arXiv:2601.02142v1 [math.SP] 5 Jan 2026

加权魏尔分数阶算子的谱分析：老化、无限记忆与失忆效应

Gustavo Dorrego *

东北国立大学数学系，精确科学、自然科学与测绘学院，阿根廷科连特斯。

摘要

本文为加权魏尔分数阶微积分建立了严谨的谱框架，旨在模拟具有老化特性和主观时间尺度的非局部系统。通过构造一个涉及时变权重 $\omega(t)$ 和尺度函数 $\psi(t)$ 的共轭映射，我们定义了一类新的分数阶算子，同时保留了时不变系统的谱可解性。我们推导出这些算子的谱映射定理，并证明加权 Mittag-Leffler 函数是其基本特征函数，进而表明加权傅里叶变换能够自然地将相关演化方程对角化。作为一项物理应用，我们为具有无限记忆的老化黏弹性材料建立了本构定律。尤为重要的是，我们以解析方式证明了“失忆现象”：快速老化会调节系统的历史效应，实际上将遗传幂律衰减转变为短程指数弛豫。这一结果以闭式形式解释了快速老化介质中的记忆丧失，并克服了标准离散化方法的计算瓶颈。

关键词： 加权分数阶微积分；谱分析；Weyl 导数；老化黏弹性；无限记忆；非局部算子。

2020年数学主题分类： 26A33、42A38、47B38。

1 引言

分数阶微积分已被证明是用于刻画具有非局部性和遗传记忆现象的不可或缺的工具。正如 Stinga 在其奠基性工作中 eloquently stated [2], ，分数阶导数可以通过“行走的大象”这一隐喻来理解：这一过程不断向前移动，同时拖曳着此前每一步的完整历史。不同于未来仅取决于当前状态的经典马尔可夫模型，“分数阶大象”永远不会完全忘记遥远的过去。然而，关于这头大象行走的方向，必须作出一个关键区分。空间分数阶算子允许大象感知前方和后方，而时间演化模型则必须严格保持单向性，以遵循因果性。

近年来，关于函数构造分数阶算子的研究受到了广泛关注。例如，Fernandez 等人 [3]提出了关于函数定义分数阶拉普拉斯算子的方法。尽管这种方法在数学上严谨，但其侧重于对称情形，这对于空间非局部性而言十分理想，却不适用于未来不能影响过去的时间依赖过程。相比之下，我们的工作严格聚焦于单侧加权魏尔导数。我们处理演化方程中老化和因果性的特定挑战，确保我们的“大象”只记住已经走过的路径，而绝不记住尚未走过的路径。

从物理角度来看，经典魏尔算子假设采用齐次记忆核，这意味着大象行走在平坦的地形上，并且拥有恒定的内部时钟。然而，在老化黏弹性材料或存在波动率聚集的金融市场等复杂系统中，系统的“记忆”

*通讯作者。电子邮件：gadorrego@exa.unne.edu.ar

会随时间发生变化。为此，我们提出一种广义算子 $\mathfrak{D}^{\alpha}_{\psi,\,\omega}$ 通过权重 $\omega(t)$调节记忆强度，并通过尺度 $\psi(t)$扭曲时间流。在这一广义隐喻中，大象穿越动态景观，地面的密度会发生变化（ω），使阻力变得更大或更小，而时间则以主观方式被感知（ψ）。这一构造使我们能够对“主观时间”进行建模，同时保留物理现实性所要求的严格因果性。

本文结构安排如下。第 2 节回顾加权傅里叶变换及其相关函数空间的预备定义。第 3 节正式引入加权魏尔分数阶算子，并确立其定义域和映射性质。第 4 节专门讨论谱分析，推导分数阶算子的对角化，并确定加权米塔格-莱夫勒函数为基本特征函数。最后，在第 5 节中，我们将这一框架应用于老化黏弹性材料的力学问题。我们求解整个实数轴上的广义分数阶开尔文-福伊特模型，并分析记忆调制的“斯廷加效应”，展示快速老化如何缩短系统的有效记忆。最后，我们在第 6 节作总结。

2 预备知识与算子构造

在构造算子之前，我们先概述本文将始终采用的结构参数假设。具体如下：

(H1) 关于尺度函数的条件： 令 $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为严格递增的 C^1-微分同胚，满足 $\psi'(t)>0$ 对所有 $t\in\mathbb{R}$成立，且具有渐近行为 $\lim_{t\to\pm\infty}\psi(t)=\pm\infty$。

