arXiv:2601.02148v1 [math.GT] 5 Jan 2026

通过分支覆盖刻画纽结

Luisa Paoluzzi

2025年11月

研讨会分支覆盖塞维利亚大学
IMUS

摘要

这些是关于如何通过循环分支覆盖来确定纽结这一问题的迷你课程讲义。该课程于2025年11月17日至21日在塞维利亚的 IMUS 举行，面向 *Workshopon Branched Covers* 。

MSC2020: 主要分类号 57M12；次要分类号 57K10；57K32；57K35。

Keywords: 纽结、循环分支覆盖

1 引言

分支覆盖是一种便捷的方法，可以借助较为简单的流形（例如球面），以及一个子集（分支轨迹，例如纽结、链环或图）和一些组合的数据（分歧轨迹和单值化），来编码更为复杂的流形。

回顾一下，对于 X 和 Y 拓扑空间，如果映射 $p: X \longrightarrow Y$ 是一个分支覆盖，那么（i） p 是满射且为开映射；（ii） $R \subset X$ 中p 不是局部同胚的子集是闭且处处稠密性为空的；（iii）由 p 诱导的从 $X \setminus p^{-1}(p(R))$ 到 $Y \setminus p(R)$ 的映射是一个真覆盖。在此记号下， Y是覆盖的 底空间， X 是覆盖的 全空间， R 是覆盖的 分歧轨迹，而 $B = p(R)$ 是覆盖的 分支轨迹 。根据具体背景，可能还要求B 满足额外的“正则性”条件（例如，在 PL范畴中是 Y 的余维数为 > 1 的子复形，或在光滑范畴中是一个子流形）。

不过，我们在此并不关心如何描述流形，而是采取另一种视角：我们想把分支覆盖视为三维球面中纽结的不变量。因此，我们所考虑的覆盖的分支轨迹将是一个纽结[1] ，而覆盖的底空间则是三维球面。此外，我们的覆盖将是有限的，因此其全空间将是闭、连通、定向的三维流形。当然也可以作其他选择，但我们将聚焦于这种情形。不过，在继续之前，有必要先作几点说明，以指出其中的一些微妙之处。

[1]当分支集是链环或图时，还会出现其他覆盖。

1.1 注意语言滥用

分支覆盖是映射。如果 $p: \ M \longrightarrow \boldsymbol{S}^3$ 是以纽结 K为分支轨迹的分支覆盖，那么它当然是 K的一个完全不变量，因为 K 是映射所编码信息的一部分：可以将 K 恢复为 p 不再是通常意义上的无分支覆盖的那些点的像。然而，这样的不变量并没有多大意义，因为它既不比 K 本身更简单，也不是一种截然不同的对象，无法为纽结的可能分类方法提供启发。

在文献中，按照语言滥用的说法，纽结的分支覆盖指的是覆盖的全空间，也就是 M 上文给出的覆盖 p。下文中我们也会以这种方式滥用语言。

1.2 适当选择覆盖

要发挥作用，不变量应当比它们要区分的对象更容易构造和辨别，或者至少性质截然不同，从而能够运用其他工具和技术来分析它们。例如，在我们的情形中，不变量是流形，也就是说具有拓扑或几何性质；而对象本身——纽结——则表现出更强的组合性质，例如通常以图示来表示。

但哪些覆盖适合作为不变量呢？一种可能是取所有这类覆盖的集合（模同胚）。然而显然，这种选择极不合适：这个集合不仅可能非常庞大，而且存在无穷多个普适纽结，这表明对无穷多个纽结而言，该集合包含所有闭定向三维流形。这一结论源自 Hilden、Lozano 和 Montesinos 的工作，他们证明了每个二桥非环面纽结（实际上是链环）都具有这一性质 [HLM]。

因此，最好选择一个小得多且易于构造的覆盖族。更理想的是，如果存在某种方法，可以比较不同纽结所对应的族中不同元素。

考虑到这一点，（有限）正则覆盖是最容易描述的覆盖之一，因为底空间只是群在流形上适当不连续作用所得到的轨道空间，而分支轨迹则是具有非平凡稳定子的点集的像。还要注意，分支覆盖限制在结的补空间上时会变为无分支覆盖；因此，为了构造它们，可以先考虑纽结基本群的（有限指数）子群，或者在正则覆盖的情形下，当子群为正规子群时，考虑（有限）商空间。

不过，即使在这种情况下，我们仍可能会思考：纽结基本群的哪些商空间最为合适。由于所有结群的阿贝尔化都是无限循环群，对于每个整数 $n \geq 2$ ，每个纽结 K 都唯一地具有一个n重循环分支覆盖（关于这些覆盖如何构造的详细信息，请参见下一节）。这就是我们将在此考察的覆盖。

1.3 分歧覆盖与轨形

正则覆盖还有另一个优点。由于覆盖的底空间自然带有轨形结构，大多数时候，纽结的几何

都会反映在全空间的几何中。稍后将对此进行详细讨论。现在只需注意，它们的外部的几何（即双曲、塞弗特纤维化或环面型）为纽结提供了一种非常粗略的初步分类。最后，我们回顾一下，非正则覆盖通常无法在覆盖的底空间上诱导出轨形结构[2]。反过来，并非所有轨形都来自分支覆盖，因为存在坏轨形。此外，根据所采用的分支覆盖定义，某些轨形的奇异集不能成为分支覆盖的分支轨迹：例如，反射轨形就是这种情况，因为反射超平面的像在覆盖的底空间中产生了一个拓扑的“边界”。

