一个交叉点 $c \in \{\times, \times\}$，我们记 $[\![c]\!]_{\mathrm{US}}$ 为未平移的 ***Bar-Natan*** 复形 c，于是

$$
\begin{aligned}
[\![\times]\!]_{\mathrm{US}} &= \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow u^0 q^0 \,) \,(\xrightarrow{\text{saddle}} u^1 q^1 \asymp \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\
[\![\times]\!]_{\mathrm{US}} &= \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow u^0 q^0 \asymp \xrightarrow{\text{saddle}} u^1 q^1 \,) \,(\longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .
\end{aligned}
$$

更一般地，对于切络图 T，我们写作 $[\![T]\!]_{\mathrm{US}} = u^{n_-(L)} q^{-n_+(L)+2n_-(L)} [\![T]\!]$。

算法 $\mathcal{A}_k$ 的大致伪代码描述见算法 2；在第 5.2 节中，我们将阐明第 4 行和第 5 行的确切含义，其目的是避免消去“过多”的同构。限制消去次数有助于控制整数的位长度，从而确保我们不会耗费指数时间去乘以位长度超多项式的整数。

算法 2 对于任意 k，以下描述了最低次数且具有 $\mathbb{Z}$-系数的 $\mathcal{A}_k$。输入：具有良好扫描序列 $((T_1, \ldots T_{n(L)}), (c_1, \ldots, c_{n(L)}), (P_1, \ldots, P_{n(L)-1}))$ 的链环图 L。输出：对于 $i \leq k - n_-(L)$，$\mathrm{Kh}^{i,*}(L)$。1：赋值 $C \leftarrow [\![c_1]\!]_{\mathrm{US}}$ 2：对于 $t = 1, \ldots, n(L) - 1$，执行 3：赋值 $C' \leftarrow C \otimes_{P_t} [\![c_{t+1}]\!]_{\mathrm{US}}$ 4：对 C' 中新形成的圆进行去环，并固定一个分块分解。将结果记为 C''。5：利用 $[\![c_{j+1}]\!]_{\mathrm{US}}$ 的鞍点对 C'' 的某些块进行高斯消去。将结果记为 C'''。6：在 $k+1$ 处截断 C'''，即，令 $(C''')^{k+2} = 0$。将结果记为 C。

7: **结束循环**

8: 在 C 上，将每个 $\emptyset$ 替换为 $\mathbb{Z}$。（或者用更专业的说法，应用 Khovanov TQFT 函子 F。）9: 将 $F(C)$ 的微分化为史密斯标准形。10: 从史密斯标准形中读取同调，并用 $u^{-n_-(L)} q^{n_+(L)-2n_-(L)}$ 对其进行移位。

在有限域上，无需限制消去次数；算法 3 中的伪代码给出了更简单的算法 $\mathbb{F}_p\mathcal{A}_k$，用于计算系数为 $\mathbb{F}_p$ 的同调。将算法 $\mathbb{F}_p\mathcal{A}_k$ 中的第 6 行删除，恰好得到 Bar-Natan 扫描算法 [BN07]，该算法可计算完整的 Khovanov 同调表 $\mathrm{Kh}^{*,*}(L; \mathbb{F}_p)$。

算法 3 对于任意 k，以下内容描述了最低次数下、系数为 $\mathbb{F}_p$ 时的 $\mathbb{F}_p\mathcal{A}_k$。**输入** 具有良好扫描序列的链环图 L（$(T_1, \ldots T_{n(L)})$，$(c_1, \ldots\ldots, c_{n(L)})$，$(P_1, \ldots\ldots, P_{n(L)-1})$）。**输出** 对于 $i \leq k - n_-(L)$，$\mathrm{Kh}^{i,*}(L; \mathbb{F}_p)$

1：将 $C \leftarrow [\![c_1]\!]_{\mathrm{US}}$2：对于 $t = 1, \ldots\ldots, n(L) - 1$ 执行 3：将 $C' \leftarrow C \otimes_{P_t} [\![c_{t+1}]\!]_{\mathrm{US}}$4：对 C' 中新形成的圆进行去环。将结果记为 C''5：反复对 C'' 中的同构进行高斯消元，直至不再存在同构。将结果记为 C'''。6：在 $k+1$处截断 C'''，即令 $(C''')^{k+2} = 0$。将结果记为 C。7：结束 for 8：将每个 $\emptyset$ 替换为 $\mathbb{Z}$。（或者更正式地说，应用 Khovanov TQFT 函子 F。）9：从 C 中读出同调，并用 $u^{-n_-(L)} q^{n_+(L)-2n_-(L)}$对其进行移位。

5.2 在 $\mathcal{A}_k$ 中展开和消去块

Ev在 $\mathcal{C}ob^{\mathbb{Z}}_{\bullet/l}(2n)$ 中，每个对象 B 都同构于一个唯一的直和（相差一个排列）

$$
B \cong \bigoplus_{i=1}^{n} q^{c_i} D_i \tag{10}
$$

其中 D_i 是无圈图，即定义在 $2n$ 个点上的平面匹配，并且 $c_i \in \mathbb{Z}$。利用 (10)，$\mathcal{C}ob^{\mathbb{Z}}_{\bullet/l}(2n)$ 的任意态射 $f\colon A \to B$ 都可以用一个矩阵描述，其中每个矩阵元都是某些无圈图 A_j 和 B_i 之间的态射 $f_{i,\,j} \in \mathrm{Hom}(A_j,\ B_i)$。

两个无圈图之间的态射 $g\colon D \to E$ 是嵌入在 $[0,1]^3$ 中、边界为 $X = (D \times \{1\}) \cup (E \times \{0\}) \cup (\partial D \times [0,1])$ 的定向曲面的形式和。从拓扑上看，X 是若干个 $\mathbb{S}^1$ 的不交并，我们可以在每个环上粘上圆盘，并将它们嵌入立方体 $[0,1]^3$ 中。在保持边界的微分同胚意义下，这确定了唯一的协边 $\Sigma_{D,\,E} \hookrightarrow [0,1]^3$。我们将 $\mathrm{dec}(D,\ E)$ 定义为对 $\Sigma_{D,\,E}$ 的每个分量以 0 个或 1 个点进行装饰的所有可能方式组成的集合。换言之，$\mathrm{dec}(D,\ E)$ 由 2^c 份 $\Sigma_{D,\,E}$ 构成，各份的装饰各不相同，其中 c 是 X 中 $\mathbb{S}^1$ 的数量。

引理 5.2。对于无环平面匹配 $D, E \in \mathcal{C}ob^{\mathbb{Z}}_{\bullet/l}(2n)$，集合 $\mathrm{dec}(D,E)$ 自由生成 $\mathrm{Hom}(D,E)$。

证明。要看出 $\mathrm{dec}(D,E)$ 生成 $\mathrm{Hom}(D,E)$，任取一个具有所需边界的嵌入带点曲面 S。利用割颈关系，可以消去所有亏格，并将 S 的每个边界分支断开。于是，S 可表示为带点球面与圆盘之并的和。对这个和应用双点关系和球面关系，便得到 S 可表示为 $\mathrm{dec}(D,E)$ 之和。

接下来，令 $\sum_{S\in\mathrm{dec}(D,E)} c_S S = \sum_{S\in\mathrm{dec}(D,E)} d_S S$，其中 c_S 和 d_S 是某些整数。为了证明对于固定的 S 有 $c_S = d_S$，我们描述一个映射 $f_S\colon \mathrm{Hom}(D,E) \to \mathrm{Hom}(\emptyset,\emptyset)$。映射 f_S 将 $[0,1]^3$ 中一个带点曲面 Σ（其边界是 $\partial([0,1]^3)$ 中若干个 $\mathbb{S}^1$ 的不交并）与圆盘粘合到这些边界圈上。粘合的圆盘嵌入在“盒子外部”；如果曲面 S 中相应的“内部圆盘”没有点，f_S 就在每个“外部圆盘”上放置一个点。对生成的曲面作适当缩放后，我们得到一个曲面 $f_S(\Sigma) \in \mathrm{Hom}(\emptyset,\emptyset)$。此外，这一过程定义了一个良定的线性映射 $f_S\colon \mathrm{Hom}(D,E) \to \mathrm{Hom}(\emptyset,\emptyset)$。代入原来的和，并利用球面关系和双点关系，我们得到

$$c_S E = f_S\left(\sum_{S'\in\mathrm{dec}(D,E)} c_{S'} S'\right) = f_S\left(\sum_{S'\in\mathrm{dec}(D,E)} d_{S'} S'\right) = d_S E$$

其中 E 是空协边 $E\colon \emptyset \to \emptyset$。由于 $\mathrm{Hom}(\emptyset,\ \emptyset)$ 由 E 自由生成，这就完成了证明。

□

在复杂性理论中，有限域通常很容易处理，因为计算机上对两个元素进行加法和乘法所需的位运算次数为常数。存储一个整数 c 需要 $\log_2|c|$ 的内存和时间，当 c 非常庞大时，这可能会造成过大的开销。计算机科学领域已对整数乘法的渐近最优算法进行了广泛研究；但对我们而言，只需知道加法 $c+d$ 和乘法 cd 都可以在关于 $\log_2(|cd|)$ 的多项式时间内完成即可。尽管如此，为了证明命题 5.1，我们需要确保所有涉及的整数的 $\log_2(|c|)$ 都有多项式上界。为此，我们定义 $\|\cdot\|$ 为 $\mathrm{Hom}(D,\ E)$ 上关于基 $\mathrm{dec}(D,\ E)$ 的 l_1 范数，即

$$\left\|\sum_{S\in\mathrm{dec}(D,E)} c_S S\right\| = \sum_S |c_S|.$$

引理 5.3。存在一种算法，输入无环平面匹配 $A, B, C \in \mathcal{C}ob^{\mathbb{Z}}_{\bullet/l}(2n)$ 以及态射 $f_1\colon A \to B$，$f_2\colon B \to C$（以基表示），

$$f_1 = \sum_{S\in\mathrm{dec}(A,B)} c_S S, \qquad f_2 = \sum_{S'\in\mathrm{dec}(B,C)} d_{S'} S'$$