（H2）权函数条件： 设 $\omega:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ 是可测函数，且 ω 和 $1/\omega$ 均局部有界（$L^{\infty}_{\mathrm{loc}}$）。

这些假设保证所诱导的加权空间定义良好，并使我们能够建立谱分析所需的酉同构。遵循构造性的黎曼-刘维尔方法，我们首先引入积分算子，随后通过对积分求导来定义分数阶导数。

2.1 通过算子共轭定义

2.1.1 加权维尔积分

我们通过引入尺度 $\mathcal{I}^{\alpha}_{-\infty}$和权重 ψ，对经典维尔分数阶积分 ω进行扩展。为确保数学结构一致，我们采用共轭方法。这一方法与 Fernandez 和 Fahad 最近系统化的加权算子通用框架相一致 [4]，该框架依赖于 Samko 等人确立的基础变换性质 [6]。

定义 2.1（加权 ψ-维尔积分）。设 $\alpha>0$。我们定义积分算子 $\mathfrak{I}^{\alpha}_{\psi,\,\omega}$，它通过共轭作用于函数 f：

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{\psi,\omega}:=M_{\omega}^{-1}\circ Q_{\psi}\circ\mathcal{I}^{\alpha}_{-\infty}\circ Q_{\psi}^{-1}\circ M_{\omega}. \tag{1}$$

其显式积分表示为：

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{\psi,\omega}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\omega(t)}\int_{-\infty}^{t}(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-1}\omega(\tau)f(\tau)\psi'(\tau)d\tau. \tag{2}$$

2.1.2 等距变换与加权积分的存在性

现在，我们将确立共轭算子的映射性质，这是加权分数阶积分存在性的基础。

定义 2.2（可容许空间 $L^1_{\psi,\omega}$）。 我们将加权勒贝格空间 $L^1_{\psi,\omega}(\mathbb{R})$ 定义为由可测函数 $u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 构成的巴拿赫空间，其范数为：

$$\|u\|_{1,\psi,\omega}:=\int_{-\infty}^{\infty}|u(t)|\omega(t)\psi'(t)dt<\infty. \tag{3}$$

该空间对应于 $L^1(\mathbb{R},\,d\mu_{\psi,\,\omega})$，其测度为 $d\mu_{\psi,\,\omega}(t)=\omega(t)\psi'(t)dt$。

引理 2.3 (等距同构)。 设 $\mathcal{T}_{\psi,\,\omega}$ 为共轭映射，定义如下：

$$(\mathcal{T}_{\psi,\omega}u)(\tau) := (Q_\psi^{-1} \circ M_\omega)u(\tau) = \omega(\psi^{-1}(\tau))u(\psi^{-1}(\tau)), \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

那么，$\mathcal{T}_{\psi,\,\omega}$ 是从 $L^1_{\psi,\,\omega}(\mathbb{R})$ 到经典空间 $L^1(\mathbb{R})$的等距同构。

证明。 令 $u \in L^1_{\psi,\,\omega}(\mathbb{R})$，并设 $v = \mathcal{T}_{\psi,\,\omega}u$。我们计算其标准 L^1-范数： v

$$\|v\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |v(\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega(\psi^{-1}(\tau))u(\psi^{-1}(\tau))|d\tau. \tag{5}$$

我们进行变量替换 $\tau = \psi(t)$。根据假设 **(H1)**， ψ 是一个严格递增的 C^1-微分同胚，将 $\mathbb{R}$ 映射到 $\mathbb{R}$，这意味着 $t = \psi^{-1}(\tau)$ 和 $d\tau = \psi'(t)dt$。代入积分：

$$\|v\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega(t)u(t)|\psi'(t)dt = \|u\|_{1,\psi,\omega}. \tag{6}$$

由于该映射是线性的、保范数且显然是双射（其逆映射为 $u(t) = \omega(t)^{-1}v(\psi(t))$），因此它构成一个等距同构。

□

定理 2.4 (存在性与弱有界性)。 设 $0 < \alpha < 1$ 和 $u \in L^1_{\psi,\,\omega}(\mathbb{R})$。那么，加权维尔积分 $\mathfrak{I}^\alpha_{\psi,\,\omega}u(t)$ 对几乎处处的 $t \in \mathbb{R}$绝对收敛。

