arXiv:2601.02130v1 [physics.plasm-ph] 5 Jan 2026

迈向离子回旋共振加热波方程与福克–普朗克方程的自洽求解

Dirk Van Eester、Vincent Maquet、Fabrice Louche 和 Bernard Reman 等离子体物理实验室——比利时“EUROfusion 联盟”成员三边尤雷吉奥集群 Renaissance 大道30号，B-1000，比利时布鲁塞尔

2026年1月6日

摘要

本文概述了一个框架，用于在离子回旋共振频段内完全自洽地求解波方程和福克–普朗克方程。文中说明，可以通过首先构建波方程和福克–普朗克方程通常需要的“构件”来实现这一点，例如，从而能够考虑含有非麦克斯韦分布的等离子体中的波耦合。除细节之处外，本文利用已知表达式和方法，求解描述离子回旋共振加热所依据的波粒相互作用这一密切关联的两个方面。文中介绍了两种情况：一种情况中，导引中心运动仅限于沿磁力线运动；另一种扩展情况则考虑偏离磁面的漂移，但假设具有轴对称性。文中还列出了一组有限的解析结果。由于重点是结合求解波方程与福克–普朗克方程，文中也展示了如何计算任意分布函数对应的介电响应。

1 引言

在磁约束聚变中，对离子回旋共振加热所涉及的波粒相互作用进行建模时，通常会将时间尺度分开，从而分别建立方程，描述与等离子体所含各物种的一组给定分布函数相关的（快时间尺度）电场分布，以及这些分布函数在射频电场净作用下的（慢时间尺度）演化。这两个方面密切相关，严格来说应当一视同仁地处理。但在实际应用中，所作假设各不相同，因此

由此得到的两个方程的解并非完全自洽；通常只有每个磁面上的积分功率密度是共用的。为了妥善考虑有限温度以及平行和垂直梯度效应，通常会对未知电场进行傅里叶变换，推导出适当的表达式，尽可能真实地描述粒子轨道和局部波粒相互作用，最后再计算逆傅里叶变换以回到物理空间。然而，逆变换很快就会变得繁琐。因此，寻找其他方法来求解实际的积分微分波动方程至关重要。对于那些违反“波的相位在一次拉莫尔回旋过程中变化不大”这一假设的模，正确模拟有限拉莫尔半径效应是必不可少的（$k_\perp \rho_{Larmor} << 1$ 其中 $k_\perp$ 为垂直波数，ρ_{Larmor} 为拉莫尔半径），因为这一假设经常不成立：在磁约束聚变装置中应用离子回旋共振加热，正是为了产生不满足这一条件的快粒子群体……而聚变产生的粒子群体——同样处于聚变研究的核心——通常也会违反这一条件。但要严格描述波粒相互作用，很快就会得到包含高阶导数的表达式；当应用范围超出一维时，对这些导数的处理会变得繁琐，甚至不得不直接求解积分微分波动方程。受 Jaeger [1], 的工作启发，近期一些研究省略了最后这一步，转而提出以足够密集的离散$\vec{}$模集合替代连续的傅里叶空间积分，覆盖模可存在的 k空间区域。与 Jaeger 的做法（保留傅里叶模之间所有可能的耦合，从而产生一个庞大的、需要求逆的线性方程组矩阵）相反，只保留真正重要的耦合 [2]便能减少计算量。这样，系统矩阵就不再是完整矩阵，而会变得部分稀疏。尽管绝对需求会增加，但考虑的空间维度越多，相对收益就越显著。另一种经典方法是采用局部而非全局基函数，即有限元方法。针对合适的网格点和局部基函数集合，有人提出用这些函数定义的“准模”展开来衔接二者 [3, 4]。这种方法兼具以下优点：(i) 可将系统写成与采用有限元时完全相同的形式（方程系数的组装方式除外）；(ii) 可$\vec{}$考虑数十年前便已提出的复杂 k空间表达式，这些表达式用于描述约束磁场对带电粒子轨道的影响，以及由此对波粒相互作用产生的影响；(iii) 可剔除较弱的耦合以加快计算。更接近传统方法的是 Bud´提出的方案：如果倾向于只在物理空间研究波动方程，他建议通过对$\vec{k}$空间中的介电响应进行高阶多项式拟合，将积分微分波动方程作为高阶偏微分方程求解，从而使逆傅里叶变换变得简单（见 [5, 6, 7]）。

与本文的做法相反——本文利用了众所周知的经典结果，不引入新物理，尽可能将计算负担交给计算机，同时将解析推导严格限制在最低限度——近期有许多研究致力于重新审视相关方程并进一步推进解析处理，或探索替代理念。Svidzinski[8]在构型空间中表述了热等离子体的介电响应，通过数值计算基于

非均匀磁场中线性化 Vlasov 方程解的等离子体电导率核，从而避免近似。Machielsen、Lamalle 和 Fukuyama 对所需表达式进行解析推导，提出了一种旨在加快核方法、同时尽可能保持物理描述普适性的方法 [9, 10, 12, 13]。这些研究在构型空间中推导出了电导率核的精确解。Machielsen 的表达式适用于拉莫尔半径的任意阶修正，以及任意高的回旋谐波。Lamalle 着重于精确处理平行梯度；结合他早先的工作 [11]，还可以纳入拉莫尔半径修正。基于核方法实现最新研究成果的工作仍在进行中 [14]。寻求耦合波方程与福克–普朗克方程的解也并非新鲜事。已有多位作者将波方程求解器与福克-普朗克方程求解器耦合。例如，Brambilla 和 Bilato 开发的 TORIC 与 SSFPQL 耦合代码 [15, 16], 、Dumont 的 EVE-AQL 套件 [17] ，以及 Jaeger 和 Berry 结合使用的 AORSA 与 CQL3D 代码[18, 19]。利用 CYRANO 波代码 [20] 提供射频功率沉积，以求解针对不同束流加热和波加热粒子群的一组耦合福克-普朗克方程，是离子回旋共振加热程序包在 EUROfusion 欧洲输运求解器中的一个应用示例（参见例如 [21, 22]）。

将线性化的麦克斯韦–Vlasov 方程与准线性福克–普朗克方程相结合，自然而然且必然会考虑非麦克斯韦型的速度空间分布函数。本文旨在提供一种完全自洽的方法，该方法基于波方程和福克-普朗克方程所需的共同构件。因此，本文部分重点在于计算任意分布函数的介电响应及其实际实现。随着功能日益强大的有限元软件不断出现（例如有限元软件包 NGsolve [23] 和 MFEM [24]），人们也在尝试利用此类软件包。相关工作包括 Vallejos、Maquet 和 Zhang [25, 26, 27] 的研究。本文系统介绍了在聚变等离子体离子回旋共振频段内，对波加热（波传播和阻尼 +准线性扩散）进行自洽建模所涉及的现有重要成果。本文旨在为利用当前及下一代免费软件作为强大的数值工具、结合对等离子体的多尺度建模铺平道路，从而在利用当今计算机科学知识的同时，专注于其背后的物理学。我们强调，除细节外，本文并未提出任何新物理或新方程，而只是提出了一种方案，使物理模型能够逐步升级，同时确保自洽性。

本文结构如下：第 2 节回顾一些基本表达式。第 3 节讨论忽略偏离磁面的漂移的情形。第 4 节将讨论推广到保留漂移的轴对称托卡马克情形。第 5 节讨论基本积分中的两类贡献：描述慢时间尺度和快时间尺度上的波粒相互作用。第 6 节给出两个计算示例，展示组装波方程和福克–普朗克方程所需的典型构件。第 7 节对未来研究方向作简要总结，并进行最低限度的讨论。

2 基本表达式回顾

我们采用托卡马克波动力学描述中通常使用的记号： R 表示大半径， Z 表示中平面上方或下方的高度， θ 表示极向角， φ 表示环向角。下标"//"和"$\perp$"分别表示相对于$\vec{}$静态磁场 B_o的方向。在研究垂直于磁力线的平面内的波传播方向性时，引入角度 $\psi = tan^{-1}[k_{\perp,2}/k_{\perp,1}]$ ，其中k 投影到适当选取的正交单位矢量$\vec{e}_{\perp,\ 1}$ 和$\vec{e}_{\perp,\ 2}$上。最后，下标"o"既可表示静态分量（指约束磁场时）、缓慢变化的分量（指分布函数时），也可表示磁轴（指大半径时）； Θ 是平行方向与环向方向之间的夹角，因此$cos\Theta = B_{o,\ \varphi}/B_o$ 和$sin\Theta = B_{o,\ \theta}/B_o$ ，从而$\vec{e}_{//} = cos\Theta\vec{e}_\varphi + sin\Theta\vec{e}_\theta$ ，其中 $\vec{e}_\varphi = \partial\vec{x}/\partial\varphi/|\partial\vec{x}/\partial\varphi|$ 和 $\vec{e}_\theta = \partial\vec{x}/\partial\theta/|\partial\vec{x}/\partial\theta|$。 ρ 是磁面标记参数（常见选择是中平面上磁面的半宽），因此 $\nabla\rho/|\nabla\rho|$是垂直于磁面的单位矢量。此外， q 表示电荷， m表示质量， N 表示回旋谐波， n表示环向模数。我们用符号 $\mathcal{N}$ 表示密度。

描述波粒相互作用需要用到物理空间（$\vec{x}$）和速度空间（$\vec{v}$）。波动方程是在物理空间中建立的，因此要获得波动方程系数，首先需要对速度进行积分。福克-普朗克方程则用运动常数表示，同时对三种快速振荡（回旋运动、反弹运动和环向进动）进行平均。对于轴对称托卡马克，最常用的三种运动常数是能量$\epsilon = mv^2/2$、磁矩 $\mu = mv_\perp^2/[2B_o]$ 和环向角动量（例如参见 [28]）

$$p_\varphi = \Psi - 2\pi mRv_\varphi/q = \Psi - 2\pi mR_o v_{//}B_{o,\varphi}/[qB_o] \tag{1}$$

其中 Ψ（ρ）是极向磁通，有时会用作磁通面标记参数，代替小半径 ρ。

福克-普朗克方程中定义的吸收功率必须与波动方程中的吸收功率相同。这要求所采用的模型足够精细，并且使用相同的近似方法处理。特定物种的射频吸收功率可写为

$$P_{abs,FP} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int d\vec{v}d\vec{x}\epsilon F_0\right]\Bigg|_{RF} = \int d\vec{v}d\vec{x}\epsilon\frac{\partial F_o}{\partial t}_{RF} = \int d\vec{v}d\vec{x}\epsilon Q(F_o) =$$

$$\frac{1}{2}Re\left[\int d\vec{v}d\vec{x}\epsilon\nabla_{\vec{v}}.\frac{q}{m}\Big[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\Big]^*\int_{-\infty}^{t}dt'\frac{q}{m}\Big[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\Big].\nabla_{\vec{v}}F_o\right] =$$

$$-\frac{1}{2}Re\left[\int d\vec{v}d\vec{x}[\nabla_{\vec{v}}\epsilon].\frac{q}{m}\Big[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\Big]^*\int_{-\infty}^{t}dt'\frac{q}{m}\Big[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\Big].\nabla_{\vec{v}}F_o\right] =$$

$$\frac{1}{2}Re\left[\int d\vec{v}d\vec{x}[\nabla_{\vec{v}}\epsilon].\frac{q}{m}\Big[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\Big]^*f_{RF}\right] = \frac{q}{2}Re\left[\int d\vec{v}d\vec{x}\vec{v}.\Big[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\Big]^*f_{RF}\right] =$$

$$-\frac{q}{2}Re\left[\int d\vec{v}d\vec{x}\vec{v}.\vec{E}^*f_{RF}\right] = -\frac{1}{2}Re\left[\int d\vec{x}\vec{J}^*_{plasma}.\vec{E}\right] = P_{abs,WE} \tag{2}$$

其中，扰动分布函数可用缓变分布函数 F_o 表示为

$$f_{RF} = -\int_{-\infty}^{t} dt' \frac{q}{m}\Big[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\Big].\nabla_{\vec{v}} F_o \tag{3}$$

而准线性射频扩散算子为

$$Q(F_o) = \nabla_{\vec{v}}.\frac{1}{2} Re\left[\frac{q}{m}\Big[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\Big]^* \int_{-\infty}^{t} dt' \frac{q}{m}\Big[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\Big].\nabla_{\vec{v}}\right] F_o \tag{4}$$

通过首先计算代表轨道与波相互作用的常见基本“构件”，即可对波和福克–普朗克方程进行完全自洽的描述。

与其参考粒子位置，不如改写这些表达式并以导心为参照，这样便能以优雅的方式考虑粒子运动。通常还会转换到 $\vec{k}$-空间，这会引入 Kennel-Engelman 算子 L_N [29]。假设发生器驱动频率为 ω 的振荡，则相关的两个麦克斯韦方程为

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = i\omega\vec{B} \tag{5}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J}_{plasma} + \vec{J}_{antenna}) =$$

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \mu_0 \vec{J}_{antenna} = -i\omega\mu_0\epsilon_0 \overline{\overline{K}}.\vec{E} + \mu_0 \vec{J}_{antenna} \tag{6}$$

因此

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = i\omega \nabla \times \vec{B} = k_0^2 \overline{\overline{K}}.\vec{E} + i\omega\mu_0 \vec{J}_{antenna} \tag{7}$$