并输出

$$f_2 f_1 = \sum_{S''\in\mathrm{dec}(A,C)} e_{S''} S''.$$

对于固定的 n，该算法关于 $\log(\|f_2\|\cdot\|f_1\|)$ 在多项式时间内运行，且复合满足 $\|f_2 f_1\| \le 2^{n-1}\|f_2\|\cdot\|f_1\|$。

证明。我们的首要目标是分离出 f_1 的装饰和系数，并写成

$$f_1 = \sum_{S\in \mathrm{dec}(A,B)} c_S S = \Sigma_{A,B} \circ \sum_{P\in \mathrm{dec}(A,A)} t_P P \tag{11}$$

其中，$\mathsf{dec}(A,A)$ 的底层曲面 $\Sigma_{A,A}$ 是乘积余边 $A\times[0,1]$。对于每个点装饰 $S\in\mathsf{dec}(A,B)$，都必须选择将点移至 $A\times[0,1]$ 的哪些连通分支上，也就是说，必须选取适当的装饰 $P\in\mathsf{dec}(A,A)$。对于这些选择，$t_P = c_S$ 以及其余系数 t_P 均为零。这个快速过程（非唯一地）得到 (11)，类似地，展开 f_2 可得

$$f_2 f_1 = \sum_{Q\in \mathrm{dec}(C,C)} r_Q Q \circ \Sigma_{B,C} \circ \Sigma_{A,B} \circ \sum_{P\in \mathrm{dec}(A,A)} t_P P. \tag{12}$$

接下来，我们将分析未装饰曲面 $\Sigma_{B,C}\Sigma_{A,B}$。$\Sigma_{B,C}\Sigma_{A,B}$ 的连通分支 $\{\Sigma_i\}_i$ 可直接由平面匹配 A, B 和 C 得到。每个连通分支 Σ_i 均由 $\Sigma_{A,B}$ 的 k 个圆盘和 $\Sigma_{B,C}$ 的 l 个圆盘沿 m 条线粘合而成，得到 $\chi(\Sigma_i) = k+l-m$。根据带边界的定向曲面的分类，我们还得到 $\chi(\Sigma_i) = 2-r-2g$，其中 r 是 Σ_i 的边界圈数，g 是其亏格。由于 k,l,m 和 r 可由 A,B 和 C 得到，我们可以计算 g。利用割颈关系，可以消去 Σ_i 上的亏格，但代价是增加 g 个点和一个系数 2^g。进一步应用割颈关系 $r-1$ 次，我们可以将 Σ_i 的所有连接替换为一组带装饰圆盘，这些圆盘粘合在 r 个环上。对每个连通分支 Σ_i 应用这一化简，得到展开式

$$\Sigma_{B,C}\Sigma_{A,B} = \sum_{S''\in \mathrm{dec}(A,C)} b_{S''} S''. \tag{13}$$

最后，$f_2 f_1$ 的展开可由 (12) 计算得出：将整数 t_P、r_Q、$b_{S''}$ 相加并相乘，再使用双点关系。

由于 $\Sigma_{A,B}$ 和 $\Sigma_{B,C}$ 各至少包含 1 个圆盘，而 $\Sigma_{B,C}\Sigma_{A,B}$ 是沿着 n 条线将它们粘合得到的，因此我们得到 $\chi(\Sigma_{B,C}\Sigma_{A,B}) \geq 2-n$。另一方面，$\Sigma_{A,C}$ 至多包含 n 个圆盘，因此 $\chi(\Sigma_{A,C}) \leq n$。于是 $\chi(\Sigma_{A,C}) - \chi(\Sigma_{B,C}\Sigma_{A,B}) \leq 2n-2$，这意味着在得到 (13) 时，割颈关系至多可以使用 $n-1$ 次。因此 $\|\Sigma_{B,C}\Sigma_{A,B}\| \leq 2^{n-1}$，我们可以计算

$$\begin{aligned}
\|f_2 f_1\| &= \left\| \sum_{Q\in \mathrm{dec}(C,C)} r_Q Q \circ \Sigma_{B,C} \circ \Sigma_{A,B} \circ \sum_{P\in \mathrm{dec}(A,A)} t_P P \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{Q\in \mathrm{dec}(C,C)} r_Q Q \right\| \cdot \|\Sigma_{B,C}\Sigma_{A,B}\| \cdot \left\| \sum_{P\in \mathrm{dec}(A,A)} t_P P \right\| \\
&\leq 2^{n-1} \|f_2\| \cdot \|f_1\|
\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

现在我们可以进一步说明算法 2 第 4 行和第 5 行中去环、块分解和消去的含义。在第 4 行，构造带有块分解和 Morse 匹配 M 的复形 C''。随后在第 5 行计算 Morse 复形 $M(C'')$，并将其重命名为 C'''。C'' 的具体块分解和匹配 M 取决于简单平面弧图 P_j 的类型，为简便起见记为 P。**I 型**较为简单：不会形成新的环，我们令 C'' 采用平凡块分解，并设定 $M=\emptyset$。简而言之，如果 P 是 I 型平面弧图，第 4 行和第 5 行就不起作用。

II 型： 根据定义，复形 $C' = C\otimes_P [\![c]\!]_{\mathrm{US}}$ 可写为

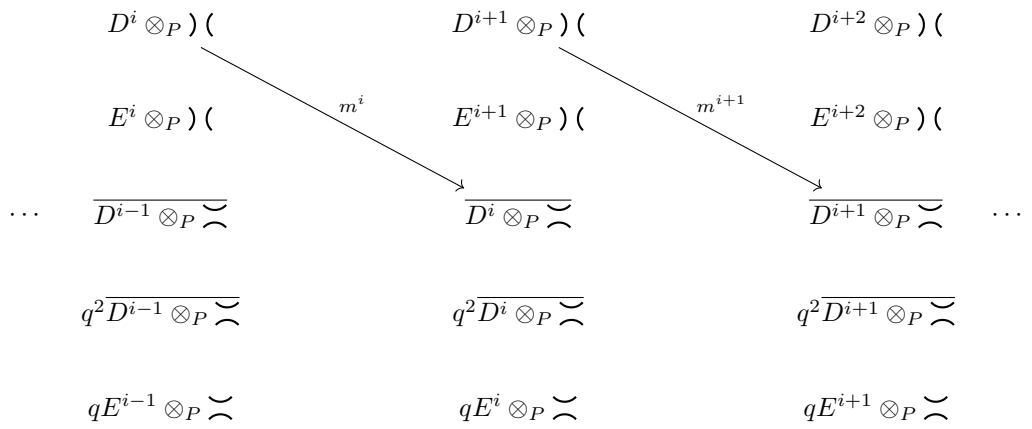
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & C^i\otimes_P & & \xrightarrow[(-1)^i S^i]{} & & C^{i+1}\otimes_P & \xrightarrow[(-1)^{i+1}S^{i+1}]{} & C^{i+2}\otimes_P \\
\cdots & & \rotatebox{90}{)}\rotatebox{90}{(} & & & & \rotatebox{90}{)}\rotatebox{90}{(} & & \rotatebox{90}{)}\rotatebox{90}{(} & & \cdots \\
 & & qC^{i-1}\otimes_P \rotatebox{90}{)}\rotatebox{90}{(} & & \longrightarrow & & qC^i\otimes_P \rotatebox{90}{)}\rotatebox{90}{(} & \longrightarrow & qC^{i+1}\otimes_P \rotatebox{90}{)}\rotatebox{90}{(}
\end{array} \tag{14}$$

[1]由于匹配 M 在每个同调次数中只包含 0 个、1 个或 2 个块同构，因此可以避免使用图论语言，而直接对 M 态射逐一进行高斯消元。结果将完全相同，但我们所选择的记号将有助于在引理 5.5 中分析该结果。

其中，映射 S^i 是由鞍点构成的对角矩阵。在 14 中，底行的 q:s 表示与 $[\![c]\!]_{\mathrm{US}}$ 相关的额外分次平移，而同调分次和C^i 的内部 gradings 均未显示。将 C^i 的 i 次链空间记为 $D^i \oplus E^i$，其中 D^i 是连接两条底部股线的图的直和，E^i 是其余图的直和：

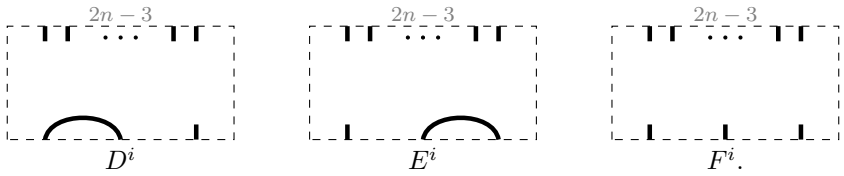


$D^i \otimes_P$的图包含一个圆圈，可以通过复制这些图来去环。更正式地说，存在一个同构 $\begin{bmatrix}\mathfrak{d}_1\\ \mathfrak{d}_2\end{bmatrix}$: $qD^i \otimes_P \quad \to q^2 D^{i-1} \otimes_P \quad \oplus D^{i-1} \otimes_P$，其中 $\widetilde{D^i} \otimes_P$表示将每个图中的新圆圈移除后所得图的直和，局部示意图见图 2。现在分解 C' 并拉回微分，可得一个同构的复形 C''