2 纽结循环分支覆盖的构造及其基本性质

现在，设 K 是三维球面中的一个纽结，$n \geq 2$ 是一个整数。根据上一节的讨论，n重循环覆盖 $\boldsymbol{S}^3$ 沿 K 分支，是一个闭、连通、可定向（甚至已定向）的三维流形 $M(K,\ n)$，它大致可以用两种方式描述。

第一种描述利用了分支覆盖将其限制为一个真覆盖这一事实：它从分歧轨迹的补空间 K 覆盖到纽结的补空间 ˜。因此，$M(K,\ n) \setminus K$ 是 $\boldsymbol{S}^3 \setminus K$ 的唯一 n 重循环覆盖的全空间。其唯一性源于 $H_1(\boldsymbol{S}^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$，且 $\mathbb{Z}$ 中存在唯一一个指数为 n 的子群。随后，$M(K,\ n)$ 只需对该全空间进行德恩填充（先移除一个 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-等变的开尖点），填充斜率取 K 的子午线的一个提升。由于该覆盖是正则的，群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 以 $\setminus \tilde{K}$ 的方式作用于 $M(K,\ n)$，商为 $\boldsymbol{S}^3 \setminus K$。该作用可延拓至填充所用实心环面，并绕其核心作标准旋转，因此，$M(K,\ n)$ 中该实心环面的核心映射到商 $\boldsymbol{S}^3$ 中的 K。

顺带一提，从这一初步描述也可以看出，只有当 $n = 2$ 时，链环的循环分支覆盖才是唯一的。

另一种描述见 Rolfen 的著作 [Ro]。这种描述的优点是能更直观地呈现 $M(K, n)$，但无法确保唯一性。首先沿着 K 的 Seifert 曲面切开 $\boldsymbol{S}^3$。所得流形的边界由两份 Seifert 曲面组成，分别记为 S_- 和 S_+，它们沿着 K 相交。接着，只需取这样的流形的 n 份，并将它们粘合起来，使第 i 份中的 S_+ 与第 $i+1$ 份中的 S_- 粘合，其中指标按模 n 计算。此时，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 作用就是对这 n 份流形作循环置换；而 $\boldsymbol{S}^1$（即所有 S_- 的边界）由构造可知是不动的。对于纤维化纽结，这种构造尤其简洁，因为该覆盖继承了一个开书分解，其单值化是该纽结单值化的 n 次幂。然而，与纤维化的情形不同，Seifert 曲面（即使是极小的曲面）也不一定唯一（在同痕意义下），因此原则上可能得到不同的流形。

上述讨论可概括为以下结果，它刻画了纽结的 n 重循环分支覆盖。

[2]底空间具有轨形结构的一个必要条件是，分支轨迹的原像与分歧轨迹重合。

命题1. 纽结 K 在 S^3 中的 n 重循环分支覆盖，是唯一一个闭、连通、可定向的3维流形 $M(K,n)$，它存在一个阶为 n 的周期微分同胚 ψ，使得

- 不动点集$(\psi^k) \cong S^1$ 对所有 $k = 1, \ldots, n-1$,
- $M(K,n)/\langle\psi\rangle \cong S^3$ 和
- p(不动点集$(\psi)) = K$，其中 $p\colon M(K,n) \longrightarrow S^3$ 是商映射。

问题1。如果将 S^3 替换为一个整同调球面，上述讨论仍然适用。我们可以思考，接下来将要陈述的结果在这种更一般的情形下是否仍有意义，以及是否有可能推广到这种情形。[3]

例1。设 $n \geq 2$ 是一个整数，K 是平凡纽结。那么$M(K, n) \cong S^3$。

更有趣的是，下面的结果是 Smith 猜想[4] [MB] 的正面证明以及上述命题的推论。

定理 1. 设 $n \geq 2$ 为整数，K 为纽结。假设 $M(K,n) \cong S^3$。那么 K 是平凡纽结。

这一观察引出了以下定义。

定义 1. 设 K 为纽结，$n \geq 2$ 为整数。我们称 $M(K,n)$确定 K，如果对于任意满足 $M(K,n)$ 与 $M(K',n)$ 同胚的纽结 K'，K 与 K' 等价。

否则，如果存在一个纽结 K'，它与 K 不等价，且 $M(K,n)$ 与$M(K',n)$ 同胚，我们称 K' 是 K的一个 n-孪生结 。

上面的定理 1 表明，对于每个整数 $n \geq 2$，$M(K,n)$ 都能确定平凡纽结，而且平凡纽结没有 n-孪生结。这可以换一种说法：循环分支覆盖是平凡纽结的强不变量。遗憾的是，并非所有纽结在循环分支覆盖方面都像平凡纽结那样；确实存在 n-孪生结。因此，人们可能会希望同时考察若干个循环分支覆盖，以确定一个纽结。

定义 2。设 $F \subset \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ 为一组整数，K 为一个纽结。若每当对所有 $n \in F$，$M(K,n)$ 与 $M(K',n)$ 同胚时，K 与 K' 等价，则称K 由其循环分支覆盖族$(M(K,n))_{n\in F}$确定。