其中，K 是介电张量。在弱变分形式中，引入试探函数向量 $\vec{F}$，并在区域上进行积分。将旋度-旋度项 $\vec{F}.\nabla \times \nabla \times \vec{E}$ 替换为 $\nabla \times \vec{E}.\nabla \times \vec{F}^* - \nabla.[\vec{F}^* \times \nabla \times \vec{E}]$，其中前者在 E 和 F 中是对称的；后者在以电场替换测试函数时会给出坡印廷通量的散度，因此波动方程的变分形式就成为相应的功率平衡。等离子体响应的显式表达式——如本文后文所示——同样在 E 和 F 中对称，且微分算子作用于两者。因此，它并不提供实际的介电张量，因为这需要一个没有算子作用于测试函数的表达式，从而可以定义一个仅作用于电场的适当算子。其背后的理念差异至关重要：为了确保对波动方程和福克–普朗克方程所描述的波粒相互作用进行完全自洽的描述，自然的参考位置应是导引中心的位置，而不是粒子的位置。若要使波动方程直接成为功率平衡（福克–普朗克方程中也需要这种表达式），还需要在导引中心位置处计算出现在波动方程变分形式中的测试函数向量 F，这样所需的介电响应表达式就是一个同时作用于 F 和 E、而不是仅作用于 E 的算子。不过，这并非必不可少：只要纳入必要的表面/通量项，就可以写出实际的介电张量，从而将波动方程写成非变分形式（例如见[30], ，尽管其中实际求解也采用

变分形式）。但这样做会掩盖在平等地处理这两个方程时显现出的对称性。要得到实际的介电张量，需要将 Kennel-Engelmann 算子从测试函数中移除，这会产生一个补充通量：动理学通量，它描述了与波协同运动的粒子所携带的通量。

通常采用变分方法求解波动方程和福克–普朗克方程。这一思路源自上述吸收功率表达式。我们将式 2 中的第二行推广为

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} Re \left[\int d\vec{v} d\vec{x} G \nabla_{\vec{v}} . \frac{q}{m} \left[\vec{F} + \vec{v} \times \frac{\nabla \times \vec{F}}{i\omega} \right]^* \int_{-\infty}^{t} dt' \frac{q}{m} \left[\vec{E} + \vec{v} \times \frac{\nabla \times \vec{E}}{i\omega} \right] . \nabla_{\vec{v}} F_o \right] \quad (8)$$

其中， G 是福克-普朗克方程的测试函数（即， F_o 将用与测试函数 G属于同一空间的基函数表示），而 $\vec{F}$ 是波动方程的试探函数向量（即， $\vec{E}$ 将用与试探函数向量 $\vec{F}$属于同一空间的基函数表示）。确保 G 具有足够的连续性后，通过分部积分可得到一个表达式，其中 G和 $\vec{F}$ 与 F_o 和 E完全对称：

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{2} Re \left[\int d\vec{v} d\vec{x} [\nabla_{\vec{v}} G] . \left(\frac{q}{m} \left[\vec{F} + \vec{v} \times \frac{\nabla \times \vec{F}}{i\omega} \right]^* \int_{-\infty}^{t} dt' \frac{q}{m} \left[\vec{E} + \vec{v} \times \frac{\nabla \times \vec{E}}{i\omega} \right] . \nabla_{\vec{v}} F_o \right) \right] \quad (9)$$

由于求解福克-普朗克方程时采用的局部基函数缺乏足够的连续性，因此需要补上分部积分时出现的表面项。为得到实用表达式，需要用选定的一组变量来表示速度空间中的纳布拉算子，并用导心变量表示洛伦兹力项，以便更容易分离快速和慢时间尺度。许多作者都已用导心变量表示所需的洛伦兹力表达式（通常利用法拉第定律以 $\vec{B}$ 取代 $\vec{E}$），并将所得结果与梯度算子作点积（例如见 [31, 32, 33, 34]）；最早的相关表达式可追溯到几十年前。最简单的做法是首先用其 k谱表示电场。严格来说，这需要在同一参考系中进行，也就是说采用笛卡尔 k 分量。实际中，人们通常采用合适的局部参考系，这就隐含地假定曲率效应次要，也就是忽略了投影方程所用的单位矢量随位置变化这一事实；因此，严格处理时需要引入涉及度量张量分量及其导数的修正项（即克里斯托费尔符号）。通常，沿轨道积分是通过“拼接”局部解或准局域解来近似求得的，也就是采用均匀或准均匀等离子体表达式。由于物理空间中不存在散度项，我们可以将其人为构造出来，并采用一个六维 ∇ 算子，把与 $\nabla_{\vec{x}}$ 相乘的因子补零。随后，我们可以将变分形式的波-等离子体相互作用项变换为六维（$\vec{x}$， $\vec{v}$）空间中任意所需的一组变量。N 维空间中散度算子和梯度算子的一般表达式为

$$\nabla . \vec{w} = \frac{1}{J_{\vec{\xi}}} \sum_{j=1}^{\mathtt{N}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} [J_{\vec{\xi}} w^j] = \frac{1}{J_{\vec{\xi}}} \sum_{j=1}^{\mathtt{N}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} [J_{\vec{\xi}} \vec{w} . \nabla \xi_j]$$

$$\nabla H = \sum_{j=1}^{\mathtt{N}} \nabla \xi_j \frac{\partial H}{\partial \xi_j} \tag{10}$$

其中， $J_{\vec{\xi}}$ 是变换的雅可比行列式， ξ_i 是选定的 N 个变量。因此，将洛伦兹加速度型矢量记为 $\vec{\mathcal{H}}(\vec{w}) = q/m\Big[\vec{w} + \vec{v} \times \nabla \times \vec{w}/[i\omega]\Big]$， $\mathcal{P}$ 的最一般表达式为

$$\mathcal{P} = \int d\vec{\xi} J_{\vec{\xi}} G \nabla_{\vec{\xi}} . \Big[\vec{\mathcal{H}}^*(\vec{F}) \int_{-\infty}^{t} dt' \vec{\mathcal{H}}(\vec{E}) . \nabla_{\vec{\xi}}\Big] F_o =$$

$$\int d\vec{\xi} J_{\vec{\xi}} \sum_{j,j'=1}^{6} \frac{\partial G}{\partial \xi_j} \nabla_{\vec{\xi}} \xi_j . \vec{\mathcal{H}}^*(\vec{F}) \int_{-\infty}^{t} dt' \vec{\mathcal{H}}(\vec{E}) . \nabla_{\vec{\xi}} \xi_{j'} \frac{\partial}{\partial \xi_{j'}} F_o \tag{11}$$

其中， ξ 是一组由 6 个适当的独立变量组成的集合， $J_{\vec{\xi}}$ 是相应的雅可比行列式，并且通量与基函数的连续性已被默认假定。采用无法保证这种连续性的基函数时，需要加入表面项贡献。请注意，在非变分形式的方程中，积分内偏导数的前后各有一个雅可比行列式，而在变分形式中只有一个雅可比行列式。还请注意，相同的量 $\vec{\mathcal{H}}(\vec{E}) . \nabla \xi_j$ 既出现在轨道积分之前，也出现在轨道积分之内。在轴对称托卡马克中，有 3 个运动常数 $\vec{\Lambda}$ （在射频时间尺度上）以及 3 个可由适当角度 Φ参数化的周期性方面。福克-普朗克方程用前 3 个量来表述，因此需要对后 3 个量进行平均。在轴对称托卡马克中，各个环向模 n 彼此独立（不耦合），可以逐一处理；同样，各个回旋谐波 N 也彼此独立。极向耦合不可忽略，因此需要进行弹跳平均。

考虑到后文将讨论的推广，下一步是将射频洛伦兹力表示为沿所选独立变量梯度的各分量 $\vec{\mathcal{H}}(\vec{E}) . \nabla \xi_j$。将表达式转换到 $\vec{k}$ 空间，并利用法拉第定律消去射频磁场后，相关的洛伦兹射频加速度项通常写成如下形式 $\vec{\mathcal{H}}(\vec{w}_{\vec{k}}) = q/[m\omega]\Big[\vec{w}_{\vec{k}}[\omega - \vec{v} . \vec{k}] + [\vec{v} . \vec{w}_{\vec{k}}]\vec{k}\Big]$。沿 $\nabla_{\vec{v}} \phi = \vec{e}_\phi / v_\perp \partial / \partial \phi$ 方向的分量在积分中消失，因为 F_o 与其无关。时间积分前的项也会消失，但原因不同：与轴对称装置中环向模 n 的独立性类似，对各种测试函数和电场回旋谐波所作的双重求和会简化为单重求和，因为 $exp[i(N - N')\phi]$ (N电场的回旋谐波与 N' 试探函数向量复共轭的回旋谐波）的积分仅在 $N = N'$ 时有限。

3 传统处理：忽略漂移

3.1 变量的选择

为了在一开始尽可能贴近标准的开发方式，我们将先忽略漂移效应。这样做的好处是，只需用到一些众所周知的表达式，而且所有代数运算都很直接，许多作者过去也已经完成了这些推导，详见

（例如 [31, 32, 33, 34]）。稍后将在文中讨论如何推广以纳入漂移效应。从第一性原理出发，相关积分的形式为

$$\int d\vec{\xi} \sum_{j,j'=1}^{6} J \frac{\partial G}{\partial \xi_j} \Big[\nabla \xi_j . \vec{\mathcal{H}}^*(\vec{F}) \int_{-\infty}^{t} dt' \vec{\mathcal{H}}(\vec{E}) . \nabla \xi_{j'} \frac{\partial}{\partial \xi_{j'}} \Big] F_o \tag{12}$$

因此，使用

$$|\nabla \Psi| = |\frac{d\Psi}{d\rho}||\nabla \rho| = |\frac{d\Psi}{d\rho}||\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}/J_{\rho,\theta,\varphi}| = |\frac{d\Psi}{d\rho}||\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \times R\vec{e}_{\varphi}/J_{\rho,\theta,\varphi}| \tag{13}$$

我们得到

$$|B_{o,\theta}| = \frac{|\nabla \Psi|}{2\pi R} \tag{14}$$

通常会将变量作一系列变换，使其形式更为适用。第一次变换是在物理空间中，将笛卡尔坐标转换为柱坐标变量（R， Z， φ）；R 为大半径， Z 为相对于中平面的位置，φ 为环向角；相应的 $\vec{x}$空间雅可比行列式简单地为 R。接下来，我们转到一个考虑磁几何的坐标系，引入极向磁通 Ψ作为磁面标记参数（极向磁通仅是更常用的小半径的函数，即 $\Psi(\rho)$），并引入极向角 θ。类似地，从局部适当旋转后的“笛卡尔”坐标 $\vec{v} = (v_{\perp,\ 1},\ v_{\perp,\ 2},\ v_{//})$变换到“柱坐标”$(v_{\perp},\ v_{//},\ \phi)$时，其雅可比行列式为$v_{\perp}$。然后进一步从$(v_{\perp},\ v_{//},\ \phi)$变换到$(\epsilon,\ \mu,\ \phi)$，我们使用

$$v_{\perp} = [2B_o\mu/m]^{1/2}$$

$$v_{//} = sign(v_{//})[2(\epsilon - \mu B_o)/m]^{1/2} \tag{15}$$

以求得中间速度空间雅可比 $B_o/[v_{//}v_{\perp}m^2]$，从而使从 $(v_{\perp,\ 1},\ v_{\perp,\ 2},\ v_{//})$ 到 $(\epsilon,\ \mu,\ \phi)$ 的总速度空间雅可比为 $J = B_o/v_{//}m^2$。由于 $v_{//} = v_{\theta}B_o/B_{o,\ \theta}$，我们可以将其改写为

$$J = \frac{B_{\theta}}{[v_{\theta}m^2]} = \frac{1}{2\pi m^2 \dot{\theta} J_{\Psi,\theta,\varphi}} \tag{16}$$

其中，$J_{\Psi,\ \theta,\ \varphi}$ 是以 $(\Psi,\ \theta,\ \varphi)$ 为坐标时物理空间中的雅可比行列式，并利用了关系 $|\nabla \Psi| = |\partial \vec{x}/\partial \theta \times \partial \vec{x}/\partial \varphi|/J_{\Psi,\ \theta,\ \varphi} = |\partial \vec{x}/\partial \theta|R/J_{\Psi,\ \theta,\ \varphi}$。因此，我们可以将总坐标变换写为

$$d\vec{x}d\vec{v} = d\Psi d\theta d\varphi d\epsilon d\mu d\phi \frac{1}{2\pi m^2 \dot{\theta}} \tag{17}$$

引入随时间线性变化的反弹角 $\Phi_b = \omega_b t$ （其中 ω_b 为弹跳频率），我们可以优雅而方便地写出最终的雅可比行列式

$$J_{\Psi,\theta,\varphi,\epsilon,\mu,\phi} = \frac{1}{2\pi m^2 \omega_b} \tag{18}$$

请注意，这个雅可比行列式是一个运动常数，因此可以自由地移至弹跳积分的任意位置。若不考虑漂移修正， Ψ 是一个运动常数。

3.2 具体表达式和基本构件

许多作者都推导出了波粒相互作用的实用表达式。本节将采用 Ichimaru 的公式 [34]。量 $\vec{H}$ 可以用其傅里叶谱表示

$$\vec{H}(\vec{x},t)=\int d\vec{k}exp[i(\vec{k}.\vec{x}-\omega t)]\vec{H}_{\vec{k}} \tag{19}$$