证明。 根据定义，$\mathfrak{I}^\alpha_{\psi,\,\omega}u = \mathcal{T}^{-1}_{\psi\,\omega\,,}(\mathcal{I}^\alpha_{-\infty}v)$，其中 $v = \mathcal{T}_{\psi,\,\omega}u \in L^1(\mathbb{R})$ 是 u 的等距像。经典 Hardy-Littlewood-Sobolev 定理保证算子 $\mathcal{I}^\alpha_{-\infty}$ 在 $L^1(\mathbb{R})$ 上定义良好，并映射到弱空间 $L^{1^{\frac{1}{1-\alpha},}\,\infty}(\mathbb{R})$。由于 $\mathcal{T}^{-1}_{\psi\,\omega\,,}$ 涉及与 ω^{-1} 的乘法以及与 Q_ψ 的复合，而这些操作在几乎处处意义下保持逐点有限性（在假设 **(H2)** 下），结论得证。

□

2.1.3 加权魏尔导数

为定义该导数，我们首先确定作为加权系统无穷小生成元的一阶微分算子。正如 [4], 中所介绍的，相关的一阶算子 $\mathbb{D}^1_{\psi,\,\omega}$ 给出为：

$$\mathbb{D}^1_{\psi,\omega} := \frac{1}{\omega(t)\psi'(t)} \frac{d}{dt} \left(\omega(t)\cdot\right). \tag{7}$$

定义 2.5 （加权 ψ-Weyl 导数）。 令 $\alpha \in (0,\ 1)$。我们将加权魏尔分数阶导数$\mathfrak{D}^\alpha_{\psi,\,\omega}$ 定义为：

$$\mathfrak{D}^\alpha_{\psi,\omega} f(t) := \mathbb{D}^1_{\psi,\omega} \left(\mathfrak{I}^{1-\alpha}_{\psi,\omega} f(t)\right). \tag{8}$$

明确地说：

$$\mathfrak{D}^\alpha_{\psi,\omega} f(t) = \frac{1}{\omega(t)\psi'(t)} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{t} \frac{(\psi(t) - \psi(\tau))^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \omega(\tau) f(\tau)\psi'(\tau)d\tau. \tag{9}$$

等价地，用算子共轭表示为：

$$\mathfrak{D}^\alpha_{\psi,\omega} = M_\omega^{-1} \circ Q_\psi \circ D^\alpha \circ Q_\psi^{-1} \circ M_\omega. \tag{10}$$

容易看出，算子 $\mathfrak{D}^\alpha_{\psi,\omega}$ 是积分算子 $\mathfrak{I}^\alpha_{\psi,\omega}$ 在可容许函数空间上的左逆：

$$\mathfrak{D}^\alpha_{\psi,\omega} \left(\mathfrak{I}^\alpha_{\psi,\omega} f\right)(t) = f(t), \quad \text{a.e.} \tag{11}$$

2.2 超奇异积分表示

虽然通过共轭给出的算子定义在代数上具有稳健性，但实际应用通常需要逐点积分表示。我们证明，该算子与广义 Marchaud 导数一致。

命题 2.6（与加权 Marchaud 导数的等价性）。 设 $0 < \alpha < 1$。对于函数u 属于加权 *Schwartz* 空间 $\mathcal{S}_{\psi,\,\omega}$ （定义见 *[5]*），加权 *Weyl* 导数 $\mathfrak{D}^{\alpha}_{\psi,\,\omega}$具有如下超奇异积分表示：

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{\psi,\omega}u(t) = \frac{c_\alpha}{\omega(t)} \int_{-\infty}^{t} \frac{\omega(t)u(t) - \omega(\tau)u(\tau)}{(\psi(t) - \psi(\tau))^{1+\alpha}} \psi'(\tau)\, d\tau, \tag{12}$$

其中 $c_\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}$ 是经典 *Weyl-Marchaud* 导数的归一化常数。

证明。 证明依赖于共轭结构 $\mathfrak{D}^{\alpha}_{\psi,\omega} = \mathcal{T}_{\psi}^{-1}{}_{,\omega} D^{\alpha} \mathcal{T}_{\psi,\omega}$。 令 $u \in \mathcal{S}_{\psi,\omega}$。 根据定义，辅助函数 $v(\xi) = (\mathcal{T}_{\psi,\omega}u)(\xi) = \omega(\psi^{-1}(\xi))u(\psi^{-1}(\xi))$ 属于经典 Schwartz 空间$\mathcal{S}(\mathbb{R})$。