因此，自然会提出两类不同的问题：

问题 2。
- 一个纽结能否由其循环分支覆盖确定？需要多少个覆盖？
- 如果 K 有一个 n-孪生结 K'，我们该如何从 K 恢复 K'？

在下文中，我们将讨论这两个问题，并介绍目前已知的相关结果[5]。

[3]Smith 猜想的正面结论是许多论证中的核心工具，因此大多数结果似乎可能不适用于同调球面中的纽结。[4]该猜想指出：如果三维球面上有限阶微分同胚的不动点集是一个圆，那么它就是平凡纽结；换言之，该微分同胚与同阶的标准旋转共轭。[5]这些笔记有相当一部分基于综述 [P5]，其中也能找到更多例子。

3 复合结

下面这个简单的结果是一个一般性原则的首次体现：纽结的几何（广义而言）反映在其循环分支覆盖的几何中。

引理 1. 设 K 是一个纽结， $n \geq 2$ 是一个整数。 $M(K,n)$ 是一个素流形，当且仅当 K 是一个素结。

证明。 我们用逆否命题进行推理。假设 K 不是素结，并设S 是一个嵌入球面，它在两点与 K 相交，并将其分成两条非平凡弧；这两条弧表明 K 是两个非平凡纽结K_1和 K_2的连通和，即 $K = K_1 \sharp K_2$。这样的球面在 $M(K,n)$ 中提升为一个球面，将该流形分成两个子流形；这两个子流形分别由 $M(K_1,n)$ 和 $M(K_2,n)$ 去掉一个球后得到，因此 $M(K,n) = M(K_1,n) \sharp M(K_2,n)$。根据定理 1，这表明该分支覆盖是一个非平凡的连通和。

对于另一个方向，根据等变球面定理，可以假设 $M(K,n)$ 有一个等变分解。由于 $\boldsymbol{S}^3$ 中的每个 2-球面都围成一个球，且 $\boldsymbol{S}^3$ 不包含任何本质实射影平面，因此 $M(K,n)$ 的分解中的每个球面都是分离的，并且它在商空间中的像必定与 K相交。这表明 K 不是素结。 □

根据证明中的论证，复合结的 n 重分支覆盖是其各分量的 n 重分支覆盖的连通和。以下重要观察归功于 Viro [V1, V2]。

注 1. 根据两个纽结可能的定向，并忽略所得纽结的定向，定义两个纽结的连通和有两种可能的方式。如果它们的分量是不可逆结，所得的连通和确实彼此不同。另一方面，所得复合结的 n 重循环分支覆盖不依赖于原纽结的定向。因此，存在一些不等价的复合结，它们对每个 $n \geq 2$ 都是 n-孪生结。此外，具有这一性质的 n-孪生结的数量可以任意大，因为它会随着该纽结的素结分量数量增加。

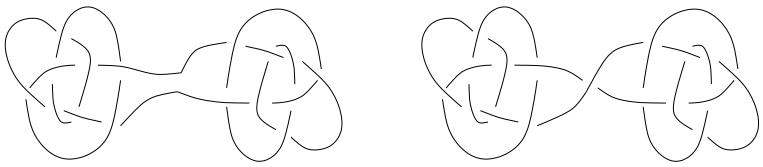


图 1：两个对所有 $n \geq 2$ 都是 n-孪生结的复合结。

粗略地说，上述评论表明，利用循环分支覆盖至多只能确定复合结的各个分量，而无法确定纽结本身。因此，从现在起，所有纽结均假定为素结。注意，引理 1 保证素结不可能有复合孪生结。

Kojima 的一个结果 [Ko] 保证，循环分支覆盖是素纽结相当好的不变量：

定理 2 (Kojima)。 设 K 和 K' 为素纽结。存在一个整数N，依赖于 K和 K'，使得若 $M(K,n) \cong M(K',n)$对于某个 $n \geq N$成立，则 K 和 K' 等价。

换句话说，对于足够大的 n ，任意两个不等价的素纽结 K 和 K' 都不可能是n-孪生结。

4 如何构造孪生结

自然会想知道，Kojima 结果中的 N 是否可以取足够大，从而使其与 K 和 K' 无关。Nakanishi 和 Sakuma [N, S] 通过构造任意 n对应的首批 n-孪生结实例，对这个问题给出了否定答案。他们的构造如下。

取一个二分支链环 L ，其分量 L_1 和 L_2均为平凡分支。我们可以考虑 L 的 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 分支覆盖，从而得到一个流形 M。由于 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是阿贝尔群，该覆盖可以用两种不同方式表示为两个 n重循环覆盖的复合。一种方式是先取 L_1 的 n重循环覆盖。由于这是一个平凡纽结， $M(L_1,n)$就是三维球面。 $M(L_1,n)$中 L_2 的原像 K_2 是一个链环，其分量数为 GCD(lk(L_1,L_2) n)（因为 lk(L_1,L_2)恰好是 $\pi_1(\boldsymbol{S}^3 \setminus L_1)$的阿贝尔化中 L_2 的像）。因此，若 GCD(lk(L_1,L_2) n) $=1$ （特别是当 $|\text{lk}(L_1,L_2)|=1$时），则 K_2是一个纽结，并且根据构造，有 $M(K_2,n) \cong M$。交换 L_1 和 L_2 的角色，可得到两个纽结 K_1 和 K_2，它们具有相同的 n重循环分支覆盖。若 L 没有对称性，则可以预期 K_1 和 K_2不等价，因此是 n-孪生结。