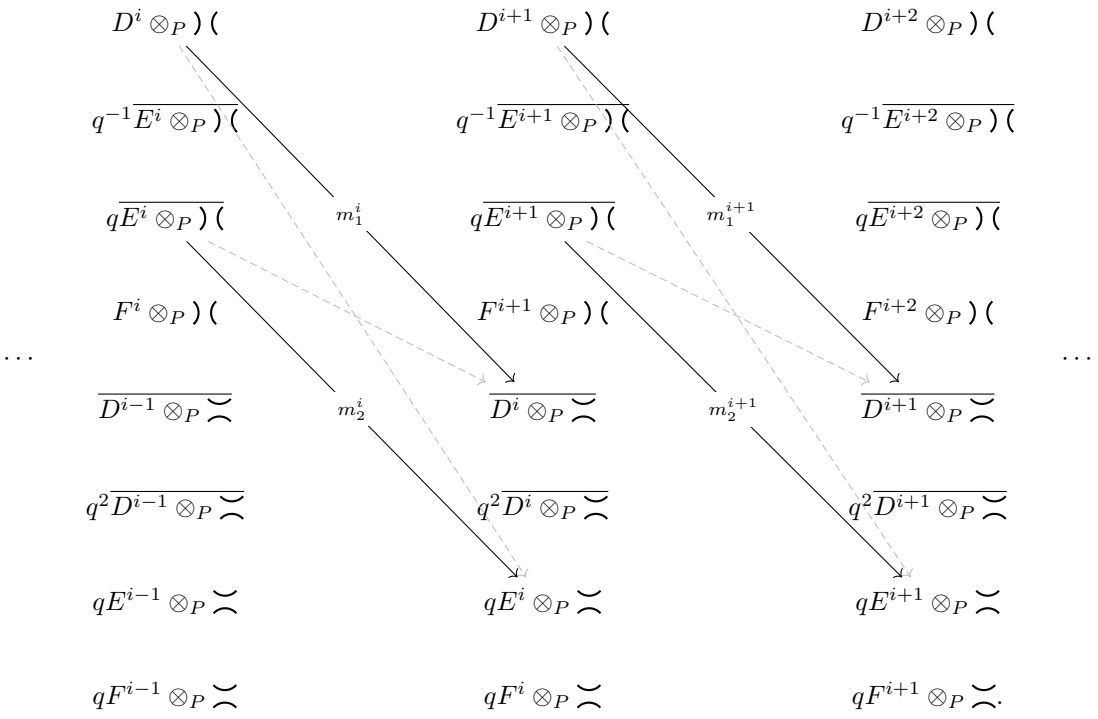
其中，链空间 $(C'')^i$ 是第一列中 5 个对象的直和。C'' 的微分由 5×5 表示，其在 (1,3) 处的矩阵元为 m^i。展开拉回微分得到 $m^i = (-1)^i \mathfrak{d}_2(\pi_D \otimes_P \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes_P s)(\iota_D \otimes_P \mathrm{id})$，其中 ι_D和 π_D是与 $C^i = D^i \oplus E^i$ 相关的典范嵌入和投影，而 s 是一个鞍点。因此，m^i 是同构，$M = \{m^i \mid 0 \leq i \leq n(L)\}$ 是一个 Morse 匹配，并在第 5 行计算 Morse 复形 $M(C'') = C'''$，其中 $C''' \simeq C'$。

III 型：我们将 $C^i = D^i \oplus E^i \oplus F^i$ 分解，其中 D^i 包含连接两条左下股线的图，E^i 包含连接两条右下股线的图，而 F^i 包含彼此之间均不连接的图：



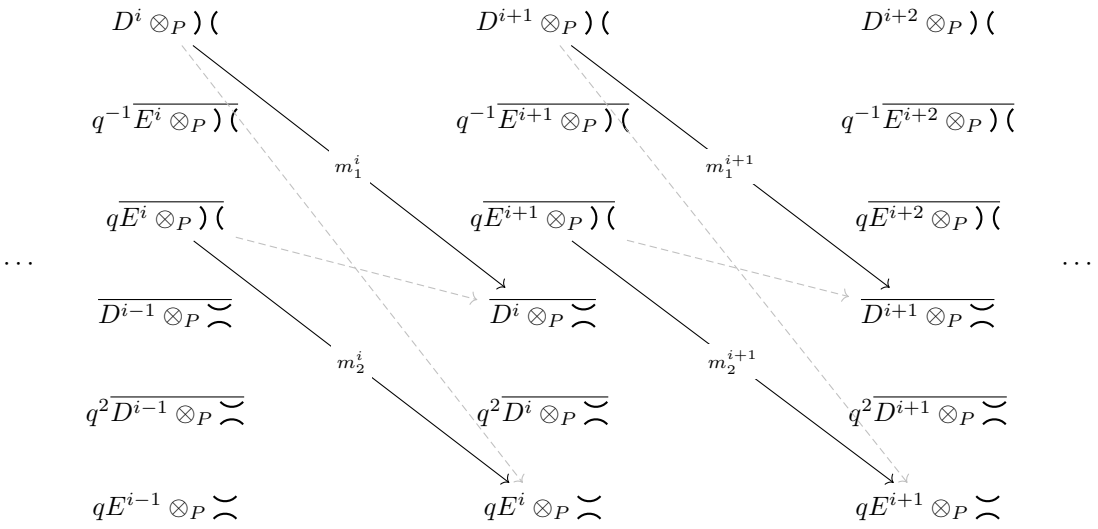
与 II 型一样，$D^i \otimes_P$和 $E^i \otimes_P$的直和项包含可以去环的圆圈，因此

它 $C' = C \otimes_P [\![c]\!]_{\mathrm{US}}$ 与复形 C''同构：



再次通过展开可知，矩阵元 m_1^i 和m_2^i 是同构。另一方面，虚线灰色箭头是零态射，因为它们展开后的第一个张量分量包含一个包含映射 $D^i \hookrightarrow D^i \oplus E^i$，其后接着一个投影 $D^i \oplus E^i \twoheadrightarrow E^i$（或者也可以是 $E^i \hookrightarrow D^i \oplus E^i \twoheadrightarrow D^i$）。因此， $M = \{m_1^i, m_2^i \mid 0 \le i \le n(L)\}$ 是一个 Morse 匹配，并且在第 5 行，我们可以对所有态射 m_1^i 和 m_2^i 执行高斯消元，从而得到 Morse 复形$M(C) = C'''$。

IV 型：我们将 $C^i = D^i \oplus E^i$ 分解，其中 D^i 由具有连通性的图组成，而 E^i 由具有不连通性的图组成。复合中包含许多新的圆圈，但目前我们只对 $D^i \otimes_P$ 底部的圆圈和 $E^i \otimes_P$ 的内圆圈去环。这得到复形 C''：



由此我们得到 $M = \{m_1^i, m_2^i \mid 0 \le i \le n(L)\}$。集合 M 是一个 Morse 匹配，因为 C'' 上灰色虚线标出的矩阵元都是零态射。最后，为了得到一个简单的复形，我们将其余的圆去环

$M(C)$ 中的圆，然后将所得结果称为 C'''。（为了更准确地遵循算法 2 的伪代码，我们本可以在消去之前先将所有圆去环，但我们采用了等价的两步去环过程，这样记号更简洁。）

5.3 正确性

链复形的截断 (C,d) 在 $k\in\mathbb{Z}$ 处记作 $\tau_{\le k}(C)$，它是微分 ∂ 定义如下的链复形

$$\tau_{\le k}(C)^i=\begin{cases}C^i, & \text{if } i\le k\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}\qquad \partial^i=\begin{cases}d^i, & \text{if } i<k\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

采用此记号，第 6 行可写作 $C\leftarrow\tau_{\le k+1}(C''')$。我们称加性范畴上的链复形 (C,d) 和 (D,∂) 是在 $k\in\mathbb{Z}$意义下链同伦的，记作 $C\simeq_{\le k}D$，如果对于所有$i\le k$，都存在态射

$$f^i\colon C^i\to D^i,\qquad g^i\colon D^i\to C^i,\qquad s^i\colon C^i\to C^{i-1},\qquad t^i\colon D^i\to D^{i-1}$$

使得 f^i a nd g^i 与微分交换，并且 s^i 和 t^i 给出到恒等映射的同伦 :

$$\begin{aligned}f^{i+1}d^i&=\partial^i f^i, & g^i f^i-\mathrm{id}_{C^i}&=d^{i-1}s^i+s^{i+1}d^i\\ g^{i+1}\partial^i&=d^i g^i, & f^i g^i-\mathrm{id}_{D^i}&=\partial^{i-1}t^i+t^{i+1}\partial^i.\end{aligned}$$

取 $k=\infty$ 时，即得到链同伦的通常定义。以下引理汇集了一些有用的基本性质。

引理 5.4。 *1.* $C\simeq D$ 推出对所有 k都有 $C\simeq_{\le k}D$ 。

2. 对所有 k， $\tau_{\le k+1}(C)\simeq_k C$。*3.* 若 F 是加性函子，则 $C\simeq_{\le k}D$ 推出 $F(C)\simeq_{\le k}F(D)$。*4.* 若 C 和 D 是阿贝尔范畴上的链复形，且 $C\simeq_{\le k}D$，则对所有 $i<k$， $H^i(C)\cong H^i(D)$。*5.* 设 P 是简单平面弧图， c是一个交叉， C 和 D 是定义在 $\mathcal{C}ob^{\mathbb{Z}}_{\bullet/l}(2n)$ 上的复形，且仅支撑于非负同调次数，此外 $C\simeq_{\le k}D$。则 $C\otimes_P[\![c]\!]_{\mathrm{US}}\simeq_{\le k}D\otimes_P[\![c]\!]_{\mathrm{US}}$。