其中 $\vec{x}$ 是粒子位置。Ichimaru 写出了介电响应的适当表达式，该表达式根据局部缓变分布函数进行计算，并在导引中心位置 $\vec{x}_{GC}$处取值：

$$\vec{F}^{*}.\overline{\overline{K}}.\vec{E}=[1-\sum_{\alpha}\frac{\omega_{\alpha}^{2}}{\omega^{2}}]\vec{F}_{\vec{k}'}^{*}.\overline{\overline{1}}.\vec{E}_{\vec{k}}-2\pi\sum_{\alpha}\frac{\omega_{\alpha}^{2}}{\omega^{2}}\sum_{N=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}d\vec{k}'\int_{-\infty}^{+\infty}d\vec{k}$$

$$\int_{0}^{+\infty}dv_{\perp}\int_{-\infty}^{+\infty}dv_{//}\frac{N\Omega_{\alpha}\partial F_{o,\alpha}/\partial v_{\perp}+k_{//}v_{\perp}\partial F_{o,\alpha}/\partial v_{//}}{N\Omega+\tilde{k}_{//}v_{//}-\omega}L(\vec{F}_{\vec{k}'}^{*})L(\vec{E}_{\vec{k}}) \tag{20}$$

˜其中 α 指物种类型。在上述表达式中， $k_{//}$ 要么是电场的 $k_{//}$ ，要么是——受更完整理论的启发 [39] ，并由 Lamalle 在分离出主导贡献时推导得到 [11] ——测试函数和电场的 $k_{//}$的平均值。此外，

$$L_{N}(\vec{H})=v_{\perp}\Big[H_{-}J_{N+1}exp[i(N+1)\psi]+H_{+}J_{N-1}exp[i(N-1)\psi]\Big]+v_{//}H_{//}J_{N}exp[iN\psi] \tag{21}$$

其中 $E_{\pm}=E_{\perp,1}\pm iE_{\perp,2}$。下标“1”和“2”强调了波动方程是用一组适当的场向分量表示的，其中 1（//）分量沿磁场方向，2 分量位于垂直于磁场（⊥）的平面内。沿用 Jaeger[1], 的优雅选择，我们选取两个垂直方向，其中一个尽可能接近大半径方向的单位矢量 $\vec{e}_{R}$ ，从而使另一个方向接近 $\vec{e}_{Z}$。用导引中心表示相位，可将相位推广为→ $\Phi=k.\vec{x}_{GC}$（t）$-N\phi_{gyro}$（t）$-\omega$。导引中心运动写作 $d\vec{x}_{GC}/dt=\vec{v}_{GC}$，其中 $\vec{v}_{GC}$ 是导引中心漂移速度。拉莫尔回旋通过$d\phi_{gyro}/dt=$–Ω体现。采用零香蕉宽度极限后，速度表达式简化为更简单的 $d\vec{x}_{GC,//}/dt=\vec{v}_{//}$。忽略 $\vec{e}_{//}$ 实际上并非恒定矢量这一事实，该表达式在局部可进一步简化为基本形式$dx_{GC,//}/dt=v_{//}$；还可以进行改进，但这需要仔细核算所采用单位矢量发生变化对方程投影的影响。我们将采用这一简化表达式，从而可将相关相位写为 $\Phi=k_{//}x_{//}-N\phi-\omega$。相应的准线性扩散算子可改写为（例如参见 [29, 31, 32, 33]）

$$Q(F_{o})=\int d\vec{k}\int d\vec{k}'\pi q^{2}m^{2}\mathcal{L}_{N}\left[\delta(\omega-\tilde{k}_{//}v_{//}-N\Omega)L_{N}^{*}(F_{\vec{k}'})L_{N}(E_{\vec{k}})\mathcal{L}_{N}(F_{o})\right] \tag{22}$$

其中微分算子 $\mathcal{L}_{N}$ 为

$$\mathcal{L}_{N}=\frac{1}{\omega m^{2}v_{\perp}}[(\omega-\tilde{k}_{//}v_{//})\frac{\partial}{\partial v_{\perp}}+\tilde{k}_{//}v_{\perp}\frac{\partial}{\partial v_{//}}]=\frac{1}{\omega m^{2}v_{\perp}}[N\Omega\frac{\partial}{\partial v_{\perp}}+\tilde{k}_{//}v_{\perp}\frac{\partial}{\partial v_{//}}] \tag{23}$$

等式成立是因为这里只有共振贡献。除分母中的因子 $\omega m^2 v_\perp$ 外，该算子与 Ichimaru 关于介电响应的表达式中所用的算子相同；我们将后者记为 $\mathcal{L}_N$。将式 22 给出的表达式写成变分形式并进行分部积分后，福克-普朗克方程中的射频项为

$$-\int d\vec{x}d\vec{v}\int d\vec{k}\int d\vec{k'}\pi q^2 m^2 \mathcal{L}_N(G)\delta(\omega-\tilde{k}_{//}v_{//}-N\Omega)L_N^*(F_{\vec{k'}})L_N(E_{\vec{k}})\mathcal{L}_N(F_o) \quad (24)$$

它关于测试函数 G 和未知分布函数 F_o是对称的，因为原始准线性项已经体现了这种对称性。

我们将展示与福克–普朗克方程和波动方程相关的表达式之间的完整对应关系。基本方程为

$$P_{abs,WE}=\int d\vec{x}\frac{1}{2}Re[\vec{E}^*.\vec{J}]=\int d\vec{x}\frac{1}{2}Re[\frac{k_o^2\vec{E}^*.\overline{\overline{K}}.\vec{E}}{i\omega\mu_o}]=\int d\vec{x}\frac{1}{2}Re[-i\omega\epsilon_o\vec{E}^*.\overline{\overline{K}}.\vec{E}]$$

$$P_{abs,FP}=\int d\vec{x}d\vec{v}\frac{mv^2}{2}Q(F_o) \quad (25)$$

我们首先计算具有准线性算子 $Q(F_o)$（方程 22）时的吸收功率。将其乘以 $\epsilon=mv^2/2$ 并在速度空间上积分，经过分部积分，并由于 $\mathcal{L}_N(mv^2/2)=1/m$，可得

$$P_{abs,FP}=\int d\vec{v}\frac{mv^2}{2}Q=$$

$$-\frac{1}{2}Re\left[\int dv_\perp dv_{//}\frac{2\pi}{m\omega}\left[\pi q^2\delta(\omega-k_{//}v_{//}-N\Omega)L_N^*(E_{\vec{k'}})L_N(E_{\vec{k}})\tilde{\mathcal{L}}_N(F_o)\right]\right] \quad (26)$$

我们采用的介电响应表达式是一个算子，它源自将测试函数向量 F 替换为电场 E。由于该算子同时作用于测试函数和电场（不同于仅作用于电场、从而可以将方程写成非变分形式的情况），因此它并不直接对应$\vec{}$ $\vec{}$ $\vec{}$于 $E^*.J$，其中扰动电流密度 J 通过$\vec{}$ $\vec{}$ $\vec{}$$J=-i\omega\epsilon_o K.E$与介电张量 K 相关联。在使用方程 20 的同时补上所需的因子 $-i\omega\epsilon_o$ 后，我们得到

$$P_{abs,WE}=\frac{1}{2}Re\left[\frac{\omega\epsilon_o}{i}(-2\pi)\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\int dv_\perp\int dv_{//}[N\Omega\frac{\partial F_o}{\partial v_\perp}+k_{//}v_\perp\frac{\partial F_o}{\partial v_{//}}]\frac{L_N^*(\vec{E}_{\vec{k'}})L_N(\vec{E}_{\vec{k}})}{[N\Omega+k_{//}v_{//}-\omega]}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}Re\left[\int dv_\perp\int dv_{//}(2\pi)\frac{\mathcal{N}q^2}{m\omega}\frac{L_N^*(\vec{E}_{\vec{k'}})L_N(\vec{E}_{\vec{k}})}{i[N\Omega+k_{//}v_{//}-\omega]}\tilde{\mathcal{L}}_N(F_o)\right] \quad (27)$$

这与福克-普朗克表达式相同，因为 $\omega_p^2=\mathcal{N}q^2/[\epsilon_o m]$ 其中 $\mathcal{N}$ 是密度，Ichimaru 表达式中的分布函数归一化为 1，而狄拉克δ函数则因环绕极点而带有因子 π。

考察这两个方程的吸收功率表达式，可以得出结论：要获得完整的自洽图景，需要计算共同的“构件”。

$$\int d\vec{k}d\vec{k'}\omega_p^2\frac{\tilde{\mathcal{L}}_N(G)L_N^*(\vec{F}_{\vec{k'}})L_N(\vec{E}_{\vec{k}})\tilde{\mathcal{L}}_N(F_o)}{i[N\Omega+k_{//}v_{//}-\omega]} \quad (28)$$

$\vec{}$ $\vec{}$在波动方程中用能量替换 G，并在福克-普朗克方程中用 E 替换 F，即可得到描述波粒相互作用所需的表达式。

4 改进的处理：纳入漂移

4.1 纳入漂移时的变量选择

若要在假设轴对称性的同时保留轨道漂移效应，就需要考虑极向磁通 Ψ 与环向角动量 p_φ之间的差异。这需要将导引中心运动从仅包含平行方向分量推广到包含完整漂移速度 $\vec{v}_{GC}$ ，并考虑p_φ 对$v_{//}$的依赖。前者使共振分母中的 $k_{//}v_{//}$ 替换为更一般的$k.\vec{v}_{GC}$；后者则要求将算符$\mathcal{L}_N$升级。Balescu 推导出了漂移速度 [28] 的显式表达式，而 Lamalle 则计算了梯度 $\nabla\epsilon$、 $\nabla\mu$ ，尤其是求得更一般表达式所需的 ∇p_φ [11] 。按照 Balescu 的推导，漂移速度的显式表达式为

$$\vec{v}_{GC} = v_{//}\tilde{\vec{b}} \tag{29}$$

with

$$\tilde{\vec{b}} = \vec{e}_{//} + \frac{\vec{e}_{//}}{\Omega} \times \left[v_{//}(\vec{e}_{//}.\nabla)\vec{e}_{//} + \frac{1}{mv_{//}}[\mu \nabla B_o] \right] \tag{30}$$

其中，额外项分别对应曲率漂移和梯度B漂移，它们导致轨迹偏离磁面；但为尽可能接近前述结果，省略了涉及静电势的贡献。为保持一致，回旋相位的时间导数也包含一个额外贡献，该贡献同样由 Balescu 给出，涉及沿所采用的两个垂直方向的单位矢量的导数。

通过求解实际的导心运动方程 $d\vec{x}_{GC}/dt = \vec{v}_{GC}$，即可确定轨道。另一种优雅的确定导心轨道的方法是直接根据 p_φ [35] 的定义：对于给定的能量和磁矩，绘制 p_φ 在预先指定的 $v_{//}$ 符号下的等值线，按定义即可得到相应的轨道。沿轨道有 $\delta p_\varphi = 0$ ，因此必须使 δR 与 δZ 满足相应关系，以确保 p_φ 守恒：
$0 = \delta R \partial p_\varphi/\partial R + \delta Z \partial p_\varphi/\partial Z$。因此，可通过求解以下两个微分方程之一来确定轨道：

$$\frac{dZ}{dR} = -\frac{\partial p_\varphi/\partial R}{\partial p_\varphi/\partial Z} \tag{31}$$

or

$$\frac{dR}{dZ} = -\frac{\partial p_\varphi/\partial Z}{\partial p_\varphi/\partial R} \tag{32}$$

在这两者中如何选择，取决于哪个变量变化最慢：在 R 或 Z 的极大值或极小值处，其中一个导数会发散，而另一个趋于零。

组合的（$\vec{x}$， $\vec{v}$）空间中的散度项和梯度项经过改进后为

$$\nabla_6 = \nabla_{\vec{x}_{GC}} + \nabla\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \nabla\epsilon\frac{\partial}{\partial\epsilon} + \nabla p_\varphi \frac{\partial}{\partial p_\varphi}$$

$$\nabla_6.\vec{w} = \frac{1}{J_6}\left[\frac{\partial}{\partial \vec{x}_{GC}}\left[J_6 \nabla_{\vec{x}}\vec{x}_{GC}.\vec{w}\right] + \frac{\partial}{\partial\mu}\left[J_6\nabla\mu.\vec{w}\right] + \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left[J_6\nabla\epsilon.\vec{w}\right] + \frac{\partial}{\partial p_\varphi}\left[J_6\nabla p_\varphi.\vec{w}\right]\right] \tag{33}$$

其中，雅可比行列式仍然是运动常数，因为先前推导的速度空间雅可比 $B_o/[v_{//}m^2]$现在推广为 $\tilde{B}_o/[v_{//}m^2]$，其中 $\tilde{B}_o = B_o\Big[1+[v_{//}/\Omega]\vec{e}_{//}.(\nabla\times\vec{e}_{//})\Big]$。Lamalle [11] 得出了这一结果，不过他使用的是 v 和归一化的 μ，而不是更常用的 ϵ 和 μ，例如 Balescu 所采用的形式。Balescu 和 Lamalle 得出的结果证实了先前推导的式（18）。

$$d\vec{x}d\vec{v} = d\varphi d\phi d\Phi_b d\epsilon d\mu dp_\varphi \frac{1}{2\pi m^2\omega_b} \tag{34}$$