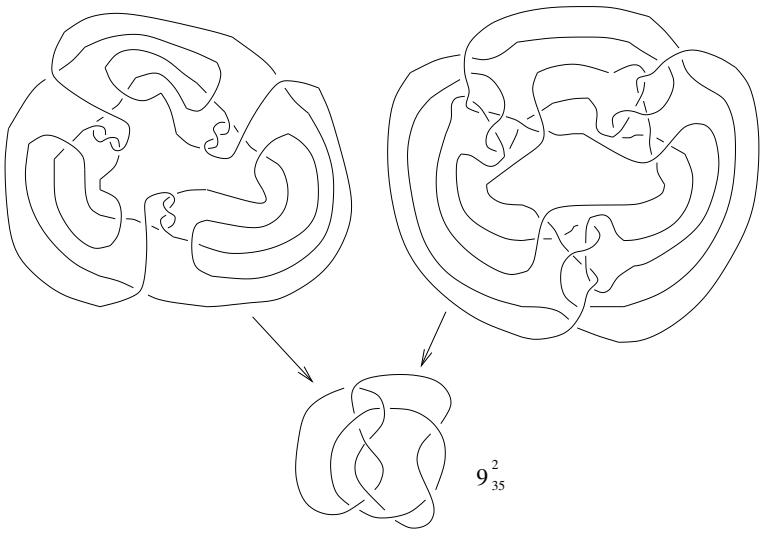


图 2：Nakanishi 和 Sakuma 针对 $n=3$ 的构造示例

注意，通过取 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 而非 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ，可以构造

在不同覆盖次数下作为纽结的循环分支覆盖的流形。

4.1 $n \geq 3$的情形

这种简单的方法尤其值得注意，因为 Zimmermann [Z2]证明，这是双曲纽结拥有 n-孪生结[6] （ $n \geq 3$）的唯一方式。此外，如果存在这样的 n-孪生结，由于 Smith 猜想得到了肯定解，在这种情况下孪生结是唯一的。

定理 3（Zimmermann）。设 K 是一个双曲纽结， $n \geq 3$ 是一个整数。K 拥有一个 n-孪生结 K'，当且仅当 K 拥有一个阶为 n 的周期，且其平凡商 满足：商链环 的两个分量不可互换。

定义 3。设 K 是一个纽结， $n \geq 2$。 K 的阶为 n 周期是保持方向的阶为 n 的微分同胚 ϕ，作用于有序对 $(\boldsymbol{S}^3, K)$，并且 Fix(ϕ) 是一个与 K不相交的圆。若 K 在商空间 $\boldsymbol{S}^3 = S^3/\langle\phi\rangle$ 中的像是平凡纽结，则称其具有平凡商 。商链环是 $K \cup$Fix(ϕ) 在商空间中的像。

这一结果基本上基于两个要点：循环分支覆盖反映了纽结的几何，而双曲流形的等距变换群是有限群。以下注释将第一个要点表述得更为精确。

注 2. 设 K 是一个素结，且 $n \geq 2$。若 K 是环面纽结，则$M(K, n)$ 是塞弗特纤维化的。若 K是卫星纽结，则 $M(K, n)$ 是环面型的（事实上允许一个非平凡的 JSJ 分解）。若 K 是双曲的，则根据 Thurston 轨形定理 [BLP]，只要满足 $n \geq 4$ 或 $n = 3$ 且 K 不是八字结， $M(K, n)$ 就是双曲的。若 $n = 2$，则 $M(K, n)$ 可以是双曲的、塞弗特纤维化的，或允许一个非平凡的 JSJ 分解。

特别是，这条注释表明 Zimmermann 结果中的孪生结 K' 也是一个双曲纽结。

现在假设双曲纽结 K 对某个 $n \geq 3$ 有一个 n-孪生结 K'，首先要验证 K 不可能是八字结，因此 $M(K, n)$ 是双曲的。特别是，对于 K 和 K' 的分支覆盖，其自同构 ψ 和 ψ' 可以假定为双曲等距变换，因此是同一个有限群中的元素。初等有限群论（即 Sylow p-子群）和几何考量得出结论：通过选取适当的共轭元， ψ 和 ψ' 可以交换。

对于素卫星结，不能指望对所有 n-孪生结 K 和 K'，都能选择 ψ 和 ψ' 使它们交换。已知存在 n 为奇素数 [BP] 时，不符合 Nakanishi 和 Sakuma 构造方式的 n-孪生结的明确例子。尽管如此，仍有以下结果 [BP]。