回顾一下，对于 $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，Weyl 导数可表示为 Marchaud 超奇异积分：

$$(D^{\alpha}v)(\xi) = c_\alpha \int_{-\infty}^{\xi} \frac{v(\xi) - v(y)}{(\xi - y)^{1+\alpha}}\, dy. \tag{13}$$

我们在 $\xi = \psi(t)$ 处计算此恒等式，并进行积分变量替换 $y = \psi(\tau)$，由此可得 $dy = \psi'(\tau)d\tau$。代入 $v(\psi(t)) = \omega(t)u(t)$ 和 $v(\psi(\tau)) = \omega(\tau)u(\tau)$，得到：

$$(D^{\alpha}v)(\psi(t)) = c_\alpha \int_{-\infty}^{t} \frac{\omega(t)u(t) - \omega(\tau)u(\tau)}{(\psi(t) - \psi(\tau))^{1+\alpha}} \psi'(\tau)\, d\tau. \tag{14}$$

最后，应用逆映射 $\mathcal{T}_{\psi\,\omega}^{-1}{}_{,}$(这相当于在时域中乘以 $\omega^{1}{}_{t\,()}$)，得到公式（12）。 ——

□

注释 2.7（奇异核的物理解释）。表示式（12）提供了重要的物理洞见，与谱视角有所不同。按照 Fernandez 等人 [3],的观点，这种形式明确地将记忆效应展现为对过去的增量进行加权累积。项 $\omega(t)u(t) - \omega(\tau)u(\tau)$ 描述了 “ 加权状态 ” 相对于当前时刻的演化。重要的是，奇异性（ $(\psi(t) - \psi(\tau))^{-(1+\alpha)}$ 表明，近期事件（按主观时间计）对瞬时变化率有着主导影响，而权重 $\omega(\tau)$ 则调节远期历史的持续性。

3 谱分析与加权傅里叶变换

本节将建立加权魏尔算子的谱理论。我们的方法基于关于某个函数的加权傅里叶变换，该方法由作者在 [5] 中严格推导。我们采用对称（酉）归一化，以简化谱恒等式。

3.1 对称加权傅里叶变换

基于引理2.3中建立的共轭结构，我们将加权傅里叶变换$\mathcal{F}_{\psi,\,\omega}$ 定义为酉映射，它将加权希尔伯特空间$L^2_{\psi,\,\omega}(\mathbb{R})$与标准频域 $L^2(\mathbb{R})$交织起来。

定义 3.1（对称加权傅里叶变换）。 设 $f \in L^1_{\psi,\,\omega}(\mathbb{R}) \cap L^2_{\psi,\,\omega}(\mathbb{R})$。 f 的对称加权傅里叶变换定义如下：

$$\hat{f}_{\psi,\omega}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi\psi(t)} \omega(t)\psi'(t)\, dt, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

该积分变换将信号投影到“主观时间”特征基上。相应的反演公式如下：

定理 3.2 (反演公式**)**。 对于任意 $\hat{}f_{\psi,\,\omega} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$，均可通过以下方式恢复原函数：

$$f(t) = \frac{1}{\omega(t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_{\psi,\omega}(\xi) e^{i\xi\psi(t)}\, d\xi. \tag{16}$$

注 3.3。 请注意，逆变换中包含因子 $1/\omega(t)$。这是结构上必不可少的，用于抵消正向积分测度中固有的权重密度 $\omega(t)$，从而确保能够逐点恢复 $f(t)$。

一个中心心结果是 [5] 这一对称定义在空间之间给出了一个简洁的等距变换 s.