不过，现在即使考虑漂移修正，这一结果也成立，并严格考虑了 $\vec{x}$ 与 $\vec{x}_{GC}$之间，以及 p_φ 与 Ψ之间的区别。

4.2 具体表达式和基本构件

现在可以将开篇给出的、表明波方程与福克–普朗克方程中吸收功率表达式完全等价的表达式，写成一种明确而优雅的形式 [36]

$$\frac{\partial}{\partial t}[\int d\vec{v}\epsilon F_o]|_{RF}=$$

$$\frac{(2\pi)^3}{2}Re\left[\int d\vec{\Lambda}\epsilon\frac{\partial}{\partial\vec{\Lambda}}.\Big[J\sum_{\vec{\mathbb{m}}}\frac{\vec{h}_{\vec{\mathbb{m}}}}{\omega}<\dot{\epsilon}^*_{\vec{\mathbb{m}}}e^{-i(\vec{\mathbb{m}}.\vec{\Phi}-\omega t)}\int_{-\infty}^{t}dt'\dot{\epsilon}_{\vec{\mathbb{m}}}e^{+i(\vec{\mathbb{m}}.\vec{\Phi}-\omega t)}>\frac{\vec{h}_{\vec{\mathbb{m}}}}{\omega}.\frac{\partial F_o}{\partial\vec{\Lambda}}\Big]\right]=$$

$$-\frac{(2\pi)^3}{2}Re\left[\int d\vec{\Lambda}J\Big[\sum_{\vec{\mathbb{m}}}<\dot{\epsilon}^*_{\vec{\mathbb{m}}}e^{-i(\vec{\mathbb{m}}.\vec{\Phi}-\omega t)}\int_{-\infty}^{t}dt'\dot{\epsilon}_{\vec{\mathbb{m}}}e^{+i(\vec{\mathbb{m}}.\vec{\Phi}-\omega t)}>\frac{\vec{h}_{\vec{\mathbb{m}}}}{\omega}.\frac{\partial F_o}{\partial\vec{\Lambda}}\Big]\right]=$$

$$\frac{1}{2}Re\Big[\int d\vec{x}\vec{E}^*.\vec{J}_{RF}\Big] \tag{35}$$

其中采用了作用量 $\vec{\Lambda}=(\epsilon/\omega,\ \tilde{p}_\varphi,\ -m\mu/q)$ 及其对应的角变量 $\vec{\Phi}$，$\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt = q\vec{E}.\vec{v}$ （沿轨道求值，因此包含 Kennel-Engelmann 算子所描述的各种依赖关系中的细微之处）和 $\vec{h}_{\vec{\mathbb{m}}}=(1,\ n,\ -N)$；其中 n 是环向模数，N是回旋谐波。虽然早先的工作采用了实际的作用量-角变量，但并无必要使用这些变量；仍可采用更接近标准变量的那一组。例如，环向角动量 p_φ 上方的波浪号表示，根据第一性原理推导出的相关量在定义中多了一个因子$-2\pi/q$：$\tilde{p}_\varphi = -2\pi p_\varphi/q$。通常会省略这个额外因子，因为忽略漂移时，它可以直接将坐标 Ψ 与 p_φ 对应起来。利用表达式时，Ichimaru 分离出的非共振项$1-\sum_\alpha\omega_p^2/\omega^2$会自然出现

$$\frac{q}{m}[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}] = \frac{i}{\omega m}[\frac{d}{dt}\nabla_{\vec{v}}-\nabla_{\vec{x}}]q\vec{E}.\vec{v} \tag{36}$$

对于 Landau和Lifschitz [38]所述的射频诱导的洛伦兹力：容易证明 $\int d\vec{v}\dot{\epsilon}\sum_j\nabla_{\vec{v}}\dot{\epsilon}.\nabla_{\vec{v}}\Lambda_j\partial F_o/\partial\Lambda_j = -\mathcal{N}q^2|\vec{E}|^2$；回想一下，$\omega_p^2 = \mathcal{N}q^2/[\epsilon_o m]$。将上述与全导数相关的非共振项分离出来后，Ichimaru 得到了只需要 $\dot{\epsilon}$ 的表达式；该量表示为

Kennel & Engelmann 给出的导心变量形式。扰动分布函数中导致共振分母的部分，其表达式为

$$f_{RF,res} = -\sum_{\vec{\mathfrak{m}}} \int_{-\infty}^{t} dt' \dot{\epsilon}_{\vec{\mathfrak{m}}} e^{+i(\vec{\mathfrak{m}}.\vec{\Phi}-\omega t)} \frac{\vec{h}_{\vec{\mathfrak{m}}}}{\omega}.\frac{\partial F_o}{\partial \vec{\Lambda}} \tag{37}$$

而射频扩散算子为

$$Q = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \vec{\Lambda}}.\left[J\sum_{\vec{\mathfrak{m}}} \frac{\vec{h}_{\vec{\mathfrak{m}}}}{\omega} < \dot{\epsilon}^{*}_{\vec{\mathfrak{m}}} e^{-i(\vec{\mathfrak{m}}.\vec{\Phi}-\omega t)} \int_{-\infty}^{t} dt' \dot{\epsilon}_{\vec{\mathfrak{m}}} e^{+i(\vec{\mathfrak{m}}.\vec{\Phi}-\omega t)} > \frac{\vec{h}_{\vec{\mathfrak{m}}}}{\omega}.\frac{\partial F_o}{\partial \vec{\Lambda}}\right] \tag{38}$$

得到上述等式的一个关键点是，环向角变量和回旋角的偏导数与使用原始 ϕ和 φ 时的偏导数相同，因为轴对称托卡马克中的弹跳运动修正只涉及反弹角 Φ_b 和运动常数: $\phi = \Phi_g + P(\vec{\Lambda},\ \Phi_b)$ 以及 $\varphi = \Phi_d + T(\vec{\Lambda},\ \Phi_b)$；也就是说， ϕ和 φ是轨道积分终止时刻 t的“参考”值，弹跳运动是相对于这些值描述的。鉴于变量略有不同，上述雅可比行列式为 $J = \omega/[m^3\omega_b]$ ，而非先前得到的结果；下标“g”和“d”分别指回旋运动和环向进动。 Λ_3 中的负号使得相应的模数 m_g 为 $-N$ ，而不是 N。

因此，提出的实现完全自洽描述的步骤包括：(i) 使用 Landau & Lifshitz 的表达式，将射频洛伦兹力写成一个非共振项，以及一个涉及电场对粒子做功 $q\vec{E}.\vec{v}$ 之梯度的项。(ii) 使用 Kennel-Engelman 算子，将后者写成在导引中心位置处对此量的求值。(iii) 使用作用量-角变量形式，以尽可能简单的形式写出时间导数和梯度算子 [36]。沿轨道，前者为

$$d/dt = \partial/\partial t + \vec{v}.\nabla_{\vec{x}} + \vec{a}.\nabla_{\vec{v}} = \partial/\partial t + d\vec{\Lambda}/dt.\partial/\partial\vec{\Lambda} + d\vec{\Phi}/dt.\partial/\partial\vec{\Phi}.$$

不考虑射频贡献时，我们直接得到 $d/dt = \partial/\partial t + \vec{\omega}.\partial/\partial\vec{\Phi}$ ；而将其纳入则需要

$$d\vec{\Lambda}/dt = d[...]/dt + \sum_{\vec{m}} \frac{d\epsilon_{\vec{m}}}{dt} exp[i\vec{m}.\vec{\Phi}]\vec{h}_{\vec{m}}/\omega$$

其中 $\vec{h}_{\vec{m}} = (1,\ m_d,\ m_b)$，而总时间导数项 $d[...]/dt$ 给出了 Ichimaru 分离出的非共振贡献。

尽管数十年前 Kaufman 就已提出用作用—角变量来处理波动方程的一般方法 [39], ，但其实际应用至今仍未实现。要获得电场 $\dot{\epsilon}_{\vec{\mathfrak{m}}} = qE.\vec{v}$ 对粒子所做功的傅里叶分量，需要计算大量弹跳傅里叶振幅，而这项计算耗时很长，因此通常会被省略。事实上，由于 Ω 的变化是通过弹跳模来描述的，在描述回旋加热时需要保留的弹跳模数约为 Ω/ω_b，对于聚变相关参数而言，通常约为 10^4 。弹跳时间尺度与回旋时间尺度相差甚远，因此要沿轨道获得 $\dot{\epsilon}_{\vec{\mathfrak{m}}}$ ，就需要进行精确的弹跳积分，并跟踪相位 $k.\vec{x}_{GC} + N\Omega(\vec{x}_{GC}) - \omega t$ 在射频时间尺度和弹跳时间尺度上的变化。正是由于这些时间尺度相差甚远，积分的主要贡献集中在驻定

相位点附近；远离转向点时，这会得到通常的共振分母，而在转向点附近则需要对其进行修正。对于朗道阻尼或 TTMP 阻尼（$N = 0$），相位中变化最快的因子（即因子 $N\Omega$）并不存在，因此驻相方法并不适用。在这种情况下，推荐采用标准快速傅里叶变换来计算积分。Puri [37]提供了这方面的早期研究。感兴趣的读者可在 [11, 40, 41, 42]中查阅详细内容。

与通常方法最密切相关的是在假设驻相法始终成立时得到的表达式。傅里叶积分 $H_{\vec{\mathfrak{m}}} = (2\pi)^{-3}\int d\vec{\Phi} exp[-i\vec{\mathfrak{m}}.\vec{\Phi}]H$ 中相关的快速变化相位$\vec{\mathfrak{m}}.\Phi - [\vec{k}.\vec{x}_{GC} - N\phi]$ 傅里叶模（傅里叶模是在固定时刻 t 确定的），并且全部 3 个作用量角都随时间线性变化，其相应频率为 $\vec{\omega}$，分别对应于弹跳、拉莫尔回旋和环向进动的振荡运动；驻相条件为

$$\vec{\mathfrak{m}}.\vec{\omega} = \vec{k}.\vec{v}_{GC} + N\Omega \tag{39}$$

由于弹跳模的数量非常庞大，驻相点沿轨道形成稠密集合，因此对弹跳模的求和可以——作为一阶近似——用连续的弹跳积分代替。不过严格来说，这仍然只是一种——幸运的是通常合理的——近似。例如，在靠近转向点处，驻相点的密度不足以确保这种替代是合理的。

尽管这一描述并不完全完备，但迈向更一般表达式的第一步，是将漂移项纳入共振分母，并使用上一节给出的表达式。请注意，进行轨道积分时出现的共振分母为 $i[\vec{\mathfrak{m}}.\vec{\omega} - \omega]$ ($\vec{\mathfrak{m}}.\vec{\omega} = \omega$ 是轨道上的全局条件，而非局部条件)，在驻相点处则为 $i[\vec{k}.\vec{v}_{GC} + N\Omega - \omega]$，也就是说，这是忽略漂移时共振分母$i[k_{//}v_{//} + N\Omega - \omega]$ 的一般化形式。

较为严谨的处理方法是，加入一个额外的速度空间梯度项，该项源于 Ψ 与p_φ之间的区别。不过，这里有一个微妙之处：将前面引入的 $\mathcal{L}_N$ 算符用作用量表示时，先前给出的两个表达式（见公式 23）分别为

$$\tilde{\mathcal{L}}_N = mv_\perp\Big[\frac{N\Omega + k_{//}v_{//}}{\omega}\frac{\partial}{\partial\Lambda_1} + N\frac{\partial}{\partial\Lambda_3}\Big]$$

and

$$\tilde{\mathcal{L}}_N = mv_\perp\Big[\frac{\partial}{\partial\Lambda_1} + \frac{\omega - k_{//}v_{//}}{\Omega}\frac{\partial}{\partial\Lambda_3}\Big] \tag{40}$$

当用作用量表示时。这两个表达式仅在满足共振条件 $N\Omega + k_{//}v_{//} = \omega$ 时才相同。在福克-普朗克方程中情况确实如此，但在波动方程中并非如此。然而，在驻相点$\vec{\mathfrak{m}}.\vec{\omega} = k.\vec{v}_{GC} + N\Omega$处，或非常接近该点时，相位的变化方式与不存在非均匀性时相同，即

$$\vec{\mathfrak{m}}.\vec{\Phi}(t) - \omega t \equiv \vec{\mathfrak{m}}.\vec{\omega}t - \omega t = [\vec{k}.\vec{v}_{GC} + N\Omega - \omega]t \tag{41}$$

因此，（i）共振分母的形式与我们从均匀等离子体理论中认识到的形式相同，但（ii）这仅在正确的驻相点附近非常局部的范围内成立。只要相位确实变化得非常快，对这些表达式进行显著简化就是合理的，并可得到

在细节方面与均匀等离子体中的表达式相似的结果。相反，当相位变化缓慢时，就必须以不同的方式考虑沿轨道的运动细节。

由第 3 个运动常数产生的项会在 $\mathcal{L}_N$ 的表达式中，在泊松括号 $n\partial/\partial\Lambda_2$ inside˜ 内增加一个额外项。考虑到记号上的差异，最终可得到如下推广

$$\tilde{\mathcal{L}}_N \to \tilde{\mathcal{L}}_N - \frac{2\pi n}{\omega q}\frac{\partial}{\partial p_\varphi} \tag{42}$$