定理 4 (Boileau-P.)。设 K 是一个素结， $n \geq 3$ 是一个素数。K 至多有一个 n-孪生结，且对应的 n 至多有两个取值。

推论 1。设 K为一个素结。族 $(M(K, 3)\ M(K, 5)\ M(K, 7))$唯一确定 K。

[6]在 [Z2] n 中，假设其不是 2 的幂，但同一论证的一个变体也适用于 $n = 2^k$ 的情况（见 [P3]）。

4.2 当 $n = 2$ 时的情形

正如从上文的注 2 中可以推测的那样，获得双生结的方法有很多种，即使对于双曲纽结也是如此。我们将根据 $M(K, 2)$ 的几何性质讨论不同情形。

4.2.1 $M(K, 2)$ 是双曲的。

在这种情况下，与上一节一样，双曲纽结存在双生结意味着该纽结具有对称性。在这种情况下，对称性不一定是周期：会出现强对合，而且本节开头构造中的二分支链环可以替换为 θ 曲线（Zimmermann [Z1] 最先研究了这类例子）。此外，仅取一个关于对称性的商未必足以“看清”该纽结的所有双生结。对 Sylow 2-子群的精确研究给出了以下结果 [Re]（参见 [MR]，其中通过考察连续的商空间采用了一种更具组合性的方法）。

定理 5 (Reni,Mecchia-Reni)。 设 K 是一个双曲纽结，并假设 $M(K, 2)$ 是双曲的。K 至多有八个2-双生结。

利用 Kawauchi 的强几乎相同（AID）拟态理论，可以证明必然存在九个 2-孪生结 [Ka], ，但目前仅已知有两个、三个和四个孪生结的集合的显式构造 [RZ]。

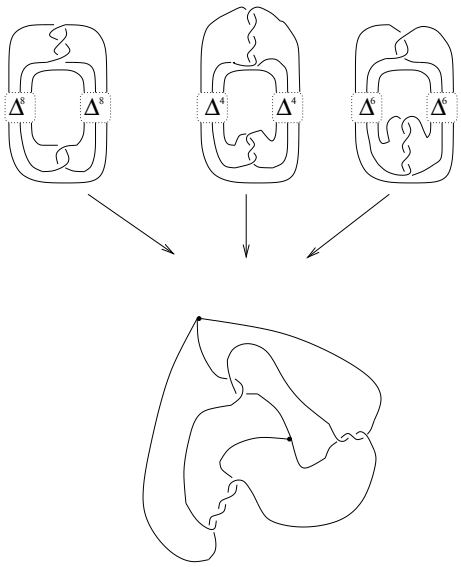


图 3：通过强反演相关且商为 θ 曲线的三个 2-孪生结。

4.2.2 $M(K, 2)$ 是塞弗特纤维化的。

在这种情况下， K 是 Montesinos 结 [M]。Montesinos 结的 2-孪生结的数量可以任意大，因为具有相同有理

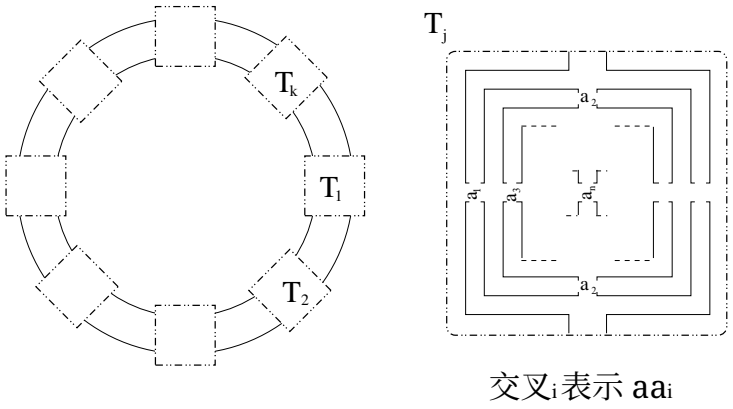


图 4：左图为将有理缠结堆叠在一起得到的蒙特西诺斯链环示意图，右图为一个有理缠结示意图。

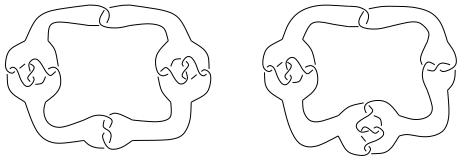


图 5：两个互为双生结的蒙特西诺斯纽结。

缠结的两个 Montesinos 结具有相同的二重分支覆盖，不受其有理缠结排列顺序的影响。事实上，每个有理缠结在 $M(K,\ 2)$ 中提升为一个例外纤维的邻域，而 $M(K,\ 2)$ 与它们的排列顺序无关。

如果蒙特西诺斯纽结恰有三个有理缠结，那么它没有任何双曲2-孪生结，但可能有一个环面纽结作为其双生结。

4.2.3 $M(K,2)$ 具有非平凡的 JSJ 分解。

由于 K 的补空间是无环面型的，覆盖变换必有一个不动点集，它与$M(K,2)$的 JSJ 分解中的所有本质环面都相交于四点，并且在每个环面上都作为椭圆对合起作用。这些环面产生了该纽结的本质康威球面。在这种情况下，有一种众所周知的生成双生结的方法：康威变异。沿着一个将两个非平凡非对称缠结分隔开的康威球面进行康威变异，会得到一个双生结，例如 Conway 结和 Kinoshita-Terasaka 结。

注意，两个互为双生结的 Montesinos 结也可以通过一系列 Conway 变异得到。

不过，Conway 变异并非故事的终点。在这种情况下，双生结可以由目前讨论过的几种可能性组合而成（突变、有理缠结的置换，以及可能局限于某个几何部分的对称性），甚至还可以是卫星纽结 [P1]。这类孪生结的首批实例见于 Montesinos 和 Whitten 的一篇论文 [MW]。