证明。 断言 1、2 和 3 直接由定义得出；4 是标准结果的一个小修改；5 则利用了 $[\![c]\!]_{\mathrm{US}}$ 仅支撑于非负同调次数这一事实。 □

为了分析算法 $\mathcal{A}_k$ 的正确性并估算其时间复杂度，我们需要定义以下中间复形。我们用 $C_{[t]}$ 表示在第 t 次运行 $\mathcal{A}_k$ 的 for 循环（算法 2 的第 3–6 行）之前存储在变量 C 中的复形，其中 $t\le n(L)-1$；用$C_{[n(L)]}$ 表示 for 循环之后存储在变量 C 中的复形。

证明 $\mathcal{A}_k$ 正确计算 $\mathrm{Kh}^{i,*}(L)$ 对于 $i\le k-n_-(L)$ 成立。 在算法 2 的每一行，都可以利用引理 5.4 中相应的命题，得知链同伦在模 $k+1$ 的意义下得到保持：在第 1 行，我们将复形初始化为相同的值：$C_{[1]}=[\![c_1]\!]_{\mathrm{US}}$，因此特别有 $C_{[1]}\simeq_{\le k+1}[\![T_1]\!]_{\mathrm{US}}$。 接下来进行归纳时，我们在第 3 行使用命题5，在第 4、5 行使用命题1，在第 6 行使用命题2，并在第 8 行使用命题3。这保证了

$$F(C_{[n]})\simeq_{\le k+1}F[\![L]\!]_{\mathrm{US}}=u^{n_-(L)}q^{-n_+(L)+2n_-(L)}\,\mathrm{CKh}(L)$$

因此，根据断言 4，算法 $\mathcal{A}_k$ 正确地计算了 $\mathrm{Kh}^{i,*}(L)$ 对于 $i\le k-n_-(L)$。 □

5.4 $\mathcal{A}_k$的多项式时间复杂度证明

为了衡量对象的大小并限制操作次数，我们建立两个定义。首先，对于 $\mathcal{C}ob^{\mathbb{Z}}_{\bullet/l}(2n)$ 中的对象 B，我们设 $\mathrm{rank}_{\mathcal{C}ob}(B) = n$，其中 n 是分解式 (10) 中无圈图的数量。其次，对于定义在 $\mathcal{C}ob^{\mathbb{Z}}_{\bullet/l}(2n)$ 上的复形 (C, d)，我们定义 $\|C\|_i = \max\{\|f\|$：对于每个整数 i，f 的矩阵元为 $d^i\}$。

引理 5.5。 算法 $\mathcal{A}_k$的中间复形 $C_{[t]}$ 满足以下界

$$\mathrm{rank}_{\mathcal{C}ob}(C^i_{[t]}) \le \binom{t}{i} \qquad \textit{for } t < n(L) \tag{15}$$

$$\mathrm{rank}_{\mathcal{C}ob}(C^i_{[n(L)]}) \le 2\binom{n(L)}{i} \tag{16}$$

$$\|C_{[t]}\|_i \le \exp_2\left(\left(\frac{g}{2}+1\right)\left(\binom{t+1}{i+1}-1\right)\right) \qquad \textit{for all } t \tag{17}$$

其中， g 是良好扫描序列的围长，$\exp_2(a)$ 表示 2^a。

证明。 这三项结论均通过对 t进行归纳证明。对于 (15) 和 (16)，基础情形 $t = 1$ 是显然的；归纳步骤则根据平面弧图P的类型分为 4 个简单情形。例如，对于 II 型图，采用第 5.2 节的记号，我们可以直接计算

$$\mathrm{rank}_{\mathcal{C}ob}(C^i_{[t+1]}) = \mathrm{rank}_{\mathcal{C}ob}(E^i \otimes_P)\,(\oplus\, q\overline{D^{i-1}\otimes_P \asymp} \oplus E^{i-1}\otimes_P \asymp) \le \binom{t}{i} + \binom{t}{i-1} = \binom{t+1}{i}.$$

(16) 中额外的因子 2 对应于 II 型图所涉及的额外去环操作。对于 (17)，基础情形 $t = 1$ 可直接验证，并假设 (17) 对某个 t成立。不难看出

$$\|C_{[p]}\|_i = 0 \qquad \text{when } i < 0 \text{ or } i \ge p \tag{18}$$

因为复形 $[\![T_p]\!]$ 在同调次数 $i < 0$ 和 $i > p$上也为 0。 $C_{[t]}$ 的态射也是未截断莫尔斯复形 $M(C'') = C'''$ 的态射，它们是之字形路径的和。在 Morse 复形中可以看出，每个和中至多有 3 条路径；在 III 型和 IV 型情形中，它们要么使用 $(m^i_1)^{-1}$，要么使用 $(m^i_2)^{-1}$，要么两者都不使用，但不会两者兼用。三个直和项中每一项的范数都以 $2^{g/2-1}\max(\|C_{[t]}\|_i, 1)\max(\|C_{[t]}\|_{i-1}, 1)$ 为上界，其中 $2^{g/2-1}$ 项来自引理 5.3。特别地，我们得到

$$\|C_{[t+1]}\|_i \le 3\cdot 2^{\frac{g}{2}-1}\max(\|C_{[t]}\|_i, 1)\max(\|C_{[t]}\|_{i-1}, 1). \tag{19}$$

若 $1 \le i \le t-1$，我们可以利用归纳假设和 (19) 计算：

$$\begin{aligned}\|C_{[t+1]}\|_i &\le 3\cdot 2^{g-1}\exp_2\left((g+1)\left(\binom{t+1}{i+1}-1\right)\right)\exp_2\left((g+1)\left(\binom{t+1}{i}-1\right)\right)\\ &\le \exp_2\left((g+1)\left(\binom{t+2}{i+1}-1\right)\right).\end{aligned}$$

对于 $i = 0$ 和 $i = t$，利用 (18)、(19) 和归纳假设即可得到该结论 . □

的运行时间估计证明 $\mathcal{A}_k$。作为 $\mathcal{A}_k$ 的输入，我们将范围限制为具有良好扫描序列 $\mathcal{S}$ 且其围长$(\mathcal{S}) \le g$ 有全局上界的链环图 L。通过逐行分析算法 2 的伪代码，我们旨在证明，对于这个固定的输入集合， $\mathcal{A}_k$ 相对于 $n(L)$ 在多项式时间内运行。

根据引理 5.5，中间复形 $C_{[t]}$ 至多有 $2\sum_{j=0}^{k+1}\binom{t}{j} = \mathcal{O}(t^{k+1})$ 个对象。由于 $C_{[t]}$ 的每个矩阵元都连接一对对象，因此至多有 $\mathcal{O}(t^{2k+2})$ 个矩阵元 f，且根据引理 5.5，它们的范数有如下界：

$$\log_2\|f\| \le \max_{j\in\{0,\dots,k+1\}}\left(\binom{t+1}{j+1}-1\right)(g+1) = \mathcal{O}(t^{k+1}).$$

要从 $C_{[t]}$ 生成 $C' = C_{[t]} \otimes_{P_t} [\![c_{t+1}]\!]_{\mathrm{US}}$，我们至多执行 $\mathcal{O}(t^{k+1})$ 次对象的垂直复合、 $\mathcal{O}(t^{2k+2})$ 次态射的垂直复合，并创建至多 $\mathcal{O}(t^{k+1})$ 个新的鞍点态射。要从 C' 创建 C'' 时，我们对 $\mathcal{O}(t^{k+1})$ 个对象去环，并将 $\mathcal{O}(t^{2k+2})$ 个态射与去环 $\mathfrak{d}_1$、 $\mathfrak{d}_2$ 和重新加环 $\mathfrak{r}_1$、 $\mathfrak{r}_2$ 态射复合。在从 C'' 构造 C''' 时，我们执行 $\mathcal{O}(t^{2k+2})$ 次水平复合和态射求和。根据引理 5.3，每次水平复合所需时间关于 $\mathcal{O}(t^{k+1})$ 为多项式时间，因为围长$(T_t) \leq$ 围长$(\mathcal{S}) \leq g$。第 6 行的截断所需时间可以忽略不计。至此，我们已经证明存在某个与 t无关的常数 $a \in \mathbb{Z}$，确保在 for 循环的第 t 次迭代中只执行 $\mathcal{O}(t^a)$ 次操作。

执行整个 for 循环时，对于不同的 $t \leq n(L) - 1$ 值，会进行 $n(L) - 1$ 次迭代，因此至多

$$\sum_{t=1}^{n(L)-1} \mathcal{O}(t^a) \leq \sum_{t=1}^{n(L)-1} \mathcal{O}(n(L)^a) = \mathcal{O}(n(L)^{a+1})$$

次运算后，才会在第 9 行进行史密斯标准形计算。整数矩阵 $A^{n\times m}$ 的史密斯标准形可在相对于 n、 m 和 $\max_{i,\,j}\{\log_2(|A_{i,\,j}|)\}$、[Sto96]的多项式时间内计算。根据引理 5.5， $F(C_{[n(L)]})$ 的矩阵在这些量方面具有多项式上界。因此，对于围长$(\mathcal{S}) \leq g$的输入 $(L,\ \mathcal{S})$， $\mathcal{A}_k$ 的运行时间为多项式时间。由此，算法 $\mathcal{A}_k$ 对于所有输入 $(L,\ \mathcal{S})$ 的运行时间为 $\mathcal{O}(f(\text{围长}(\mathcal{S})) \cdot p_k(n(L)))$，其中 f 是某个函数，p_k是多项式。 □