定理 3.4 （加权普朗歇尔恒等式）。 映射 $\mathcal{F}_{\psi,\,\omega}$ 可延拓为从$L^2_{\psi,\,\omega}$（$\mathbb{R}$） 到 L^2（$\mathbb{R}$）上的酉同构。特别地，对于任意 f、$g \in L^2_{\psi,\,\omega}$（$\mathbb{R}$），帕塞瓦尔恒等式成立，且无需归一化因子：

$$\langle f, g\rangle_{\psi,\omega} = \langle \hat{f}_{\psi,\omega}, \hat{g}_{\psi,\omega}\rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{17}$$

3.2 加权卷积结构

为简洁表示逆算子，我们采用 [5]中定义的加权卷积运算。

定义 3.5 （加权卷积）。 设 $f,\ g \in L^1_{\psi,}$ ω ω （$\mathbb{R}$）。我们将加权卷积（$f *_{\psi,}$ ）定义为^{g}:

$$(f *_{\psi,\omega} g)(t) := \frac{1}{\omega(t)} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\psi^{-1}(\psi(t) - \psi(\tau))\right)\, g(\tau)\, \omega(\tau)\, \psi'(\tau)\, d\tau. \tag{18}$$

该运算在结构上与 $\mathbb{R}$ 上的标准卷积同构。在[5] 中推导出的一个关键性质是**卷积定理**，该定理指出，加权傅里叶变换将此运算映射为逐点乘积：

$$\mathcal{F}_{\psi,\omega}(f *_{\psi,\omega} g)(\xi) = \hat{f}_{\psi,\omega}(\xi) \cdot \hat{g}_{\psi,\omega}(\xi). \tag{19}$$

3.3 谱映射定理

遵循 Stinga [2], 提出的理念，我们优先采用分数阶算子的谱定义。Stinga 强调，虽然奇异积分定义在历史上具有重要意义，但谱刻画（乘以频率的某个幂）通常更有利于分析。下述定理证实，只要采用正确的变换 $\mathcal{F}_{\psi,\,\omega}$ 即使在我们推广的加权情形下，这种等价性仍然成立。

现在陈述主要的谱结果：加权 Weyl 分数阶导数$\mathfrak{D}^{\alpha}_{\psi,\,\omega}$ 可由此变换对角化。

定理 3.6 (算子的对角化)。 设 $\alpha > 0$。对于算子定义域中的任意函数 u，加权 *Weyl* 导数的加权傅里叶变换满足：

$$\mathcal{F}_{\psi,\omega}\left\{\mathfrak{D}^{\alpha}_{\psi,\omega} u\right\}(\xi) = (i\xi)^{\alpha} \mathcal{F}_{\psi,\omega}\{u\}(\xi), \tag{20}$$

因此 ，算子 $\mathfrak{D}^{\alpha}_{\psi,\omega}$ 与 $M_{(i\xi)^{\alpha}}$ 上的乘法算子在酉意义下等价，其中 $L^2(\mathbb{R})$.

证明。 证明由共轭性质得出。根据定义，$\mathfrak{D}^{\alpha}_{\psi,\omega} = \mathcal{T}_{\psi}^{-1}{}_{,\omega} D^{\alpha} \mathcal{T}_{\psi,\omega}$。应用对称变换（等价于 $\mathcal{F}_{sym} \circ \mathcal{T}_{\psi,\omega}$），并利用标准对称傅里叶变换可将 Weyl 导数对角化这一性质，可得：

$$\mathcal{F}_{\psi,\omega}(\mathfrak{D}^{\alpha}_{\psi,\omega} u)(\xi) = (i\xi)^{\alpha} \hat{u}_{\psi,\omega}(\xi). \tag{21}$$

这证实函数 $e_{\xi}(t) = {}^{1}_{\omega\,t()} e^{i\xi\psi(t)}$ 构成该算子的连续谱特征函数。

□

4 应用：老化黏弹性与无限记忆

我们运用所建立的谱框架，分析一个用于描述老化黏弹性材料（例如固化混凝土或退化的生物组织）的广义模型。在这类介质中，材料性质随时间演变，而“记忆”取决于主观年龄差 $\psi(t) - \psi(\tau)$，而非经过的绝对时间 $t - \tau$。此外，为了捕捉形变的完整历史（其起始时间可能远在过去），我们将问题设定在整个实数轴 $\mathbb{R}$ 上。

我们考虑一种黏弹性材料，其力学性质会因物理化学老化而随时间演变（例如固化混凝土或聚合物硬化）。Mainardi 对经典分数阶 Kelvin-Voigt 模型进行了广泛研究，该模型描述的是具有静态记忆的材料。 [7], 为了纳入老化因素，近期研究提出了具有时变系数的模型 [8]。

基于这一视角，我们采用加权分数阶算子 $\mathfrak{D}^{\alpha}_{\psi,\omega}$来表述应力-应变关系，该算子能够自然地捕捉材料内部时间尺度的演变。本构方程由下式支配：