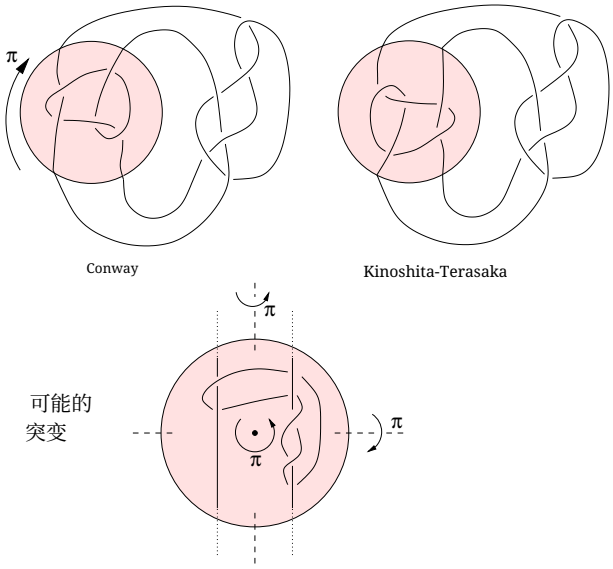


图 6：Conway 结和 Kinoshita-Terasaka 结，以及沿康威球面可能进行的突变。

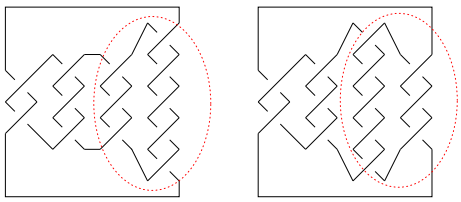


图 7：两个互为双生结的 Montesinos 结，其中展示了 Conway 变异。

4.3 交替纽结的情形。

尽管本节提到了种类繁多的构造，Greene [G] 证明，交替纽结的 2-孪生结只有在自身也是交替纽结时，才会由突变产生。

定理 6 (Greene)。 若 K 和 K' 是素交替结，且互为2- 双生结，则 K 和 K' 可由一系列 *Conway* 变异得到。

Greene 提出了一个更令人惊讶的猜想：素交替结的双生结必定也是交替结。

4.4 对称性的存在可作为孪生结存在的指标

我们已经看到，对于一个纽结而言，孪生结的存在可能意味着该纽结具有对称性。在某些情况下，对称性的存在足以确保

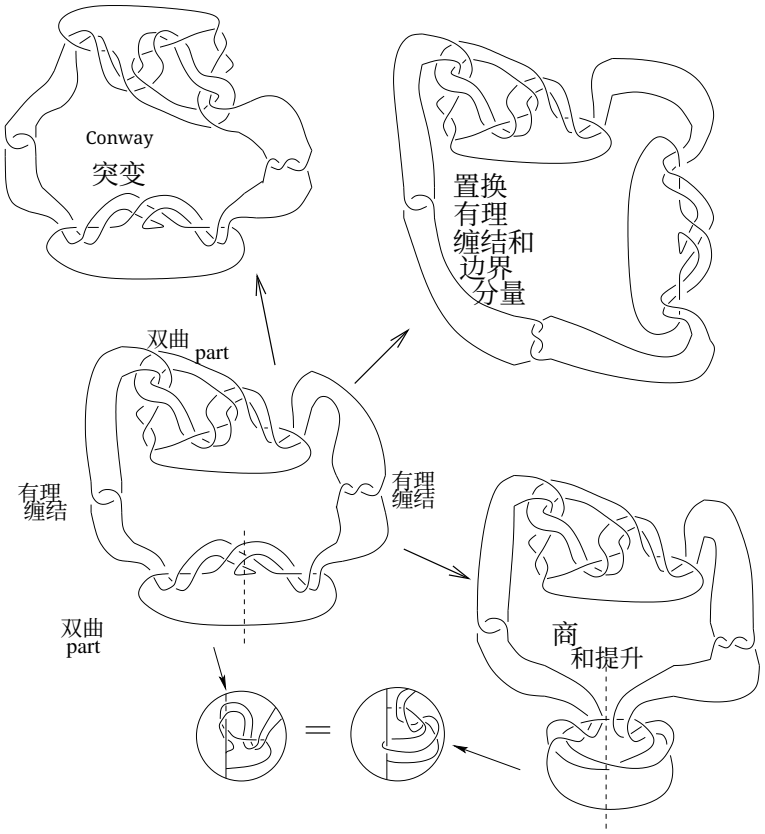


图8：通过突变和 Nakanishi-Sakuma 的局部方法得到的双曲2-孪生结。

该纽结具有孪生结。值得考虑的一类特殊纽结是隧道数为1的纽结。这类纽结的外部都允许进行亏格2的Heegaard分解。由于亏格2的曲面都是超椭圆的，因此它们全都是强可反转的。我们有如下 [JP]。

定理7 (Jang-P)。 设 K 是一个隧道数为1 的纽结。如果 K 满足以下条件之一，则它有一个2-孪生结：

- K 的桥指数为 ≥ 5。
- K 的桥指数为4，且 K 是一个$(1,\ 1)$纽结[7] （或者 $M(K,\ 2)$ 的 *Heegaard*亏格等于2）。