6 利用优美扫描序列的二项式秩界

若任意两个顶点之间都有一条路径，则图 G 是连通的，其中的两个顶点为 G。此外，若对于每个顶点 $v \in G$， $G \setminus \{v\}$ 的诱导子图都是连通的，则称图 G 为 2-连通。

引理 6.1。 设 $G = (V, E)$ 是一个2-连通图， $A \subset V$ 是顶点的一个子集，满足 $\#A \geq 1$且$\#(V \setminus A) \geq 2$。若 A 和 $V \setminus A$ 的诱导子图是连通的，则存在 $x \in V \setminus A$，使得 $A \cup \{x\}$ 和 $V \setminus (A \cup \{x\})$ 的诱导子图也连通。

*Pro*的。 假设 x 是 $V \setminus A$ 的一个顶点，使得以下最大值能够取到：

$$M = \max\big\{\#C \mid x \in (V \setminus A),\ A \cup \{x\} \text{ connected},\ C \text{ is a component of } V \setminus (A \cup \{x\})\big\}.$$

若 $M = \#V - \#A - 1$，则 $V \setminus (A \cup \{x\})$ 是连通的，因此我们可以反设 $M < \#V - \#A - 1$。

设 C 和 D 是 $V \setminus (A \cup \{x\})$ 的两个连通分支，满足 $M = \#C$，并任取顶点 $c \in C$ 和 $d \in D$。由于 G 是 2- 连通的，因此存在一条从 d 到 c 的路径 P，它不与 x 相交。记 $d' \in D$ 为 P 在 D 中的最后一个顶点，使得 $V \cup \{d'\}$ 连通，并将 C' 记为 c 在 $V \setminus (A \cup \{d'\})$ 中所属的连通分支。由此可得 $\#C < \#C'$，因为连通分支 C' 还包含顶点 x。另一方面，根据 M 的极大性，$\#C' \leq M = \#C$，这就得到了所需的矛盾。 □

如果链环图不含任何可约交叉点，就称其为约化的，见图7。显然，连通链环图 L可以转化为一个同痕、约化且连通的链环图 L'，其中 $n_+(L) \geq n_+(L')$，且 $n_-(L) \geq n_-(L)$。

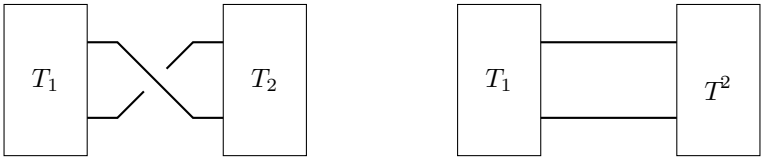


图7：可约交叉点（左）及将其移除（右）。移除可约交叉点时，右侧缠结 T_2 绕 x轴旋转 $180°$，图中通过将符号 T_2翻转为T^2表示这一操作。

引理 6.2. 每个连通约化链环图都存在一个良好扫描序列。

证明。设 L 是一个连通约化链环图，$G_L = (V, E)$ 是 L 的四价非简单平面图，其顶点是 L 的交叉点，边对应于交叉点之间的链段。由 G_L 连通且约化这一事实可知，G_L 是 2-连通的。（G_L 的任何顶点分隔集都必须对应于 L 中的一个可约交叉点，但 L 没有可约交叉，因为它是约化的。）

交叉点序列 $c_1, \dots, c_n$ 是通过贪心算法从图 G_L 中检索得到的。首先任选一个顶点 $c_1 \in V$，并注意到诱导子图 $\{c_1\}$ 和 $V \setminus \{c_1\}$ 是连通的。接下来，假设已选取 $c_1, \dots, c_i$，使得 $i \leq n-2$ 以及 $\{c_1, \dots, c_i\}$ 和 $V \setminus \{c_1, \dots, c_i\}$ 的诱导子图均连通。根据引理 6.1，存在一个顶点 c_{i+1}，使得 $\{c_1, \dots, c_{i+1}\}$ 和 $V \setminus \{c_1, \dots, c_{i+1}\}$ 的诱导子图也保持连通。最后，选定 $c_1, \dots, c_{n-1}$ 后，加入最后一个顶点，以完成交叉点序列 $c_1, \dots, c_n$。

通过令 $T_1 = c_1$ 并分析 c_{i+1} 如何归纳地粘合到 T_i 上，可以检索得到子缠结图 $T_1, \dots, T_n$ 和简单平面图 $P_1, \dots, P_{n-1}$。将 c_{i+1} 粘合进去后，$c_1, \dots, c_i$ 的诱导子图仍保持连通，因此 P_i 必须通过 1、2、3 或 4 条链段将 c_{i+1} 与 T_i 连接起来。此外，顶点 c_{i+1} 无法通过 4 条链段与 T_i 连接，除非 $i+1 = n$，因为 $\{c_{i+1}, \dots, c_n\}$ 的诱导子图是连通的。最后，由于 L 是约化的，不存在从一个交叉点到其自身的链段。因此，当 $i \leq n-2$ 时，c_{i+1} 通过 I 型、II 型或 III 型简单平面弧图粘合到 T_i 上；当 $i = n-1$ 时，则通过 IV 型图粘合，于是 $\mathcal{S} = ((T_1, \dots T_n), (c_1, \dots, c_n), (P_1, \dots, P_{n-1}))$ 构成 L的良好扫描序列。 □

命题 *1.5* 的证明。令 L' 表示通过去除可约交叉点从 L 得到的链环图。由引理 6.2 可知，L' 上存在一个良好扫描序列 $\mathcal{S}$。在 $(L', \mathcal{S})$ 上运行算法 A_k 时，对于 $k = n(L')$，没有非零链空间被截断，因此存在一个真正的链同伦 $u^{-n_-(L)} q^{n_+(L)-2n_-(L)} C_{[n(L)]} \simeq [\![L']\!]$。因此，对于任意域 $\mathbb{F}$，我们都可以计算

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Kh}^{i,*}(L;\mathbb{F})) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Kh}^{i,*}(L';\mathbb{F})) &\leq \operatorname{rank}\left(F(u^{-n_-(L)} q^{n_+(L)-2n_-(L)} C_{[n(L)]})^i\right) \\ &\leq \operatorname{rank}_{\mathcal{C}ob}\left(C^{i+n_-(L)}_{[n(L)]}\right) \leq 2\binom{n(L')}{i+n_-(L')} \leq 2\binom{n(L)}{i+n_-(L)}\end{aligned}$$

通过用链复形的大小作为同调的上界，并使用引理 5。 5. □

7 秩界的渐近严格性

命题 1.6 是一个非消失结果，声称某些 Khovanov 同调群的秩具有渐近下界。为证明这一点，我们考虑链复形 CKh(L_t)，其中 L_t 是辫图 $(\sigma_1\sigma_3\sigma_2^4)^t\sigma_1\sigma_3$ 的辫闭包，见图 8。在 CKh(L_t) 上，我们采用第一作者 [Kel25] 先前工作中的算法 Morse 匹配 M_{lex}。这产生了一个 Morse 复形 M_{lex}(CKh(L_t))，其中我们找到 2^t 个显式且彼此不同的非零同调循环。

由于我们使用的 M_{lex} 链环图 L_t 只包含形如.....的交叉点，因此 M_{lex} 的构造可以大大简化。在[Kel25] 中，匹配 M_{lex} 是在 Bar-Natan 的缠结复形上定义的；但由于我们只研究特定的链环，因此可以直接为 CKh(L_t) 定义它，而 CKh(L_t) 是由自由 $\mathbb{Z}$-模构成的链复形。我们在 CKh(L_t) 上固定的直和分解由 $\mathbb{Z}$ 的单个副本组成：每个平滑的每种二着色对应一个副本。我们使用的两种灰度颜色分别是表示单位元 1 的虚线灰色和表示余单位元 x的粗黑色。这使我们可以将 Khovanov 复形的并合 m 和分裂 Δ 映射写作

$$\begin{aligned} m(\bigcirc \otimes \bigcirc) &= \bigcirc & \Delta(\bigcirc) &= \bigcirc \otimes \bullet + \bullet \otimes \bigcirc \\ m(\bullet \otimes \bigcirc) &= m(\bigcirc \otimes \bullet) = \bullet & \Delta(\bullet) &= \bullet \otimes \bullet \\ m(\bullet \otimes \bullet) &= 0. \end{aligned}$$

特别地，分裂出去的映射总是一个同构，而我们的 Morse 匹配 M_{lex} 将由这类分裂构成。

我们将 L_t 的交叉点按从下到上的顺序排列，等价地，将 $(\sigma_1\sigma_3\sigma_2^4)^t\sigma_1\sigma_3$ 的字符按从左到右的顺序排列。对于 CKh(L_t) 的一个矩阵元 f，若它在第 k 个交叉处将 0 平滑变为 1 平滑，我们记 $i(f) = k$。在图示中，我们定义

$$M = \left\{ f \in \{\text{matrix elements of } \mathrm{CKh}(L_t)\} \,\middle|\, \begin{array}{c} f \text{ splits out a } \bullet \text{ loop which completely located} \\ \text{at or below the } i(f)\text{:th crossing in the diagram } L_t \end{array} \right\}.$$