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{\psi,\omega}\sigma(t) + \lambda\sigma(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{22}$$

其中， $\sigma(t)$ 表示应力， $f(t)$ 是强迫项（与应变率相关）， $\lambda > 0$ 是一个材料参数。

4.1 通过加权格林函数求显式解

谱同构使我们能够确定该算子的基本解。我们将老化 Kelvin-Voigt 模型的加权格林函数 定义为：

定义 4.1 （老化脉冲响应）. 基本核 $\mathcal{G}^{\alpha,\lambda}_{\psi,\omega}(t)$ 定义为谱符号 $((i\xi)^{\alpha} + \lambda)^{-1}$ 的逆加权傅里叶变换。具体而言：

$$\mathcal{G}^{\alpha,\lambda}_{\psi,\omega}(t) := \frac{1}{\omega(t)}(\psi(t))^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda(\psi(t))^{\alpha}\right)\cdot\Theta(\psi(t)), \tag{23}$$

其中， $\Theta(\cdot)$ 是赫维赛德阶跃函数，用于确保主观时间域中的因果性。

定理 4.2 (响应结构)。 设 $f \in L^1_{\psi,\,\omega}(\mathbb{R})$ 为强迫历史。分数阶演化方程 $\sigma(t)$ 的唯一因果解 (22) 由强迫项与格林函数的加权卷积给出：

$$\sigma(t) = (\mathcal{G}^{\alpha,\lambda}_{\psi,\omega} *_{\psi,\omega} f)(t). \tag{24}$$

证明。 对 (22) 应用加权傅里叶变换，并利用对角化性质（定理 3.5），可得频域中的代数方程：

$$(i\xi)^{\alpha}\hat{\sigma}_{\psi,\omega}(\xi) + \lambda\hat{\sigma}_{\psi,\omega}(\xi) = \hat{f}_{\psi,\omega}(\xi). \tag{25}$$

求解 $\hat{\sigma}_{\psi,\,\omega}$:

$$\hat{\sigma}_{\psi,\omega}(\xi) = \frac{1}{(i\xi)^{\alpha}+\lambda}\hat{f}_{\psi,\omega}(\xi) = \widehat{(\mathcal{G}^{\alpha,\lambda}_{\psi,\omega})}_{\psi,\omega}(\xi)\cdot\hat{f}_{\psi,\omega}(\xi). \tag{26}$$

根据第 3 节陈述的卷积定理，逆变换恰好得到 $\sigma = \mathcal{G}^{\alpha,\,\lambda}_{\psi,\,\omega} *_{\psi,\,\omega} f$。将核 $\mathcal{G}^{\alpha,\,\lambda}_{\psi,\,\omega}$ 代入卷积定义（18），即可恢复显式积分表示：

$$\sigma(t) = \frac{1}{\omega(t)}\int_{-\infty}^{t}(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda[\psi(t)-\psi(\tau)]^{\alpha}\right)f(\tau)\omega(\tau)\psi'(\tau)\,d\tau. \tag{27}$$

这证实了谱方法的一致性。 □

注 4.3（标准模型的推广）。 解（24）统一了文献中已有的结果。

通过设定 $\psi(t) = t$ 和 $\omega(t) = 1$，我们便可恢复由 Mittag-Leffler核刻画的经典平稳解，详见 [7]。

- 此外，对于老化尺度 $\psi(t)$ 的特定取值，我们的公式为工程领域中常以数值方法处理的唯象老化模型提供了精确的解析对应形式 [8]。我们的谱方法从根本上证明，这些老化模型在结构上同构于经时间扭曲变换后的平稳分数阶系统。

注 4.4（物理上的不可处理性与方法论上的必要性）。 必须强调，尽管加权算子 $\mathfrak{D}^{\alpha}_{\psi,\omega}$ 在代数上同构于标准导数，但实验室参考系中的物理问题（22）通常无法**通过标准积分变换**处理。

经典拉普拉斯变换失效，是因为老化权重 $\omega(t)$ 和尺度 $\psi(t)$ 破坏了系统的时间平移不变性（即响应取决于绝对时间 t，而不仅仅取决于经过的时间间隔 $t-\tau$）。因此，标准变换会将微分方程映射为算子的复杂卷积，而非简单的代数方程。