5 刚性结果

尽管二重分支覆盖似乎过于灵活，不足以成为纽结的合理不变量，但有时它们足以确定纽结。

[7]一个(1,1)-*knot*是一个纽结，可以相对于三维球面的亏格1 Heegaard分解处于1-桥位置。环面纽结和2-桥结都是$(1,1)$-纽结的例子。

定理 8 (Hodgson-Rubinstein)。 设 K 是一个 2-桥纽结。那么， K 没有2-孪生结，也就是说， $M(K,2)$ 决定了 K。

这可由 Hodgson 和 Rubinstein 在 [HR] 中对透镜空间上的对合所作的分类得出。

对于环面纽结，对其循环分支覆盖的 Seifert 不变量进行细致的组合分析，可以得到以下结果。这些覆盖是 Brieskorn 流形，Neumann 已在其博士论文中对其进行了分类。

命题 2. 一个环面纽结不能是另一个环面纽结的孪生结。

推论 2. 设 K 是一个环面纽结，且 $n \geq 3$。那么 K 由 $M(K,n)$ 唯一确定。

这意味着，对于 $n=2$，环面纽结只能有 n-孪生结（它们是 Montesinos 结），而且这只有在它们不是 $T(2,2a+1)$ 型时才会发生。请注意，在少数特殊情况下，Montesinos 结不是双曲结，而是与该环面纽结重合，因此后者没有双生结。

我们已经看到，任意素结都由一族三个循环分支覆盖确定，前提是它们的次数均为奇素数。对于环面纽结，如上所述，这一要求或许可以放宽；对于双曲结，则可以放宽对次数的要求，或通过对次数施加条件来缩小这一族的规模。事实上，我们有以下结果。

定理 9 (P., Zimmermann)**.** 设 $F \subset \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$，且 K 是双曲纽结。若满足以下条件之一，则族 $(M(K,n))_{n\in F}$ 可以确定 K。

1. F 的基数为 3 *[P3]*。
2. $F=\{n,m\}$，并且 ***(a)*** n、$m \geq 3$ 与 *[Z2]* 互不互素；***(b)*** $n > m = 2$ 与
   - K 是 ***Montesinos*** 结， *[P2]* 或
   - $M(K,2)$ 是双曲的，且 n 为偶数 *[Z2]* 或
   - K 有一个唯一的 ***Seifert*** 曲面，例如 K 是纤维化的 *[P4]*。
3. $F=\{n\}$、 $n \geq 3$和 K 是交替的 *[P6]*。

对于每一对整数 $n > m$，都可以构造出非等价双曲纽结 K 和 K'，它们分别是 n-孪生结和 m-孪生结，只要满足以下条件之一；因此，该结果是最优的：

1. $m \geq 3$、 m 和 n 是互素的 [Z1];
2. $m=2$ [P2, P4]。

考虑到构造 n-孪生结对的方法，可以看出，要得到分别为 n-孪生结和 m-孪生结的纽结对，其中n 和 m是两个互素整数，可以从一个三分量（双曲）链环出发：其所有分量都是平凡的，任意二分量子链环都是霍普夫链环，而且三个分量可以循环置换，但任意两个都不能互换。这些纽结是该链环的第三个分量在其余两个分量的 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 阶和 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 阶分支覆盖下的提升。

6 一种不同的视角及其应用

我们已经看到，一个流形可以是任意多个 n-孪生结的 n重循环分支覆盖。现在或许会有人问：对于某个流形 M，可能的次数 n 是否存在一个统一上界，使得该流形不是与 S^3 同胚的，并且是三维球面中某个纽结的 n重分支覆盖？一般而言，这个问题的答案是否定的；不过，可以通过对流形的几何或次数 [BFM]施加条件来给出上界。

定理 10 (Boileau-Franchi-Mecchia-P.-Zimmermann)。• 双曲流形至多是某个纽结在九个不同次数下的分支覆盖。

- 一个与 S^3 不同胚的流形，至多是某个纽结在六个奇素数次数下的分支覆盖。

推论 3。双曲流形至多是十五个不等价纽结的分支覆盖。

这一结果的证明依赖于有限单群的分类。

6.1 两种刻画

上述结果可以重新表述为对三维球面的一个刻画。

推论 4。以下条件等价：

- M 是三维球面；
- M 是某个纽结在 S^3 中的循环分支覆盖，且对应的次数至少有七个奇素数；
- M 存在一个由保定向微分同胚构成的有限群，其中至少包含十六个共轭类的元素，其不动点集连通，且轨道空间与 S^3同胚。

类似地，可以证明，一个整数同调球是 S^3，当且仅当它是某个纽结在 S^3 中的循环分支覆盖，且对应的次数至少有四个奇素数 [BPZ]。在这种情况下，这一结果是最佳可能的：具有三个例外纤维、阶分别为 $p_1 > p_2 > p_3 \geq 3$的 Brieskorn 球面（这三个阶均为素数），是 p_i重循环分支覆盖，其分支集为 $T(p_j,\ p_k)$-环面纽结，其中 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$。至于前述一般情形中六这一界是否最佳，仍是一个悬而未决的问题。