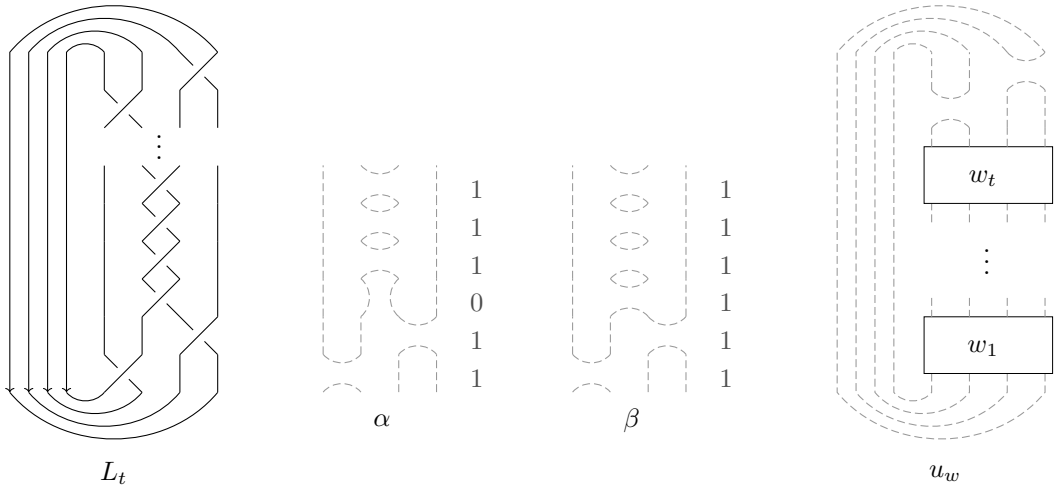


图 8：链环图 L_t 以及局部图 α, β。 $G(\mathrm{CKh}(L_t)\ M_{\mathrm{lex}})$ 的特殊顶点 u_w 通过取一个元组 $w \in \{\alpha, \beta\}^t$，并将 w 的局部图上下叠放构造而成；对最后两个顶点进行平滑，并将所有环标为灰色虚线。

对于每个顶点 x，我们定义 $N(x)$ 为来自 M 的相邻态射集合：

$$N(x) = \{f \colon a \to x \mid f \in M\} \cup \{g \colon x \to b \mid g \in M\}.$$

这使我们最终可以设定

$$M_{\mathrm{lex}} = \{f \colon x \to y \mid f \in M,\ i(f) \le i(g) \text{ for all } g \in N(x) \cup N(y)\}.$$

[Kel25] 的命题 3.5 表明，对于每个缠结/链环图， M_{lex} 都是 Morse 匹配，特别地：

引理 7.1. </style}匹配 是CKh(L_t)上的 *Morse* 匹配。

在图 8 中，我们为每个 $w \in \{\alpha, \beta\}^t$构造了 $G(\mathrm{CKh}(L_t)\ M_{\mathrm{lex}})$ 的特殊顶点 u_w。这些图 u_w 最终表示 Morse 复形 $M_{\mathrm{lex}}(\mathrm{CKh}(L_t))$ 中彼此不同的同调循环。命题 1.6 的证明是以下关于图 u_w的三个断言的推论：

1. 顶点 u_w 在 M_{lex} 中未匹配，因此它表示 Morse 复形 $M_{\mathrm{lex}}(\mathrm{CKh}(L_t))$ 中同调次数 $6t + 2 - \#\{j \mid w_j = \alpha\}$ 上的一份 $\mathbb{Z}$。 2. 假设 u_w 的同调次数为 h，并将 $(M_{\mathrm{lex}}(L_t))^h$ 到 u_w 的投影记为 π。则 $\pi\partial^{h-1} = 0$。 3. 假设 u_w 的同调次数为 h，并将 u_w 到 $(M_{\mathrm{lex}}(L_t))^h$ 的包含映射记为 ι。则 $\partial^h \iota = 0$。

命题 *1.6* 的证明。根据命题1，每个 u_w 都表示复形 $M_{\mathrm{lex}}(\mathrm{CKh}(L_t))$ 中的一份 $\mathbb{Z}$；根据命题2和命题3，该 $\mathbb{Z}$ 完全贡献于同调 $H(M_{\mathrm{lex}}(\mathrm{CKh}(L_t))) \cong \mathrm{Kh}(L_t)$。由此得到

$$\mathrm{Kh}^{n(L_t)-k,*}(L_t) \cong \mathbb{Z}^{\binom{t}{k}} \oplus A_{k,t}$$

对于某些 $\mathbb{Z}$-模 $A_{k,\ t}$。因此

$$\liminf_{t\to\infty} \left(\frac{\mathrm{rank}(\mathrm{Kh}^{n(L_t)-k,*}(L_t))}{\binom{n(L_t)}{n(L_t)-k}} \right) \ge \liminf_{t\to\infty} \left(\frac{\binom{t}{k}}{\binom{6t+2}{6t+2-k}} \right) = \frac{1}{6^k}$$

完成证明。 □

命题*1*的证明。 将 u_w 的任意一个0-平滑改为1-平滑，会产生一个分裂态射f： $u_w \to y$。无论我们选择对哪个交叉施加 f， f分开的 y 中的两个环都不会完全包含在 y中的 $i(f)$下方。因此 $f \notin M$。另一方面，将 u_w 的任意一个1-平滑改为0-平滑，在几何上相当于沿相反方向进行分裂。然而，u_w 不含任何环，而每个分裂态射至少会产生一个环，因此图 $G(\mathrm{CKh}(L_t))$中不可能存在边 $g\colon x \to u_w$。由此可知， $N(u_w) = \emptyset$，因此 u_w未匹配。

□

命题*2*的证明。 设 x 是 $G(\mathrm{CKh}(L_t)\ M_{\mathrm{lex}})$ 中同调次数为 $h-1$ 的一个未匹配顶点。在前一个命题中，我们论证了图 $G(\mathrm{CKh}(L_t))$ 中的 $x \to u_w$ 没有边。因此，不可能存在从 x 到 u_w的任何之字形路径。于是$\partial_{u_w,\ x} = 0$，因此 $\pi\partial^{h-1} = 0$ 也成立。 □

7.1 命题3的证明

设 y 是 $G(\mathrm{CKh}(L_t)\ M_{\mathrm{lex}})$ 中同调次数为 $h+1$ 的一个未匹配顶点，并令 $P = \{$ 为路径： $u_w \to y\}$. 在命题2中，我们根据以下事实推导出 $\pi\partial^{h-1} = 0$： 在 $G(\mathrm{CKh}(L_t)\ M_{\mathrm{lex}})$ 中，不存在从任何顶点到 u_w 的非平凡路径。由于 P 可以非空，因此无法用相同的方法证明 $\partial^h\iota = 0$。相反，我们将证明 P 可以配成若干互不相交的配对 $(p,\ \lambda(p))$，使得 $R(\lambda(p)) = -R(p)$。利用这一配对，可以轻易计算出：

$$\partial_{y,u_w} = \sum_{q\in P} R(q) = \sum_{(p,\lambda(p))} R(p) + R(\lambda(p)) = 0.$$

若对于某个 $0 \le n \le t-1$，在$6n+8$处交叉之上切割 $l_1, \dots, l_8$ 的图会生成图9c中的图形，则称 $l_1 \to \cdots \to l_8$ 为 l-子路径。类似地，如果类似的切割生成图9b中的图，则称 $s_1 \to s_2$ 为 s-子路径。为了证明每个 $p \in P$ 都包含一个 s-子路径或一个 l-子路径，我们需要以下结果。

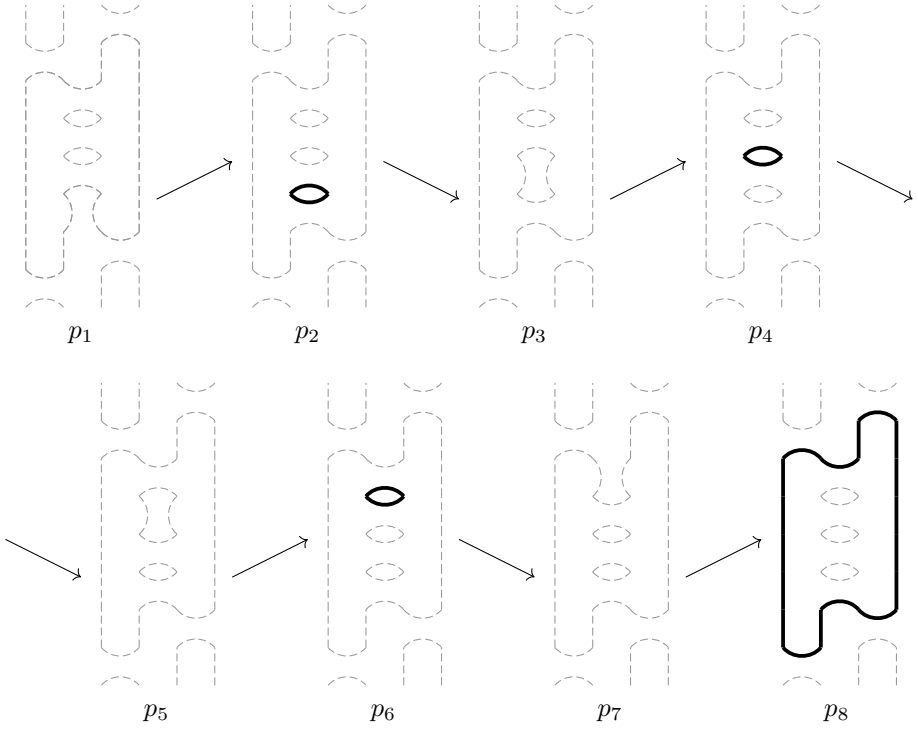
引理7.2 (引理3.4，见 [Kel25])**.** 设$(b \to a) \in M_{\mathrm{lex}}$ 和 $a \to b \to c$ 是图 $G(\mathrm{CKh}(L_t)\ M_{\mathrm{lex}})$中连接未匹配单元的之字形路径的一条子路径。那么 $i(b \to a) \le i(b \to c)$。