我们这一框架的核心价值，在于找到了与老化物理特性相匹配的特定变换。加权傅里叶变换 $\mathcal{F}_{\psi,\ \omega}$ 之所以能在经典方法失效时奏效，是因为它的构造遵循了潜在的"主观时间"几何结构。它有效地"解开"了随时间变化的度量，将非自治物理过程映射到平稳谱域，从而能够精确求解问题。

4.2 失忆现象

定理4.2 中推导出的卷积结构揭示，系统的记忆由以下有效核控制：

$$\mathcal{K}(t,\tau) := (\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda[\psi(t)-\psi(\tau)]^{\alpha}\right). \tag{28}$$

该核恰好对应于在主观时间滞后$\Delta_{\psi}(t,\ \tau) = \psi(t) - \psi(\tau)$处取值的加权格林函数。这一表示使我们得以证明以下渐近结果。

推论 4.5 (记忆衰减的调制)。 材料记忆的渐近行为完全由尺度函数 $\psi(t)$的增长速率决定。具体而言，当 $t\to\infty$ 时：

1. 情况 ***I***：标准度量（$\psi(t)\sim t$）。如果时间尺度是线性的，核会呈现重尾幂律衰减：

$$\mathcal{K}(t,0) = O(t^{-(1+\alpha)}). \tag{29}$$

2. 情况 ***II***：指数老化（$\psi(t)\sim e^{\gamma t}$）。如果材料快速老化（$\gamma>0$），有效记忆会以指数速度衰减：

$$\mathcal{K}(t,0) = O(e^{-(1+\alpha)\gamma t}). \tag{30}$$

结论：快速老化在数学上会导致"失忆现象"，从而有效截断分数阶算子的无限记忆。

证明。我们分析双参数 Mittag-Leffler 函数$E_{\alpha,\ \beta}(-z)$ 在 $|z|\to\infty$ 时的渐近展开。标准展开为：

$$E_{\alpha,\beta}(-z) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha k)} z^{-k} + O(z^{-N-1}). \tag{31}$$

在我们的情形中，核包含 $\beta=\alpha$。值得注意的是，第一项（$k=1$）为零，因为其系数包含 $1/\Gamma(\alpha-\alpha) = 1/\Gamma(0) = 0$。因此，主导项由 $k=2$ 决定：

$$E_{\alpha,\alpha}(-z) \sim \frac{-1}{\Gamma(-\alpha)} z^{-2}, \quad \text{as } z\to\infty. \tag{32}$$

将 $z=\lambda(\psi(t))^{\alpha}$ 代入 $\mathcal{K}(t,0)$ 的定义：

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(t,0) &= (\psi(t))^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda\psi(t)^{\alpha}) && (33)\\
&\sim (\psi(t))^{\alpha-1}\cdot C(\psi(t)^{\alpha})^{-2} && (34)\\
&= C(\psi(t))^{\alpha-1-2\alpha} = C(\psi(t))^{-(1+\alpha)}. && (35)
\end{aligned}$$