以及 $\mathcal{L}_N$ 的相应推广。所得算子已由 Lamalle [11]，识别出来，只是其采用的运动常数略有不同。与省略漂移时所得的结果类似，原始 Kennel-Engelmann 算子和微分算子的对称性，也会使待计算“构件”具有相应的对称性。

$$\int d\vec{k}d\vec{k}'\omega_p^2\frac{\tilde{\mathcal{L}}_N(G)L_N^*(\vec{F}_{\vec{k}'})L_N(\vec{E}_{\vec{k}})\tilde{\mathcal{L}}_N(F_o)}{i[N\Omega+\vec{k}.\vec{v}_{GC}-\omega]} \tag{43}$$

通过 p_φ，用运动常数表示的速度梯度算子现在还包含一个描述射频感应径向漂移的分量。

环向角动量 p_φ 只有在轴对称装置中才是运动常数。在对仿星器等离子体或考虑波纹效应的托卡马克等离子体进行建模时，依赖于该运动常数的上述表达式因而不再严格成立。另一方面，Balescu 提出的选择（公式 29 和 30）仍然可以利用：它只依赖于能量 ϵ 和磁矩 μ 是运动常数这一事实。在这种情况下，磁面标记参数可以像无漂移情形中那样使用，并且可以利用通常的 Ichimaru算子；此时，参考量 Ψ 仅仅是用于识别轨道的标签，而不是运动常数。然而，这样做时，只有在长时间尺度上实际跟踪轨道，并以分段采样取代轨道积分、同时相应更新缓慢变化的分布函数，才能以最一般的形式正确捕捉慢时间尺度上的动力学。这样一来，求解 Vlasov方程 时引入的时间积分 $\int_{-\infty}^{t}$ 也必须由时间步进过程取代，这要求逐步更新扰动分布函数，并相应调整福克-普朗克方程以反映这一改进。若要完全严格地执行，这是一项艰巨的任务。在轴对称装置这一较简单的情形下，轨道在环向截面上闭合，跟踪更长时间尺度上的历史通常足以实现时间尺度的简单分离。下一节将讨论这一主题。

5 快速与慢速动力学积分

所得的用于组装波动方程和福克–普朗克方程系数的“构件”包含如下形式的项

$$exp[-i\tilde{\Phi}(t)]\int_{-\infty}^{t}dt'exp[i\Phi(t')] \tag{44}$$

˜待求值。这里， Φ 是测试函数的相位，而 Φ 是电场的相位。通常，人们会采用电场的“绝热开启”方式

以尽可能简单的形式计算该积分：假设粒子“忘记”过去发生的事件，只保留端点贡献。然而在实际中，时间演化可能十分重要。在轴对称托卡马克中，轨道在极向上闭合，但在环向上不闭合；经过大量穿越后，单条磁力线会遍历整个磁面。例外情况是离散的一组“有理”磁面：磁力线完成一次极向转动时，也恰好完成整数次环向转动。这些磁面尤为重要，因为它们使共振的连续遭遇能够产生相长干涉。建立波动方程时，人们通常会忽略有理面的现实意义和重要性。相比之下，磁流体力学研究关注的正是这些磁面。严格来说，轨道积分的被积函数不仅通过快速变化的相位而依赖时间；例如，$v_\perp$ 和$v_{//}$ 会沿轨道变化。当相位快速变化时，积分的主要贡献来自驻相点，而附加时间变化带来的修正则次要得多。当相位缓慢变化时，则需要在“快速”和“缓慢”时间积分中都考虑整个轨道上的动力学。本节将采用较为传统的假设，即Φ 快速变化。

5.1 慢时间尺度动力学

我们将总时间演化拆分为多个贡献之和，每个贡献对应一次极向“弹跳”。

$$exp[-i\tilde{\Phi}(t)]\int_{-\infty}^{t}dt'exp[i\Phi(t')]=\sum_{M=0}^{\infty}exp[-i\tilde{\Phi}(t)]\int_{t-(M+1)\tau_b}^{t-M\tau_b}dt'exp[i\Phi(t')] \tag{45}$$

这里，τ_b 是完成一次完整“弹跳”所需的时间，也就是回到相同极向位置所需的时间。对于给定轨道，在每次后续弹跳时，轴对称装置中的相位都会改变相同的量 $\Delta\Phi$ 。因此，我们可以将上式改写为

$$exp[-i\tilde{\Phi}(t)]\int_{-\infty}^{t}dt'exp[i\Phi(t')]=\Big[\sum_{M=0}^{\infty}exp[iM\Delta\Phi]\Big]exp[-i\tilde{\Phi}(t)]\int_{t-\tau_b}^{t}dt'exp[i\Phi(t')] \tag{46}$$

如果 $\Delta\Phi$ 不是 2π 的整数倍，也不是其有理数部分（即偏离“磁流体力学分析”），那么经过无限次弹跳后，连续几次相遇时的相关相位将遍历 0 到 2π 之间的所有可能值。因此，尽管粒子沿轨道每次遇到共振时都会获得能量踢，但在这种情况下，电场与粒子之间不会产生净相互作用。然而，实际情况中，碰撞（或任何其他去相关机制）会改变这一图景。设 ν 为碰撞或去相关频率，则此时相位为$\vec{k}.\vec{x}_{GC}(t)-N\phi_{gyro}(t)-[\omega+i\nu]t$，因此得到改进后的表达式

$$exp[-i\tilde{\Phi}(t)]\int_{-\infty}^{t}dt'exp[i\Phi(t')]=$$

$$\Big[\sum_{M=0}^{\infty}exp[M(i\Delta\Phi-\nu\tau_b)]\Big]exp[-i\tilde{\Phi}(t)]\int_{t-\tau_b}^{t}dt'exp[i\Phi(t')] \tag{47}$$

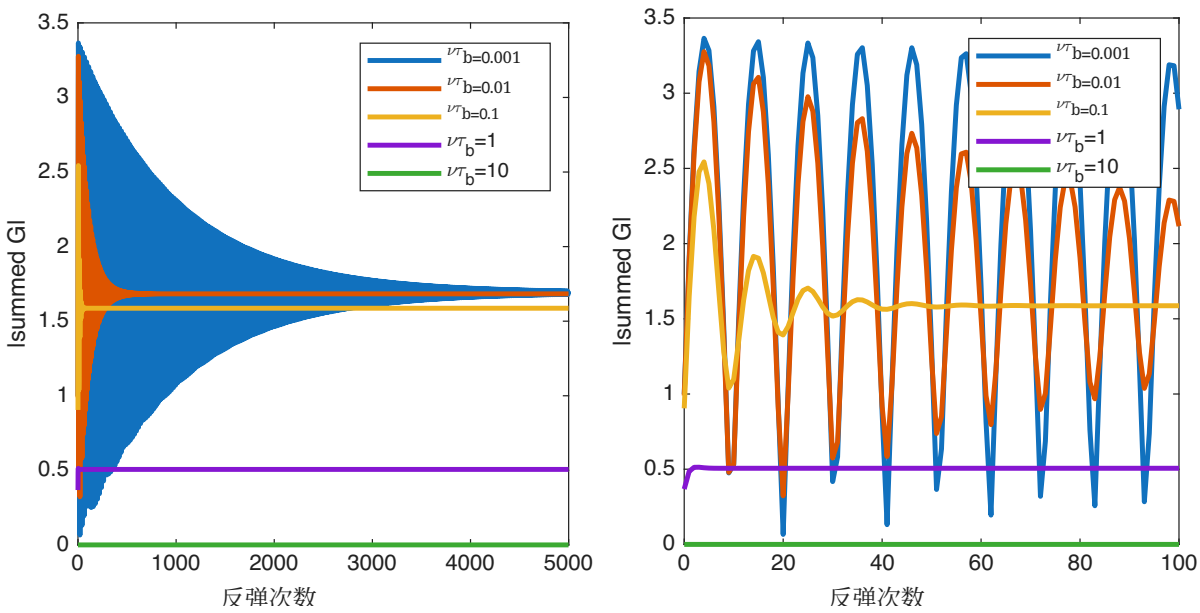

图1： 6 个不同 $\nu\tau_b$值对应的关闭因子；右侧图展示了小M时的细节。

图 1 绘出了 6 个不同 $\nu\tau_b$值对应的关闭因子 $G = \sum_{M=0}^{\infty} exp[M(i\Delta\Phi - \nu\tau_b)]$。当取值较大时，净效应会迅速趋于零（“超绝热性”）；而取值较小时，在考虑足够多次弹跳后，ν 的精确值并不重要。后一种情况很常见：反弹频率与碰撞频率通常相差几个数量级。对于中间取值，仍有部分吸收，但净效应会减弱。这种更细致的处理依赖于全轨道跟踪，其中慢速和快速动力学的细节都很重要。

5.2 快速时间尺度动力学

接下来，我们将评估快速行为，并考察剩余的积分，该积分涵盖从 $t' = t - \tau_b$到 $t' = t$ 的历史。首先回顾一下问题中涉及的不同时间尺度。以上讨论着重于碰撞时间尺度（或更一般的去相关时间尺度）与弹跳时间尺度之间的差异。这里讨论的是弹跳时间尺度和回旋时间尺度。我们采用典型的 JET 参数，重点关注$B_o = 3.45T$处的核心 H 少数离子基频回旋加热。热速度为 $v_{th} = 9.70 \times 10^3 [T/A]^{1/2}$，其中 T是 eV中的温度，A是原子质量。假设 $T = 10keV$，可得典型速度为 $10^6 m/s$。为简化起见，采用圆形截面，并聚焦于距磁轴 $\rho = 0.3m$ 的磁面，同时取$sin\Theta = B_{0,\ \theta}/B_o = 0.3$和 $v_{//}/v = 0.6$，得到的弹跳时间为 $\tau_b = 2\pi\rho/[v_{//} sin\Theta] \approx 10^{-5} s$，而射频时间尺度为 $\tau_{RF} = 1/f \approx 2 \times 10^{-8} s$，因此单次反弹运动期间约发生 500 次拉莫尔回旋。因此，除非需要更详细的图像，否则可以用无穷大替代弹跳时间。

我们将重点关注回旋共振附近的变化。为此，我们需要更详细地评估 Φ。我们围绕稍后定义的参考时间 t_o对相位进行泰勒级数展开： $\Phi \approx \Phi_o + \Phi_1(t-t_o) + \Phi_2(t-t_o)^2/2$ 其中

$$\Phi_1 = \dot{\Phi} = k_{//} v_{//} + N\Omega - \omega$$

$$\Phi_2 = \ddot{\Phi} = k_{//} a_{//} + N\dot{\Omega} \tag{48}$$

由于我们这里只是为了说明其行为，因此忽略了 $k_{//}$ 的变化。我们通过运动方程和守恒定律得到所需的量。由于能量 $\epsilon = mv^2/2$ 和磁矩 $mv_\perp^2/[2B_o]$ 守恒，我们有

$$v_{//} = sign(v_{//})[v^2 - CB_o]^{1/2}$$

$$a_{//} = \frac{dv_{//}}{d\theta}\dot{\theta} = -C\frac{\partial B_o}{\partial \theta}\frac{\dot{\theta}}{2v_{//}} \tag{49}$$

其中， $C = v_\perp^2/B_o$ 位于参考点，且 $\dot{\theta} = v_\theta/|\partial\vec{x}/\partial\theta|$； v_θ 由$v_\theta = sin\Theta v_{//}$ 得到，其中 Θ 是静态磁场与环向方向之间的夹角 $\Theta = cos^{-1}[B_{0,\varphi}/B_o]$。

我们引入记号 $T = (t'+t)/2 - t_o$和 $\tau = t' - t$，随后采用特定选择：令 t_o为平均时间（$t+t'$）/2，即 $T = 0$（注意，这隐含地假设，例如磁场在 t 和t'之间变化不大）。文献中采用了两种表达形式：一种只对 Φ （与电场的相位 $\vec{E}$相关）作泰勒级数展开；另一种则——~更为对称，也对应更一般的理论——同时对 Φ 和 Φ 展开（后者是与测试函数 $\vec{F}$相关的相位）；见相关表达式 Eq.44。前一种形式会得到包含电场 $k_{//}$ 的表达式，而~后一种形式则会使平均 $k_{//}$ 出现。我们将任一种选择记为 k//。采用 $T = 0$ 后，两种可能的选项为

$$\Phi - \tilde{\Phi} \approx \Phi_0 - \tilde{\Phi}_0 + \frac{\Phi_1}{2}\tau + \frac{\Phi_2}{8}\tau^2 \tag{50}$$

and

$$\Phi - \tilde{\Phi} \approx \Phi_0 - \tilde{\Phi}_0 + \frac{\Phi_1 + \tilde{\Phi}_1}{2}\tau + \frac{\Phi_2 - \tilde{\Phi}_2}{8}\tau^2 \tag{51}$$

→与时间无关的因子是在参考位置处的 $k.\vec{x}$。随时间线性变化的因子，是均匀理论中出现在共振分母里的常见因子 $N\Omega + k_{//} v_{//} - \omega$。最后一个因子则描述了沿导引中心轨道运动时，由 Ω 和 $v_{//}$ 的变化导致的加速或减速。显然，泰勒级数展开仅适用于接近参考时间和参考位置的时刻与位置。当这些参数发生显著变化时，向后进行时间积分就需要逐段采用“拼接式”方法求值。此后，我们将对这两种情况均采用记号 $\Phi_0 + \Phi_1\tau + \Phi_2\tau^2$。

— — —

现在我们进行几项补充的变量替换。首先令 $\tau = t' - t$——此时积分上下限为 $-\infty$ 到 0（严格来说是从 $-\tau_b$ 到 0，但请记住，由于 $\Omega >> \omega_b$，可以用 ∞ 替换 τ_b ） —— 然后我们将路径变量