正如我们所见，有时，纽结存在一个 n-孪生结，会导出一个具有平凡商的 n-周期。由此我们还得到如下结果 [BP]；当这些周期彼此交换时，其证明是初等的。

定理 11 (Boileau-P.)。一个纽结是平凡的，当且仅当它有三个具有平凡商的周期，且它们的阶两两不同 > 2。

致谢

作者感谢 M. Kegel 和 M. Silvero 邀请其作报告并进行周密组织，也感谢研讨会的所有参与者为营造富有启发性的研究环境和友好的氛围所作的贡献。

参考文献

[BFM] M. Boileau, C. Franchi, M. Mecchia, L. Paoluzzi, B. Zimmermann, *Finite group actions and cyclic branched covers of knots in* ^{3}, **11**，2018 283 308 S《拓扑学杂志》（），-。[BLP] M. Boileau, B. Leeb 和 J. Porti, *Geometrization of* 3*-dimensional orbifolds*, 《数学年刊》162, （2005年）, 195-290。[BP] M. Boileau 和 L. Paoluzzi, *On cyclic branched coverings of prime knots*, 《拓扑学杂志》1, （2008年）, 557-583。[BPZ] M. Boileau, L. Paoluzzi, B. Zimmermann, *A characterisation of* S^3 *among homology spheres* **14**, , 《齐尚纪念文集》。《几何与拓扑专著》。《几何与拓扑出版物》, 考文垂, （2008年）, 83-103。[G] J. E. Greene, *Lattices, graphs, and Conway mutation*, 《数学发明》192, （2013年）, 717-750。[HLM] H. M. Hilden, M. T. Lozano, J. M. Montesinos, *On knots that are universal*, 《拓扑学》24, （1985年）, 499-504。[HR] C. Hodgson, J. H. Rubinstein, *Involutions and isotopies of lens spaces*, 载于：《纽结理论与流形》（温哥华，1983年）。D. Rolfsen 编。《数学讲义》1144, 施普林格出版社, 柏林, （1985年）, 60-96。[JP] Y. Jang, L. Paoluzzi, *Cyclic branched covers of tunnel number one knots*, 《专献几何》211, （2021年）, 129-143。[Ka] A. Kawauchi, *Topological imitations and Reni-Mecchia-Zimmermann's conjecture*, 《庆北数学杂志》46, （2006年）, 1-9。[Ko] S. Kojima, *Determining knots by branched covers*, 载于：《低维拓扑与克莱因群》（华威和达勒姆，1984年）。D. E. A. Epstein 编。伦敦数学学会《数学讲义》112，剑桥大学出版社，剑桥，（1986年），193-207。[MR] M. Mecchia, M. Reni, *Hyperbolic* 2*-fold branched coverings of links and their quotients* 2002 429 447 , 《太平洋数学杂志》202, （）, -。[M] J. M. Montesinos, *Variedades de Seifert que son recubridores ciclicos ramificados de dos hojas* **18**, 1973 1 32 , 《墨西哥数学会通报》（），-。[MW] J. M. Montesinos, W. Whitten, *Construction of two-fold branched covering spaces*, 《太平洋数学杂志》125, （1986年）, 415-446。[MB] J. Morgan, H. Bass, *The Smith conjecture*, 学术出版社, 纽约, 1984年。[N] Y. Nakanishi, *Primeness of links*, 《神户大学数学研讨会札记》9, （1981年）, 415-440。[P1] L. Paoluzzi, *On hyperbolic type involutions*, 《的里雅斯特大学数学研究所汇刊》32，增刊1, （2001年）, 221-256。[P2] L. Paoluzzi, *Non-equivalent hyperbolic knots*, Topology Appl. 124, （2002年）, 85-101。[P3] L. Paoluzzi, *Three cyclic branched covers suffice to determine hyperbolic knots*, 《纽结理论及其应用》14, （2005年）, 641-655。[P4] L. Paoluzzi, *Conway irreducible hyperbolic knots with two common covers*, 《瑞士数学评论》80, （2005年）, 643–653。[P5] L. Paoluzzi, *Hyperbolic knots and cyclic branched covers*, 《数学出版物》49, （2005年）, 257-284。[P6] L. Paoluzzi, *Cyclic branched covers of alternating knots*, 《亨利·勒贝格年刊》4, （2021年）, 811-830。[Re] M. Reni, *On* π*-hyperbolic knots with the same* 2*-fold branched coverings*, Math. Ann. 316, （2000年）, 681-697。[RZ] M. Reni, B. Zimmermann, *Isometry groups of hyperbolic* 3*-manifolds which are cyclic branched coverings* **74**, 1999 23 35 , 《专献几何》（），-。[Ro] D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish出版社, 伯克利, 1976年。[S] M. Sakuma, *Periods of composite links*, 《神户大学数学研讨会札记》9, （1981年）, 445-452。

[V1] O. J. Viro, *Links, two-sheeted branching coverings and braids*, Mat. Sb. **87**, (1972), 216-228.[V2] O. Ja. Viro *Non-projecting isotopies and knots with homeomorphic coverings*, Zap. Nauchn. Semin. LOMI **66**, (1976年), 133-147. 英译刊于 J. Soviet Math. **12**, (1979), 86-96.[Z1] B. Zimmermann, *On hyperbolic knots with the same m-fold and n-fold cyclic branched coverings.* **79**, 1997 143 157 Topology Appl. ( ), - .[Z2] B. Zimmermann, *On hyperbolic knots with homeomorphic cyclic branched coverings.* **311**, 1998 665 673 Math. Ann. ( ), - .

Aix-Marseille Univ, CNRS, I2M UMR 7373, Marseille, France
luisa.paoluzzi@univ-amu.fr