设 $p = (v_1 \to \cdots \to v_{2m}) \in P$ 是一条不包含 s-子路径的之字形路径。观察 u_w 的图可知， $v_1 \to v_2$ 必须具有图9b中的 $s_1 \to s_2$ 或图9c中的 $l_1 \to l_2$ 形式。由于 p 不含 s-子路径，因此后一种情况必然成立。接下来，设 $v_{2k+1} \to v_{2k+2}$ 是 p 中一条形如 $l_1 \to l_2$ 的边，并且对于 p 中其他任何一条形如 $l_1 \to l_2$ 的边 $v_{2j+1} \to v_{2j+2}$，都有 $i(v_{2k+1} \to v_{2k+2}) \le i(v_{2j+1} \to v_{2j+2})$。通过验证类型为 l_2 的顶点与类型为 l_3 的顶点匹配，可得 v_{2k+3} 的类型为 l_3。由引理 7.2 可得 $i(v_{2k+3} \to v_{2k+4}) \le i(v_{2k+3} \to v_{2k+2})$。来自 v_{2k+3} 且 i 值严格小于 $i(v_{2k+3} \to v_{2k+2})$ 的边，要么属于 $s_1 \to s_2$ 类型，要么属于 $l_1 \to l_2$ 类型；但由于 p 不含 s-子路径，且 $i(v_{2k+1} \to v_{2k+2})$ 具有最小性，这两种情况都不可能。因此 $i(v_{2k+3} \to v_{2k+4}) = i(v_{2k+3} \to v_{2k+2})$，所以 v_{2k+4} 必须属于 l_4 类型（因为指向 l_2 类型顶点的箭头方向相反）。交替重复前述两个论证可推得， $v_{2k+1} \to \cdots \to v_{2k+8}$ 是一条 l-子路径。因此，每个 $p \in P$ 都包含一条 s-子路径或一条 l-子路径。

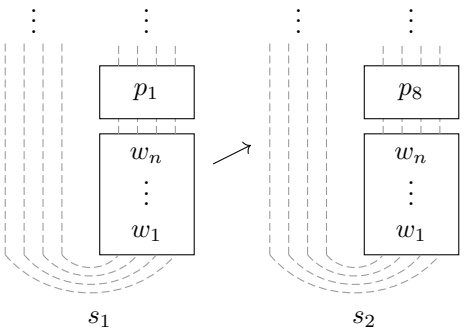
我们预先提到的配对具有如下双射形式 $\lambda\colon P \to P$。函数 λ 以路径 p为输入，截取其中首次出现的 s-或 l-子路径，并将一条 l-或 s-子路径接回去。如果截取的是 s-子路径，那么接回去的就是 l-子路径，反之亦然。由于 s-和 l-子路径的起点与终点都是相似的顶点，因此映射 λ 定义良好；又因为 $\lambda(\lambda(p)) = p$，它是一个双射。

为确认 $R(\lambda(p)) = -R(p)$，我们取一条路径 $p \in P$，其中首先出现一条 s-路径。将$s_1 \to s_2$和 $l_1 \to \cdots \to l_8$分别记作从 p中截取出的 s-路径，以及通过 λ接回去的 l-路径。或许令人惊讶的是，要看出 $R(s_1 \to s_2)$ 和 $R(l_1 \to l_2)$ 的符号一致，我们并不需要为复形 $\mathrm{CKh}(L_t)$ 固定符号约定。另一方面， $R(l_2 \to l_3)$ 和 $R(l_3 \to l_4)$ 的符号彼此相反， $R(l_4 \to l_5)$ 和 $R(l_5 \to l_6)$ 的符号也彼此相反，此外 $R(l_6 \to l_7)$ 和 $R(l_7 \to l_8)$ 的符号同样彼此相反。综合以上结果可得 $R(s_1 \to s_2) = -R(l_1 \to \cdots \to l_8)$；由于这些路径在其他部分相同，我们还得到 $R(\lambda(p)) = -R(p)$，由此证明得证。 □

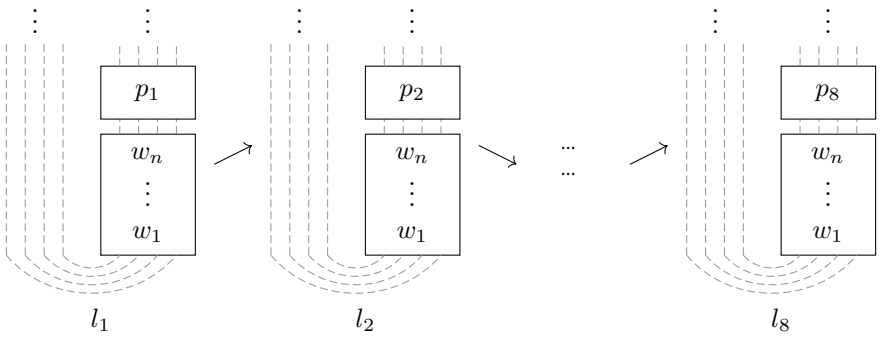
注记 7.3。 在证明命题 1.6 时，只有最后一步才需要用到符号。在这一步中，只需保证超立方体 $\mathrm{CKh}(L_t)$ 中连接两个平滑化 a 和 b 的每条边 e: $a \to b$，无论在 a 和 b 的环上选取什么颜色，都具有一致的符号。对于奇 Khovanov 同调 [ORS13] 的所有符号模式，这一事实同样成立。因此，证明可以在奇情形下进行，命题 1.6 对奇 Khovanov 同调也成立。



(a) 用于构成 s 和 l 子路径的局部图 p_1，……，p_8。



(b) 一个 s 子路径。下方的方框（w_1，……，w_n）$\in \{\alpha, \beta\}^n$ 包含 n 个副本，这些副本由图 8 中的 α 图和 β 图上下堆叠而成。



(c) 一个 l 子路径。下方的方框（w_1，……，w_n）$\in \{\alpha, \beta\}^n$ 包含 n 个副本，这些副本由图 8 中的 α 图和 β 图上下堆叠而成。

图 9： s-子路径、图9b，以及 l-子路径、图9c，都是 $G(\mathrm{CKh}(L_t)\ M_{\mathrm{lex}})$ 中的路径。 s-和 l-子路径的顶点是全局图，其下半部分与图 $9b$ 和 9c 中的图相匹配。

备注 7.4。 虽然非零同调循环 C_w 的构造大多是局部的，但要求 C_w 的所有相邻态射都是分裂态射这一全局条件同样至关重要。这为调整 L_t的构造留下了一定空间。通过考虑辫闭包 L'_t （$\sigma_1\sigma_3\sigma_2^4$）$^{2t}\sigma_1\sigma_3\sigma_2^3$，可以通过对最上面的 5 个交叉点进行 1-平滑来构造类似的同调循环 C'_w 。由此可知，命题 1.6 的渐近下界可以由纽结实现，因此这并非 2 或 4 分支链环所特有的性质。

通常，无论在理论上还是计算上，琼斯多项式都比 Khovanov 同调更容易获得。在定理 1.3 的证明中，我们已经利用了这一事实：从琼斯多项式和亏格中得到拟交替链环的 Khovanov 同调。在命题 1.6 中，情况却恰恰相反：我们得到了 Khovanov 同调群秩的下界，这些同调群位于同一条对角线上，但却无法对琼斯多项式 J_{L_t}（q）作任何说明。由于当 t 足够大时，这些链环 L_t 并非同调薄，我们无法确保在将 Kh（L_t）去范畴化为 J_{L_t}（q）时，与高秩同调群对应的单项式不会在交错和中相互抵消。

8 开放问题

在 [PS24], Przytycki 和 Silvero 中，他们证明了闭 4-辫 L 的极端 Khovanov 同调可以在多项式时间内计算。此外，至多存在两个非平凡群 $\mathrm{Kh}^{i,\,q_{\min}}(L)$ 和 $\mathrm{Kh}^{k,\,q_{\min}}(L)$，其中 $k \geq i$，二者都是自由阿贝尔群，且总秩至多为 4 [PS24，推论 1.6]。原则上，间隔 $k-i$ 可以任意大，因此我们的方法无法直接证明他们的结果。不过，我们可以探讨能否通过修改算法 2，使其只追踪最小量子次数，从而得出他们的结果。

问题 8.1。 能否修改算法 2，使其可以在多项式时间内计算闭 k-辫的极端 Khovanov 同调?

Bar-Natan 的扫描算法将单个交叉的复形与 I–IV 型简单平面弧图粘合，然后通过反复进行高斯消元来化简总复形。若直接实现，这一过程需要先构造一个更大的复形，再开始化简过程:

$$C \xrightarrow{\text{glue}} C \otimes_P [\![c]\!] \xrightarrow{\text{deloop}} D \xrightarrow[\text{elimination}]{\text{iterate Gaussian}} E.$$

我们在第 5.2 节为 I 型、II 型和 IV 型图及交叉点 $c \in \{\times, \times\}$ 构造的 Morse 复形，可以显式写出，并且无需先进行去环，即可逐个矩阵元地实现；这相当于

$$C \xrightarrow[\text{associated to } c \text{ and } P]{\text{build the Morse complex}} M(C) \xrightarrow[\text{elimination}]{\text{iterate Gaussian}} E.$$

不难看出，这种替代性的、更加繁琐的工作流程，在贝蒂数呈指数级增长的纽结上仍将需要指数时间。不过，其中应该仍有优化空间，以下问题可以通过实证加以研究。

问题 8.2。 将莫 Morse 理论简化作为扫描算法的一部分加以实现，是否会显著加快平均情形纽结的计算?