~ ~ ~的符号反转，得到 $t = -\tau$，这样路径便从 0 延伸至无穷大。接着我们进一步将 t 变换为 ⁓$p = \alpha t + \beta$，以便将指数函数的自变量补成一个平方，并

将被积函数写成 $exp[-p^2]$。 $\alpha\infty$ 的值以及所选路径的方向，确保积分在趋近更早时刻时收敛。要对指数中的项配方，需要

$$-p^2+\beta^2=i(-\overline{\Phi_1}\tilde{\tilde{t}}+\overline{\Phi_2}\tilde{\tilde{t}}^2) \tag{52}$$

（注意线性项的符号变化）其中

$$\alpha=e^{-i\pi/4}\overline{\Phi}_2^{1/2}$$

$$\beta=i\overline{\Phi}_1/[2\alpha] \tag{53}$$

因此积分为

$$exp\Big[i[\Phi_0-\tilde{\Phi}_0]\Big]\frac{\pi^{1/2}}{2\alpha}Erfc(\beta)exp[\beta^2] \tag{54}$$

其中 $Erfc$ 是互补误差函数

$$Erfc(\beta)=\int_{\beta}^{\alpha\infty}dpe^{-p^2} \tag{55}$$

该平滑函数仅在其自变量绝对值小于 2 时才会显著变化，在其他情况下可视为常数；也就是说，它所描述的波粒响应在共振附近高度局域，此处 Φ_1 穿过零点。无论如何，采用的泰勒级数在离参考点过远时便失去意义。例如，这意味着，对于超出泰勒级数有效近似范围的时间，截断级数所预测的细节并无物理意义；但将时间历史积分切分成级数仍然成立的微小片段，以“快照”方式描述波粒相互作用，是合理的。因此，通常只保留泰勒级数中的第一时间导数项（形式上与均匀极限完全相同）就足够了。只有在非常接近转向点时（此处相位的一阶时间导数为零，因此需要保留二阶时间导数，以评估沿轨道感受到的非均匀性的影响），才需要采用升级处理。请注意，当加速度项为零时，函数的自变量会发散。在大多数情况下，这种发散只是无关紧要的伪象。不过，当二次项相对于线性项可以合理地忽略时（即当 $\beta\to\infty$ 以致 $Erfc(\beta)$ $=1/[\pi^{1/2}\beta exp(\beta^2)]$），表达式就会化为熟知的均匀等离子体共振分母

$$\frac{1}{i\Phi_1}exp\Big[i[\Phi_0-\tilde{\Phi}_0]\Big]=exp[i(\vec{k}'-\vec{k}).\vec{x}]\frac{1}{i[N\Omega+\mathtt{k}_{//}v_{//}-\omega]} \tag{56}$$

后一种表达式完全舍弃了过去的事件，仅保留路径积分中最后一个时刻 t的贡献。这是组装离子回旋共振加热波动方程时最常采用的方法。

采用的相位截断泰勒级数展开表明，加速度项 Φ_2 相对于速度项 Φ_1 很小，因此通常有充分理由将其舍去.. .。但除少数例外，事实恰恰相反：
_$\Phi=[\partial\Phi/\partial x_{//}]v_{//}$ 因此$\Phi_1/\Phi_2\approx L_{//}/v_{//}$ 其中 $L_{//}$ 为平行梯度长度，通常为R 量级，所以加速度项通常比

速度项大几个数量级；例如，对于 $5keV$ 氢离子，其热速度为 $7\times10^5m/s$。只有当导引中心速度经过极值点时，$L_{//}$才会降为零：也就是在香蕉轨道尖端和拐点处。因此，泰勒级数展开只有在 $|\Phi_1/\Phi_2|>>|\tau|$ 时才是有效近似，而这仅限于参考位置附近极短的时间区间。在共振位置（$\Phi_1=0$），互补误差函数描述电场与带电粒子之间的净能量交换；远离该位置时，则会围绕平均值出现愈发快速的振荡。这带来一个重要结论：除少数例外，在局部采用均匀等离子体表达式就足以描述波粒相互作用（这极为便利，因为它证明在大多数情况下采用"准局域"方法是合理的）；而离开参考位置后，任何展开很快都会失去物理意义（这也说明，对更复杂模型的结果需要谨慎解读）。

图2描绘了JET等离子体中一颗以速度 $v=10^6m/s$ and$v_{//}/v=0.6$ 穿过赤道平面的 H 粒子的相位，其中 $f=51MHz$, $B_o=3.45T$,$B_{0,\ \theta}/B_o=0.3$ ，并采用圆形截面。所采用磁面的半径为 $\rho=0.3m$；JET的大半径为 $R_o=2.97m$。对于所选参数，驱动频率下一个振荡周期的持续时间约为 $2\times10^{-8}s$；在此期间，粒子沿极向移动的距离约为 $10^{-2}rad$。如图2中实线与虚线之间的鲜明对比所示，偏离参考位置时，泰勒级数展开的系数变化非常快。接近共振时，振荡会减慢，在穿越共振时产生一次"踢"。图3展示了被积函数 $exp[i\Phi]$ 在极向角区间 $0.4rad$ 内的演化，可以看出，当位置离参考位置（取为图中最左侧的角度）太远时，泰勒级数展开近似会逐渐失相。在参考点附近，泰勒级数展开能够给出恰当的表示，但采用实际相位或近似相位得到的指数因子之间的差异很快就会显现。接近共振时，结果只是轻微失相；但远离共振时，表现则截然不同。要使泰勒级数展开足够准确，涉及 Φ_2 的贡献相对于低阶项应足够小。图4绘出了积分 $\int dtexp[i\Phi]$ ，分别采用实际相位和近似相位计算。红色和蓝色竖线分别表示泰勒级数展开中二次项等于零阶项（即 $\tau=|\Phi_0/\Phi_2|^{1/2}$）的位置，以及二次项等于一阶项（即 $\tau=|\Phi_1/\Phi_2|$）的位置，其中 Φ。要使泰勒级数近似达到可接受的精度，只应使用远小于这些限值的 τ（以及相应的极向角 $\theta=\int_0^\tau dt\dot{\theta}$）。实线仅表示有限区间内的积分（此处为 $|\Delta\theta|<0.4rad$）。对整个区间 $\tau=0$ 至 $\tau=\infty$ 进行积分，得到绿色虚线和点划线。

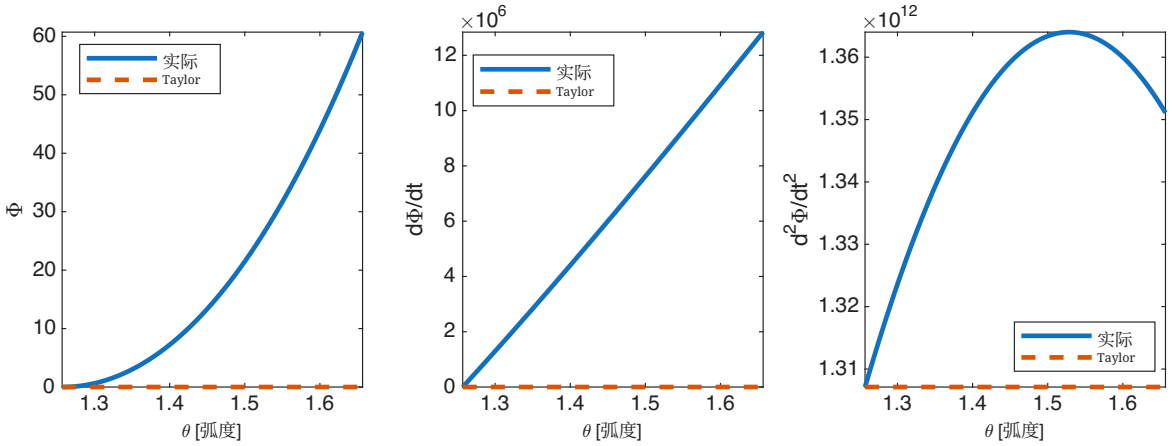

图2： Φ 的精确相位及其一阶和二阶时间导数，适用于穿越回旋共振的 H 离子；虚线表示在参考点（最左侧角度）处计算的相位及其前两阶导数，用于计算共振点附近 Φ的泰勒级数近似。

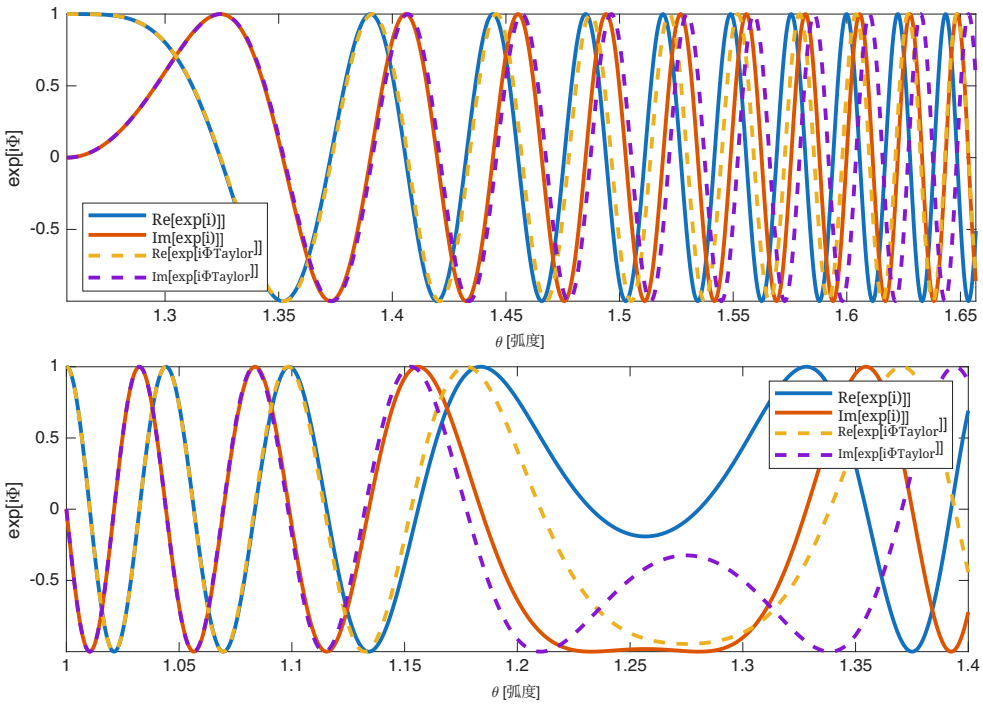

图3： 被积函数 d $exp[i\Phi]$ 在（上）和远离共振处（下）的“踢”积分).

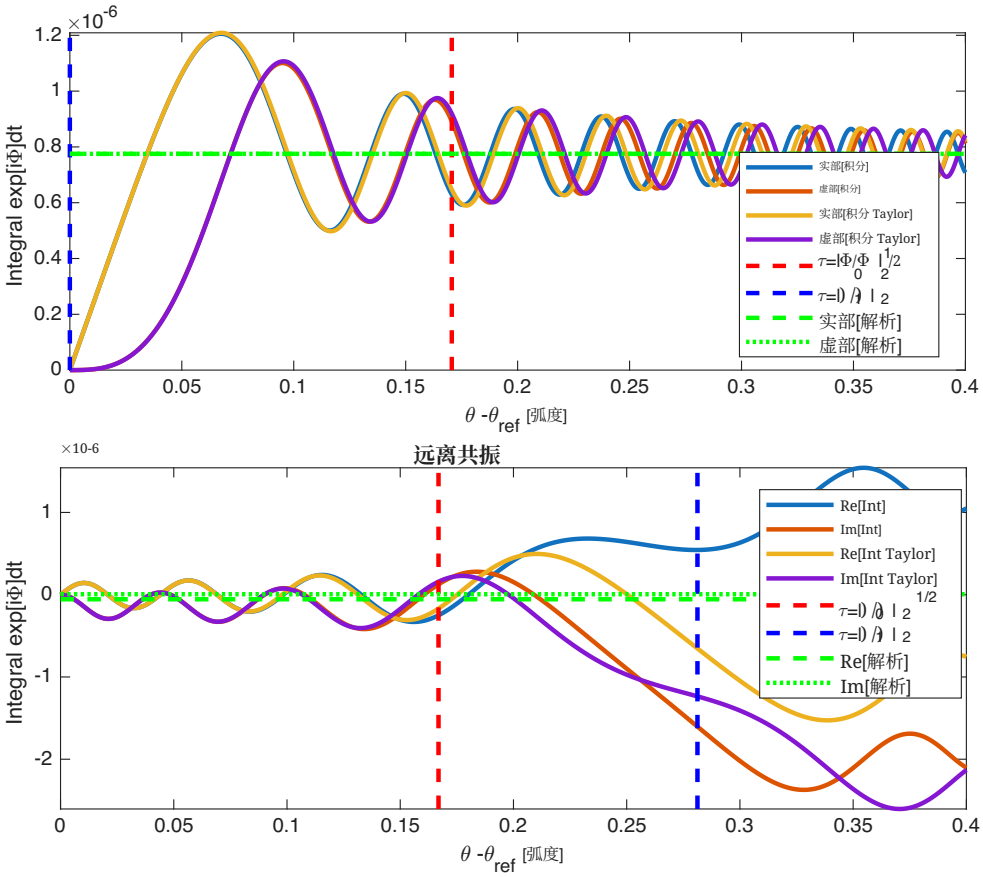

图4： Kick积分 $\int dt exp[i\Phi]$。

6 介电响应计算：两个部分示例

6.1 无漂移的麦克斯韦等离子体

计算 麦克斯韦分布函数关于平行速度的积分

$$F_{o,Max} = exp[-v^2/[2v_t^2]]/[2\pi v_{th}^2]^{3/2} \tag{57}$$

（其中 $\int F_{o,\ Max} = 1$）得到 Fried-Conte 函数 $\mathcal{Z}(\zeta)$ 或其矩：Kennel-Engelman 算子产生 3 类项，即