对于多项式情形，代入 $\psi(t)=t$；对于指数情形，代入 $\psi(t) = e^{\gamma t}$，即可立即得到该结果。

□

结论： 该结果从解析角度证明了“失忆现象”：快速老化压缩了记忆核，从而有效地将长程分数阶历史转变为短程指数松弛。

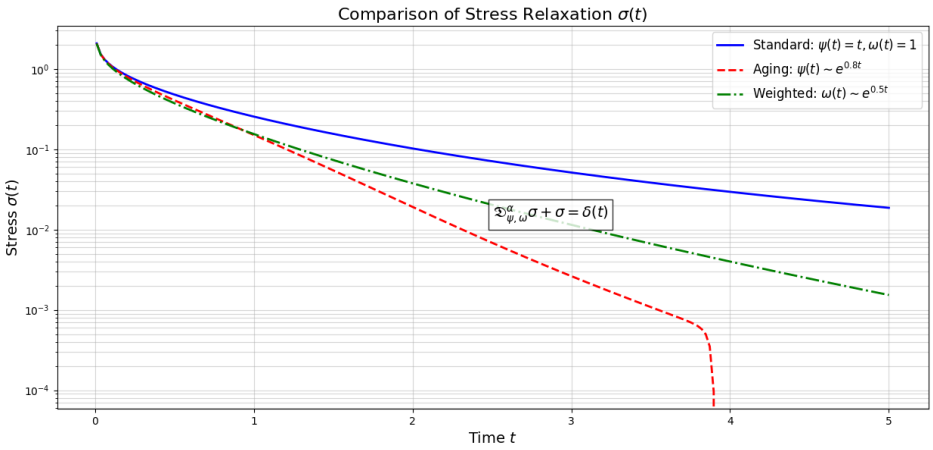

图 1： **遗忘现象的数值验证（推论 4.5）**。 通过加权卷积公式计算的应力松弛响应（24），其中 $\alpha = 0.8$。 **（黑色实线）**标准模型（$\psi(t) = t$）：证实了格林函数所预测的代数衰减 $O(t^{-1.8})$，这表明系统具有长记忆。 **（红色虚线）**快速老化（$\psi(t) = e^{0.8t}$）：展示了理论上的“失忆”效应；主观时间的指数式拉伸使应力迅速呈指数衰减至零。 **（蓝色点划线）**加权阻尼（$\omega(t) = e^{0.5t}$）：展示了权重密度如何调节振幅，而不改变谱记忆结构。

5 结论

在本研究中，我们为分析老化介质中的非局部算子建立了严格的谱框架。通过引入加权魏尔分数阶导数 $\mathfrak{D}^{\alpha}_{\psi,\,\omega}$ 并构造相应的对称加权傅里叶变换，我们成功弥合了加权空间数学理论与时变系统物理建模之间的鸿沟。

我们的主要贡献可概括如下：

- **谱对角化：** 我们证明，加权魏尔算子在频域中与一个乘法算子酉等价。这种结构同构使我们得以绕过经典拉普拉斯变换的局限，因为老化系统缺乏时间平移不变性，导致该变换无法有效应用。

- **超奇异表示：** 我们确立了谱定义与马尔绍型超奇异积分形式之间的等价性。这一结果弥合了抽象算子理论与时域之间的鸿沟，清晰地阐释了分数阶导数的物理意义：对过去状态差异进行加权累积，并提供了可直接用于数值离散化的公式。

- **遗忘现象：** 从解析角度，我们证明，分数阶系统的记忆保持由其主观时间尺度 $\psi(t)$ 的拓扑决定。我们证明，尽管多项式老化保留了分数阶动力学特有的重尾幂律记忆，指数老化却会引发“遗忘现象”，实质上将无限历史截断为短程指数弛豫。这解释了结构演化材料中记忆衰退这一看似矛盾的现象。

- **卷积精确求解：** 我们推导出了具有无限记忆的老化 Kelvin-Voigt 模型在 $\mathbb{R}$ 上的显式解。通过定义加权卷积并确定相应的格林函数，我们给出了应力响应的闭式表示，该表示计算上易于处理，理论上也清晰明了。

总之，本文开发的谱工具为采用主观时间尺度对复杂系统进行建模提供了坚实的数学基础。这些结果不仅阐明了加权分数阶算子的理论性质，也为老化黏弹性领域未来的实验验证提供了实用框架。

参考文献

[1] G. Dorrego、L. Luque、R. Cerutti， ω-ψ-梅林变换，arXiv 预印本 arXiv:2512.06767[math.FA]（2025年）。[2] Stinga，P. R.《分数阶导数：傅里叶、象、记忆效应与延拓问题》。美国数学会会刊，2020年。[3]Fernandez，A.、Restrepo，J. E. 和 Djida，J. D.（2024年）。关于函数相对于另一函数的分数阶拉普拉斯算子。应用科学中的数学方法。数字对象标识符：10.1002/mma.10256。[4] Fernandez，A.、Fahad，H.M.《加权分数阶微积分：一种通用方法》。《分形与分数阶》，6(2)，2022年。[5] Dorrego，G.A.：函数意义下加权傅里叶变换的谱理论，见$\mathbb{R}^n$。arXiv 预印本 arXiv:2512.10880 [math.CA]。[6] Samko，S. G.、Kilbas，A. A. 和 Marichev，O. I. 分数阶积分与导数：理论与应用。Gordon and Breach 科学出版社，1993年。[7] F. Mainardi，分数阶弛豫振荡与分数阶扩散波现象，《混沌、孤子与分形》**7**（1996年），1461–1477。[8] M. Di Paola、F. P. Pinnola、M. Zingales，用于混凝土蠕变建模的分数阶微分学，《国际固体与结构杂志》**50**（2013年），4335–4345。