除了平均情形纽结之外，我们还可以期待，对特殊链环计算 Khovanov 同调会很快。在 Khovanov 同调的研究中，环面链环无疑受到了特别关注，因此自然会提出如下问题:

问题 8.3。 设 $n \geq 4$。Bar-Natan 扫描算法是否能在多项式时间内计算 n 股环面链环的 Khovanov 同调，无论使用整数系数还是域系数?

Bar-Natan 扫描算法可以在多项式时间内计算 2 股和 3 股环面链环的 Khovanov 同调。这可以从 [Sch25b, §3,4] 中的技巧看出。对于 $n = 4$，开辫的 Bar-Natan 复形 $[\![(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^n]\!]$ $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^n$ 可以简化为仅含二次数量生成元的复形 [Kel25, Corollary 4.2] 这为问题 8.3 的肯定答案提供了支持，至少

[2]根据 Islambouli 和 Willis [IW18], 的一个结果，正辫（$\sigma_1\sigma_3\sigma_2^4$）$^t\sigma_1\sigma_3$ 的复形收敛到范畴化的 Jones-Wenzel 投影算子。因此，链环 L_t的 Khovanov 同调经过适当归一化后，收敛到 $T(4,\ \infty)$ 的稳定 Khovanov 同调。由于 Kh($T(4,\ \infty)$) 在较小的（≤ 4）同调次数中并非同调薄（[参见07] 定理 3.4），因此当 t 足够大时， L_t 也不可能是同调薄的。

在使用有限域系数时是如此。以下命题也表明答案可能是肯定的；其证明由 Qiuyu Ren 惠允提供给作者。

命题 8.4. 存在 $\{c_n\}_{n\geq 2}$，使得对所有域 $\mathbb{F}$，维数$_{\mathbb{F}}(\mathrm{Kh}(T(n,m);\mathbb{F}))\leq c_n\, m^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}$.

证明。令 $L_{n,k}$ 表示 $(\sigma_1\dots\sigma_{n-1})^m\sigma_1\dots\sigma_r$ 的辫闭包，其中 $k=(n-1)m+r$ 且 $0\leq r<n-1$。由于 $T(n,m)=L_{n,(n-1)m}$，只需证明存在系数 c_n，使得 $\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Kh}(L_{n,m};\mathbb{F}))\leq c_n m^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}$。我们对 n进行归纳法；由 [Kho00, §6.2], [CLSS22, Cor.5.7] 和定理 3.3 可得到足够的系数 c_2和 c_3。接下来假设存在 $c_2,\dots,c_{n-1}$，满足 $\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Kh}(L_{i,m};\mathbb{F}))\leq c_i m^{\lfloor \frac{i}{2}\rfloor}$。

$L_{n,\,m}$ 的最后一个交叉有两种消解方式，由此生成两个链环 $L_{n,\,m}[\;]$ 和$L_{n,\,m}[\;]$。链环 $L_{n,\,m}[\;]$ 与 $L_{n,\,m}[\;]$ 同痕，而 $L_{n,\,m}[\;]$与某个 $L_{s,\,t}$ 或 $L_{s,\,t}\sqcup$（平凡结）同痕，其中 $s\leq n-2$和 $t\leq m$满足某些条件。关于 $L_{n,\,m}[\;]$的同痕论证在 [Tag17 的图 15-20] 中有清晰说明，不过我们的约定与之互为镜像。

与辫子词 $L_{n,\,m}$的最后一个交叉相对应的是一个正合三角

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Kh}(L_{n,m}[\asymp];\mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathrm{Kh}(L_{n,m};\mathbb{F}) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & \mathrm{Kh}(L_{n,m}[)\,(\,];\mathbb{F}). & \end{array}$$

代入上述同痕后，可得到关于维数的不等式：

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Kh}(L_{n,m};\mathbb{F}))\leq \dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Kh}(L_{n,m-1};\mathbb{F}))+2\dim_{\mathbb{F}}(\mathrm{Kh}(L_{s,t};\mathbb{F})).$$

因此，取 $c_n=2\max_{i<n} c_i$ 即可得到 n所需的界。 □

参考文献

[BN05] Dror Bar-Natan, 《缠结与协边的 Khovanov 同调》, 《几何与拓扑》**9** （2005）, 1443–1499。MR 2174270[BN07] Dror Bar Natan, 《快速 Khovanov 同调计算》, 《结理论及其影响》**16**（2007）, 第 3 期, 243–255。MR 2320156[CLSS22] Alex Chandler、Adam M. Lowrance、Radmila Sazdanovi´c 和 Victor Summers, 《Khovanov 同调薄区域中的挠元》, 《加拿大数学杂志》**74** （2022）, 第 3 期, 630–654。MR 4430925[FGMW10] Michael Freedman、Robert Gompf、Scott Morrison 和 Kevin Walker, 《人类与机器对光滑四维 Poincar´e 猜想的思考》, 《量子拓扑》**1** （2010）, 第 2 期, 171–208。MR 2657647[IW18] Gabriel Islambouli 和 Michael Willis, 《无限辫子的 Khovanov 同调》, 《量子拓扑》**9** （2018）, 第 3 期, 563–590（英文）。MR 3827809[JNP23] SahilJoshi、Komal Negi 和Madeti Prabhakar, 《某些编织结族的琼斯多项式的一些取值》, 《拓扑学及其应用》**329**（2023）, 论文编号 108466, 11 页。MR 4561084[JVW90] Fran¸cois Jaeger、D. L. Vertigan 和 D. J. A. Welsh, 《琼斯多项式与 Tutte 多项式的计算复杂度》, 《剑桥哲学学会数学论文集》**108** （1990）, 第 1 期, 35–53（英文）。MR 1049758[Kel24] Tuomas Kelom¨aki, 《Khovanov 同调的离散 Morse 理论》, 预印本, 可见于 arXiv:2306.11186（2024）。[Kel25] Tuomas Kelom¨aki, 《Morse 匹配与四股辫环面链环的 Khovanov 同调》, 预印本, 可见于 arXiv:2507.15060（2025）。

[Kho00] Mikhail Khovanov, 《琼斯多项式的范畴化》, Duke Math. J. 101（2000）, 第 3 期, 359–426。MR 1740682[Kho06] Mikhail Khovanov, 《链环同调与 Frobenius 扩张》, Fund. Math. 190（2006）, 179–190。MR 2232858[MO08] Ciprian Manolescu 和 Peter Ozsv´ath, 《拟交替链环的 Khovanov 同调与纽结 Floer 同调》, Proceedings of G¨okova Geometry-Topology Conference 2007, G¨okova Geometry/Topology Conference（GGT）, G¨okova, 2008, 第 60–81 页。MR 2509750[MPS+18] Sujoy Mukherjee、J´ozef H. Przytycki、Marithania Silvero、Xiao Wang 和 Seung Yeop Yang, 《寻找 Khovanov 同调中的挠元》, Exp. Math. 27（2018）, 第 4 期, 488–497。MR 3894728[MS90] H. R. Morton 和 H. B. Short, 《计算表示为闭辫的纽结的二元多项式》, J. Algorithms 11（1990）, 第 1 期, 117–131。MR 1041170[Mur74] Kunio Murasugi, 《关于闭 3 股辫子》, 《美国数学学会回忆录》, 第 151 卷, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1974。MR 356023[ORS13] Peter S. Ozsv´ath、Jacob Rasmussen 和 Zolt´an Szab´o, 《奇 Khovanov 同调》, Algebr. Geom. Topol. 13（2013）, 第 3 期, 1465–1488。MR 3071132[Pic20] Lisa Piccirillo, 《Conway 纽结不是切片的》, Ann. Math.（2）191（2020）, 第 2 期, 581–591（英文）。MR 4076631[PS24] Jozef H. Przytycki 和 Marithania Silvero, 《Khovanov 同调、球面的楔和与复杂度》, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat., Ser. A Mat., RACSAM 118（2024）, 第 3 期, 34（英文）, 编号 102。MR 4741186[Sch21] Dirk Sch¨utz, 《计算 S-不变量的快速算法》, Glasg. Math. J. 63（2021）, 第 2 期, 378–399。MR 4244204[Sch25a] Dirk Sch¨utz, 《Rasmussen 不变量的一个整数版本》, Michigan Math. J. 75（2025）, 第 1 期, 65–88。MR 4873797[Sch25b] Dirk Sch¨utz, 《关于三股辫子的 Khovanov 同调》, 预印本, 即将在《量子拓扑》发表, 可见于 arxiv:2501.11547（2025）。[Shu21] Alexander N. Shumakovitch, 《同调薄纽结的 Khovanov 同调中的挠元》, 《结理论及其影响》30（2021）, 第 14 期, 论文编号 2141015, 17 页。MR 4407084[Sk¨o06] Emil Sk¨oldberg, 《从代数观点看 Morse 理论》, Trans. Amer. Math. Soc. 358（2006）, 第 1 期, 115–129。MR 2171225[SRZ+25] Alexander Schmidhuber、Michele Reilly、Paolo Zanardi、Seth Lloyd 和 Aaron Lauda, 《Khovanov 同调的量子算法》, 预印本, 可见于 arXiv:2501.12378（2025）。[Sto96] Arne Storjohann, 《计算整数矩阵史密斯标准形的近最优算法》, Proceedings of the 1996 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation（美国纽约州纽约市）, ISSAC '96, Association for Computing Machinery, 1996, 第 267–274 页。[Sto07] Marko Sto˘si´c, 《环面纽结的同调厚度与稳定性》, Algebr. Geom. Topol. 7（2007）, 261–284（英文）。MR 2308944[Tag17] Keiji Tagami, 《关于 Khovanov 同调的最大次数》, Topol. Proc. 50（2017）, 59–65（英文）。