- （i）分子中与 $v_{//}^2$ 成正比的项，对于介电张量元素 $K_{//,\ //}$ 中的电子朗道阻尼项很重要，
- （ii）与$v_{//}$ 成正比的项（将电场的平行分量与垂直分量耦合），最后还有

- （iii）分子中完全不含$v_{//}$ 的项（纯垂直动力学）。

分离出平行动力学，并使用所得的简化表达式，我们确实得到如下形式的积分

$$\int dk_{//} \int dk'_{//} exp[i(k'_{//} - k_{//})x_{//}] I_M F^*_{\vec{k},\alpha} E_{\vec{k}',\beta}$$

$$= \int dk_{//} \int dk'_{//} exp[i(k'_{//} - k_{//})x_{//}] \left[\int dv_{//} \frac{v_{//}^M}{i[N\Omega + \mathtt{k}_{//} v_{//} - \omega]} exp\Big[-v_{//}^2/[2v_{th}^2]\Big] \right] F^*_{\vec{k},\alpha} E_{\vec{k}',\beta} \tag{58}$$

3 个相关的最内层积分为

$$I_0 = \frac{\pi^{1/2}}{i\mathtt{k}_{//}} \mathcal{Z}(\zeta)$$

$$I_1 = \frac{[2\pi]^{1/2} v_{th}}{i\mathtt{k}_{//}} [1 + \zeta \mathcal{Z}(\zeta)]$$

$$I_2 = \frac{2\pi^{1/2} v_{th}^2}{i\mathtt{k}_{//}} \zeta [1 + \zeta \mathcal{Z}(\zeta)] \tag{59}$$

其中 $\zeta = [\omega - N\Omega]/[\mathtt{k}_{//} 2^{1/2} v_{th}]$。当 $\mathtt{k}_{//} \to 0$（因此 $\zeta \to \infty$）时，$v_{//}$ 依赖性便从速度积分中消失，积分也就变成了简单的矩。取 Fried-Conte 函数的渐近表达式

$$\mathcal{Z}(\zeta) = -\frac{1}{\zeta}[1 + \frac{1}{2\zeta^2} + \frac{3}{4\zeta^4}] \tag{60}$$

可以找到该极限下的正确表达式：

$$I_0 \approx -\frac{\pi^{1/2}}{i\mathtt{k}_{//}\zeta} \approx \frac{i[2\pi]^{1/2} v_{th}}{[\omega - N\Omega]}$$

$$I_1 \approx -\frac{[2\pi]^{1/2} v_{th}}{i\mathtt{k}_{//} 2\zeta^2} \approx \frac{i[2\pi]^{1/2} v_{th}^3}{[\omega - N\Omega]^2} \mathtt{k}_{//} \to 0$$

$$I_2 \approx -\frac{2\pi^{1/2}v_{th}^2}{i\mathtt{k}_{//}2\zeta} \approx \frac{i[2\pi]^{1/2}v_{th}^3}{[\omega - N\Omega]} \tag{61}$$

这些项似乎会在温度趋于零时消失，但请记住，每个方向都会带来一个额外因子 $1/(2\pi v_{th})^{1/2}$，对应 3 个速度方向中的每一个，从而确保分布函数的积分为 1。因此，在该极限下 I_1 会消失，但另外两个积分仍然有限。恰好在共振处，剩余表达式似乎会发散。考虑碰撞时，将 ω 替换为 $\omega + i\nu$，其中 $\nu << \omega$ 是碰撞频率，这样共振处就会出现一个尖锐但有限的贡献。定义 Fried-Conte 函数的无碰撞阻尼特性时，已经隐式地采用了这一过程（$Im(\omega) \rightarrow 0^+$）。

使用式 20 可以直接得到更一般的表达式。若要纳入更多细节，可采用前面引入的表达式

$$\frac{1}{\Phi_1} \rightarrow \frac{i\pi^{1/2}}{2\alpha} Erfc(\beta) exp[\beta^2] \tag{62}$$

进行推广。由此可得

$$\vec{F}^*.\overline{\overline{K}}.\vec{E} = [1 - \sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2}]\vec{F}^*_{\vec{k}'}.\bar{\bar{1}}.\vec{E}_{\vec{k}} - 2\pi \sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{k}' \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{k} \int_0^{+\infty} dv_\perp \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{//}$$

$$\Big[N\Omega_\alpha \partial F_{o,\alpha}/\partial v_\perp + k_{//} v_\perp N\Omega_\alpha \partial F_{o,\alpha}/\partial v_{//} \Big] L(\vec{F}^*_{\vec{k}'}) L(\vec{E}_{\vec{k}}) \frac{i\pi^{1/2}}{2\alpha} Erfc(\beta) exp[\beta^2] \tag{63}$$

波动方程对应的功率平衡只需在波动方程的弱形式中用电场替换试探函数向量。这里只需要有功功率（即共振相互作用）。为了得到准线性 $\vec{}$ $\vec{}$扩散算子，将 F 替换为 E，但速度空间积分需在运动常数空间中分段进行；与波动方程类似，福克-普朗克方程将采用该方程的变分形式求解。

6.2 无漂移等离子体的任意分布函数

将采用有限元方法求解波动方程和福克-普朗克方程，因此电场和分布函数将表示为定义在（足够精细的）网格上的局部低阶多项式。在所得有限元中，所需积分可以手工计算。采用最简单的模型$\tilde{}$来求取介电响应，会得到共振分母 $N\Omega + k_{//}v_{//} - \omega$，因此对共振进行积分将在局部产生对数贡献（例如参见 [43, 44]）。在 Ichimaru 的表达式中，对于类型为 α 的粒子，计入射频场对波动方程和福克-普朗克方程影响的相关项形式为

$$\int_0^{+\infty} dv_\perp \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{//} v_\perp$$

$$\left[-2\pi \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{k}' \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{k} \frac{N\Omega_\alpha/v_\perp \partial/\partial v_\perp + k_{//}\partial/\partial v_{//}}{N\Omega + \tilde{k}_{//}v_{//} - \omega} L(\vec{E}^*_{\vec{k}'}) L(\vec{E}_{\vec{k}}) \right] F_o \tag{64}$$

（在写出波动方程时，第一个 $\vec{E}_{\vec{k}'}$ 需要替换为 $\vec{F}_{\vec{k}'}$），此时积分将拆分为各个子积分之和，积分区间为

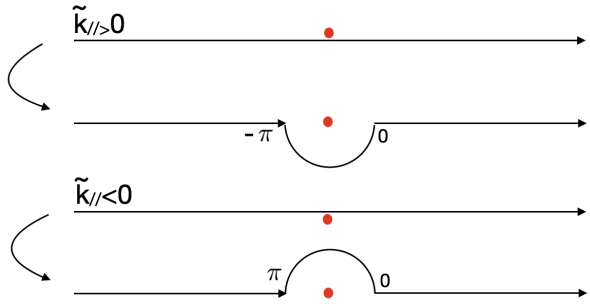

图5： 针对 $k_{//}$ 两种符号的变形等高线。

网格点：$\int dv_\perp dv_{//} = \sum_{i,\ j} \int^{v_{\perp,\ v_\perp}^{i+1,\ i}} dv_\perp \int^{v_{//,\ v_{//}}^{j+1,\ j}} dv_{//}$。对 $1/[N\Omega + k_{//}v_{//} - \omega]$ 在 $v_{//}$ 上进行积分，除主值贡献外，还会得到一个在共振处出现的狄拉克 δ 函数贡献 $i\pi/|k_{//}|$。事实上，只有在 $N\Omega + k_{//}v_{//} - \omega = 0$ 时才会产生波与粒子之间的净能量传递，也就是说，福克-普朗克方程所需的射频项是所有共振交点处取值的总和。定义 $v_{//,\ res} = [\omega - N\Omega]/k_{//}$，并在驱动频率上加上一个极小的虚数修正（碰撞频率或去相关频率）以确保因果性后，我们可以在共振平行速度附近计算该积分：

$$\int dv_{//} \frac{\mathcal{H}}{[N\Omega + \tilde{k}_{//}v_{//} - \omega]} \to \int dv_{//} \frac{\mathcal{H}}{[N\Omega + \tilde{k}_{//}v_{//} - \omega - i\nu]}$$
$$= \frac{1}{\tilde{k}_{//}} \int dv_{//} \frac{\mathcal{H}}{[v_{//} - v_{//,res} - i\frac{\nu}{\tilde{k}_{//}}]} = \frac{1}{\tilde{k}_{//}} \int d\zeta \frac{\mathcal{H}}{[\zeta - i\frac{\nu}{\tilde{k}_{//}}]} \tag{65}$$

非零虚部表示阻尼或激发；为将其分离出来，我们取 $-i$ 乘以该表达式后的实部。这只有在 $\tilde{k}_{//}$ 被积函数的极点附近才会发生。当 $k_{//} > 0$ 时，极点位于实轴上方；当 $\tilde{k}_{//} < 0$ 时，极点位于实轴下方。将积分变量 $\zeta \to |\zeta| e^{[i\alpha]}$ 替换为 $|\zeta|$（其值非常小但有限）且为正，可得结果 $i\mathcal{H}_{res}[0 - (-\pi)]/k_{//}$（当其为正时）以及 $i\mathcal{H}_{res}[0 - \pi]/k_{//}$（当 $\tilde{k}_{//}$ 为负时）。这两个结果都可以写成 $i\pi\mathcal{H}_{res}/|k_{//}|$。

请注意，要使能量从波传递到粒子，$[N\Omega_\alpha/v_\perp \partial/\partial v_\perp + k_{//}\partial/\partial v_{//}]$ 必须为负。另请注意，当 $k_{//}$ 为零时，分母不依赖 $v_{//}$，因此积分路径上不存在共振分母。因此完全没有阻尼。同样，当 $v_{//,\ res}$ 不位于 $v_{//,\ j}$ 与 $v_{//,\ j+1}$ 之间时，也没有阻尼，因为相位在积分区间两端的符号相同。

作为示例，针对特定的 $\vec{k}$ 和 $\vec{k}'$，计算了双麦克斯韦分布的介电响应。总响应将通过对 $\vec{E}$ 和 $\vec{F}$ 谱中物理相关模式的（离散子集）求和来组装。图6显示了氢少数离子组分的介电响应元素贡献，其中假设 $\psi = tan^{-1}[k_{\perp,2}/k_{\perp,1}] = 0$ 以及（$k_\perp$、$k_{//}$、$k'_\perp$、$k'_{//}$）=（30、7、20、4）$/m$。未计入其他等离子体组分的贡献。采用了典型的JET（H）$-D$参数：中心电子密度 $7 \times 10^{19}/m^3$，$X[H] = \mathcal{N}_H/\mathcal{N}_e = 5\%$。

选择该频率，使中心处的氢基频回旋共振加热为 $f = 51MHz$， $B_o = 3.45T$；这使冷回旋层位于 $x \approx 0.1m$处。针对共振附近的一系列 $x = R - R_o$，描绘了张量元素。全有限拉莫尔半径介电张量级数限制为 $|N_{harm}| \leq 3$。图中描绘了3种具有相同平行温度 $T_{//} = 7keV$的氢少数离子组分的部分介电“构件”的全部9个元素：作为参考的热粒子分布，其垂直方向具有相同的垂直温度 $T_\perp = 7keV$；具有 $T_\perp = 16T_{//}$的中等能量尾部；以及具有 $T_\perp$ =$100T_{//}$的高能尾部。中等温度尾部的张量元素与热氢少数离子组分的张量元素大致重叠，但当氢尾部具有高度各向异性时，会观察到显著差异。注意，虚部在局部会变为负值。这是速度空间中较大各向异性的结果，当 $\omega T_\perp - N\Omega$（$T_\perp - T_{//}$）< 0 [31] 时，产生了Stix所称的“回旋过不稳定性”，从而允许波激发而非波阻尼发生。

7 简要总结与讨论

本文旨在勾勒一个框架，以实现对波动方程和福克–普朗克方程的完全自洽处理，同时保留拉莫尔半径修正以及相对于磁场的平行和垂直梯度。该框架受到近期一些令人鼓舞的结果的启发：这些结果利用广为人知的经典结果求解波动方程，并将问题表述为与传统有限元求解所得形式完全相同；唯一的区别在于，以变分形式表述方程时，等效线性系统所需系数的组装方式。本文可视为对近期其他工作的补充；那些工作致力于进一步推导解析表达式，而本文则将计算工作量完全交由足够强大的计算机承担，同时利用描述波粒相互作用的知名表达式。本文的思路是构建波动方程和福克–普朗克方程共同所需的基本构件。首先给出传统上最常用的情形，即导引中心运动仅沿磁场方向进行。随后将这些表达式推广至导引中心漂移离开磁面的情形。文中针对若干关键问题给出了示例。此外，还给出了一个非麦克斯韦分布下介电响应的计算示例。

目前尚未得到解答的一个关键问题是：组装这些“构件”的计算能否足够快速，从而具备实际应用价值。为了求解积分微分波动方程，同时能够利用现有的强大有限元工具，近期的研究工作通过采用有充分依据的简化方法来减少计算工作量（例如，仅保留占主导地位的耦合 [2], 确保可以手动完成逆傅里叶变换 [5]，或引入有限元基函数的傅里叶表示，以避免在整个物理域内对全局模态基函数进行积分 $exp[i\vec{k}.\vec{x}]$ [4]）。不过，在确保关键物理效应得到考虑的同时，继续探索尽可能缩短所需计算时间的方法仍然是有益的。避免直接使用傅里叶表示是目前探索的途径之一。Machielsen 和 Lamalle 等人近期开展的、且部分仍在进行中的研究工作 [12, 9, 10]正朝着这一方向发展

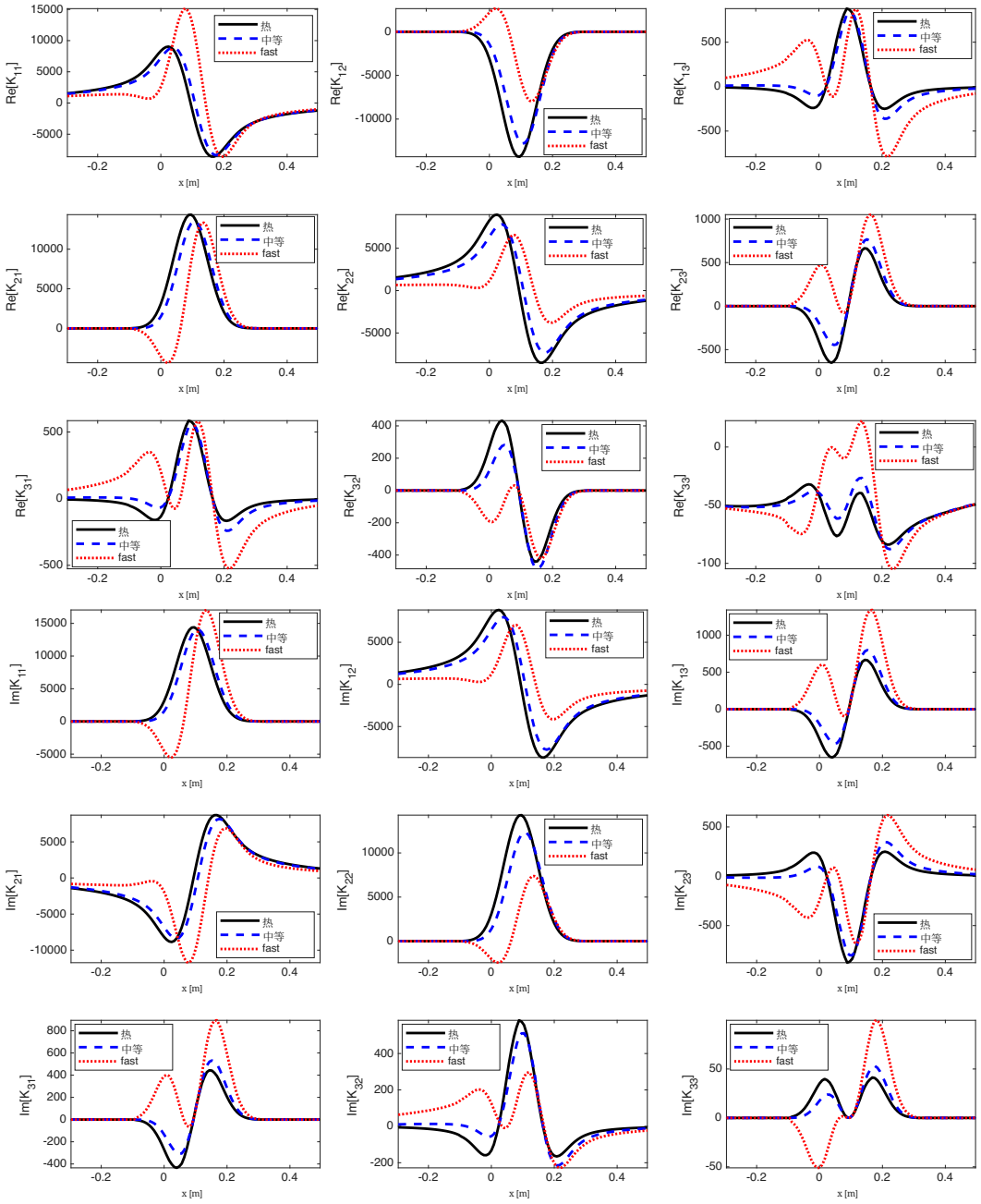

图6： （$k_\perp$，$k_{//}$，$k'_\perp$，$k'_{//}$）=（30，7，20，4）$/m$研究平行方向温度相同的3种氢少数离子时的介电张量部分构建块（$T_{0,\ //} = 7keV$；图中仅绘出氢的贡献）：(i) 黑色实线表示温度为$T_{0,\ \perp} = 7keV$的热氢；(ii) 蓝色虚线表示具有$T_{0,\ \perp} = 112keV$的中等能量尾部；(iii) 红色点线表示具有$T_{0,\ \perp} = 700keV$的高能尾部。上方9个子图描绘介电响应的实部，下方9个子图则显示相应的虚部。

方向。鉴于大量计算工作量源于展开 $exp[ibsin\alpha] = \sum_{-N=\infty}^{+\infty} J_N(b)exp[iN\alpha]$——这种做法直观，因为它能够分离各个回旋谐波的效应，但需要计算一系列贝塞尔函数——一种方法是放弃这种展开，转而采用“快照”方法，局部使用截断的泰勒级数展开，直接对原始相位因子 $exp[i\Phi]$积分。Qin [45] 此前提出过一种部分沿此思路的方法：他用对回旋周期的双重积分，取代了将磁化率张量展开为贝塞尔函数乘积的无穷级数，从而得到介电张量的紧凑表达式，其中无穷多个回旋谐波通过分母 $sin(\pi[\omega - k_{//}v_{//}]/\Omega)$体现。

参考文献

[1] *E.F. Jaeger* 等，《*Phys. Plasmas*》*8*（*2001*）*1573*[2] *D. Van Eester* 与 *E.A. Lerche*，《*Plasma Phys. Control. Fusion*》*66*（*2024*）*045002*[3] *D. Van Eester* 等，《*ICRH* 建模的几乎现成工具》，将发表于《*2025* 年等离子体射频功率会议》论文集（德国 *Hohenkammer*）[4] *D. Van Eester* 等，《使用准模求解离子回旋共振加热波动方程》，已投稿至《等离子体物理学杂志》[5] *R. Bud´e*，《加速热磁聚变等离子体中电磁波的模拟》，埃因霍温理工大学硕士论文，*2019* 年；*Bud´e* 等，《*Plasma Phys. Control. Fusion*》*63*（*2021*）*035014*[6] *D. Van Eester* 与 *E. Lerche*，《*Nucl. Fusion*》*61*（*2021*）*016024*[7]*D. Van Eester* 与 *E.A. Lerche*（*2023*），《二维全有限拉莫尔半径离子回旋共振加热波动方程作为高阶偏微分方程的半解析推导》，*arXiv:2310.18214*[8] *V.A. Svidzinski* 等，《*Phys. Plasmas*》*23*（*2016*）*112101*；*doi: 10.1063/1.4966638*[9] *P.U. Lamalle*，《*AIP* 会议论文集》*2254*（*2020*）*100001*[10]*P.U. Lamalle*，《用于环形等离子体射频加热建模的积分介电核方法》，将发表于《*2025* 年等离子体射频功率会议》论文集（德国 *Hohenkammer*）[11] *P.U. Lamalle*，《*Plasma Phys. Control. Fusion*》*39*（*1997*）*1409-1460*[12] *M. Machielsen* 等（*2023*），《*Fundamental Plasma Physics*》*3 100008*[13] *A. Fukuyama* 与 *S.A. Khan*，《使用介电张量积分形式对非均匀等离子体进行动理学全波分析》，将发表于《*2025* 年等离子体射频功率会议》论文集（德国 *Hohenkammer*）[14] *B. C. G. Reman*，《用于环形等离子体射频加热建模的积分介电核实现》，将发表于《*2025* 年等离子体射频功率会议》论文集（德国 *Hohenkammer*）[15] *M. Brambilla* 与 *R. Bilato*，《用于托卡马克等离子体离子回旋加热模拟的麦克斯韦方程组求解器与准线性动理学方程求解器之间的高效接口》，《*Comp. Phys. Comp.*》*184*，第 *9* 期（*2013*）*2053-2060*

[16] *R. Bilato* 与 *M. Brambilla*，《表面平均福克–普朗克 *SSFPQL* 求解器中的环向俘获效应》，《*AIP* 会议论文集》*1580*（*2014*）*306-309*[17] *R.J. Dumont*（*2009*），《*Nucl. Fusion*》*49 075033*[18] *E.F. Jaeger*、*L.A. Berry* 等（*2005*），《非麦克斯韦等离子体中离子回旋加热的自洽全波／福克–普朗克计算》，《*AIP* 会议论文集》*787*，*23-30*[19] *Yu. V. Petrov* 等，《使用 *CQL3D-m* 和 *AORSA* 对镜像等离子体中快离子 *ICRF* 加热进行耦合福克–普朗克／全波模拟》，将发表于《*2025* 年等离子体射频功率会议》论文集（德国 *Hohenkammer*）[20] *Lamalle P.U.*（*1994*），《离子回旋共振加热天线与托卡马克等离子体耦合的非局域理论推广与三维研究》，蒙斯大学博士论文´*e de Mons - LPP- ERM/KMS* 报告 *101*[21] *D. Kalupin* 等（*2012*），《欧洲输运求解器：等离子体核心区输运模拟的综合方法》，第 *24* 届国际原子能机构聚变能大会论文集，*TH/P2-01*[22] *Ph. Huynh* 等（*2021*），《欧洲输运模拟器对 *JET-ILW* 基线等离子体的建模：预测代码验证与 *DTE2* 预测》，《*Nucl. Fusion*》*61*（*2021*）*096019*[23]*Netgen/NGSolve* 是一款高性能多物理场有限元软件，*https://ngsolve.org/*[24] *MFEM*：高性能、可扩展的有限元软件包，*https://mfem.org/*[25] *P. Vallejos* 等（*2019*），《极向位相对离子回旋共振加热功率吸收的影响》，《*Nucl. Fusion*》*59 076022*[26] *V. Maquet* 等，《使用 *Bud´e* 方法与 *NGSolve* 实现快速二维波求解器》，将发表于《*2025* 年等离子体射频功率会议》论文集（德国 *Hohenkammer*）[27] *J.H. Zhang* 等（*2025*），《*Plasma Phys. Contr. Fusion*》*67 045036*[28] *R. Balescu*（*1988*），《等离子体中的输运过程》第 *1*、*2* 卷（经典输运与新经典输运），北荷兰出版社[29] *C.F Kennel*、*F. Engelman*（*1966*），《磁场中弱等离子体湍流引起的速度空间扩散》，《*Physics of Fluids*》*9 12*，*2377-2388*[30] *D. Van Eester* 与 *R. Koch*（*1998*），《*Plasma Phys. Contr. Fusion*》*40 1949*[31] *T.H. Stix*，《等离子体中的波》，美国物理联合会，纽约，美国（*1997*）[32] *D.G. Swanson*，《等离子体波》，学术出版社，圣迭戈（*2012*）[33] *C.F.F. Karney*（*1986*），《福克–普朗克与准线性代码》，《计算物理报告》*4 3-4*，*183-244*[34] *S. Ichimaru*，《等离子体物理基本原理：统计方法》，*W.A. Benjamin* 公司，马萨诸塞州雷丁（*1973*）

[35] *D. Van Eester*（*2005*）一种用于评估托卡马克等离子体介电响应的半解析方法，并考虑漂移轨道效应，《*Plasma Phys. Control. Fusion*》*47*，*459-481*[36] *D. Van Eester*（*2005*），托卡马克中射频加热的轨道积分与哈密顿描述，《*Plasma Phys. Control. Fusion*》*47*，*459-481*[37] *S. Puri*（*1992*），《*Europhys. Conf. Abstracts*》*16*，*E13* 和 *E17*[38] *L.D. Landau* 和 *E.M. Lifshitz*（*1960*），《理论物理学教程》*I*，牛津：*Pergamon*[39] *A.N. Kaufman*，《*Phys. Fluids*》*15*（*1972*），*1093*[40] *D. Van Eester*（*1995*），环形几何中非局域离子回旋共振加热的半解析建模，《*J. Plasma Physics*》*54*，*31-58*[41] *D. Van Eester*（*1998*），环形几何中的射频加热建模：关于离散弹跳谱和连续弹跳平均，《*J. Plasma Physics*》*60*（*3*），*627-671*[42] *D. Van Eester*（*2001*），评估托卡马克中射频加热的效率：轨道拓扑和极向非均匀性的影响，《*J. Plasma Physics*》*65*（*5*），*407-452*[43] *R. Koch*，《*Phys. Lett.*》*157A*（*1991*），*399*[44] *D. Van Eester*（*1994*），《等离子体物理与受控聚变》*36*，*1327-54*[45] *H. Qin* 等（*2007*），热磁化等离子体磁化率张量的新推导：无需对贝塞尔函数乘积进行无限求和，《*Phys. Plasmas*》*14*，*092103*